

اعداد کفیبی :

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$
$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$

$$\frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

دارون ماتریسی :

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

از طرفی

$$ab = 1 \quad a = \frac{1}{b} \quad b = \frac{1}{a}$$

$$\text{اگر } AB = I \Rightarrow \bar{A}^{-1} = B \quad \perp \quad \bar{B}^{-1} = A$$

$$A\bar{A}^{-1} = \bar{A}^{-1}A = I \quad (\bar{A}^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = \det(A) = ad - bc$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1 \times 1) - (1 \times 1) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \lambda - \mu = \Delta \Rightarrow |A| = \Delta$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ -\frac{\mu}{\Delta} & \frac{\lambda}{\Delta} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0/\Delta & -1/\Delta \\ -\mu/\Delta & \lambda/\Delta \end{bmatrix}$$

ویژگی های وارون :

$$\text{اگر } k \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \\ (\mu A)^{-1} = \frac{1}{\mu} A^{-1} \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} B^{-1} \right)^{-1} = \frac{\beta}{\alpha} (B^{-1})^{-1} = \frac{\beta}{\alpha} B$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$$

برای بدست آوردن وارون ماتریس یک قطری و شبیه قطری داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

شبه قطری باشد :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ f & 0 \end{bmatrix}$$



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{f} \\ -r & 0 \end{bmatrix}$$

تذکرہ :

$$\underline{AB} + CA \neq A(B+C)$$

$$\underline{CA} + \underline{DA} = (C+D)A$$

$$\checkmark ABC + \checkmark AD \checkmark \checkmark = A(B+D) \checkmark \checkmark C$$

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

شرط آنکه A وارون پذیر باشد، آن است که $|A| \neq 0$

واردن پذیر یعنی باشد $\iff |A| = 0$ اگر



1

$a+b=c$

$y=kx+b$

$\pi=3,14$

$\sin a = \frac{a}{c}$

$2 \times 2 = 4$

2

3

4



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$$

1. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ و ماتریس B در تساوی

$$A^{-1} = \frac{1}{10-9} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = B$$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ صدق کند،
 $-3+2 = -1$

جمع درایه های سطر دوم ماتریس B کدام است؟

- 2 (3) 1 (2) -1 (1) ✓
 -2 (4)

2. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس A کدام است؟

$$A^{-1} = \frac{1}{0-ab} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{ab} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $\begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$
 (2) $\begin{bmatrix} 1/b & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$
 (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1/a \\ 1/b & 0 \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1/b \\ 1/a & 0 \end{bmatrix}$ ✓

$$B = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = B$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-8+9} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A+B=I$ آنگاه

مجموع درایه های ماتریس B^{-1} کدام است؟

مجموع درایه ها = -2



3 (3)

2 (2)

-2 (1) ✓
-3 (4)

4. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، نظری حاصل

$A+B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(A+B)^{-1} - B^{-1}$ کدام است؟

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
 (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 (4) ✓ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$(A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+1 & 1-0 \\ -1-0 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

5. اگر $B+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ ترین

~~$A^{-1} = \frac{1}{-3-4} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$~~

درایه ماتریس $A^{-1}BA + A^{-1}CA$ کدام است؟

(1) ✓ 46 (2) 35 (3) 25 (4) 41

$\bar{A}BA + \bar{A}CA = \bar{A}(B+C)A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & 44 \\ -25 & 35 \end{bmatrix}$

6. اگر B یک ماتریس وارون پذیر باشد و

$AB^{-1} + I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $BA + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مربع ماتریس

$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AB^{-1}BA = AA = A$ است؟

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(1)

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 5 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -1 \\ d & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل تست ۷

7. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 5 & b \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} c & -1 \\ d & 2 \end{bmatrix}$ باشد، c کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2c+a & -2+2a \\ 5c+b & -4+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2c+a = 1$ (1) ✓
 $5c+b = 0$ (2)
 $-2+2a = 0$ (3) $2a = 2$ $a = 1$
 $-4+2b = 1$ (4) $2b = 5$ $b = 2.5$
 $2c + 1 = 1 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$
 $5c + b = 0 \Rightarrow b = -5c = 0$ (Contradiction)

8. اگر ماتریس قطری باشد و $(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ باشد،

$$(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس A کدام است؟

$$((A+I)^{-1})^{-1} = A+I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 6 - 0 = 6$

9. اگر در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix}$ داشته باشیم $A^{-1} = A$ حاصل $a+b$ کدام است؟

$$A^{-1} = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a+6 = 0 \Rightarrow a = -3$
 $2b = -1 \Rightarrow b = -0.5$
 $a+b = -3.5$



-28 (3)

7 (2)

-7 (1) ✓
28 (4)

(حل ۱۰)

$$(A^{-1})^{-1} = A = \frac{1}{\begin{matrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

10. اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^2 کدام است؟

2 (1) ✓
-3 (4)

جمع درایه‌ها = $18 - 16 = 2$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

11. اگر $(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $2A^{-1}$ کدام است؟

از طرفین دارون می‌گیریم

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (2) ✓ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (4)

$$((I-A)^{-1})^{-1} = I-A = \frac{1}{-4+6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$I-A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$
~~$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$~~

12. اگر $(I+A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A(I+A)^{-1}$ کدام است؟

از طرفین دارون می‌گیریم

$$I+A = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$I+A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$|A| = -(a-1) - 2 = 0$
 $1-a-2=0 \quad -2-a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$ (حل 13)

13. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، $|A| = 0$

کدام ماتریس وارون پذیر است؟

$|C| = 6 + 3a$
 $6-6=0$ $C = \begin{bmatrix} 6 & -a \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) ✗

$|B| = 2-2=0$
 $B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (1) ✗

$|E| = 2a + 2 - 3$
 $E = \begin{bmatrix} a+1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (4) ✓

$|D| = 12 - 12 = 0$
 $D = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix}$ (3)

14. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2 \\ a+1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد،

کمترین مقدار دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- 5 (4) 14 (3) -1 (2) 1 (1)



15. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به

- ازای چند مقدار a ماتریس AB وارون پذیر است؟
 (1) یک مقدار (2) دو مقدار (3) هیچ مقدار (4) بیشمار مقدار

16. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ y & z-1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند به

طوری

که $AB = \bar{O}$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

- (1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) چنین چیزی ممکن نیست.

17. اگر ماتریس های $A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ در

تساوی $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + BA$ صدق کنند، $a+b$ کدام است؟

- (1) صفر (2) 1 (3) -1 (4) 2



18. اگر از تساوی $A \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & x \end{bmatrix} = B \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ تساوی

ماتریس A و B نتیجه شود، کدام گزینه درست است؟

- (1) $x \neq 6$
- (2) $x = 6$
- (3) $x \neq 3$
- (4) $x = 3$

19. اگر $A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$ بوده و از تساوی $AC = AB$

بتوان به تساوی

$B = C$ رسید، مقداری a کدام است؟

- (1) $a = \pm 2$
- (2) $a = \pm 1$
- (3) $a \neq \pm 2$
- (4) $a \neq \pm 1$

20. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، از رابطه $AX = 2I$ ماتریس

X کدام است؟

- (1) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
- (2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
- (3) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
- (4) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$



21. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ از رابطه ماتریسی $AX = A - 2I$

ماتریس X کدام است؟

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

22. اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون پذیر باشند، به طوری که

$BX + A = I$ باشد، ماتریس X کدام است؟

(1) $B^{-1}(I - A)$ (2) $B(I - A)^{-1}$

(3) $B^{-1}(I + A)$ (4) $B(I + A)^{-1}$

23. اگر $(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X از رابطه

$AX = A + X$ کدام است؟



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$