



# کارنامه خرد

## جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

نکات حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع ضرایب صفر باشد ( $a + b + c = 0$ )، یکی از ریشه‌ها عدد ۱ و دیگری  $\frac{c}{a}$  است.

۲- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ ،  $(a + c = b)$ ، یکی از ریشه‌ها عدد ۱- و دیگری  $-\frac{c}{a}$  است.

مثال: معادلات درجه‌ی دوم زیر را حل کنید.

$$(x-5)(x-2) = 0 \quad S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$S = 7, \quad P = 10$$

$$2, 5$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$S = 3, \quad P = -10$$

$$5, -2$$

$$S = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{a} = \frac{\alpha + \beta}{a}$$

$$x^2 - 22x + 96 = 0$$

$$\div 2 \downarrow \quad \downarrow \div 4 \quad P = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{a} = \frac{\alpha\beta}{a^2}$$

$$x^2 - 11x + 48 = 0$$

$$S = 11, \quad P = 48$$

$$\begin{aligned} 3 \times 4 &= 12 \\ 8 \times 6 &= 48 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \quad \div 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$S = 1, \quad P = -6$$

$$\begin{aligned} +3 \\ -2 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$S = 3, \quad P = 2$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}$$

$$4x^2 + 2x - 20 = 0 \quad \div 2$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$x^2 + x - 5 = 0$$

$$S = -1, \quad P = -5$$

$$\begin{aligned} -5 \\ +5 \end{aligned}$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$S = -7, \quad P = 10$$

$$-5, -2$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$S = -3, \quad P = -10$$

$$-5, 2$$

$$x^2 - 12x - 189 = 0$$

$$\div 3 \downarrow \quad \downarrow \div 9 \quad S = 12, \quad P = -189$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$S = 4, \quad P = -21$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - 6 = 0 \quad \times 4$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$S = 10, \quad P = -24$$

$$\begin{aligned} 7 \times 3 &= 21 \\ -3 \times 3 &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +12 \\ -2 \end{aligned}$$

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$S = -5, \quad P = -24$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \times 2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$S = 1, \quad P = -6$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \\ +3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \\ +2 \end{aligned}$$

تذکره ۱: در هر معادله‌ای با هر درجه‌ای اگر مجموع ضرایب صفر شود، یکی از ریشه‌ها عدد ۱ می‌باشد و برای یافتن ریشه‌های دیگر عبارت را بر  $x - 1$  تقسیم کرده و پس از تجزیه‌ی خارج قسمت، ریشه‌های دیگر را می‌یابیم.

تذکره ۲: در هر معادله‌ای با هر درجه‌ای اگر مجموع ضرایب جملات با درجه‌ی زوج (توان زوج) مساوی مجموع ضرایب جملات با درجه‌ی فرد (توان فرد) شود، یکی از ریشه‌ها  $-1$  می‌باشد و برای یافتن ریشه‌های دیگر عبارت را بر  $x + 1$  تقسیم کرده و پس از تجزیه‌ی خارج قسمت، ریشه‌های دیگر را می‌یابیم.

$$1 + (-10) = -9 = (-1) + (-8)$$

مثال: مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$  را بیابید.

$$x = -1$$

$$(x - (-1)) = 0 \rightarrow (x + 1)$$

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 8) = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 4)(x + 2) = 0$$

$x = -1, x = 4, x = -2$   
a b c

$$a^2 - b^2 + 3c = ? \quad (1) \times (-2) = -2x$$

۳- شرط لازم و کافی برای آن که معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه باشد، این است که  $\frac{c}{a} < 0$  و

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + (+) > 0 \quad \Delta > 0 \text{ نمی‌باشد.}$$

۴- شرط لازم و کافی برای آن که دو معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  و  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  دارای

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$



ریشه‌های مشترک باشند، آن است که:

۵- اگر دو معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، برای یافتن ریشه‌ی مشترک کافی است به‌صورت دستگاه، جملات درجه‌ی دوم را حذف کرده و معادله‌ی خطی درجه‌ی اول باقی‌مانده را حل کنیم.

مثال: اگر معادلات  $mx^2 + 4x - 6 = 0$  و  $4mx^2 - 7x - 3 = 0$  دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، مقدار  $m$  را بیابید.

$$\begin{cases} 4mx^2 - 7x - 3 = 0 \\ 4mx^2 + 16x - 24 = 0 \end{cases}$$

$$m = \dots \checkmark$$

$$\begin{aligned} -23x + 21 &= 0 \\ 21 &= 23x \\ x &= \frac{21}{23} \end{aligned}$$

مثال: مقدار عبارت  $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$  به ازای ریشه مثبت معادله  $x^2 + x = 1$  کدام است؟

$x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

(۱)  $\sqrt{5}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{6}$

$$\frac{3(2x+1)^3}{((2x+1)^2)^2} = \frac{3}{2x+1} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

مثال: مقدار عبارت  $\frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2 - 24x + 18}$  به ازای ریشه مثبت معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  کدام است؟

$x^2 - 3x + 1 = 0$

(ریاضی خارج ۱۴۰۴)

(۱)  $\sqrt{5}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{1}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\frac{(2x-3)^3}{(2(2x-3))^2} = \frac{2x-3}{2} = \frac{3+\sqrt{5}-3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1) = 5$

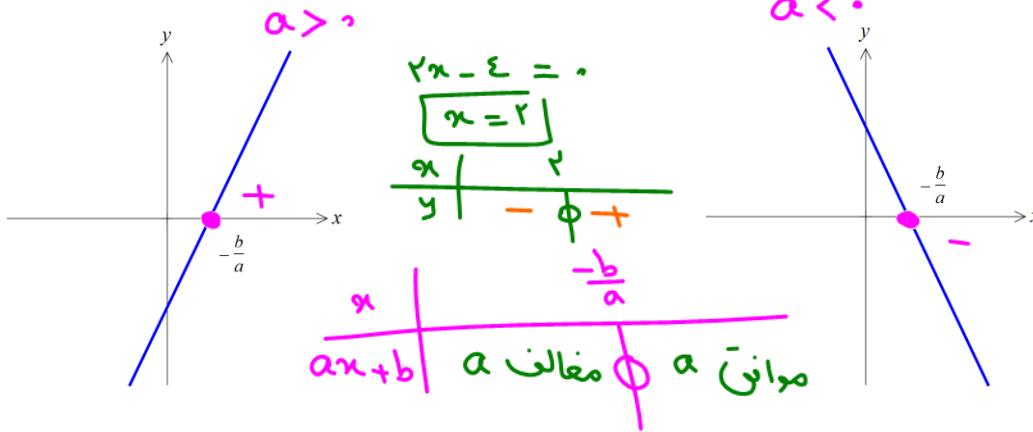
$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

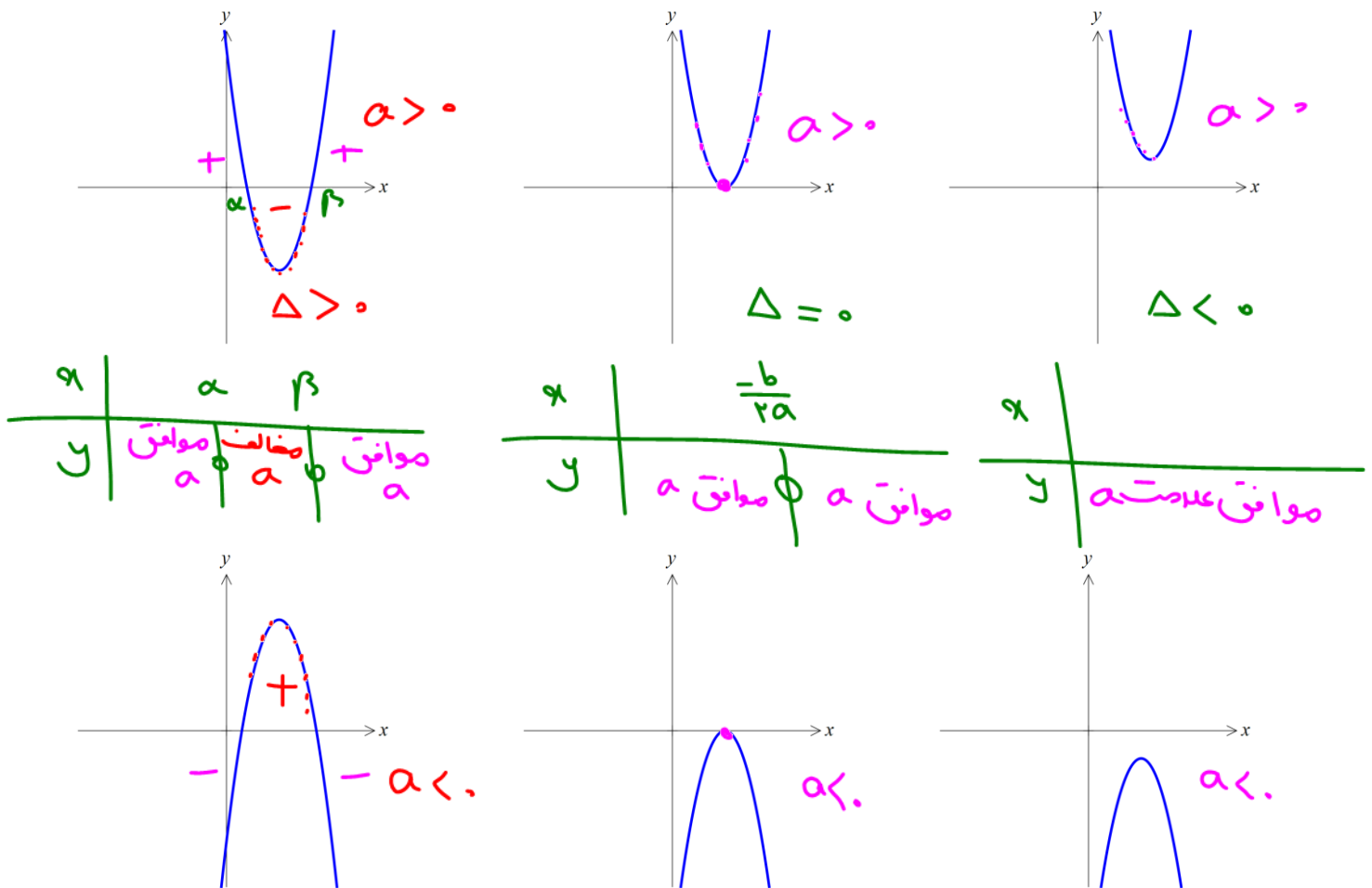
## معادلات و نامعادلات

تعیین علامت

تعیین علامت تابع درجهی اول



تعیین علامت تابع درجهی دوم



نکته: توابع به فرم  $y = |f(x)|$  همواره به ازای ریشه‌های تابع  $f(x) = 0$  برابر با صفر بوده و به ازای بقیه‌ی مقادیر اعداد حقیقی، مثبت هستند.

مثال: عبارت  $p(x) = |x^2 - 3x + 2|$  را تعیین علامت کنید.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$a + b + c = 0$$

$$x = 1, x = \frac{c}{a} = 2$$

| $x$    | 1 | 2 |
|--------|---|---|
| $p(x)$ | + | + |

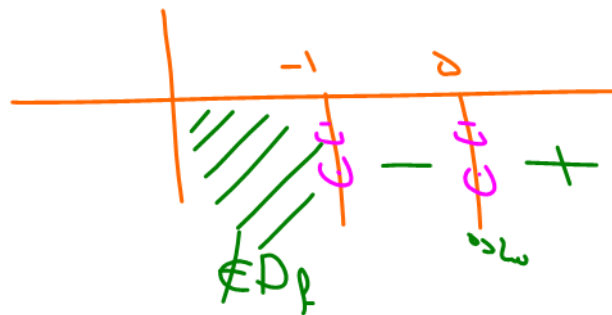
تعیین علامت عبارات شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج

در عبارات حاوی رادیکال فرجه‌ی زوج، ابتدا باید دامنه‌ی عبارت رادیکالی را تعیین کرده و به ازای جمیع مقادیری که عضو دامنه‌ی تعریف هستند، کل عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

مثال: عبارت  $p(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 4x - 5}$  را تعیین علامت کنید.

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$p(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-5)(x+1)}$$

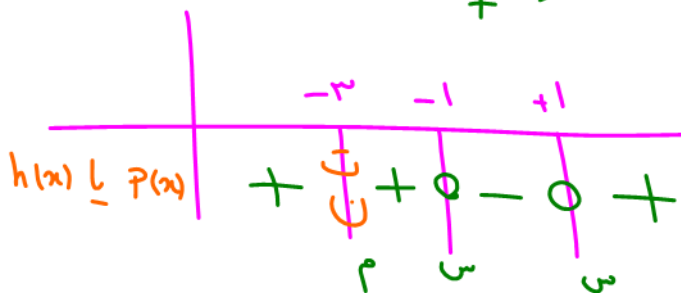


تعیین علامت عبارات شامل رادیکال فرجه‌ی فرد

رادیکال فرجه‌ی فرد، هیچ‌گونه تأثیری روی تعیین علامت ندارد.

$$h(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2 - 1}$$

مثال: عبارت  $p(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 6x + 9}$  را تعیین علامت کنید.

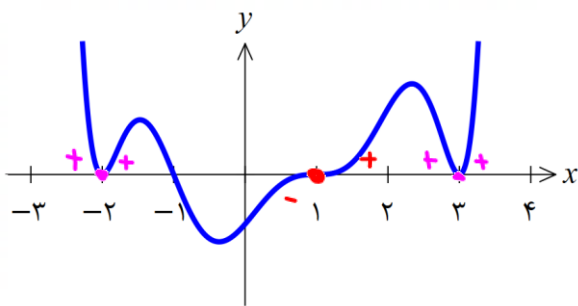


سادۀ :  $(x-2)^3$  -  $(x^2-5x+6)$  -  $(x^2-1)$

جدول تعیین علامت

ریشه‌های ساده : ریشه‌ای که در آن مقدار عبارت تغییر علامت دهد، ریشه ساده می‌نامند. ریشه‌های عبارات درجه‌ی یک به فرم کلی  $ax + b$  و یا تمامی عبارات درجه‌ی یک که به توان فرد  $(ax + b)^{2n-1}$  رسیده باشد، همچنین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم در حالتی که دلتا مثبت باشد، جزو ریشه‌های ساده محسوب می‌شوند.

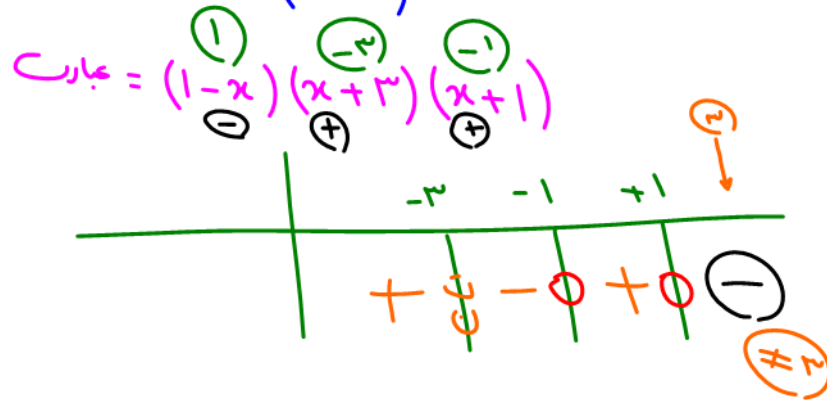
ریشه‌های مضاعف : ریشه‌ای که در آن مقدار عبارت تغییر علامت ندهد، ریشه مضاعف می‌نامند. ریشه تمام عبارات با توان زوج به فرم کلی  $(ax + b)^{2n}$  و یا عبارات قدرمطلق به فرم  $|f(x)|$  جزو ریشه‌های مضاعف محسوب می‌شوند.



$x = -1$  (غیر مکرر) ساده  
 $x = -2$  (مکرر زوج) مضاعف  
 $x = 1$  (مکرر فرد) مضاعف  
 $x = 2$  (مکرر زوج) مضاعف  
 $x = 3$  (مکرر زوج) مضاعف

- ۱- ابتدا عبارات صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. سپس عبارات یکسان را ساده (از صورت و مخرج) و ترکیب (در صورت کنار هم یا در مخرج کنار هم) می‌کنیم.
- ۲- عبارات‌های همواره مثبت نظیر عبارات توان زوج، فرجه زوج، قدرمطلق، سهمی در حالی که  $(a > 0, \Delta < 0)$  و ... را حذف می‌کنیم.
- ۳- توان فرد و فرجه فرد عبارات را در نظر نمی‌گیریم. (فقط توان را در نظر نمی‌گیریم و عبارتی که به توان رسیده است را نگه می‌داریم).
- ۴- تمام عبارات موجود در مخرج کسر را به صورت کسر منتقل می‌کنیم.
- ۵- ریشه تمام عبارات را در جدول تعیین علامت در ردیف اول نوشته و در ردیف دوم، علامت خانه سمت راست  $(+\infty)$  را تعیین کرده که با تعیین علامت عبارات با بزرگ‌ترین توان در صورت و مخرج تعیین می‌گردد. (می‌توانیم به جای علامت خانه سمت راست، علامت هر خانه دیگری را با اختصاص یک عدد از محدوده مورد نظر بیابیم). علامت خانه‌های دیگر را بصورت یکی در میان منفی و مثبت در نظر می‌گیریم.
- ۶- ریشه‌های مکرر زوج صورت را در صورتی که مساوی در نامعادله در نظر گرفته شده باشد، اعلام کرده و در صورتی که نامعادله شامل مساوی نباشد، اعلام نمی‌کنیم.
- ۷- ریشه‌های مکرر زوج یا حذف شده مخرج را در هر صورت حذف می‌کنیم.

هواره  $a > 0$   
 $\Delta = -3 < 0$   
 $P(x) = \frac{(1-x)(x^2+x+1)(x+1)}{(x+3)^2}$



مثال: عبارت  $P(x) = \frac{(1-x)(1+x+x^2)(x-3)(x+1)}{(x^2-9)(3+x)^2}$

$(1-x)(1+x+x^2) \quad (x-3)(x+1)$   
 $(x^2-9) \quad (3+x)^2$   
 $(x-3)(x+3) \quad (x+3)^2$   
 $(x+3)^3$

$P(x) \geq 0 \Rightarrow (-\infty, -3) \cup [-1, 1]$   
 $P(x) \leq 0 \Rightarrow (-3, -1] \cup [1, 3) \cup (3, +\infty)$   
 $P(x) < 0 \rightarrow (-3, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$   
 $P(x) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

مثال: عبارت  $P(x) = \frac{(x-4)(x-1)}{(x^2+9)(x^2-6x+8)}$  در چه بازه‌ای از اعداد حقیقی نامثبت است؟

$P(x) = \frac{(x-4)(x-1)}{(x^2+9)(x-4)(x-2)} \leq 0$

هواره  $(+)$

$x \in [1, 2)$

عبارت =  $(x-1)(x-2)$



مثال: نمودار تابع  $f(x) = x^3 - 9x^2 - x + 9$  برای  $x > 0$  در بازه‌ی  $(a, b)$  زیر محور  $x$  ها قرار می‌گیرد. بزرگ‌ترین مقدار  $b - a$  را بیابید.

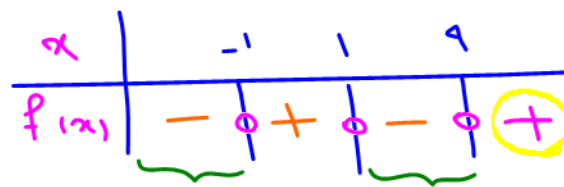
$f(x) < 0$

$x^3 - 9x^2 - x + 9 < 0$

$x^2(x-9) - 1(x-9) < 0$

$(x-9)(x^2-1) < 0$

$(x-9)(x-1)(x+1) < 0$



$x \in (-\infty, -1) \cup (1, 9) \xrightarrow{x > 0}$

$x \in (1, 9) = (a, b) \rightarrow b - a = 8$

### خواص نامساوی‌ها برای حل نامعادلات

مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را با  $\mathbb{R}^+$  و مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی را با  $\mathbb{R}^-$  نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

۱- قاعده‌ی تثلیث  $\forall a, b \in \mathbb{R}; a < b \vee a = b \vee a > b$

۲- قاعده‌ی تعدی  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a < b, b < c \Rightarrow a < c$

۳- می‌توان به دوطرف نامساوی عددی را اضافه یا کم نمود.

$$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$$

۴- می‌توان عدد مثبتی را به طرفین یک نامساوی ضرب نمود و جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

۵- می‌توان طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب یا بر آن تقسیم نمود و جهت نامساوی عوض

$$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ می‌شود.}$$

۶- طرفین دو نامساوی را می‌توان نظیر به نظیر جمع کرد.

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

۷- طرفین دو نامساوی مثبت را می‌توان نظیر به نظیر در هم ضرب کرد که جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow 0 < ac < bd$$

۸- طرفین دو نامساوی منفی را می‌توان نظیر به نظیر در هم ضرب کرد که جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\begin{cases} a < b < 0 \\ c < d < 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd > 0$$

۹- اگر طرفین یک نامساوی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشد، حین معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ a < b < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۱۰- اگر طرفین یک نامساوی را که یکی مثبت و دیگری منفی باشد، معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

۱۱- طرفین نامساوی را می توان به توان عددی فرد رساند و جهت نامساوی عوض نمی شود.

$$a < b \Rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$$

۱۲- اگر طرفین یک نامساوی مثبت باشند، می توان طرفین را به توان عددی زوج رساند.

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^{2n} < b^{2n}$$

۱۳- اگر طرفین یک نامساوی منفی باشند، می توان طرفین را به توان عددی زوج رساند و جهت نامساوی عوض می شود.

$$a < b < 0 \Rightarrow a^{2n} > b^{2n} > 0$$

۱۴- اگر طرفین یک نامساوی مثبت باشند، می توان از طرفین ریشه ی زوج گرفت و جهت نامساوی عوض نمی شود.

$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

۱۵- از طرفین یک نامساوی می توان ریشه ی مرتبه ی فرد گرفت.

$$a < b \Rightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$$

۱۶- اگر از علامت طرفین نامساوی اطلاع دقیقی نداشته باشیم، حین ریشه ی زوج گرفتن، طرفین قدرمطلق می گیرند.

$$a^{2n} < b^{2n} \Leftrightarrow |a| < |b|$$

۱۷- اگر عددی بزرگ تر از یک را به توان برسانیم بزرگ شده و اگر از آن ریشه بگیریم، کوچک می شود.

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a < a^2 < a^3 < \dots \\ a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots \end{cases}$$

۱۸- اگر عددی بین صفر و یک را به توان برسانیم، کوچک شده و اگر از آن ریشه بگیریم، بزرگ می شود.

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 > \dots \\ a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots \end{cases}$$

۱۹- در جذرگیری از طرفین یک نامساوی داریم:

$$\begin{cases} x^2 \leq a^2 \xrightarrow{a>0} |x| \leq |a| \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ x^2 \geq a^2 \xrightarrow{a>0} |x| \geq |a| \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a \end{cases}$$

۲۰- اگر عددی را با معکوس آن جمع کنیم، حاصل یا از عدد ۲ بیشتر است و یا از عدد ۲- کوچک تر.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2 \vee \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

مثال: اگر  $a > b$  و  $c > d$  باشد، کدام رابطه همواره صحیح است؟

$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  (۴)     
  $ac > bd$  (۳)     
  $a - d > b - c$  (۲✓)     
  $a - c > b - d$  (۱)

$c > d \xrightarrow{(-1)} \boxed{-c < -d}$

$\begin{cases} a > b \\ -d > -c \end{cases} \xrightarrow{(+)} a - d > b - c$

مثال: اگر  $y - x \geq 3$  و  $z - y \geq 4$  و  $x + z \leq 7$  باشد، محدوده‌ی قابل قبول متغیر  $x$  را بیابید.

$\begin{cases} y - x \geq 3 \\ z - y \geq 4 \\ x + z \leq 7 \end{cases} \xrightarrow{(+)} -x - z \geq -7$

$-x - z \geq -7$

$x(-1) \quad 2x \leq 0 \xrightarrow{\div 2} \boxed{x \leq 0}$

$x \in (-\infty, 0]$

مثال: اگر  $\frac{1}{a} < \frac{-1}{b}$  باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$ab < 1$  (۴)     
  $ab > 1$  (۳)     
  $a < b$  (۲)     
  $a > b$  (۱)

$\sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{b}} \xrightarrow{(\quad)^2} a < \frac{1}{b} \xrightarrow{\times b} \boxed{ab < 1}$

گزینه ۱

$\sqrt[n]{a^n} = a$

حل نامعادلات

برای حل نامعادلات، ابتدا کل عبارات را به یک سمت علامت نامساوی منتقل کرده و پس از تجزیه عبارت انتقال داده شده و تعیین ریشه‌های عبارت مورد نظر، با ترسیم جدول تعیین علامت به جستجوی محدوده مورد نظر نامعادله تشکیل شده می‌پردازیم.

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص نمایید.

$x(2^x) + 2^{x+3} > 2^{x+2}$

$2^x \cdot 2^3 > 2^x \cdot 2^2$



$x(2^x) + 1(2^x) > 4(2^x) \xrightarrow{\div 2^x} x + 1 > 4 \rightarrow \boxed{x > -4}$

$\frac{3}{4}(x+3) + \frac{x}{3} > \frac{1}{2}(2x-5) + \frac{x}{4} \xrightarrow{\times 12}$

یادآوری (دم)

$$\begin{cases} |x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| > a \rightarrow x \leq -a \text{ (یا) } x > a \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را بیابید.

$$\left(x^2 - 2\right)^2 \leq 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x^2 - 2| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x^2 - 2 \leq 2$$



$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 \leq 4 &\rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \geq 0 &\rightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

مثال: مقدار تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$  در بازه‌ی  $(a, b)$  پایین خط  $y = \frac{3}{2}$  قرار می‌گیرد.

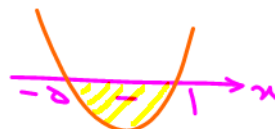
بیشترین مقدار  $b - a$  را بیابید.

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 < \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 4}$$

$$x^2 + 4x - 2 < 3 \rightarrow$$

$$x^2 + 4x - 5 < 0$$

متی  $S = -4, P = -5$   
 $-5, +1$



$$-5 < x < 1 \rightarrow x \in (-5, 1)$$

$$(a, b) \rightarrow b - a = 4$$

مثال: در چه بازه‌ای نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 4x$  بالای خطی به معادله‌ی  $y + 2x + 5 = 0$  و زیر

$$y = -2x - 5$$

خط به معادله‌ی  $y = 12$  قرار می‌گیرد.

$$\underbrace{-2x - 5 < x^2 + 4x}_{\text{I}} < 12 \quad \text{II}$$

$$\text{I} \cap \text{II} = \dots \checkmark$$

غیرمعادله  $\frac{x^2 - 13}{x - 2} < 4$

$$\frac{x^2 - 13}{x - 2} < 4 \rightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2} < 0$$

$$(x - 5)(x + 1)$$



$$x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بیابید.

$$\frac{x^2 - 13}{x^2 + 1} < 0 \xrightarrow{\times (x^2 + 1)}$$





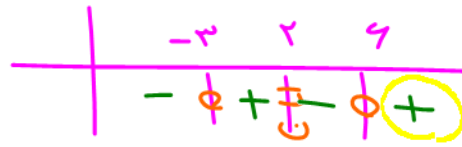
مثال: حدود  $x$  را طوری بیابید که نامعادله زیر برقرار باشد.

$$\frac{x+18}{x-2} \geq x$$

$$\frac{x+18}{x-2} - \frac{x}{1} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+3x+18}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{(x-6)(x+3)}{(x-2)} \leq 0$$



$$x \in (-\infty, -3] \cup (2, 6]$$

نامعادلاتی که با عددگذاری حل می‌شوند

(۱) نامعادلات گویا

(گزینه دو ۹۹)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $x^2 - 3x \leq 4 < 2x - 4$  کدام است؟

$[-1, 1)$  (۴) ✓

$[-1, 1) \cup \{4\}$  (۳) ✗

$[-1, 4)$  (۲) ✗

$[-1, 4]$  (۱) ✗

$x=4 \Rightarrow 4 < 4 \leq 4$  ✗

$x=2 \Rightarrow 0 < -2 \leq 4$  ✗

(تجربی فارغ ۹۸)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$  به صورت بازه، کدام است؟

$(-1, 2)$  (۴) ✗

$(-1, 2) \cup (2, 4)$  (۳) ✓

$(2, 4)$  (۲) ✗

$(-4, -2) \cup (1, 2)$  (۱) ✗

$x=0 \Rightarrow 4 > 0$  ✓

$x=3 \Rightarrow \frac{13}{4} > 3$  ✓

(تجربی ۹۶)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$  به کدام صورت است؟

$\frac{1}{2} < x < 3$  (۴)

$-\frac{1}{2} < x < 3$  (۳)

$x < 3$  (۲)

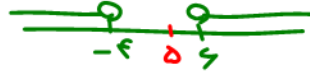
$x < \frac{1}{2}$  (۱)



مثال: مجموعه جواب نامعادله  $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ ، به کدام صورت است؟ (تقریبی ۹۸)

- (۱)  $\mathbb{R} - [-6, 4]$  ✓ (۲)  $\mathbb{R} - [-4, 6]$  ✗ (۳)  $x > 4$  ✗ (۴)  $x < -6$  ✗

$$x = 5 \Rightarrow 1 < \frac{7}{6} < 3$$



$$x = -7 \Rightarrow 1 < \frac{-17}{-6} = \left(\frac{17}{6}\right) < 3$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟ (تقریبی ۹۹)

- (۱)  $(0/6, 1/5)$  (۲)  $(0/8, 1/2)$  (۳)  $(1, 2)$  (۴)  $(0/8, 2)$



مثال: مجموعه جواب نامعادله  $-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3$ ، کدام است؟ (تقریبی خارج ۹۹)

- (۱)  $(0, +\infty)$  (۲)  $(4, +\infty)$  (۳)  $\mathbb{R} - [-4, 0]$  (۴)  $\mathbb{R} - [-4, -1]$

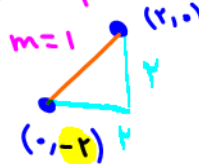


مثال: تابع خطی  $f$ ، نقاط برخورد تابع  $g(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1}$  با محورهای مختصات را به هم وصل می‌کند. در این صورت نمودار  $g(x)$  در کدام فاصله بالای نمودار  $f$  قرار می‌گیرد؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

می‌کند. در این صورت نمودار  $g(x)$  در کدام فاصله بالای نمودار  $f$  قرار می‌گیرد؟

- (۱)  $(1, 3)$  ✗ (۲)  $(3, 5)$  ✗ (۳)  $(-1, 1)$  ✗ (۴)  $(0, 2)$  ✓

$g(x)$ :  $x=0 \rightarrow y=-2$   
 $y=0 \rightarrow x=2$



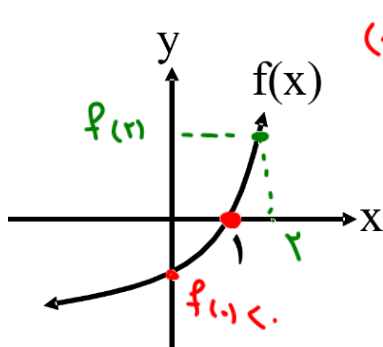
$y = mx + b$   
 $y = 2x - 2 = f(x)$



$$\frac{x-2}{x^2+x+1} > 2x-2$$

$x=0 \rightarrow -2 > -2$  ✗  
 $x=4 \rightarrow \frac{2}{11} > 6$  ✗  
 $x=2 \rightarrow 0 > 2$  ✗

مثال: اگر نمودار  $f(x)$  به صورت زیر باشد، جواب نامعادله  $\frac{f(x)}{x^2 - 2x + 1} > 0$  کدام است؟ (کج ۹۹)



$$(x-1)^2$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2} > 0$$

$$x=1 \notin D$$

$$x \neq 1 \quad (1) \quad \times$$

$$x < 1 \quad (2) \quad \times$$

$$x > 1 \quad (3) \quad \checkmark$$

$$x > 0 \quad (4) \quad \times$$



$$x=2 \rightarrow \frac{f(2)}{+} > 0$$

$$x=0 \rightarrow \frac{f(0)}{+} > 0 \quad \text{غلط}$$

(۲) نامعادلات قدرمطلق

(تقریبی خارج ۹۲)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $x^2 - 2x < |x - 2|$  به صورت کدام بازه است؟

$$(1, 2) \quad (4)$$

$$(0, 2) \quad (3)$$

$$(-1, 2) \quad (2)$$

$$(-1, 1) \quad (1)$$



(تقریبی خارج ۹۵)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$  به صورت کدام بازه است؟

$$(1, 2) \quad (4)$$

$$(-1, 2) \quad (3)$$

$$(-1, 1) \quad (2)$$

$$(-2, 1) \quad (1)$$



(تقریبی ۹۲ با تغییر)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$  به صورت کدام بازه‌ها است؟

$$\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad (2) \quad \times$$

$$\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad (1) \quad \checkmark$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad (4) \quad \times$$

$$\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \quad (3) \quad \times$$

$$x=0 \rightarrow 2 > 1$$

$$x=-2 \rightarrow \left| \frac{-4}{-3} \right| = \frac{4}{3} > 1 \quad \checkmark$$



مثال:  $x$  عضوی از کدام یک از مجموعه‌های زیر باشد تا نمودار تابع  $f(x) = x|x|$  بالاتر از نمودار تابع  $g(x) = x^3$  باشد؟  
(گزینه دو ۱۴۰۰)

(۲)  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

(۱)  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

(۴)  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

(۳)  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

$x|x| > x^3$



یادآوری نامساوی‌های قدرمطلق

$$\begin{cases} x^2 \leq a^2 & \xrightarrow{a>0} |x| \leq |a| \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ x^2 \geq a^2 & \xrightarrow{a>0} |x| \geq |a| \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a \end{cases}$$

نامعادلاتی که با عددگذاری حل نمی‌شوند

مثال: در بازه  $(a, b)$  عبارت  $15x^2 + 73x + 14$  منفی و عبارت  $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right|$  بزرگ‌تر از سه

(تقریبی دی ۱۴۰۱)

است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

$\frac{67}{15}$  (۴)

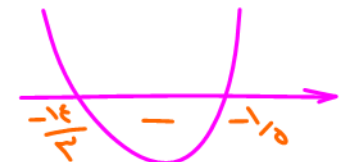
$\frac{4}{15}$  (۳)

$\frac{23}{3}$  (۲)

$\frac{5}{3}$  (۱) ✓

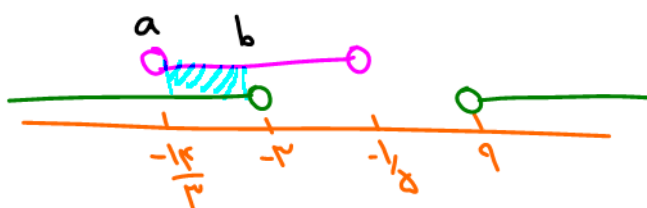
$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3$  و  $15x^2 + 73x + 14 < 0$

$\frac{x-1}{2} - 1 < -3$  (ب)  $\frac{x-1}{2} - 1 > 3$   $15x^2 + 73x + 14 < 0$   
 $S = -73, P = 14$

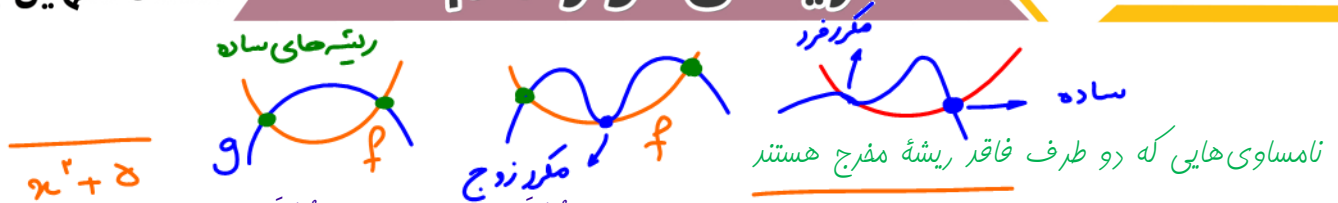


$x < -3$  (ب)  $x > 9$

$\frac{-14}{3} = \frac{-70}{15}$   $\frac{-3}{15} = \frac{-1}{5}$



$b - a = (-3) - (-14/3) = 5/3$



۱- ابتدا نامعادله را به معادله تبدیل کرده و ریشه‌های غیرمکرر (توان یک) و مکرر فرد (ریشه‌های ساده که تغییر علامت دارند) را به عنوان مرز جواب‌ها در نظر می‌گیریم.

۲- با استفاده از گزینه‌های مطرح شده در صورت سؤال و یا چک کردن با یک عدد، متوجه می‌شویم که بازه جواب، محدوده بین ریشه‌ها را شامل می‌شود یا اینکه بازه خارج دو ریشه به دست آمده است.

۳- ریشه‌های مکرر زوج در صورتی که علامت نامعادله شامل مساوی بود، بعنوان جواب اعلام می‌شوند و در غیراین صورت اعلام نمی‌شوند (اگر در بازه قرار دارد هم باید خارج کنیم).

مثال: اگر  $x^4 < x^2$  باشد،  $[x]$  چند مقدار متفاوت دارد؟ ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است.) (کج ۱۴۰۰)

(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

$$x^4 = x^2 \rightarrow x^4 - x^2 = 0 \rightarrow (x^2)(x^2 - 1) = 0 \rightarrow (x-0)^2(x-1)(x+1) = 0$$



در صورتی که  $x^4 > x^2$  باشد، چطور؟

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

در صورتی که  $x^4 \leq x^2$  باشد، چطور؟

$$(-1, 1) \cup \{0\} = (-1, 1)$$

در صورتی که  $x^4 \geq x^2$  باشد، چطور؟

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$$

مثال: نمودار تابع  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$  در بازه  $(a, b)$  پایین‌تر از خط به معادله  $y = 2$  است.

(ریاضی فارچ ۸۸)

بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)  $\infty$



مثال: در بازه  $(a, b)$  نمودار تابع  $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$  بالاتر از نمودار تابع  $y = 2x + |x|$

(تقریبی ۹۷)

است. طول نقطهٔ وسط این بازه کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-1/5$  (۳)  $-1$  (۴)  $-5/5$



مثال: مجموعه جواب نامعادله  $|x^2 + 2x + 7| < |x^2 - x - 2|$  به صورت بازه  $(-\infty, b)$  است.  $b$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $-2$  (۳)  $-3$  (۴)  $-4$



(تقریبی مجر ۱۴۰)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $x + |2x - 1| < 3$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $5$



تذکر: گاهی می‌توان با رسم نمودار توابع، ریشه‌ها را راحت‌تر حدس زد.

مثال: در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع با ضابطه  $y = |2x^2 - 4|$  در زیر خط  $y = 2x$  واقع است.

(تقریبی ۹۹)

بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال: در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع  $y = (x - 1)^2$  بالاتر از نمودار تابع  $y = 4x^4$  است. بیشترین مقدار

(تقریبی خارج ۹۹)

$b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{5}{2}$

مثال: در بازه  $(a, b)$ ، نمودار  $y = (x - 2)^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^4$  قرار دارد. مقدار  $b - a$  کدام

(تقریبی مورد ۱۴۰)

است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



مثال: اگر جواب نامعادله  $|x^2 - 8x| < x$  به صورت  $(a, b)$  باشد،  $a^2 + b^2$  کدام است؟ (کاج ۱۴۰۰)

- (۱) ۴۹ (۲) ۸۱ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۶



مثال: اگر نمودار تابع  $f(x) = -x(x+3) + 4$  در بازه  $[a, b]$  پایین‌تر از نمودار

$g(x) = x(2x+1) - 28$  نباشد، مقدار  $b^2(a+1)^2$  کدام است؟ (بنفش قلم‌پی)

- (۱)  $\frac{64}{9}$  (۲) ۶۴ (۳)  $\frac{29}{3}$  (۴)  $-\frac{32}{3}$



مثال: بازه  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع  $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$  پایین نمودار

تابع  $y = \frac{x}{|x|}$  قرار می‌گیرد. مقدار  $c$  کدام است؟ (تبریزی تیر ۱۴۰۳)

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{3}{8}$

دقت: ریشه مفرج توی بازه نیست

مثال: بازه  $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$  بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار  $y = -2x^2 - \frac{3}{2}x + c$  بالای نمودار

$y = \frac{x}{|x|}$  قرار می‌گیرد. مقدار  $c$  کدام است؟ (تجربی فارغ ۱۴۰۳)

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{6}$



مثال: جواب نامعادله  $x^3 + ax^2 + bx + c > 0$ ، مجموعه  $\{1\} - (-1, +\infty)$  است. مقدار  $b$  کدام است؟ (کنکور یوم مهر و ماه)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۳

مثال: اگر جدول تعیین علامت عبارت  $P(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$  به صورت زیر باشد،  $a + b$  کدام است؟ (نردبام خیلی سبز)

| x | -۲     | ۳      |
|---|--------|--------|
| P | +<br>• | -<br>• |

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۷ (۴) ۷

مثال: به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، مجموعه جواب نامعادله  $(8x + 2)(3x^2 + 2mx + m) > 0$  به صورت  $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$  است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $(x - 3)(x^2 + ax + b) \geq 0$  بازه  $[-3, +\infty)$  است. مقدار  $b$  کدام است؟  
(مدارس برتر ۱۴۰۰)

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) -۶ (۴) ۶



$$M < \frac{ax+b}{cx+d} < N$$

نکته (حالت خاص): تابع هموگرافیک در نامساوی دو طرفه

باز هم نامساوی را به مساوی تبدیل می‌کنیم و ناحیه‌ای را انتخاب می‌کنیم که شامل ریشه‌های مخرج نمی‌باشد.

تذکر: در مورد نامساوی‌های یک طرفه مجاز به استفاده از این نکته نیستیم.

مثال: اگر  $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$  باشد، مجموعه مقادیر  $\left[ \frac{x}{2} \right]$  چند عضو دارد؟ (تقریبی خارج ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع  $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای  $y = -4$  و پایین

$y = 0$  قرار دارد؟ (تقریبی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

نکته: اگر حداقل یکی از دو طرف دارای ریشه مخرج باشند، به کمک جدول تعیین علامت که قبلاً روش سریع آن بیان شد، عمل می‌کنیم.

تذکر ۱: اگر نامعادله شامل مساوی بود، ریشه‌های مکرر زوج صورت کسر، به عنوان جواب اعلام می‌شوند.

تذکر ۲: اگر نامعادله شامل مساوی نبود، ریشه‌های مکرر زوج صورت کسر، به عنوان جواب اعلام نمی‌شوند.

تذکر ۳: ریشه‌های مطرح شده مخرج در هر صورت حذف می‌شوند.

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2(4x-3)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4(x^2+2x+6)}{(x^2+3x-10)(x^2+6x+5)} \leq 0$  شامل چند عدد

صحیح در بازه  $(-6, 6)$  است؟

(ریاضیست ۱۴۰۰)

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

توجه: اگر  $< 0$  بود، بطور می شد؟

مثال: اگر  $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$  باشد، مجموعه مقادیر  $[3x]$  چند عضو دارد؟

(تبریزی ۱۴۰۰)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x+1}{x-1} > 2$  شامل چند عدد صحیح است؟

(مرآت ۱۴۰۰)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

مثال: چند عدد طبیعی در بازه جواب نامعادله  $\frac{x^2 + 2x}{x - 1} > 4x$  صدق می‌کند؟  
(مدارس برتر ۱۴۰۰)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



مثال: نمودار تابع  $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ ، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی  $y = 0$  و  $y = -2$  واقع می‌شود؟  
(ریاضی دی ۱۴۰۱)

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) صفر



مثال: جواب نامعادله  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} > \frac{1}{6}$  در مجموعه اعداد حقیقی منفی به صورت  $(a, b)$  است. مقدار  $b - a$  کدام است؟  
(فیلی سبزی)

(۱) ۱

(۲) ۵

(۳) ۲

(۴) ۳



مثال: فرض کنید مجموعه جواب نامعادله  $\frac{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{(2x - 3)} > 0$ ،

به ازای  $x > \frac{3}{2}$ ، بازه  $[2, 4]$  باشد. مقدار  $m$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

- (۱) ۲ - (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

مثال: اگر مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(x-1)(x-2)^2}{x^2+x-3} \leq 0$  به صورت

$(-\infty, a) \cup [1, b) \cup \{c\}$  باشد، حاصل  $abc$  کدام است؟ (قلم‌پی ۱۴۰۰)

- (۱) ۶ - (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۳ -

مثال: اگر مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(x+6)^2(x^3-4x^2+5x-2)}{x^2+3x-5} \geq 0$  به صورت

(تکمیلی خیلی سبز)  $(a, b) \cup [c, +\infty) \cup \{d\}$  باشد، حاصل  $a + b - \frac{d}{c}$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2+2x} \leq 0$  به صورت  $(a, b] - \{c\}$  است.

حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -۳

(۳) ۲

(۴) ۱



مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(x^3-6x^2+9x)(x-1)}{\sqrt{x}} \leq 0$  به شکل  $(a, b] \cup \{c\}$  است.

$a + b + c$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۱



(مدارس برتر ۱۴۰۱)

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2 + 8x}{2x^2 - 4} < 2$  به صورت  $(-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, +\infty)$

(IQ کج)

است. مقدار  $a + b + c + d$  کدام است؟

$2\sqrt{2}$  (۴)

$\frac{8}{3}$  (۳)

۲ (۲)

$\frac{4\sqrt{10}}{3}$  (۱)



مثال: اگر جواب نامعادله  $\frac{x+b}{2ax-3} > 0$  به صورت  $(-1, 5)$  باشد، حاصل  $ab$  کدام است؟ (قلم پی ۱۴۰۰)

$\frac{-15}{2}$  (۴)

$\frac{15}{2}$  (۳)

-۵ (۲)

$\frac{3}{10}$  (۱)



مثال: اگر جواب نامعادله  $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x-2} < 0$  به صورت  $(a, b) - \{c\}$  باشد، حاصل

$a + 2b - c$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: دامنه تابع  $f(x) = \log_4 \left( \frac{(x-a)^2 (x-b)}{x+1} \right)$  به صورت  $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$  است.  $a$  چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

(تکمیلی فیلی سبز)

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



مثال: عبارت  $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$  به ازای مقادیری از  $x$  که عضو مجموعه  $\{c\} - (a, b)$  باشند،

(موج آزمون نشر الگو)

منفی است. مقدار  $\frac{a+b}{c}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$



مثال: اگر جدول تعیین علامت عبارت  $P(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$  به صورت زیر باشد، مقدار  $\frac{a+b}{c}$

(قلم پی ۱۴۰۲)

کدام است؟

| x    | -1 | 2 |
|------|----|---|
| P(x) | -  | + |



- (۱)  $-\frac{3}{2}$

- (۲)  $\frac{3}{2}$

- (۳) -۳

- (۴) ۳

مثال: مجموعه جواب های نامعادله  $\frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 4)^2}{|x-1|} < 0$  بازه  $(a, b)$  است.

(موج آزمون نشر الگو)

مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



مثال: مجموعه جواب نامعادله  $(2a + 3)x^2 + (4b - 5)x + 4c + 1 < 0$  به صورت بازه

$(a, +\infty)$  است. اگر  $b$  عدد طبیعی باشد، مقدار  $\frac{a}{c}$  کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

- (۱)  $1/2$  (۲)  $-1/2$  (۳)  $2/4$  (۴)  $-2/4$

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $(5 - 2m)x^2 - (2m + n - 5)x < n$  به صورت بازه

$(-1, m - 2)$  است. اگر  $m$  عدد طبیعی باشد، مقدار  $m + n$  کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۴)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

مثال: مجموعه جواب نامعادله  $(m + 4)x^2 < n - (m - n + 4)x$  به صورت بازه  $(m + 1, -1)$

است. اگر  $m$  عدد صحیح باشد، مقدار  $m n$  کدام است؟ (تجربی خرداد ۱۴۰۴)

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۶

نمودار تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن  $y = ax^2 + bx + c$

در تابع درجه‌ی دوم به فرم  $y = ax^2$  رأس سهمی نقطه‌ی  $(0, 0)$  است. اگر رأس سهمی را به نقطه‌ی  $S(x_0, y_0)$  انتقال دهیم، معادله‌ی سهمی به فرم  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  تبدیل می‌شود.

اگر ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم  $(a)$  مثبت باشد، دهانه‌ی سهمی رو به بالا بوده و سهمی حاوی نقطه‌ی  $\min$  است.

اگر ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم  $(a)$  منفی باشد، دهانه‌ی سهمی رو به پایین بوده و سهمی حاوی نقطه‌ی  $\max$  است.

برای یافتن مقدار مینیمم یا ماکزیمم ابتدا باید مختصات طول نقطه‌ی سهمی را از فرمول  $x_s = \frac{-b}{2a}$  یافته و سپس آن را در داخل تابع درجه‌ی دوم قرار می‌دهیم.

$$f(x_s) = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

نکته:  $\max$  یا  $\min$  تابع، جایی است که مماس افقی بر سهمی رسم می‌شود.

نکته: تابع درجه‌ی دوم دارای خط تقارنی به معادله‌ی  $x = \frac{-b}{2a}$   $\Rightarrow x = x_s$  است.

نکته: در صورت داشتن دو نقطه که دارای عرض یکسان هستند، بین طول این نقاط معدل می‌گیریم و معادله‌ی محور تقارن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} A(x_1, m) \\ B(x_2, m) \end{cases} \Rightarrow x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

نکته: اگر در تابع درجه‌ی دوم  $c = 0$  باشد، منحنی از مبدأ مختصات می‌گذرد.

نکته: اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، منحنی از چهار ربع دستگاه مختصات خواهد گذشت.

مثال: تابع درجه‌ی دوم  $y = 3x^2 - 2x - 1$  مفروض است. مختصات رأس سهمی و همچنین مقدار اکسترموم تابع و نوع آن را مشخص نمایید.

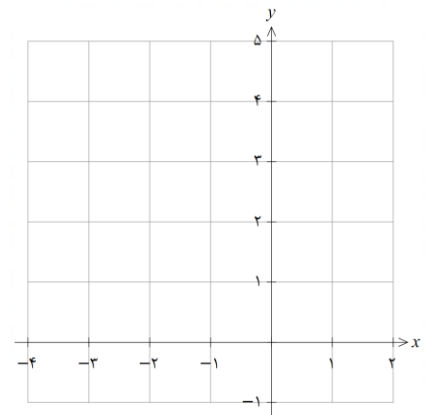
مثال: محیط مستطیلی  $۸۰$  متر است. اندازه‌ی مساحت ماکزیمم این مستطیل را بیابید.

مثال: بیشترین طول زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول  $۸۸$  متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند مترمربع است؟

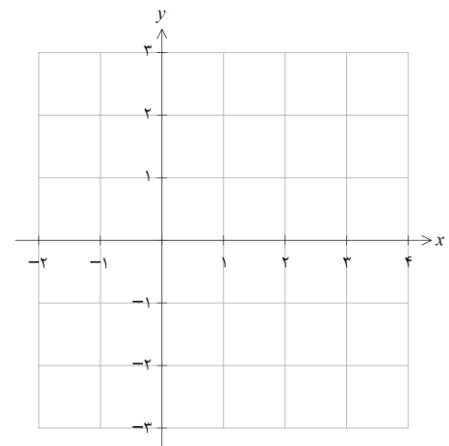


مثال: نمودار توابع درجه‌ی دوم زیر را رسم کنید.

$$y = -x^2 - 2x + 3$$



$$y = \frac{1}{4} (x - 3)(x + 1)$$



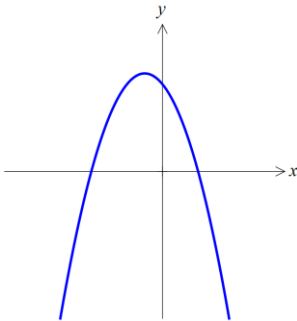
مثال: معادله‌ی نمودار مقابل، کدام گزینه است؟

(۲)  $y = -x^2 - 3x + 2$

(۱)  $y = x^2 + 3x - 2$

(۴)  $y = -x^2 + 3x + 2$

(۳)  $y = -x^2 + 3x - 2$



رأس سهمی

مثال: نمودار  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $x$  ها را در  $-1$  و  $3$  و محور  $y$  ها را در  $-1$  قطع می‌کند. طول و عرض نقطه رأس سهمی را بیابید.

مثال: اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های  $-1$  و  $3$  قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

(قلم‌پی ۹۶)

(۴)  $-3$

(۳)  $3$

(۲)  $-\frac{3}{4}$

(۱)  $\frac{3}{4}$



مثال: نمودار تابع  $y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3}$  در ناحیه دوم، بر نیمساز آن ناحیه مماس

است. طول رأس سهمی، کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$\frac{-1}{2}$  (۴)

$\frac{-7}{6}$  (۳)

$\frac{-5}{18}$  (۲)

$\frac{-1}{18}$  (۱)



مثال: صفرهای تابع  $y = 2x^2 - (m + 2)x + m$  و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک

مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر  $\frac{3}{4}$  باشد، کدام عدد می‌تواند طول رأس سهمی

(تجربی ۱۴۰۲)

$y = x^2 - mx + 1$  باشد؟

$\frac{-1}{2}$  (۴)

$\frac{-3}{4}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

مثال: صفرهای تابع  $y = mx^2 - 4x - (m + 4)$  و نقطه تقاطع آن با محور  $y$  ها، رئوس یک مثلث

هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم شده توسط مقادیر

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

مختلف  $m$  کدام است؟

$\frac{9}{2}$  (۴)

$\frac{7}{4}$  (۳)

$\frac{9}{4}$  (۲)

$\frac{7}{2}$  (۱)



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  صفرهای سهمی  $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$  و  $\alpha < \beta$  باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟  
(تقریبی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

مثال: رأس سهمی  $y = kx^2 - 4x - 6$  روی خط  $y = -4x - 4$  قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟  
(ریاضی دی ۱۴۰۱)

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) -۴ (۴) -۸

مثال: رأس سهمی  $y = -ax^2 + ax + 2$  روی سهمی  $y = 2bx^2 - bx - 1$  قرار دارد و برعکس. مقدار  $b - a$  چقدر است؟  
(تقریبی خرداد ۱۴۰۱)

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۱۸ (۴) ۱۸

مثال: محور تقارن نمودار تابع  $y = (x - 1)(x - 3) - x$  کدام خط است؟

(گزینه دو ۹۳)

$x = \frac{7}{2}$  (۴)

$x = 3$  (۳)

$x = \frac{5}{2}$  (۲)

$x = 2$  (۱)

مثال: اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم  $y = (a - 1)x^2 + x + 3$  نسبت به خط  $x = 2$  متقارن

(تقریبی ۱۸۳)

باشد، این منحنی محور  $x$  ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

مثال: محور تقارن سهمی  $y = x^2 + 4x + k$  منحنی را در نقطه‌ای به عرض  $(-2)$  قطع می‌کند. طول

(خلم‌پی ۹۴)

پاره‌خطی که سهمی روی محور  $x$  ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

$4\sqrt{2}$  (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳)

$4\sqrt{3}$  (۲)

$2\sqrt{3}$  (۱)



مثال: سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  گذرا بر نقطه  $(1, 6)$ ، محور تقارن خود را در  $(-7, 2)$  قطع

(تقریبی مهر ۱۴۰۱)

می‌کند. این سهمی از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱)  $(-2, 3)$  (۲)  $(4, -1)$  (۳)  $(4, -3)$  (۴)  $(-2, 1)$



مثال: محور تقارن سهمی‌های  $y = x^2 + ax - 2$  و  $y = -x^2 - 2x + b$  مشترک هستند. اگر از دو

(تقریبی دی ۱۴۰۱)

نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط  $y = 1$  رسم شود، مقدار  $ab$  چقدر است؟

- (۱)  $-8$  (۲)  $-4$  (۳)  $8$  (۴)  $4$

مثال: نقاط  $(-4, 3)$  و  $(-4, -1/5)$  روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

تابع کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

مثال: نقاط  $(1, \beta)$  و  $(-5, \beta)$  روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر  $\frac{-1}{2}$  است.

اگر سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض  $\frac{3}{2}$  قطع کند، مقدار  $\beta$  کدام است؟ (ریاضی فارغ ۱۴۰۲)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲- (۴) ۱-



مثال: نقاط  $A(3, y)$  و  $B(-5, y)$  روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور  $x$  ها را در نقاطی با طول‌های  $\alpha$  و  $\beta$  قطع کند و  $\alpha^2 + \beta^2 = 5$  باشد،

این سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

- (۱)  $\frac{-1}{3}$  (۲)  $\frac{-2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$



مثال: سهمی گذرا از نقاط  $(1, a)$  و  $(-2, a)$  بر خط  $y + 3 = 0$  مماس بوده و از هر چهار ناحیه مختصات می‌گذرد. اگر فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات ۲ واحد باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(ریاضی مهر ۱۴۰۱)

- (۱) ۲۰ (۲)  $-20$  (۳)  $-6$  (۴) ۶

مثال: نقاط  $A(2a + 3, a - 2)$  و  $B(7 - 2a, a - 2)$  دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه  $S(b, b - 2)$  رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

- (۱)  $\frac{13}{4}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $\frac{13}{8}$

مثال: نقاط  $A(2b + 1, 2b - b^2)$  و  $B(2b - 1, 2b - b^2)$  دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های صحیح مثبت از سهمی  $y = m(x - \alpha + 1)^2 + \alpha + 1$  باشند. مقدار  $m$  کدام است؟ (ریاضی خرداد ۱۴۰۴)

- (۱)  $-1$  (۲)  $-2$  (۳)  $-3$  (۴)  $-4$

مثال: اگر معادله  $|4x - 2| = x^2 - x + a$  دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله کدام است؟  
(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

- (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

مثال: به ازای چند مقدار صحیح از  $a$ ، معادله  $|4x - 2| = x^2 - x + a$  دارای چهار ریشه حقیقی است؟  
(ریاضی خارج ۱۴۰۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال: اگر بیشترین مقدار تابع  $f(x) = (k + 3)x^2 - 4x + k$  برابر صفر باشد، مقدار  $k$  کدام است؟  
(تجربی ۱۳۳)

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۴

مثال: در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف  $a$ ، بیشترین مقدار سهمی  $y = ax^2 + x + 2a$  برابر  $\frac{-1}{2}$  است؟  
(تقریبی تیر ۱۴۰۳)

- (۱) ۳ (۲) هیچ مقدار  $a$  (۳) ۲ (۴) ۱

مثال: در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف  $a$ ، کمترین مقدار سهمی  $y = ax^2 + 3x + a$  برابر  $\frac{7}{8}$  است؟  
(تقریبی خارج ۱۴۰۳)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار  $a$

مثال: کمترین مقدار تابع  $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$  برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱)  $x = 2$  (۲)  $x = 2/5$  (۳)  $x = 3$  (۴)  $x = 3/5$



مثال: به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، نقطهٔ مینیمم تابع  $y = x^2 - mx + 2 - m$  در ناحیهٔ اول محورهای مختصات قرار دارد؟  
(تقریبی اردیبهشت ۱۴۰۴)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

مثال: تابع  $f$  با ضابطهٔ  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$  روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده است. اگر برای یک مقدار  $m$ ، بیشترین مقدار تابع  $f$  برابر ۱ باشد، مقدار  $[m]$  کدام است؟  
(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

مثال: اگر معادلهٔ حرکت یک توپ فوتبال به صورت  $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$  باشد، که در آن  $x$  مسافت افقی طی شده و  $y$  ارتفاع توپ است، ماکسیمم فاصلهٔ توپ از سطح زمین کدام است؟  
(کتاب درسی)

- (۱) ۴۰ (۲) ۳۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

مثال: ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعده آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعده این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید  $\frac{4}{5}$  برابر مساحت مثلث اولیه می‌شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟

(تجربی تیر ۱۴۰۴)

- (۱) ۸ (۲)  $\frac{14}{5}$  (۳)  $\frac{16}{5}$  (۴) ۲۸

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر ۹ واحد هم به طول و هم به عرض این مستطیل اضافه شود، مساحت مستطیل جدید  $10$  برابر مساحت مستطیل اولیه می‌شود. محیط مستطیل اولیه کدام است؟

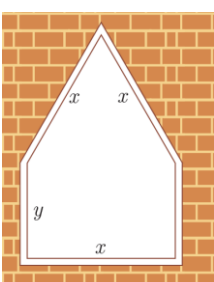
(تجربی فارغ ۱۴۰۴)

- (۱) ۴۱ (۲) ۳۶ (۳) ۳۱ (۴) ۲۶

مثال: اگر محیط پنجره زیر برابر  $2\sqrt{3}$  باشد، به ازای کدام مقدار  $x$ ، بیشترین نوردهی را داریم؟

- (۱)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(کتاب درسی)



رسم و تشخیص نمودار تابع درجه دوم

برای تشخیص علامت  $a$  به دهانه سهمی توجه می‌کنیم.

برای تشخیص علامت  $c$  به تقاطع با محور عمودی (عرض از مبدأ) توجه می‌کنیم.

برای تشخیص علامت  $b$  به علامت رأس سهمی توجه می‌کنیم.

### نکاتی در مبحث معادله‌ی درجه‌ی دوم:

۱- اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، در صورتی که ریشه‌ی مضاعف معادله عدد  $x_0$  باشد، معادله را می‌توان به صورت مقابل نوشت.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

۲- اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی  $x_1$  و  $x_2$  متمایز باشد، می‌توان آن را به صورت حاصل-ضرب دو پرانتز نوشت.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

۳- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی ضریب  $x$  ( $b$ ) عددی زوج باشد، می‌توان از دستور زیر ریشه‌ها را محاسبه کرد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} b' = \frac{b}{2}, \quad \Delta' = b'^2 - ac \\ x_1, x_2 = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \end{cases}$$

### یافتن تعداد نقاط تلاقی دو تابع

۱- اگر بخواهیم نقاط تلاقی دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را بیابیم، ریشه‌های ساده‌ی معادله  $f(x) = g(x)$  را می‌یابیم.

۲- اگر بخواهیم نقاطی را بیابیم که دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  بر هم مماس هستند به دست آوریم، ریشه‌های مضاعف معادله  $f(x) = g(x)$  را به دست می‌آوریم.

مثال: تعداد نقاط تلاقی دو تابع  $y = x^2 - 3x$  و  $y = x - 3$  را بیابید.

مثال: نقاط تقاطع و نقاطی که دو تابع  $y = x^3 + x$  و  $y = 4x - 2$  بر هم مماس هستند را بیابید.

مثال: نمودار دو تابع  $y = \frac{1}{x-2}$  و  $y = x + 2$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می کنند؟



مثال: نمودار تابع با ضابطه  $y = x^2 - 2x - 8$  را حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا هر دو نقطه تلاقی آن با محور طول‌ها، در  $x$  های نامنفی باشد؟

(گزینه دو ۹۴)

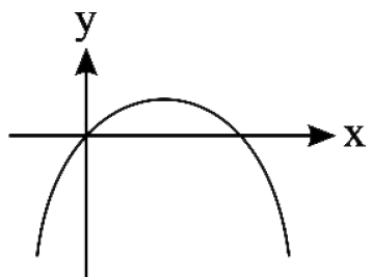
۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(گزینه دو ۹۵)



مثال: کدام گزینه می‌تواند ضابطه تابع زیر باشد؟

(۱)  $y = x^2 + 2x$

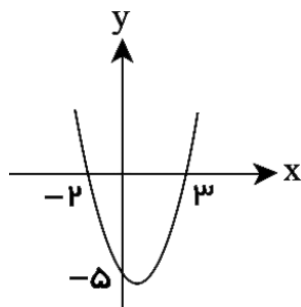
(۲)  $y = -x^2 + 2x$

(۳)  $y = x^2 - 2x$

(۴)  $y = -x^2 - 2x$

مثال: شکل زیر، نمودار تابع درجه دوم به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  را نشان می‌دهد. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

(گزینه بی ۹۴)



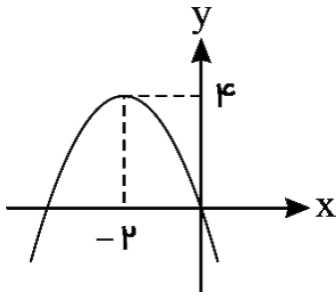
(۱) ۵

(۲) -۵

(۳) ۶

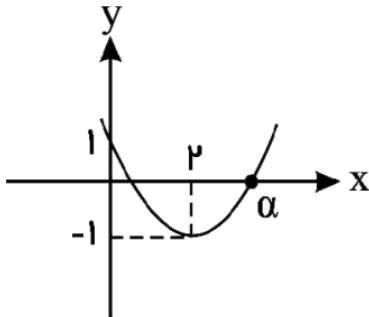
(۴) -۶

مثال: با توجه به نمودار تابع  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ، مقدار  $a$  کدام است؟ (قلم پی ۹۵)



- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) -۲
- (۴) ۲

مثال: با توجه به شکل روبه‌رو که نمودار یک تابع درجه ۲ را نشان می‌دهد، مقدار  $\alpha$  کدام است؟ (قلم پی ۹۵)

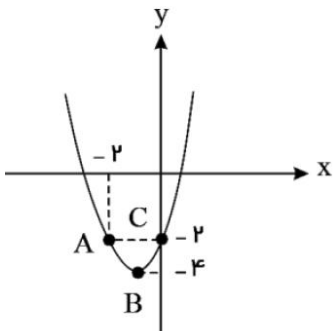


- (۱) ۳
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳)  $2 + \sqrt{2}$
- (۴)  $\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$



مثال: نمودار تابع درجه دوم  $y = f(x)$  مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله

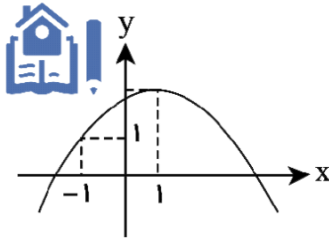
$f(x) = 0$  کدام است؟ (قلم پی ۹۶)



- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸

مثال: در سهمی شکل مقابل به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ، اگر  $a - b = -3$  آن گاه  $f(1)$  کدام است؟

(قلمچی ۹۴)



(۱) -۴

(۲) ۰

(۳) ۴

(۴) ۵

مثال: اگر مقدار  $max$  تابع  $y = ax^2 - 4x + 2a - 1$  برابر ۳ باشد، مقدار  $a$  را بیابید.

نکته: تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  را در نظر می گیریم.

۱- به ازای  $a > 0$  و  $\Delta < 0$  عبارت همواره مثبت است.  $(ax^2 + bx + c > 0)$

۲- به ازای  $a < 0$  و  $\Delta < 0$  عبارت همواره منفی است.  $(ax^2 + bx + c < 0)$

۳- به ازای  $a > 0$  و  $\Delta \leq 0$  عبارت همواره نامنفی است.  $(ax^2 + bx + c \geq 0)$

۴- به ازای  $a < 0$  و  $\Delta \leq 0$  عبارت همواره نامثبت است.  $(ax^2 + bx + c \leq 0)$

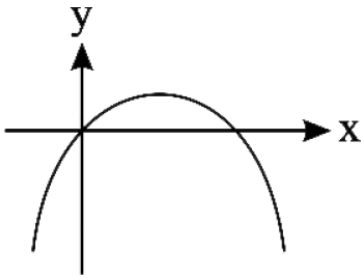
مثال: کدام یک از معادلات زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟

(۱)  $y = x^2 - 3x - 2$

(۲)  $y = x^2 - 3x + 2$

(۳)  $y = x^2 - 3x + 4$

(۴)  $y = x^2 - 3x - 4$



مثال: مقدار  $m$  را چنان بیابید که سهمی  $y = (m + 2)x^2 + 4x + m - 1$  محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند.

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، تابع  $y = (m - 1)x^2 + 2x + m + 1$  بالای محور طول‌ها و بر آن مماس است؟

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، تابع  $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{5}x + m + 1$  همواره زیر محور طول‌ها قرار می‌گیرد؟



مثال: به ازای چه مقداری از  $m$  عبارت  $m x^2 + x + m$  همواره منفی است؟



مثال: اگر معادله  $y = x^2 - m x + \left(m + \frac{5}{4}\right)$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد، حدود  $m$  را بیابید.



مثال: اگر  $m x^2 + 4 x - 2 \leq 0$  باشد، حدود  $m$  را بیابید.



مثال: مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی  $290$  است. مجموع این دو عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

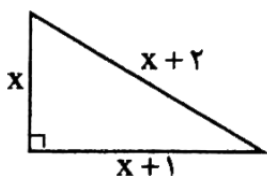
۱۸ (۱)

۲۰ (۲)

۲۲ (۳)

۲۴ (۴)

(کتاب درسی)



مثال: مساحت مثلث قائم‌الزاویه مقابل، کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

مثال: اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای، به صورت  $x + 1$ ،  $2x + 1$  و  $2x + 3$  است. مساحت مثلث، کدام است؟

(ریاضی ۹۹)



(۱) ۶۰

(۲) ۵۶

(۳) ۴۵

(۴) ۳۹

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، محیط این مستطیل کدام است؟

(کتاب درسی)

(۱) ۲۸

(۲) ۳۶

(۳) ۴۲

(۴) ۴۸

مثال: طول یک مستطیل، ۲ واحد کمتر از  $\frac{1}{5}$  برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۹)



(۱) ۵۲

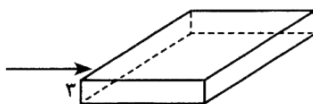
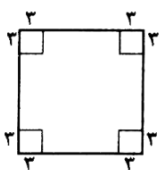
(۲) ۵۶

(۳) ۶۰

(۴) ۶۴

مثال: مطابق شکل زیر، از یک صفحه مقوایی به شکل مربع، چهار گوشه‌اش را برش می‌زنیم و مربع‌هایی به ضلع ۳ را از آن خارج می‌کنیم. سپس با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر حجم این جعبه، ۳۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع صفحه مقوایی کدام بوده است؟

(کتاب درسی)



(۱) ۷

(۲) ۱۰

(۳) ۱۳

(۴) ۱۶

نکته: در صورتی که نیاز به محاسبهٔ مبین معادلهٔ درجهٔ ۲ (دلتا) باشد، بعضاً می‌توانیم با انتخاب عدد مناسب، عمل کنیم.

نکته: در صورتی که ضریب جملهٔ درجهٔ دوم پارامتری باشد، به ضریب  $a$  دقت بیشتری می‌کنیم.

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادلهٔ درجهٔ دوم  $x^2 + 6x + m - 2 = 0$ ، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟  
(ریاضی ۹۸)

(۱)  $-2 < m < 2/5$

(۲)  $-2 < m < 3/5$

(۳)  $-1 < m < 3/5$

(۴)  $-1 < m < 2/5$

مثال: ریشهٔ مضاعفِ معادلهٔ  $ax^2 + 3x + 2 = 0$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{3}{4}$

(۳)  $-\frac{4}{3}$

(۲)  $\frac{8}{9}$

(۱)  $\frac{9}{8}$

مثال: سهمی  $y = 2ax^2 - 5x + 18a$  در نقطهٔ  $A$  بر نیمساز ناحیهٔ سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار  $a$ ، کدام است؟  
(تقریبی تیر ۱۴۰۳)

(۴)  $\frac{5}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $-\frac{1}{2}$

(۱)  $-\frac{5}{2}$

مثال: سهمی  $y = ax^2 + 7x + 16a$  در نقطه  $A$  بر نیمساز ناحیه چهارم محورهای مختصات مماس است. مقدار  $a$ ، کدام است؟  
(تجربی خارج ۱۴۰۳)

(۱)  $-\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۳) ۱

(۴) -۱



مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$  فاقد ریشه حقیقی است؟  
(ریاضی خارج ۱۹)

(۱)  $-3 < m < 5$

(۲)  $-3 < m < 4$

(۳)  $-2 < m < 4$

(۴)  $-1 < m < 5$



مثال: خط به معادله  $y = mx + 4$  با منحنی به معادله  $y = -x^2 + 2x$ ، هیچ نقطه مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟  
(تجربی ۱۶)

(۱)  $m < 0$

(۲)  $m > 4$

(۳)  $-1 < m < 4$

(۴)  $-2 < m < 6$



مثال: سهمی  $y = -mx^2 + mx + 1$  و خط  $y = -m - x$  یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود  $m$  شامل چند مقدار صحیح است؟  
(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

نکته: در سؤالات چندشرطی شامل شروط دلتا، ضرب ریشه‌ها و جمع ریشه‌ها، ابتدا شروط ضرب و جمع ریشه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در نهایت به سراغ شرط دلتا می‌رویم.  
نکته: گاهی اوقات استفاده از گزینه‌ها نیز در تعیین مقدار مجهول مؤثر است.

مثال: به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع  $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور  $x$  ها است؟  
(تجربی خارج ۹۶)

- (۱)  $a < 1$  (۲)  $a < -2$  (۳)  $a > 3$  (۴)  $-2 < a < 1$

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، سهمی به معادله  $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ ، همواره پایین محور  $x$  ها است؟  
(ریاضی خارج ۹۸)

- (۱)  $1 < m < 5$  (۲)  $2 < m < 5$  (۳)  $2 < m < 4$  (۴)  $2 < m < 6$



مثال: به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار  $y = (m - 2)x^2 + 3x + m + 2$  پایین محور  $x$  ها و مماس بر آن است؟  
(گزینه دو ۹۴)

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $-\frac{5}{2}$

مثال: اگر  $x = -1$  بین ریشه‌های معادله  $2x^2 + (m + 1)x + m^2 - 3 = 0$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟  
(مدارس برتر ۱۴۰۱)

- (۱)  $0 < m < 2$  (۲)  $-1 < m < 2$  (۳)  $-2 < m < -1$  (۴)  $-2 < m < 0$

مثال: برای چند مقدار صحیح  $m$ ، هر دو ریشه معادله  $2x^2 + 7x + m = 0$  بزرگ‌تر از -۳ است؟  
(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

مثال: برای چند مقدار صحیح  $m$ ، هر دو ریشه معادله  $-x^2 + 5x + m = 0$  کوچک‌تر از  $\frac{9}{2}$  است؟  
(ریاضی خارج ۱۴۰۳)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۵



### روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، روابط زیر را به خاطر می‌سپاریم.

$$\alpha + \beta = S = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha \times \beta = P = \frac{c}{a}$$

$$|\alpha - \beta| = T = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

مثال: اگر رابطه  $5\alpha + \beta = 12$  بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 4x + m - 3 = 0$  برقرار باشد، مقدار  $m$  را بیابید.

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 - mx + 125 = 0$  مجذور ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار  $m$  را بیابید.

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$  را بیابید.

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 6x + 4 = 0$  باشد ( $\alpha > \beta$ )، حاصل عبارت  $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$  را بیابید.



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - x - 1 = 0$  باشد، حاصل عبارت  $3\alpha^3\beta - \alpha^2\beta + 3$  را بیابید.

مثال: در معادله‌ی  $x^2 - 12x + m = 0$  یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد کمتر است. مقدار  $m$  را بیابید.



مثال: اگر  $\alpha = 2$  یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + 3x + m - 1 = 0$  باشد، مجموع ریشه‌های معادله، چند برابر حاصل ضرب ریشه‌های معادله است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{2}{3}$

نکته مهم: در سؤالاتی که صحبت از  $S$  و  $P$  به میان می‌آید، قطعاً دو ریشه داریم و به شرط  $\Delta > 0$  توجه ویژه‌ای می‌کنیم.

مثال: معادله درجه دوم  $x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$  دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

- (۱)  $\frac{7}{2}$  (۲) ۳ (۳) -۱ (۴)  $-\frac{5}{2}$

مثال:  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 8x + 4 = 0$  است. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های  $\alpha\beta^2$  و  $\alpha^2\beta$ ، برابر باشند، مقدار  $\log_{\sqrt{2}} a$  کدام است؟ ( $a > 0$ ) (تجربی دی ۱۴۰۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه عددی بین دو ریشه حقیقی معادله درجه دوم

(ریاضی ۱۴)

$$(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0 \text{ است؟}$$

(۴) -۴

(۳) ۴

(۲) -۳

(۱) ۳

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$  باشد، به ازای کدام مقدار  $a$ ،

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

به ترتیب سه عدد  $\alpha$ ،  $a$  و  $\beta$  تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

(۴) ۱

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) -۲

مثال: اختلاف ریشه‌های معادله  $x^2 + 2kx + 5 = 0$  برابر  $\frac{4}{3}k$  است. مقدار  $\left[ \frac{k^2}{2} \right]$  کدام

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) صفر

مثال: ریشه‌های معادله  $x^2 - (a+1)x + a = 0$  دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله

$x^2 - (3a+1)x + b = 0$  دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل ضرب ریشه‌های دو معادله کدام

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

است؟

(۴) ۹

(۳) ۱۳

(۲) ۲۱

(۱) ۳۳

## کاربردهای S و P

(۱) کاربرد در تعیین ریشه‌ها و بالعکس

مثال: اگر در معادله  $ax^2 - bx + c = 0$ ، رابطه  $25a + 5b + c = 0$  بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه‌های این معادله، کدام است؟

(گزینه دو ۹۶)

$$\begin{array}{llll} -\frac{c}{5a} & (۱) & -\frac{c}{25a} & (۲) \\ -\frac{c}{125a} & (۳) & -\frac{c}{a} & (۴) \end{array}$$

مثال: معادله درجه دومی که ریشه‌های آن به صورت  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  و  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  باشد، کدام است؟

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

$$2x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (۱)$$

$$2x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + \sqrt{6}x - 1 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - \sqrt{6}x - 1 = 0 \quad (۴)$$

مثال: ضرایب معادله  $x^2 + bx + c = 0$  صحیح و یکی از ریشه‌های آن  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$  می‌باشد. مقدار  $bc$  چقدر می‌تواند باشد؟

(علی سنج ۱۴۰۱)

$$\begin{array}{llll} -۳ & (۱) & ۳ & (۲) \\ ۴ & (۳) & -۴ & (۴) \end{array}$$



مثال: اگر  $\alpha + \beta = 2$  و  $\alpha^2 + \beta^2 = 8$  ریشه‌های کدام معادله  $\alpha\beta + 1$  و  $\alpha + \beta - 4$  می‌باشد؟

(علی سنج ۱۴۰۱)



(۱)  $x^2 - 3x - 2 = 0$

(۲)  $x^2 + 3x + 2 = 0$

(۳)  $x^2 + 3x - 2 = 0$

(۴)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

مثال: اگر  $a$  و  $b$  اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله  $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$  باشند،

(تبریزی فارح ۱۴۰۱)

مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۹

(۴) ۱۲

مثال: اگر  $a$  و  $b$  عددهای مخالف صفر و  $a + b$  و  $ab$  جواب‌های معادله  $x^2 - ax - b = 0$  باشند،

(قلم‌پی ۱۴۰۱)

قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟

(۱)  $\sqrt{5}$

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۳) ۳

(۴)  $\frac{3}{2}$

مثال: معادله‌های  $x^2 + 6x + m = 0$  و  $x^2 + 2x - 3m = 0$  یک ریشه مشترک غیرصفر دارند.

(ریاضی دی ۱۴۰۱)

اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۷

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 1 - m^2 = 0$  باشد، کمترین مقدار ممکن برای  $\alpha^2 + \beta^2$  کدام است؟  
(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

- ۱ (۱)      ۳ (۲)      ۵ (۳)      ۷ (۴)

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 2 = 0$  باشد، کمترین مقدار ممکن برای  $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$  کدام است؟  
(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

- ۲۱ (۱)      ۲۰ (۲)      ۱۹ (۳)      ۱۸ (۴)

مثال: مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله  $x^2 - (m + 14)x + 1 = 0$  برابر ۳۶ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x + 2 = 0$  کدام است؟  
(تجربی تیر ۱۴۰۴)

- ۲ (۱)      - ۳ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

مثال: اگر عکس مجموعه ریشه‌های معادله درجه دوم  $-4ax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$  برابر  $\log 4$  و

$a$  واسطه حسابی  $b$  و  $c$  باشد، مقدار  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{c}{a}}$  کدام است؟  
(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

(۱)  $\sqrt[4]{5}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $\sqrt[4]{10}$  (۴)  $\sqrt{10}$

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم  $(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0$ ، برابر  $1 -$  باشد،

مقدار  $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{b}{a}}$  کدام است؟  
(ریاضی خارج ۱۴۰۴)

(۱)  $\sqrt{10}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $5$  (۴)  $10$



مثال: اختلاف جذر دو ریشه معادله  $x^2 - 3mx + m = 0$  برابر  $1$  است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله

$2x^2 + mx - m = 0$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{18}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{2}{3}$



۲) کاربرد در تعیین علامت ریشه‌ها

بحث در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \\ \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \\ \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \\ \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \\ \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$$

نکته: شرط آن که یک معادله درجه دوم، دارای یک ریشه صفر باشد، این است که:  $c = 0$  و  $b \neq 0$

نکته: شرط آن که یک معادله درجه دوم، دارای دو ریشه قرینه باشد، آن است که:  $b = 0$  و  $\frac{c}{a} < 0$

نکته: شرط آن که یک معادله درجه دوم، دارای یک ریشه مضاعف صفر باشد، آن است که:  $b = c = 0$ .

مثال: مقدار  $m$  را چنان بیابید که تابع  $y = (m + 2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 1$  دارای دو ریشه قرینه باشد.



مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

(تجربی خارج ۹۲)

(۱)  $a < -9$

(۲)  $a < -3$

(۳)  $a > -1$

(۴)  $-3 < a < 0$



مثال: به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

(تجربی ۹۷)

(۱)  $m < -6$

(۲)  $m > 3$

(۳)  $0 < m < 3$

(۴)  $3 < m < 6$



مثال: معادله درجه دوم  $2x^2 + mx + m + 6 = 0$  دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر  $m$ ، کدام است؟

(تجربی خارج ۹۹، مشابه تجربی خارج ۹۷ و تجربی ۹۶)

(۱)  $(-4, 0)$

(۲)  $(-4, -2)$

(۳)  $(-6, 0)$

(۴)  $(-6, -4)$

مثال: به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = (m + 2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور  $x$  ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

(ریاضی خارج ۹۵)

- (۱)  $m > 1$  یا  $m < -2$  (۲)  $-2 < m < 1$  (۳)  $m < -2$  (۴)  $m > 1$

مثال: اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (m + 5)x + 2m - 3 = 0$  و  $x_2 < |x_1| < x_1$  باشد، آن‌گاه  $m$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

(قلم‌پی ۱۴۰)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، معادله  $(x^2 + ax - a + 1)(x - 1) = 0$ ، دو جواب مثبت و یک جواب منفی دارد؟

(قلم‌پی ۹۵)

- (۱)  $a > 1$  (۲)  $a > -1$  (۳)  $0 < a < 1$  (۴)  $-1 < a < 0$

مثال: به ازای کدام مقادیر  $a$ ، منحنی به معادله  $y = ax^2 - (a + 2)x$ ، از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟  
(ریاضی ۱۹)

(۱)  $a \leq -2$

(۲)  $a > -2$

(۳)  $a > 0$

(۴)  $-2 \leq a < 0$

مثال: به ازای چند مقدار  $a$ ، سهمی به معادله  $y = ax^2 + (3 + 2a)x$  از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟  
(تقریبی ۱۴۰۱)

(۱) هیچ مقدار  $a$

(۲) تمام مقادیر  $a$

(۳) ۱

(۴) ۲

۳ کاربرد در معادلات دومی (تغییر متغیر)

### حل معادلات به کمک روش تغییر متغیر (مجهول معاون)

اگر عبارتی در دوجای معادله به صورتی داده شود که توان آن در یکی از عبارات داده شده، مضربی از توان عبارت دیگر باشد، عبارت با توان کمتر را متغیر  $A$  تعریف کرده و عبارت با توان بالاتر را به صورت توانی از  $A$  می‌نویسیم و معادله حاصل را بر حسب متغیر جدید حل می‌کنیم.  
مثال: تعداد ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$$\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2 + 4\left(\frac{2x-1}{2x}\right) + 3 = 0$$



$$\sqrt[3]{(x^2+x)^2} - 2\sqrt[3]{x^2+x} = 3$$

$$(x^4 - x^2)^2 - 7(x^4 - x^2) - 8 = 0$$

- مثال: معادله  $\circ = 4 - 3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)^2$  چند ریشه حقیقی دارد؟ (ریاضی ۹۲)
- (۱) چهار ریشه (۲) دو ریشه  
(۳) دو ریشه متمایز و یک ریشه مضاعف (۴) دو ریشه مضاعف

- مثال: معادله  $2 = (x^2 - 2x) - (x^2 - 2x)^2$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



- مثال: مجموع ریشه‌های معادله  $\circ = 27 - 26x^3 + x^6$  کدام است؟ (کتاب درسی)
- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۱۳ (۴) -۲۶

- مثال: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $\circ = 72 - 6(x^2 + x) + (x^2 + x)^2$  کدام است؟ (تقریبی ۹۰ با تغییر)
- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۱



## معادلات دومجذوری $ax^4 + bx^2 + c = 0$

**روش حل معادلات دومجذوری:** با انتخاب  $x^2 = A$  به عنوان مجهول معاون، معادله مورد نظر را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرده و مقادیر ممکن برای متغیر  $A$  را می یابیم. سپس مقادیر به دست آمده را در عبارت  $x^2 = A$  جایگذاری کرده و ریشه های معادله دومجذوری را می یابیم.

مثال: ریشه های معادله  $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$  را بیابید.



تذکر: در معادله ی دومجذوری همواره مجموع ریشه ها برابر صفر است.

### بحث در مورد تعداد و علامت ریشه های معادله ی دومجذوری

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=A} aA^2 + bA + c = 0 \rightarrow \Delta, \frac{c}{a}, \frac{-b}{a}$$

- |                                                    |                    |
|----------------------------------------------------|--------------------|
| ۱) $\Delta > 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{-b}{a} > 0$ | چهار ریشه حقیقی    |
| ۲) $\Delta > 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{-b}{a} < 0$ | ریشه حقیقی ندارد   |
| ۳) $\Delta > 0, \frac{c}{a} < 0$                   | دو ریشه قرینه دارد |
| ۴) $\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$                  | دو ریشه قرینه دارد |
| ۵) $\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$                  | ریشه حقیقی ندارد   |
| ۶) $\Delta < 0$                                    | ریشه حقیقی ندارد   |

مثال: حدود  $m$  را چنان بیابید که معادله ی  $mx^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$  دارای چهار ریشه ی حقیقی باشد.



مثال: اگر معادله  $x^4 - (m+2)x^2 + (m+5) = 0$  دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

(تقریبی ۱۵)

- (۱)  $m < -4$  (۲)  $m > 4$  (۳)  $-4 < m < 4$  (۴)  $4 < m < 9$



(کتاب درسی)

مثال: کدام یک از معادلات زیر، چهار ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱)  $2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$   
 (۲)  $2x^4 - 7x^2 + 1 = 0$   
 (۳)  $2x^4 + 7x^2 - 1 = 0$   
 (۴)  $-2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 7x + 3 = 0$  باشند، مجموع ریشه‌های معادله  $\beta x^4 + 11x^2 + 3\alpha = 0$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲) صفر (۳)  $7$  (۴)  $-7$

مثال: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$  به ترتیب  $S$  و  $P$  باشند، حاصل عبارت  $2P^2 - 3SP + 2S$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

(۱)  $59 - 7\sqrt{69}$

(۲)  $7 + \sqrt{69}$

(۳)  $50$

(۴)  $59 + 7\sqrt{69}$

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، از معادله  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$  دو جواب متمایز برای  $x$  حاصل می‌شود؟ (تجربی خارج ۸۸ با تغییر)

(۱)  $m \geq 1$

(۲)  $m < 1$  یا  $m = 2$

(۳)  $1 \leq m < 2$

(۴) هیچ مقدار  $m$

تمرین بیشتر: حالات مختلف دیگر را برای خود تحلیل کنید.



(۴) کاربرد در معادلات درجات بالاتر

در معادلات با درجات بیش از ۲، اگر ریشه داشته باشند، داریم:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + h = 0$$

$$S = \frac{-b}{a}$$

$$P = \begin{cases} \frac{h}{a} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -\frac{h}{a} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

مثال: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

$$3x^6 + 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \\ P = \end{cases}$$

$$2x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \\ P = \end{cases}$$

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادله  $(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن

کدام است؟

(ریاضی فارچ ۱۷)

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{-3}{2} \quad (۲)$$

$$-2 \quad (۱)$$

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ،  $\alpha + \beta = 1$  و  $\alpha\beta = -2$  باشد، مقدار  $k$  چقدر است؟  
(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$$(1) \quad \frac{-27}{5}$$

$$(2) \quad \frac{27}{5}$$

$$(3) \quad -3$$

$$(4) \quad 3$$

مثال: به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله  $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$  دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟  
(تجربی خارج ۹۴)

$$(1) \quad a > -4$$

$$(2) \quad a < -4$$

$$(3) \quad a < 4$$

$$(4) \quad a > 4$$

(۵) کاربرد در معادله و رابطه بین ریشه‌ها

در سؤالات روابط متقارن سعی می‌کنیم عبارات  $\alpha + \beta = S$  و  $\alpha\beta = P$  را ایجاد کنیم.  
در سؤالات روابط نامتقارن ابتدا سعی می‌کنیم تا جای ممکن روابط متقارن ایجاد کنیم و سپس برای قسمت‌های نامتقارن باقی‌مانده تلاش می‌کنیم تا با قرار دادن ریشه‌ها در معادله داده شده، عبارات متقارن ایجاد کرده و مقادیر مجهول را بیابیم.

نکته: در برخی از سؤالات یافتن ریشه‌های معادله نیز می‌تواند در روند حل سوال مؤثر باشد.

مثال: مطلوبست محاسبه روابط زیر بین ریشه‌های  $(\alpha$  و  $\beta)$  معادله  $x^2 - 8x + 4 = 0$ .



$$|\alpha^2 - \beta^2| =$$

$$\alpha^2 + \beta^2 =$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} =$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$$

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} =$$

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 12x + 4 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

چه قدر است؟

(تقریبی فارج ۱۵)

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 + x - 3 = 0$  باشند، حاصل عبارت

(گزینه دو ۱۴۰۱)

$$\left( \frac{-3}{\beta} + 1 \right)^2 + \left( \frac{-3}{\alpha} + 1 \right)^2$$

چه قدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۱۱



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 7x + 1 = 0$  باشند، حاصل عبارت  $\beta^2 + 7\alpha$  کدام است؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۴۷ (۳) ۴۸ (۴) ۴۹

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 4x - 1 = 0$  باشند و  $\beta < \alpha$ ، حاصل عبارت

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\beta^2}$$

کدام است؟

- (۱)  $16 + \sqrt{5}$  (۲)  $16 - \sqrt{5}$  (۳)  $27 - 4\sqrt{5}$  (۴)  $27 + 4\sqrt{5}$

(۶) کاربرد در رابطه بین ریشه‌ها

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، ریشه‌های حقیقی معادله  $m^2 x^2 + 3x + m^2 = 2$ ، معکوس یکدیگرند؟  
(تقریبی ۹۰)

- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) ۱      (۴) ۲

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $m^2 x^2 - (m + 3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد؟  
(تقریبی ۹۳)

- (۱)  $-\frac{9}{5}$       (۲) ۱      (۳) ۱ و  $-\frac{9}{5}$       (۴) -۱ و  $\frac{9}{5}$

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم  $x^2 - (m + 1)x + \frac{1}{8} = 0$  برابر ۲ می‌باشد؟  
(تقریبی ۹۵)

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 12x - a = 0$  و  $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$  باشد، مقدار  $a$  چند برابر ریشه بزرگ‌تر معادله است؟  
(تجربی خارج ۱۴۰۲)

(۴) -۹

(۳) ۹

(۲) -۳

(۱) ۳



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های متمایز معادله  $ax^2 - ax - b = 0$  و  $4\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17$  باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۲)

(۴)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(۳)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(۲)  $\frac{2}{5}$

(۱)  $\frac{1}{5}$



مثال:  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 6x + a = 0$  هستند. اگر  $0 < \beta < \alpha$  بوده و  $12\sqrt{2} + 85 = 3\alpha^2 + 2\beta^2$  باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟  
(ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱) ۱      (۲)  $\frac{13}{4}$       (۳)  $\frac{21}{5}$       (۴) ۲

مثال:  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 + 6x + a = 0$  هستند. اگر  $0 < \beta < \alpha$  بوده و  $-\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = \alpha^3 + \beta^3 + \beta^2$  باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟  
(ریاضی مجید ۱۴۰۱)

- (۱)  $\frac{33}{4}$       (۲)  $\frac{11}{3}$       (۳) ۳      (۴) ۵



مثال: در معادله درجه دوم  $x^2 - 8x + m = 0$ ، یک ریشه از نصف ریشه دیگر، ۵ واحد بیشتر است.  $m$

(تجربی خارج ۹۲)

کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)



مثال: رابطه  $2x_1 - 3x_2 = 16$  بین ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  از معادله درجه دوم  $x^2 - 3x = 2m - 1$

برقرار است. حاصل  $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot m$  کدام است؟

۲۹۸ (۴)

۲۸۲ (۳)

۲۹۰ (۲)

۲۲۸ (۱)



مثال: به ازای دو مقدار  $a$ ، یک ریشه معادله  $x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف

(تجربی ۱۴۰۱)

این دو مقدار  $a$  کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



### تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱- تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم از روی دو ریشه‌ی معلوم  $\alpha$  و  $\beta$

$$\beta, \alpha \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha \times \beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

مثال: معادله‌ی بنویسید که ریشه‌های آن  $2 \pm \sqrt{3}$  باشند.

۲- تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش رابطه‌ی معینی با ریشه‌های معادله‌ی مفروض داشته باشد.

**الف)**  $S'$  و  $P'$  (مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید) را بر حسب  $S$  و  $P$  معادله‌ی مفروض مسأله به‌دست آورده و با جایگذاری در فرم کلی  $x^2 - S'x + P' = 0$ ، معادله‌ی مورد نظر را می‌یابیم. (همواره این روش جواب می‌دهد)

**ب)** ریشه‌های معادله‌ی مفروض را  $x$  و ریشه‌های معادله‌ی جدید را  $y$  فرض می‌کنیم و با نوشتن رابطه‌ی بین ریشه‌ها که در صورت سؤال داده شده است،  $x$  را بر حسب  $y$  یافته و در معادله‌ی مفروض جایگذاری می‌کنیم. سپس معادله را بر حسب متغیر  $y$  مرتب سازی می‌کنیم. (روش مذکور زمانی جواب می‌دهد که رابطه‌ی بین هر دو ریشه، یکسان باشد)

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های معادله‌ی  $y = x^2 - 3x + 1$  باشند.

مثال: معادله‌ای را بیابید که ریشه‌های آن دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $y = x^2 - 4x + 2$  باشند.

### نکات تشکیل معادله‌ی جدید:

اگر معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌هایش:

۱- معکوس ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، جای  $a$  و  $c$  را عوض کرده و یا  $x \rightarrow \frac{1}{y}$

۲- قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، علامت  $b$  را قرینه کرده و یا  $x \rightarrow -y$

۳- عکس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، جای  $a$  و  $c$  را عوض کرده و علامت  $b$  را قرینه می‌کنیم.

۴-  $K$  واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد،  $x \rightarrow y - K$

۵-  $K$  واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد،  $x \rightarrow y + K$

۶-  $K$  برابر ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد،  $x \rightarrow \frac{y}{K}$

مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $y = x^2 - 2x - 3$  باشد.

مثال: ریشه‌های معادله  $2x^2 - ax + b = 0$  نیم واحد از ریشه‌های معادله  $2ax^2 + ax - 6 = 0$

(تقریبی ۱۴۰۲)

بیشتر است. مقدار  $\left[ \frac{ab}{4} \right]$  کدام است؟

۴) -۱

۳) -۲

۲) -۳

۱) -۴

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x + 5 = 0$  باشد، به ازای چند مقدار  $k$ ، مجموعه جواب‌های

معادله  $x^2 - kx + 25 = 0$  به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$  است؟ (ریاضی ۹۰)

(۱) ۲۷

(۲) ۲۸

(۳) ۲۹

(۴) ۳۱

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$ ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم

ریشه‌های معادله  $x^2 - 2x - 2 = 0$  می‌باشد؟ (تجربی خارج ۹۶)

(۱) ۹

(۲) ۱۱

(۳) ۱۳

(۴) ۱۵



مثال: ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد

کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

(۱)  $x^2 - 3x + 1 = 0$

(۲)  $x^2 + 3x + 1 = 0$

(۳)  $x^2 - 5x + 2 = 0$

(۴)  $x^2 + 5x + 2 = 0$



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به

(ریاضی ۹۲)

صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$  است؟

(۱)  $4x^2 - 5x + 1 = 0$

(۲)  $4x^2 - 3x + 1 = 0$

(۳)  $4x^2 - 5x - 1 = 0$

(۴)  $4x^2 - 3x - 1 = 0$



مثال: فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x = x^2 - 4$  باشند، ریشه‌های کدام معادله  $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$

(تقریبی خارج ۱۴۰۰)

و  $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$  است؟

(۱)  $4x^2 = 51x + 221$

(۲)  $4x^2 + 51x = 221$

(۳)  $4x^2 = 51x + 197$

(۴)  $4x^2 + 51x = 197$



مثال: فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x = 5$  باشند.  $\frac{1}{(x_1 + 1)^3}$  و  $\frac{1}{(x_2 + 1)^3}$

(تجربی خارج ۱۴۰۰)

ریشه‌های کدام معادله هستند؟

(۱)  $125x^2 + 16x = 1$

(۲)  $125x^2 = 16x + 1$

(۳)  $125x^2 = 12x + 1$

(۴)  $125x^2 + 12x = 1$

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 2 = 0$  باشند، معادله درجه دومی که ریشه‌هایش

(علی سنج ۱۴۰۱)

$\left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2$  و  $\left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2$  است، کدام است؟

(۱)  $x^2 + 84x + 64 = 0$

(۲)  $x^2 - 84x + 64 = 0$

(۳)  $x^2 - 84x - 64 = 0$

(۴)  $x^2 + 84x - 64 = 0$



مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 7x + 3 = 0$  باشند، معادله درجه دومی که ریشه‌هایش

(علی سنج ۱۴۰۱)

$\alpha^2 - 8\alpha + 4$  و  $\beta^2 - 8\beta + 4$  است، کدام است؟

(۱)  $x^2 - 5x + 3 = 0$

(۲)  $x^2 + 5x - 3 = 0$

(۳)  $x^2 + 5x + 3 = 0$

(۴)  $x^2 - 5x - 3 = 0$



مثال:  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 9x + 6 = 0$  هستند. اگر  $\alpha < \beta$  باشد، معادله درجه دوم که ریشه‌هایش  $(\beta^2 + 3)$  و  $(\alpha + \frac{3}{\beta})$  باشد، به صورت  $x^2 - (a + b\sqrt{33})x + c = 0$  است، حاصل  $\frac{c}{a+b}$  کدام است؟

$\frac{108}{61}$  (۴)

$\frac{216}{117}$  (۳)

۳ (۲)

۲/۲۵ (۱)



مثال: اگر مجموعه جواب معادله  $x^2 - x - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha + 1, \beta + 1\}$  باشد، مجموعه جواب کدام معادله  $\{\alpha^2\beta^2, \alpha^2 + \beta^2\}$  است؟

(کاج ۱۴۰۱)

$x^2 + 5x + 6 = 0$  (۱)

$x^2 - 5x + 4 = 0$  (۲)

$x^2 - 4x + 3 = 0$  (۳)

$x^2 + 4x + 3 = 0$  (۴)



## عبارت گویا

عبارت کسری را که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، یک عبارت گویا می‌نامند.

## دامنه‌ی عبارت گویا

برای تعیین دامنه‌ی عبارت گویا، ابتدا مخرج کسر را تجزیه کرده و ریشه‌های مخرج را تعیین می‌کنیم. دامنه‌ی عبارت گویا، تمامی اعدادی هستند که مخرج کسر را صفر نکرده باشند.

## حل معادلات گویا

- ۱- دامنه‌ی عبارت گویا را تعیین می‌کنیم.
  - ۲- همه عبارات را به یک سمت معادله انتقال می‌دهیم و مخرج مشترک می‌گیریم.
  - ۳- صورت عبارت را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های صورت را تعیین می‌کنیم.
  - ۴- ریشه‌هایی از صورت را که جزو دامنه‌ی عبارت گویا باشند، به‌عنوان جواب معادله معرفی می‌کنیم.
- مثال: معادله‌ی  $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2}$  را حل کنید.

مثال: پاسخ معادله‌ی  $\frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x}$  را بیابید.



مثال: به ازای چه مقداری از  $k$  معادله‌ی  $\frac{k}{3x} = \frac{x-5}{x^2-4x}$  دارای مجموعه جواب  $\{5\}$  است؟



### عبارات گنگ

عبارتی که گویا نباشد را گنگ می‌نامند. نکته مهم این است که در عبارت گنگ الزاماً باید متغیر زیر رادیکال باشد و اگر اعداد زیر رادیکال باشند، عبارت را تبدیل به عبارت گنگ نمی‌کنند.

### دامنه‌ی عبارات گنگ

هر گاه یک عبارت جبری گنگ حاوی رادیکال با فرجه‌ی فرد باشد، در تعیین دامنه، رادیکال فرجه‌ی فرد هیچ‌گونه تأثیری ندارد.

$$p(x) = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow D_p = D_f$$

ولی اگر عبارت گنگ حاوی عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج باشد، برای تعیین دامنه، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$p(x) = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow D_p = \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

### حل معادلات گنگ

- ۱- ابتدا دامنه‌ی عبارت گنگ را می‌یابیم.
- ۲- عبارت رادیکالی را به یک سمت معادله و بقیه‌ی عبارات را به سمت دیگر منتقل می‌کنیم.
- ۳- طرفین را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم تا رادیکال در معادله از بین برود.
- ۴- معادله‌ی به‌دست آمده را حل می‌کنیم.
- ۵- ریشه‌هایی را مورد قبول قرار می‌دهیم که اولاً در دامنه‌ی عبارات رادیکالی قرار داشته باشند، ثانیاً با جایگذاری در معادله، برابری طرفین معادله بر هم نخورد (ریشه در معادله صدق کند).

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$5 - 2\sqrt{2x-1} = 1$$

$$5 + \sqrt{x-2} = 2$$

$$x + \sqrt{x} = 6$$

مثال: معادلات زیر چند ریشه دارند؟



$$3x - 2 = 2\sqrt{1 - 4x^2}$$

$$\sqrt[4]{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$$

$$(x^2 - x)\sqrt{x - 2} = 0$$

$$2x + \sqrt{2x - 3} = 3$$

مثال: تنها ریشهٔ معادلهٔ  $x - \sqrt{x+1} = 1$  کدام است؟

(گزینه دو ۹۹)

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۸

(۱) -۱

مثال: اگر  $x = 2$  یکی از جواب‌های معادلهٔ  $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1 - mx}{x^3 - x} = \frac{x^2}{2 - x^2}$  باشد، جواب دیگر

این معادله کدام است؟

(۴) ندارد

(۳) -۲

(۲) ۱

(۱) صفر

مثال: اگر  $x = 4$  یکی از جواب‌های معادلهٔ  $x + a = \sqrt{5x - x^2}$  باشد، جواب دیگر این معادله

(تقریبی ۱۷)

کدام است؟

(۴) ندارد

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱)  $\frac{1}{2}$

مثال: اگر  $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$  باشد، عدد  $\frac{a+1}{a}$ ، کدام است؟

(تقریبی ۹۸)

(۴) ۴ / ۵

(۳) ۳ / ۵

(۲) ۲ / ۵

(۱) ۱ / ۵

مثال: اگر  $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$  باشد، عدد  $4a + 9$ ، کدام است؟ (تقریبی خارج ۹۸)

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

مثال: اگر  $\alpha$  ریشه معادله  $1 + \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 4}$  باشد، مقدار عبارت  $\sqrt{\frac{\alpha}{3}} + 4$  برابر با چه عددی است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

(۱)  $\frac{5}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)  $2\sqrt{2}$



مثال: تعداد جواب‌های معادله  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2 + x}$  کدام است؟ (تلم‌پی ۹۹)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

مثال: معادله  $\frac{1}{x+2} - \frac{x^2 - 9x - 2}{x^3 + 8} = \frac{6x}{x^2 - 2x + 4}$  دارای چند جواب مثبت است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

مثال: کدام گزینه دربارهٔ ریشه یا ریشه‌های معادلهٔ گویای  $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-4} = \frac{12}{-x^2 + 2x + 8}$

(گزینه دو ۱۴۰۰)

درست است؟

- (۱) فقط یک ریشهٔ مثبت دارد. (۲) فقط یک ریشهٔ منفی دارد.  
(۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (۴) دو یک ریشهٔ مثبت دارد.



مثال: معادلهٔ  $\frac{-x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1} + \frac{x}{x+1} = \frac{m}{x-1}$  جواب حقیقی ندارد. مجموع مقادیر  $m$  کدام

است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ / ۵ (۳) صفر (۴) ۵ / ۲۵



مثال: به ازای چه مقادیری از  $a$ ، معادله  $\frac{a}{x-2} - \frac{7+x}{x^2-2x} = \frac{x+3}{x}$  جواب حقیقی

ندارد؟

(۱)  $(0, 4)$

(۲)  $(0, 2)$

(۳)  $(2, 4)$

(۴)  $(-1, 1)$



مثال: به ازای چند مقدار  $a$ ، معادله  $\frac{a}{x^2-3x} + \frac{a}{x^2+3x} = \frac{x}{x^2-9}$  هیچ ریشه

قابل قبولی برای  $x$  ندارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

مثال: به ازای جميع مقادير حقيقي  $a$ ، معادله  $\frac{2}{x} + \frac{2}{1-a^2} = \frac{2}{x+2}$  دو جواب متمایز دارد،

به جز .....

(۲) هیچ مقدار برای  $a$

(۱) سه مقدار برای  $a$

(۴) یک مقدار برای  $a$

(۳) چهار مقدار برای  $a$

(IQ کج)

مثال: معادله  $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 4} = x^2 + 2x + 3$  چه نوع ریشه‌هایی دارد؟

(۲) دو ریشه متمایز

(۱) ریشه ندارد

(۴) یک ریشه مضاعف

(۳) یک ریشه ساده



یادآوری:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2 \vee \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

(مبتکران ۹۹)

مثال: معادله  $\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x} = 1$  چند جواب دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۱

(۴) -۱

(ریاضی ۱۴۰۱)

مثال: اگر  $\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^3 - 1} = 2$  باشد، حاصل  $\left( \frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}} \right)^{1401}$

مثال: اگر  $\frac{1}{a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = 2a$  باشد، حاصل  $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{a^2 - a + 1}}$  چقدر

است؟

(ریاضی مبر ۱۴۰۱)

(۴)  $-\sqrt[3]{2}$

(۳)  $\sqrt[3]{2}$

(۲) ۱

(۱) -۱



مثال: مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9}$  کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۲)

(۴) ۲ / ۲۵

(۳) ۲

(۲) ۱ / ۷۵

(۱) ۱



مثال: مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{40}{9}$  کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۴ / ۵ (۴)

۴ (۳)

۲ / ۵ (۲)

۲ (۱)

مثال: معادله  $3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0$  از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

(۱) یک جواب دارد.

(۲) دو جواب هم‌علامت دارد.

(۳) دو جواب غیر هم‌علامت دارد.

(۴) جواب ندارد.

مثال: اختلاف ریشه‌های معادله  $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$  چقدر است؟

(مدارس برتر ۱۴۰۰)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مثال: برای چند مقدار صحیح و یک رقمی  $a$ ، جواب معادله  $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟  
(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

مثال: فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های  $y = x^2$  و  $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$  با مبدأ مختصات، کدام است؟  
(تجربی ۱۴۰۰)

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{15}$

حالت خاص: عباراتی که تکرار می‌شوند را عموماً تغییرمتغیر می‌دهیم.

مثال: حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴



مثال: مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt{x^2 + 2x} = (x + 1)^2$  کدام است؟

(قلم پی ۹۹)

۱ (۴)

- ۱ (۳)

- ۲ (۲)

۲ (۱)

مثال: تعداد جواب‌های مثبت معادله  $\sqrt{2x^2 - 6x + 8} = 3x - x^2$  کدام است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مثال: معادله  $\sqrt{x-2} + \frac{4}{\sqrt{x-2} + 1} = 3$  چند ریشه دارد؟

(IQ کج)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

مثال: معادله  $\frac{1}{\sqrt{2-x} + 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$  چند ریشه مثبت

(تقریبی خارج ۱۴۰۱)

دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



نکته: در سؤالاتی که مجموع چند عبارت رادیکالی فرجه زوج برابر صفر شده باشد، تک تک رادیکال‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه مشترک تمام آن‌ها را به عنوان جواب اعلام می‌کنیم.

مثال: تعداد جواب‌های معادله  $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[4]{x^3 - 1} + \sqrt{x^4 - x} = 0$  کدام است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

مثال: تعداد جواب‌های معادله  $\left(x^3 + 4x - 5\right)^2 + |x^2 - x| + \sqrt{x^4 + x^2 - 2} = 0$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

نکته: در صورت وجود تعداد زیادی رادیکال‌های تو در تو، قبل از هر کاری دامنه رادیکال‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال: معادله  $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$  چند ریشه حقیقی دارد؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

مثال: معادله  $2\sqrt{7x+8} - \sqrt{8-2x} = 4\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-12}$  در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



مثال: تعداد جواب‌های معادله  $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}} + \sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}} = x+2$  کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر



نکته: در رادیکال‌های فرجهٔ ۳ سراغ اتحاد چاق و لاغر می‌رویم.

مثال: فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادلهٔ 
$$\left( \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) \left( \sqrt[3]{x^2} - 1 \right) = 2 \sqrt[3]{x}$$

(تقریبی ۱۴۰۰)

باشند. مقدار  $x_1 + x_2$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

۱- (۱)

نکته: در معادلاتی که طرفین علامت تساوی، غیرهم‌جنس هستند، بهترین راه رسم توابع در یک دستگاه مختصات و یافتن نقاط برخورد می‌باشد. عموماً در مواردی که تعداد جواب می‌خواهد و یا معادلات رادیکالی که با تغییرمتغیر حل نمی‌شوند، رسم بهترین راه حل مسأله است.

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

مثال: معادلهٔ  $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{x}$  چند جواب حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

مثال: معادله  $x^2 - 2 = \sqrt{x + 3}$  چند جواب دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

(علی سنج ۱۴۰۱)

مثال: معادله

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

چند ریشه مثبت دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

(تبریزی ۱۴۰۱)

مثال: معادله

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}}$$

دارای چند جواب است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) صفر

(تبریزی مهر ۱۴۰۱)

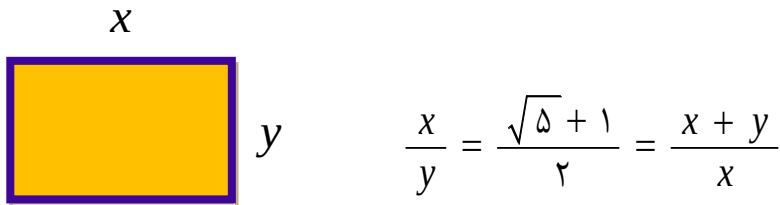


معادلات کاربردی

مثال: مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن گاه حاصل ضرب پول‌های باقیمانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟ (تقریبی ۱۴۰۰)

- (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۸۵ (۴) ۹۱

مسائل مستطیل طلایی و عدد طلایی



مثال: نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (تقریبی ۱۴۰۲)

- (۱)  $\sqrt{5} + 0.3$  (۲)  $0.2(1 + \sqrt{5})$  (۳)  $0.2\sqrt{5} + 0.6$  (۴)  $0.4(1 + \sqrt{5})$

مثال: از تقسیم اندازه قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟  
(تجربی خارج ۱۴۰۲)

$$(۱) \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(۲) \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(۳) \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

$$(۴) \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

### مسائل غلظت

غلظت یک ماده، برابر است با میزان خلوص یک ماده به کل ماده (مثلاً مقدار نمک به کل محلول)

$$C = \frac{x}{T} \Rightarrow C (\%) = \frac{Salt}{Salt + Water}$$

مثال: در یک محلول آب و نمک،  $x$  کیلوگرم نمک و  $6x + 10$  کیلوگرم آب وجود دارد. اگر غلظت نمک  $12.5\%$  باشد، با افزودن  $10$  کیلوگرم آب و  $10$  کیلوگرم نمک، غلظت نمک چند درصد خواهد بود؟

$$(۱) 20$$

$$(۲) 30$$

$$(۳) 15$$

$$(۴) 35$$

(کاج ۱۴۰۰)

مثال:  $15^\circ$  کیلوگرم محلول آب نمک  $8^\circ$  درصدی در ظرفی موجود است. برای آن که غلظت محلول را به  $10^\circ$  درصد افزایش دهیم،  $2/5$  کیلوگرم نمک به آن اضافه کرده‌ایم. چه تغییری باید در آب درون محلول انجام دهیم؟

(۱)  $7/5$  کیلوگرم آب تبخیر کنیم. (۲)  $8/0$  کیلوگرم آب تبخیر کنیم.

(۳)  $7/5$  کیلوگرم آب به آن اضافه کنیم. (۴)  $8/0$  کیلوگرم آب به آن اضافه کنیم.



مثال: جسمی به جرم  $200$  گرم، از جنس آلیاژ طلا و نقره است. اگر خلوص طلای آن  $45\%$  باشد و بخواهیم درصد خلوص طلا را به  $30\%$  برسانیم، چند گرم نقره باید به آن اضافه کنیم؟ (مدارس برتر ۱۴۰۱)

(۱)  $120$  (۲)  $150$  (۳)  $167$  (۴)  $100$



مثال: یازده کیلوگرم رنگ با غلظت  $40^\circ$  درصد، با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت  $70^\circ$  درصد، مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به  $50^\circ$  درصد می‌رسد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

(۱)  $4/0$  (۲)  $5/0$  (۳)  $6/0$  (۴)  $8/0$



مسائل سرعت

$$V = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

عموماً این مسائل را بر حسب زمان حل می‌کنیم.

مثال: فاصله دو شهر A و B برابر با ۴۵۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B می‌رود و برمی‌گردد. سرعت رفت پنج کیلومتر بر ساعت کمتر از سرعت برگشت است و زمان رفت، یک ساعت بیشتر از زمان برگشت است. سرعت رفت چند کیلومتر بر ساعت است؟  
(موج آزمون الگو)

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۵

مثال: پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر بر ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر بر ساعت است؟  
(تقریبی فارغ ۹۱)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۳/۵ (۴) ۱۵

مثال: سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟  
(تقریبی ۹۱)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

مسائل همکاری

توان هر فرد را در یک واحد زمانی در نظر می‌گیریم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال: دو حسابدار مشغول حسابرسی در یک اداره می‌باشند. اگر حسابدار اول به تنهایی این کار را در ۱۲ روز و حسابدار دوم در ۶ روز انجام دهد، این دو با هم در چند روز این کار را انجام می‌دهند؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

مثال: یک مخزن آب توسط دو شیر آب پُر می‌شود، شیر A به تنهایی در ۵ ساعت می‌تواند این مخزن را پُر کند و شیر B به تنهایی در ۱۰ ساعت این مخزن را پُر می‌کند. در ابتدا مخزن خالی است، شیر A را ۲ ساعت باز می‌کنیم، از این لحظه به بعد اگر شیر B را نیز باز کنیم، چه مقدار طول می‌کشد که مخزن آب پُر شود؟

- (۱) یک ساعت. (۲) یک ساعت و ۳۰ دقیقه. (۳) دو ساعت. (۴) یک ساعت و ۴۵ دقیقه.

مثال: یک شیر آب، یک استخر را در ۶ ساعت و شیر آب دیگری همان استخر را در  $t$  ساعت پُر می‌کند. اگر دو شیر آب هم‌زمان باز شوند، استخر در ۵ ساعت پُر می‌شود. شیر آب دوم، به تنهایی استخر را در چند ساعت پُر می‌کند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۳۰



مثال: دو نفر با هم یک خانه را ۱۵ روزه رنگ می‌کنند، اگر سرعت نقاش اول ۳ برابر سرعت نقاش دوم باشد، مدت زمانی که لازم است تا نقاش دوم به تنهایی خانه را رنگ کند، چقدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰ (۴) ۵۰



مثال: بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی ۹۱)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶



مثال: دو نفر کاری را با هم انجام می‌دهند. نفر اول به تنهایی نیم ساعت زودتر از نفر دوم کار را انجام می‌دهد. اگر هر دو نفر با هم کار کنند، کار ۱۰ دقیقه زودتر از موقعی انجام می‌شود که نفر اول کار را انجام می‌داد. نفر دوم به تنهایی در چه زمانی کار را انجام می‌دهد؟

- (۱) ۱۰ دقیقه (۲) نیم ساعت (۳) ۴۵ دقیقه (۴) یک ساعت



## قدر مطلق

### تعریف قدر مطلق

قدر مطلق به معنی فاصله‌ی بین دو پارامتر می‌باشد.

دو نقطه روی محور طول‌ها فرض می‌کنیم که نسبت به مبدأ (نقطه‌ی با طول صفر) قرینه باشند.  
 $A' (-x, 0)$  و  $A (x, 0)$  که نسبت به مبدأ و محور عمودی قرینه‌ی یکدیگرند.  
 فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی مذکور نسبت به مبدأ مختصات به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |OA'| = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(-x - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{x^2} \\ |OA| = \sqrt{(x_{A'} - x_O)^2 + (y_{A'} - y_O)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{x^2} \end{cases}$$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  روی خط  $y = 2x$  با طول مثبت تا مبدأ مختصات برابر  $2\sqrt{5}$  و فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی

$B (m, 0)$  برابر  $\sqrt{17}$  است. مجموع مقادیر ممکن برای  $m$  کدام است؟ (کاج ۱۴۰۰)

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی مورد نظر نسبت به مبدأ مختصات با یکدیگر برابر هستند، لذا تابعی نیاز است که این فاصله‌ی برابر که عددی مثبت می‌باشد را بیان کند. به همین منظور تابع قدر مطلق برای بیان فاصله به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

زمانی مجاز به برداشتن علامت قدرمطلق هستیم که علامت عبارت داخل قدرمطلق را بطول قطع بتوانیم تعیین نماییم. یعنی اگر علامت عبارت داخل قدرمطلق مثبت باشد، خود عبارت را می‌نویسیم و اگر علامت عبارت داخل قدرمطلق منفی باشد، برای آن که مثبت شود، قرینه‌ی عدد را می‌نویسیم. مثال: عبارت زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

$$f(x) = |\cos x - 3| =$$

$$g(x) = |x^2 - 1| =$$

$$|-x| =$$

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| =$$

$$|x^2 + 1| =$$

$$|x - 2| =$$

$$|x^3| =$$

مثال: اگر  $3 < x < 4$  باشد، عبارت  $|x - 4| + |2x - 1| - |-2x - 4|$  را ساده نمایید.



ویژگی‌های قدرمطلق

- ۱)  $\forall x \in \mathbb{R} ; |x| \geq 0$
- ۲)  $\forall x \in \mathbb{R} ; |x| \geq x$
- ۳)  $\forall x \in \mathbb{R} ; x \geq -|x|$
- ۴)  $\forall x \in \mathbb{R} ; |x| = |-x|$
- ۵)  $\sqrt{x^2} = |x|$
- ۶)  $-|x| \leq x \leq |x|$
- ۷)  $|x|^r = |x^r| = x^r$
- ۸)  $|xy| = |x| \times |y|$
- ۹)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} , y \neq 0$
- ۱۰)  $|x|^{rn} = |x^{rn}| = x^{rn}$
- ۱۱)  $|x|^{rn-1} = |x^{rn-1}|$
- ۱۲)  $|x| = k \xrightarrow{k > 0} x = \pm k$
- ۱۳)  $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$
- ۱۴)  $|x| = \max\{x, -x\}$
- ۱۵)  $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
- ۱۶)  $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$
- ۱۷)  $|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$
- ۱۸)  $|x| \geq k \Rightarrow x \geq k \vee x \leq -k$
- ۱۹)  $|x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$
- ۲۰)  $|x+y| \leq |x| + |y| \Rightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \Rightarrow |x+y| = |x| + |y| \\ xy < 0 \Rightarrow |x+y| < |x| + |y| \end{cases}$
- ۲۱)  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
- ۲۲)  $\sqrt[n+1]{x^{n+1}} = x$

مثال: اگر  $x < 0$  باشد، معادله‌ی  $\sqrt{x^2} + 2\sqrt[3]{x^3} = 1$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟



مثال: اگر  $x < 0$  باشد، حاصل  $A = |6x + |8x||$  را بیابید.



مثال: اگر  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  باشد، مقدار عبارت  $A = \cos x + |\cos x|$  را بیابید.

مثال: نامعادله‌ی  $|x^2 + x - 1| < x^2 + |x - 1|$  را حل کنید.

مثال: اگر  $x^2 + 2x < 0$  حاصل عبارت  $A = |2 + x| + |x - 1| + 2$  را بیابید.

مثال: خلاصه شده‌ی عبارت  $|x^9| |x^4|$  کدام گزینه است؟

(۱)  $x^{13}$

(۲)  $\frac{|x^{14}|}{x}$

(۳)  $|x| x^{12}$

(۴)  $|x| x^{12}$



## حل معادلات قدرمطلق

### (۱) حالات خاص معادلات قدرمطلق

$$۱) \quad |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$۲) \quad |f(x)| = k \xrightarrow{k > 0} f(x) = \pm k$$

$$۳) \quad |f(x)| = k \xrightarrow{k < 0} \emptyset$$

$$۴) \quad |f(x)| = |g(x)| \Rightarrow |f(x)| = \pm g(x)$$

$$۵) \quad |f(x)| = g(x) \Rightarrow |f(x)| = \pm g(x), \quad D = \{x \mid g(x) \geq 0\}$$

$$۶) \quad |f(x)| = f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$۷) \quad |f(x)| = -f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$۸) \quad |f(x)| + |g(x)| + |h(x)| + \dots = \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$۹) \quad |x - a| + |x - b| = k, \quad k > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a) \quad |a - b| > k \Rightarrow \emptyset$$

$$b) \quad |a - b| < k \Rightarrow x = \frac{a + b \pm k}{2}$$

$$c) \quad |a - b| = k \Rightarrow x \in [a, b]$$

مثال: معادله  $(x - 1)^2 - 5|x - 1| + 4 = 0$  را حل کنید.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.



$$\left| 1 + 3\sqrt{x} \right| = -5$$

$$\left| x - 1 \right| + \left| x^2 - 1 \right| + \left| x^3 - 1 \right| = 0$$

$$\left| x^2 - 2x \right| + \left| x^5 - x^4 - 8x \right| = 0$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\left| x - 1 \right| + \left| x - 8 \right| = 2$$

$$\left| x + 3 \right| + \left| x - 4 \right| = 9$$

$$\left| x + 2 \right| + \left| x - 5 \right| = 7$$

مثال: معادله‌ی  $|x + 3| + |x + 8| = 5$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟



مثال: معادله‌ی  $|81 - x^2| = 81 - x^2$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟



## ۲- معادلات قدرمطلق (روش کلی)

ابتدا عبارت داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و پس از ناحیه‌بندی، معادله را در حل ناحیه حل کرده و جواب‌هایی را قابل قبول می‌دانیم که در محدوده مورد نظر قرار داشته باشند.

مثال: معادله‌ی  $|x - 3| + |2x| = 6$  را حل کنید.

### حل نامعادلات قدرمطلق

۱- نامعادلات قدرمطلق (حالت‌های خاص)

- ۱)  $|f(x)| \leq k \xrightarrow{k > 0} -k \leq f(x) \leq k$
- ۲)  $|f(x)| \leq k \xrightarrow{k < 0} \emptyset$
- ۳)  $|f(x)| < 0 \rightarrow \emptyset$
- ۴)  $|f(x)| \leq 0 \rightarrow f(x) = 0$
- ۵)  $|f(x)| \geq k \xrightarrow{k > 0} f(x) \geq k \vee f(x) \leq -k$
- ۶)  $|f(x)| \geq k \xrightarrow{k < 0} x \in D_{f(x)}$
- ۷)  $|f(x)| \geq 0 \rightarrow x \in D_{f(x)}$
- ۸)  $|f(x)| > 0 \rightarrow x \in D_{f(x)} - \{x \mid f(x) = 0\}$
- ۹)  $|f(x)| \geq |g(x)| \rightarrow f^2(x) \geq g^2(x)$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید.



$$|x^2 + x| < 2$$

$$|3x^2 - 6x| \leq 0$$

$$\left| \frac{x+1}{2x-1} \right| \geq 1$$

مثال: در چه بازه‌ای تابع  $f(x) = x^2$  بالاتر از تابع  $y = |3x - 4|$  قرار نمی‌گیرد؟



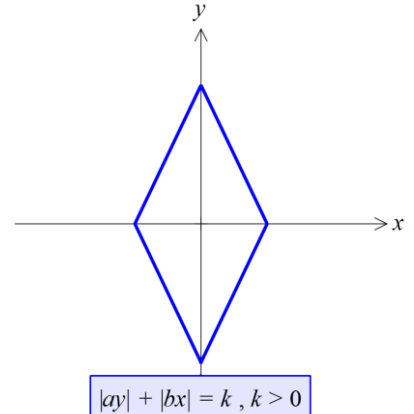
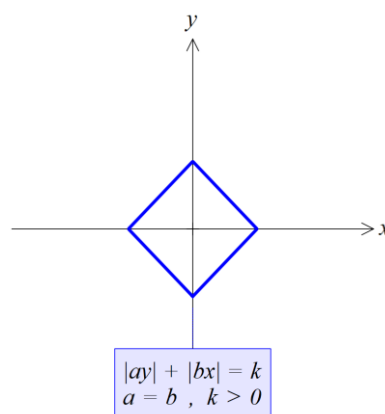
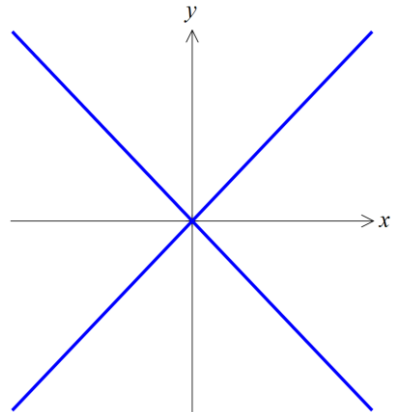
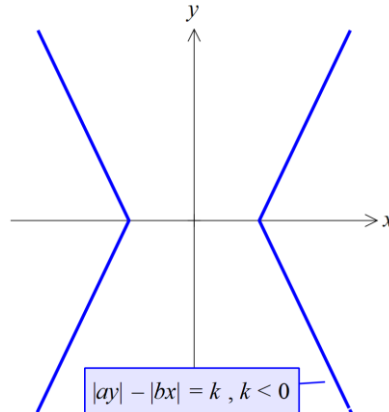
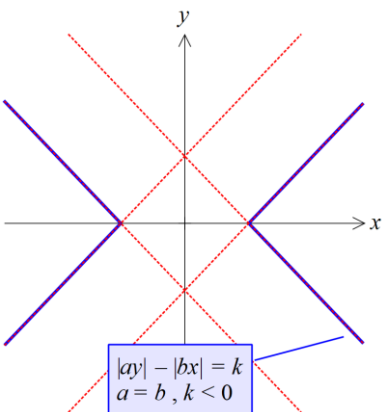
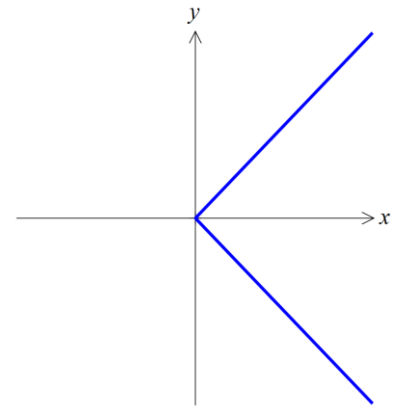
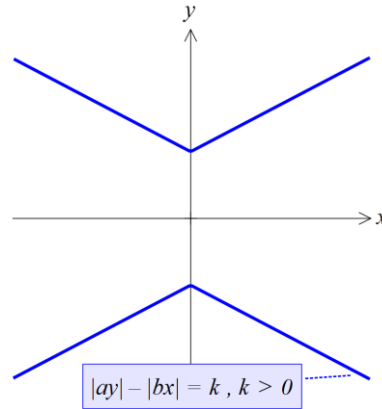
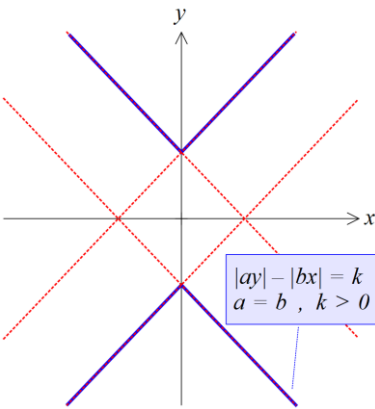
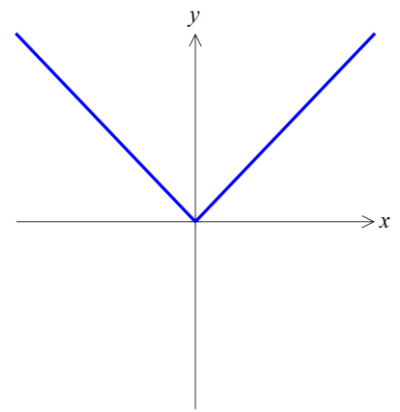
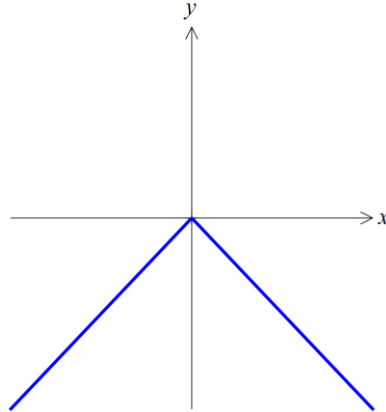
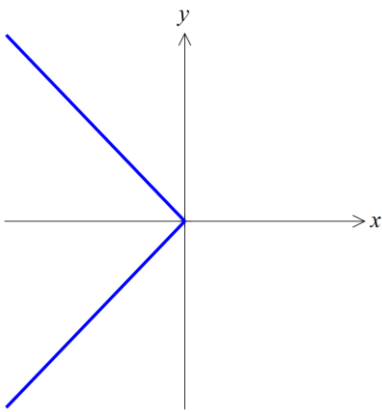
## ۲- نامعادلات قدرمطلق (روش کلی)

ابتدا عبارت داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و پس از ناحیه‌بندی، نامعادله را در حل ناحیه حل کرده و جواب‌های هر ناحیه را با محدوده مورد نظر آن اشتراک گرفته و در نهایت اجتماع بین جواب‌های مراحل مختلف را به عنوان جواب کلی نامعادله قبول می‌کنیم.

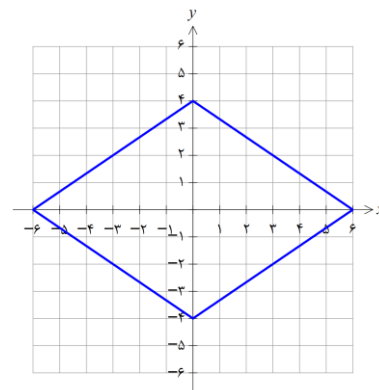
مثال: نامعادله  $|x - 1| + |x - 3| > 2x$  را حل کنید.



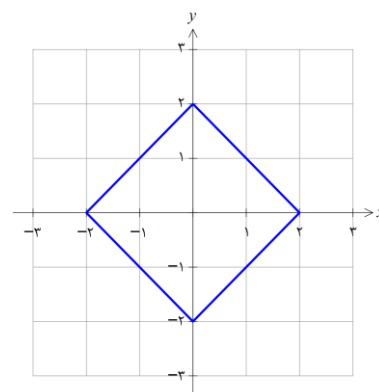
نمودارهای خاص



مثال: نمودار تابع  $|2x| + |3y| = 12$  را رسم کنید و مساحت آن را بیابید.



مثال: نمودار تابع  $|2x| + |2y| = 4$  را رسم کنید و بیان کنید که شکل حاصل بیانگر کدام شکل هندسی می باشد و مساحت آن را بیابید.

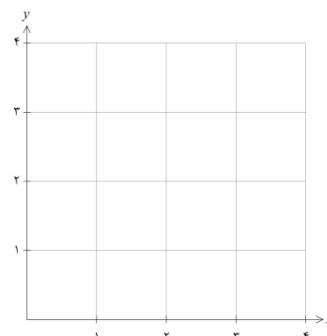


مثال: نمودار تابع  $|x + 1| + |y - 2| = 0$  چه شکلی را بیان می کند؟

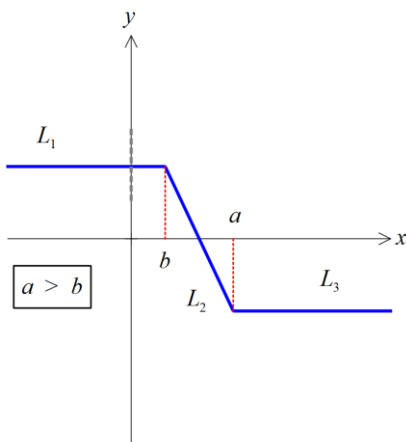
رسم نمودار تابع قدرمطلق  $y = a + b |cx + d|$  ,  $b, c \neq 0$

ابتدا نقطه‌ی  $S$  که در آن  $x_S = \frac{-d}{c}$  می باشد را به عنوان رأس تابع قدرمطلق در نظر گرفته و با در نظر گرفتن دو نقطه (یکی سمت چپ و دیگری در سمت راست)، تابع مورد نظر را رسم می کنیم.

مثال: نمودار تابع  $y = 3|2x - 4| + 1$  را رسم نمایید.



توابع گلدانی و آبشاری (سُرسُره‌ای):



$$y = |x - a| - |x - b|$$

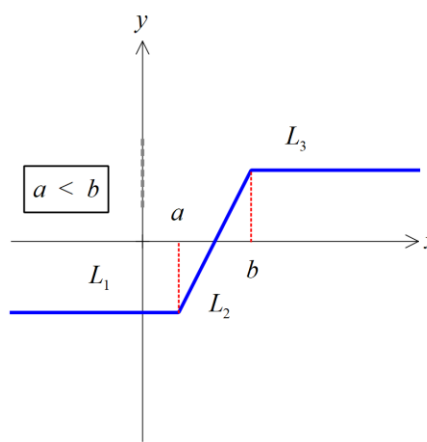
$$L_1: y = |a - b|$$

$$L_2: y = -2x + a + b$$

$$L_3: y = -|a - b|$$

$$R_f = [-|a - b|, |a - b|]$$

$$w = \left( \frac{a + b}{2}, 0 \right)$$



$$y = |x - a| - |x - b|$$

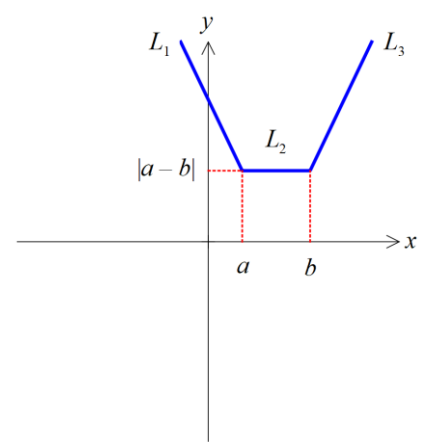
$$L_1: y = -|a - b|$$

$$L_2: y = 2x - a - b$$

$$L_3: y = |a - b|$$

$$R_f = [-|a - b|, |a - b|]$$

$$w = \left( \frac{a + b}{2}, 0 \right)$$



$$y = |x - a| + |x - b|$$

$$L_1: y = -2x + a + b$$

$$L_2: y = |a - b|$$

$$L_3: y = 2x - a - b$$

$$R_f = [|a - b|, +\infty)$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

$$y = a_1 |x - x_1| + a_2 |x - x_2| + \dots + a_n |x - x_n| \quad a_i, x_i \in \mathbb{R} \quad \text{تابع}$$

برای رسم تابع قدرمطلق شامل مجموع چند قدرمطلق، ابتدا ریشه‌ی تمام قدرمطلق‌ها را یافته و در سمت چپ کوچکترین ریشه و سمت راست بزرگترین ریشه، دو عدد دیگر به عنوان نقاط کمکی در نظر گرفته و در نهایت با رسم تمامی نقاط مذکور، تابع را رسم می‌کنیم.

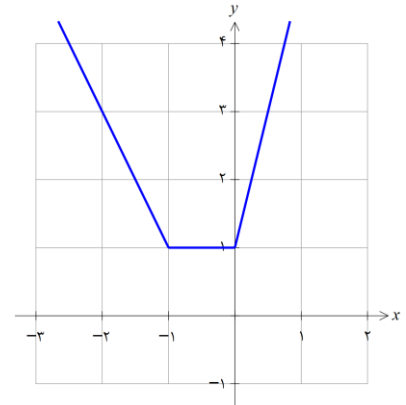
$$y = |f(x)| \quad \text{تابع}$$

ابتدا تابع  $y = f(x)$  را رسم کرده و سپس قسمتی از نمودار را که بالای محور افقی می‌باشد، دست نزده و قسمتی از نمودار که زیر محور افقی ترسیم شده است را به بالای محور افقی متقارن می‌کنیم.

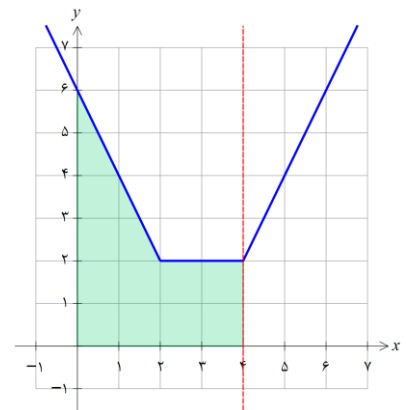
$$y = f(|x|) \quad \text{تابع}$$

ابتدا نمودار تابع  $y = f(x)$  را رسم کرده و سپس قسمت چپ محور قائم را حذف کرده و قرینه‌ی قسمت راست محور قائم را به سمت چپ منعکس می‌کنیم.

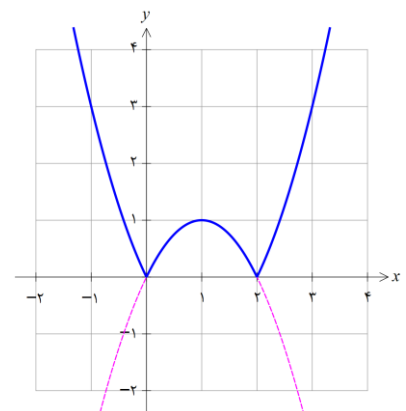
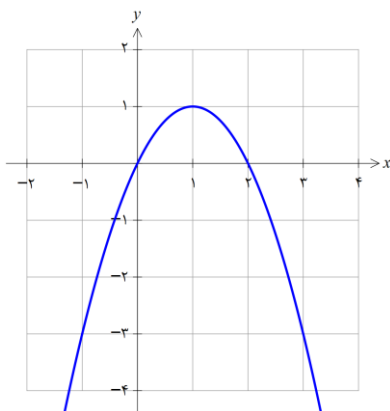
مثال: تابع  $y = 2|x| + |x+1| + x$  را رسم کنید.



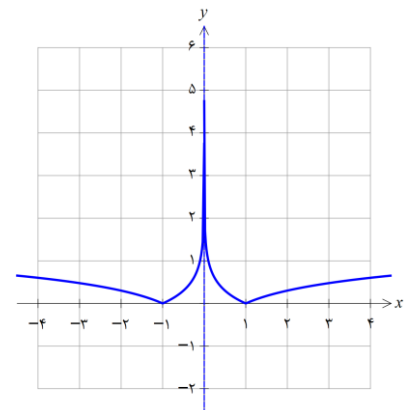
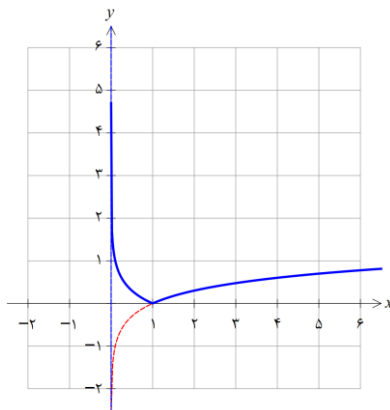
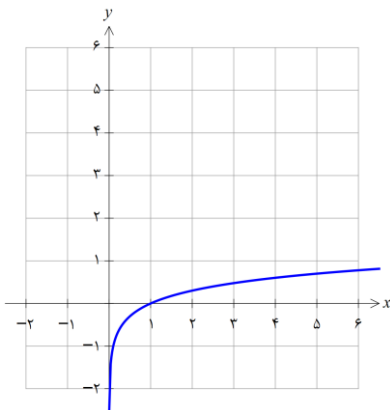
مثال: تابع  $y = |x-2| + |x-4|$  را رسم کرده و مساحت محدود به این تابع و محورها و خط  $x=4$  را بیابید.



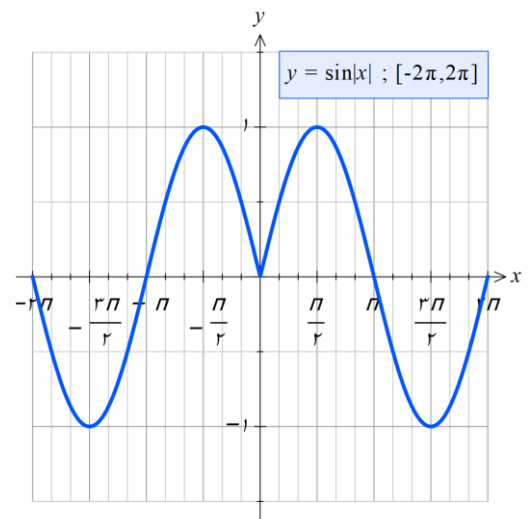
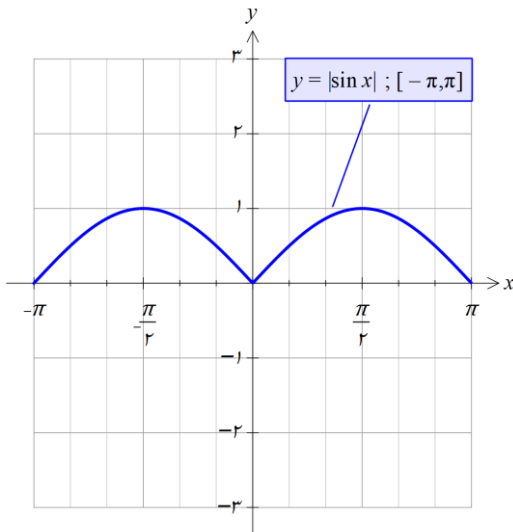
مثال: تابع  $y = |2x - x^2|$  را رسم کنید.



مثال: تابع  $y = |\log |x||$  را رسم کنید و برد آن را بیابید.



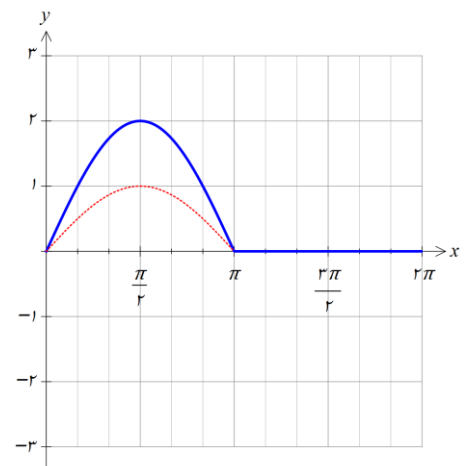
مثال: توابع  $y = \sin |x|$  و  $y = |\sin x|$  را رسم نمایید.



### رسم توابع قدرمطلق در حالت کلی

ابتدا باید عبارات داخل قدرمطلقها را تعیین علامت کرده و پس از ناحیه‌بندی و تبدیل تابع به یک تابع چندضابطه‌ای، تابع مورد نظر را رسم نماییم.

مثال: تابع  $y = \sin x + |\sin x|$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم نمایید.

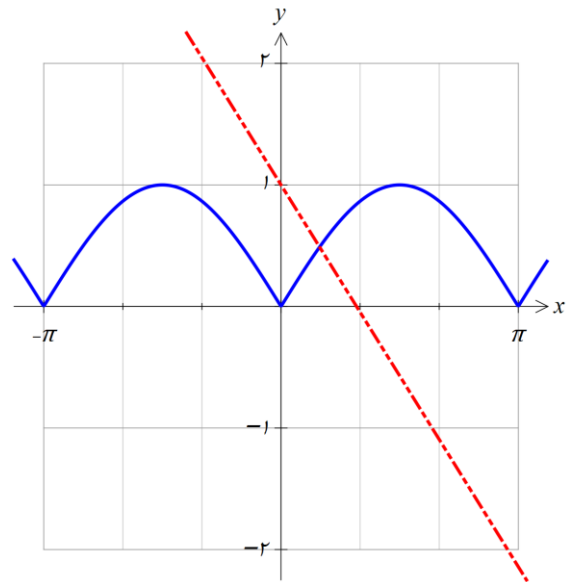


### حل معادله و نامعادله به کمک رسم:

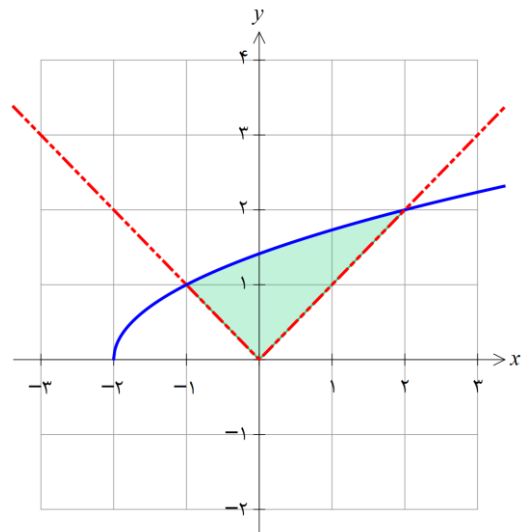
برای حل معادلات و نامعادلات به روش ترسیمی (هندسی) ابتدا دو تابع سمت چپ و راست تساوی را در یک دستگاه ترسیم کرده و سپس:

- الف) معادله  $f(x) = g(x)$  یعنی طول نقاط برخورد توابع  $f$  و  $g$ .  
 ب) نامعادله  $f(x) > g(x)$  یعنی  $x$  هایی که نمودار  $f$  بالاتر از نمودار  $g$  قرار می گیرد.  
 ج) نامعادله  $f(x) < g(x)$  یعنی  $x$  هایی که نمودار  $g$  بالاتر از نمودار  $f$  قرار می گیرد.

مثال: معادله  $|\sin x| = -x + 1$  چند ریشه دارد؟



مثال: نامعادله  $\sqrt{x+2} > |x|$  را حل کنید.



## جزء صحیح

تعریف تابع جزء صحیح:

جزء صحیح عدد  $x$  یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیحی که از عدد  $x$  بیشتر نباشد.

$$[x] = \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \}$$

معرفی جزء صحیح: اگر هر عدد حقیقی  $x$  را به صورت  $x = n + p$  بنویسیم که در آن  $n$  قسمت

صحیح عدد بوده و  $p$  قسمت اعشاری مثبت عدد باشد، آن‌گاه جزء صحیح عدد  $x$  که با نماد  $[x]$

معرفی می‌گردد برابر است با:

$$x = n + p \xrightarrow{0 \leq p < 1} [x] = n$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x] \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$x \notin \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n < x < n + 1 \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \leq x < n + 1$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + k] = [x] + k$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \leq nx - [nx] < 1$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

$$\underbrace{[x + [x + [x + \dots]]]}_n \leq n[x]$$

مثال: مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

$$[2\sqrt{7}] + [3\sqrt{8}] =$$

$$[\log_3 5] =$$

$$\left[ -\log_5 3 \right] =$$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} - \sqrt{7} \right] =$$

$$\left[ \log 23957 \right] + \left[ \log 0.00625 \right] =$$

مثال: اگر  $x = \sqrt{17}$  حاصل  $\left[ x + \left[ x + \left[ x \right] \right] \right]$  را بیابید.

مثال: برد تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x - 25 \left[ \frac{x}{25} \right]}$$

حل معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح

مثال: معادلات زیر را حل کنید.



$$\left[ \frac{x+2}{3} \right] = -1$$

$$\left[ \frac{2}{\sqrt{x}} \right] = 3$$

$$\left[ \frac{2x-1}{3} \right] < -5$$

$$[x] \geq \sqrt{3}$$

مثال: حدود متغیر  $x$  را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$[x] - [-x] = 3$$



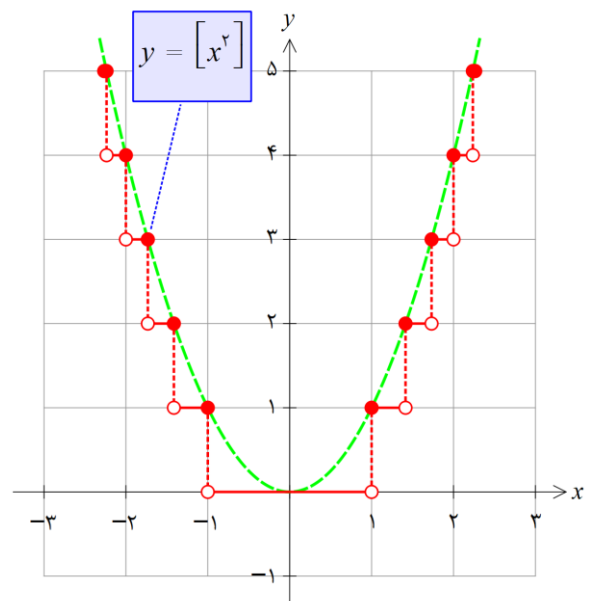
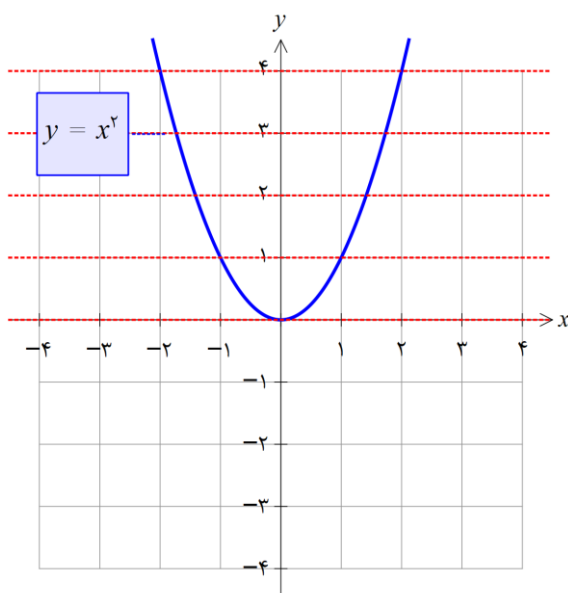
مثال: دامنه‌ی تعریف تابع  $f(x) = \frac{3x+7}{4-2[-x]}$  را بیابید.

مثال: معادله‌ی  $x^2 = [x] + [-x] + 1$  چند ریشه دارد؟

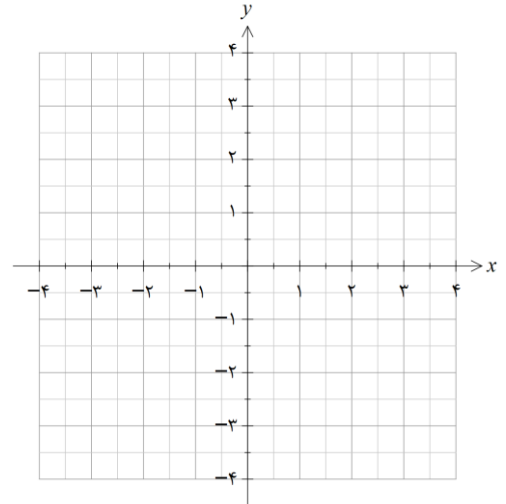
رسم تابع جزء صحیح:

برای رسم تابع  $f(x) = [g(x)]$  در دستگاه مختصات، ابتدا تابع  $g(x)$  را رسم کرده و سپس خطوط افقی را که در آن‌ها عرض نقاط صحیح هستند رسم می‌کنیم (خطوطی را رسم می‌کنیم که تابع رسم شده را قطع کنند).

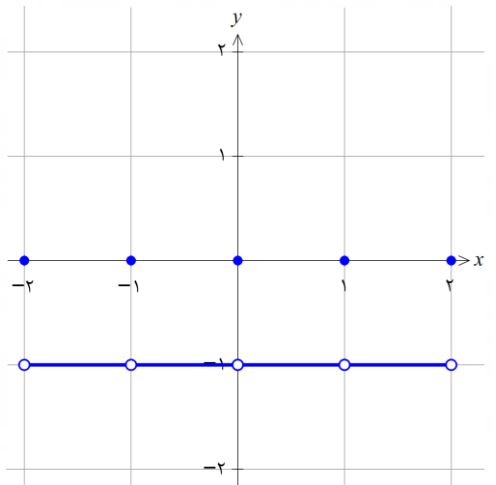
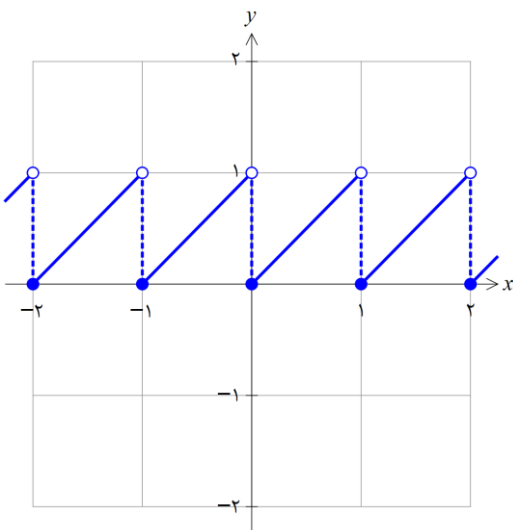
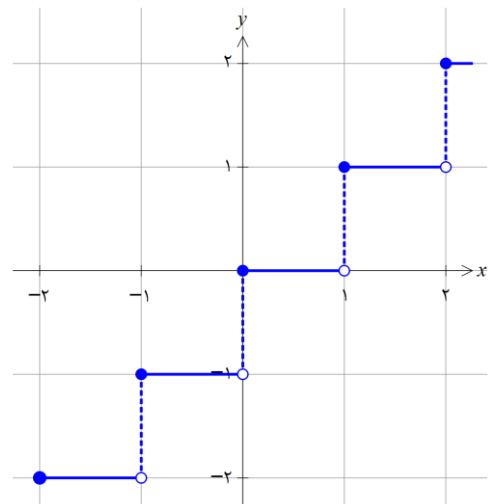
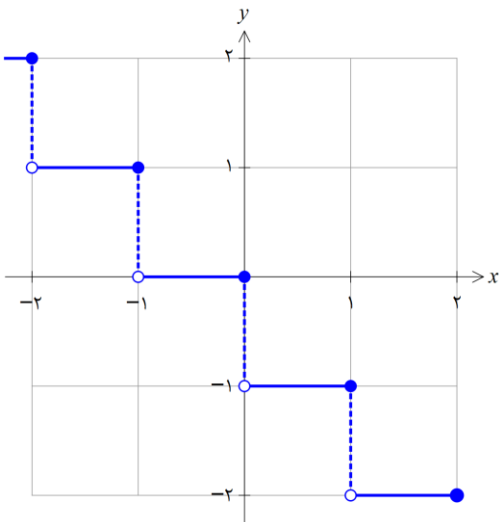
هر یک از نقاط تقاطع را ابتدا توپر کرده و سپس روی خط پایینی تصویر کرده و تصویر آن را توخالی در نظر می‌گیریم.



مثال: نمودار تابع  $y = \frac{[x-2]}{[x]}$  در بازه  $[-2, 3]$  دارای  $n$  پاره خط و  $m$  نقطه می باشد.  
دوتایی  $(m, n)$  را بیابید.



نمودار توابع خاص جزء صحیح



نمودارهای قدرمطلق

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{2}x + 2$ ، کدام

(ریاضی ۹۹)

است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = 5 - |x - 1|$  و  $y = |x|$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

مثال: اگر  $[x - 2] = 1$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$  و

(تجربی خارج ۹۷)

$g(x) = x^2 + x - 17$ ، در چند نقطه مشترک هستند؟

(۴) فاقد نقطه مشترک

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: مجموع جواب‌های معادله  $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ ، کدام است؟

(۱)  $-\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳) ۱

(ریاضی خارج ۹۱)

(۴)  $\frac{4}{3}$



مثال: نمودارهای دو تابع  $y = |x - 2| + |x + 1|$  و  $y = x + 7$ ، در دو نقطه A و B متقاطع هستند.

اندازه پاره خط AB، کدام است؟

(۱)  $8\sqrt{2}$

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳

(ریاضی خارج ۹۹)

(۴)  $10\sqrt{2}$



مثال: نمودارهای دو تابع  $y = |x + 2| + |x - 1|$  و  $3y + x = 17$  در دو نقطه A و B متقاطع

هستند. اندازه پاره خط AB، کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{10}$

(۲)  $4\sqrt{5}$

(۳)  $2\sqrt{2}$

(ریاضی خارج ۱۴۰)

(۴)  $4\sqrt{3}$

## توان های گویا و عبارت های جبری

ریشه ی  $n$  ام ( ریشه و توان )

ریشه ی  $n$  ام : اگر  $n \geq 2$  یک عدد طبیعی باشد، آن گاه  $b$  را یک ریشه ی  $n$  ام عدد  $a$  می نامیم و داریم:

$$b^n = a$$

نکته ۱ : می دانیم توان زوج هر عدد حقیقی غیر صفر ، همواره مثبت است، پس برای اعداد منفی، ریشه های دوم، چهارم، ششم و ... تعریف نمی شوند. به عنوان مثال ، عدد  $-9$  را در نظر می گیریم. هیچ عدد حقیقی را نمی توان پیدا کرد که در خودش ضرب شده و حاصل ضرب  $-9$  شود پس عدد  $-9$  ریشه مرتبه دوم ندارد.

نکته ۲ : هر عدد مثبت دو ریشه مرتبه زوج دارد که یکی از آنها حاصل رادیکال مورد نظر با فرجه خواسته شده است و دیگری قرینه آن عدد.

نکته ۳ : در عدد چه مثبت باشد و چه منفی، فقط و فقط یک ریشه مرتبه فرد ( سوم ، پنجم ، هفتم و ... ) دارد که اگر عدد مورد نظر منفی باشد، ریشه مرتبه فرد آن نیز منفی و در صورتی که عدد مورد نظر مثبت باشد، ریشه مرتبه فرد آن نیز مثبت خواهد بود.

مثال: اگر  $a$  ریشه ی سوم عدد  $343$  و  $b$  ریشه ی پنجم عدد  $243$  باشد، حاصل  $a^2 - b^2$  را بیابید.

## یافتن مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a}$

اگر ریشه ی  $n$  ام عدد  $a$  ، عددی صحیح نباشد، برای یافتن مقدار تقریبی عبارت رادیکال  $a$  با فرجه ی  $n$  ابتدا اعداد طبیعی را با توان  $n$  محاسبه می کنیم و بررسی می کنیم که عدد  $a$  بین کدام دو عدد طبیعی قرار می گیرد که به توان  $n$  رسیده باشند. آن دو عدد را  $b$  و  $c$  فرض می کنیم. حال یک عدد اعشاری با یک رقم اعشار بین  $b$  و  $c$  را فرض کرده و این عدد را  $n$  بار در خودش ضرب می کنیم، اگر حاصل بدست آمده از عدد  $a$  بیشتر شد، عدد فرض شده را کوچکتر در نظر گرفته و مجدداً بررسی می کنیم و اگر عدد مورد نظر از  $a$  کمتر شد، تلاش را با عددی بیشتر ادامه می دهیم.

مثال: مقدار تقریبی عدد  $\sqrt[3]{10}$  را با یک رقم اعشار بیابید.



مقایسه‌ی عدد  $a$  با  $\sqrt[n]{a}$  و  $a^n$  :

اگر عددی از ۱ بزرگ‌تر باشد، با افزایش توان حاصل بدست آمده از عدد  $a$  بزرگ‌تر خواهد بود و در ریشه‌گیری با افزایش فرجه‌ی رادیکال، حاصل بدست آمده از عدد  $a$  کوچکتر خواهد بود.  
در صورتی که عدد از ۱ کوچکتر باشد، با افزایش توان، حاصل بدست آمده کوچک شده و با افزایش فرجه‌ی رادیکال حاصل بزرگ‌تر می‌شود.  
در مورد اعداد منفی، جواب در صورت وجود ( اعداد منفی ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج ندارند ) رفتاری دقیقاً برعکس خواهد داشت.

مثال: اگر  $a > 1$  و  $0 < b < 1$  آنگاه عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید.

$$\sqrt[n]{a} \quad \square \quad \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a} \quad \square \quad \sqrt[n]{b}$$

اعمال جبری بر روی ریشه‌ی  $n$ ام یک عدد

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a b}$$

اگر  $n$  زوج باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  باید نامنفی باشند.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

با شرط  $b \neq 0$  ( وقتی  $n$  زوج باشد،  $a \geq 0$  و  $b > 0$  )

$$\left( \sqrt[n]{a} \right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

اگر  $n$  زوج باشد، مقادیر  $a$  باید نامنفی باشند.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \in \text{Even} \\ a & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

همواره برای دو عبارت  $\sqrt[n]{a^n}$  و  $\left( \sqrt[n]{a} \right)^n$  داریم:

$$\left( \sqrt[n]{a} \right)^n = \begin{cases} a \geq 0 & n \in \text{Even} \\ a & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{(a-b)^4} + \sqrt[5]{(|a|-b)^5}$$

مثال: اگر  $a < b < 0$ ، آنگاه حاصل عبارت

$$\sqrt[4]{(a-b)^4} \quad (۴) \quad \sqrt[5]{(|a|-b)^5} \quad (۳) \quad - \sqrt[4]{(a-b)^4} \quad (۲) \quad \sqrt[5]{(|a|-b)^5} \quad (۱)$$

### توان های گویا

برای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$ ، توان  $\frac{1}{n}$  عدد مثبت  $a$  را به صورت  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$  تعریف می کنیم.

تذکر: بطور کلی عبارت  $a^{\frac{1}{n}}$  به ازای  $a < 0$  تعریف نمی شود بنابراین هر جا صحبت از  $a^{\frac{1}{n}}$  می شود،  $a$

عددی مثبت در نظر گرفته می شود. بنابراین عبارت های  $(-2)^{\frac{1}{3}}$  و  $(-1)^{\frac{1}{5}}$  تعریف نمی شوند.

در حالت کلی هر گاه  $a > 0$  باشد، آنگاه برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$ ،  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ .

**توان های گویای منفی:** وقتی توان گویا منفی است، با استفاده از قانون  $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$  (عدد گویای

مثبت)، آن را به توان مثبت تبدیل می کنیم.

مثال: عدد  $5^{-2/5}$  را به صورت یک عدد رادیکالی بنویسید.

بطور کلی تمام قواعدی که برای توان های صحیح یک عدد غیر صفر  $a$  بکار می رود، برای توان های گویای آن نیز قابلیت استفاده دارد.

اگر  $a > 0$  و  $r$  و  $s$  دو عدد گویا باشند، قوانین زیر در توان های گویا برقرار است.

$$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

مثال: حاصل  $3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}}$  چند برابر  $\sqrt[15]{3^{11}}$  است؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

مثال: معکوس عدد  $27^{\frac{-2}{3}} \times 81^{-0.75}$  برابر است با:

$\sqrt[4]{27}$  (۴)

۲۴۳ (۳)

$\sqrt[4]{9}$  (۲)

۸۱ (۱)

## ساده سازی و توان رسانی رادیکال ها

**ضرب و تقسیم رادیکال ها با فرجه های نابرابر:** برای ضرب و تقسیم رادیکال ها با فرجه های نابرابر، هر کدام از رادیکال ها را به توان گویا تبدیل کرده و با استفاده از قوانین ضرب و تقسیم توان های گویا، حاصل عبارت را یافته و مجدداً پاسخ نهایی را به صورت رادیکالی نمایش می دهیم.

مثال: حاصل عبارت  $\sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[6]{a}$  را به صورت یک رادیکال بنویسید.

**ساده سازی فرجه و توان یک رادیکال:** اگر توان و فرجه ی یک رادیکال دارای عامل های مشترک باشند، می توانیم با استفاده از تعریف توان گویا، عبارت رادیکالی معادلی برای آن عدد رادیکالی بیابیم و برای این کار عموماً عامل توان و فرجه را به آن عامل مشترک تقسیم می کنیم.

$$k m \sqrt[k]{a^{k n}} = m \sqrt[m]{a^n} \quad \text{اگر } a > 0 \text{ و } (k, n, m \geq 2 \text{ اعداد طبیعی})$$

از رابطه ی فوق می توان نتیجه گرفت که برای هر عدد  $a > 0$  داریم:

$$\sqrt[n]{a^{k n}} = a^k$$

عبارتی در زیر رادیکال که توانش با فرجه ی رادیکال برابر یا ضریبی از آن باشد، از زیر رادیکال بیرون می آید همچنین برای وارد کردن یک عدد به زیر رادیکال، باید آن عدد را به توان فرجه رسانده و در زیر رادیکال بنویسیم.

توجه: اگر فرجه ی رادیکال زوج باشد، فقط اعداد مثبت به زیر رادیکال می روند و در مورد فرجه های فرد هیچگونه محدودیتی وجود ندارد. یعنی در فرجه ی زوج، علامت منفی پشت رادیکال باقی می ماند.

مثال: عبارت  $\sqrt[3]{2} \sqrt[2]{a}$  را به شکل  $\sqrt[n]{a^k}$  نوشته ایم، ریشه ی هشتم عدد مثبت  $a$  کدام است؟

$$\sqrt[4]{27} \quad (4) \qquad \sqrt[2]{2} \quad (2) \qquad \sqrt[3]{2} \quad (3) \qquad \sqrt[4]{2} \quad (4)$$

### ریشه‌گیری‌های متوالی

اگر بخواهیم عبارتی مانند  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$  که در آن  $(a > 0)$  را به صورت یک رادیکال بنویسیم، از قوانین توان‌های گویا استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left( a^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

مثال: عبارت  $\sqrt[3]{a \sqrt[4]{a^3} \sqrt{a}}$  را به صورت یک رادیکال بنویسید.  $(a > 0)$

### عبارت‌های جبری

#### اتحادها و تجزیه چندجمله‌ای‌ها

اگر دو طرف یک تساوی جبری به ازای هر مقدار قابل قبول از متغیرهایش همواره برابر باشند، آن تساوی را یک اتحاد می‌نامیم.

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارت  $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$  را بیابید.

مثال: اگر  $10a^2 + 4b^2 + 4ab - 6a + 1 = 0$ ، آنگاه مقدار  $b$  کدام است؟

$\frac{1}{9}$  (۴)

$\frac{1}{6}$  (۳)

$-\frac{1}{9}$  (۲)

$-\frac{1}{6}$  (۱)

مثال: اگر  $5 = x + \frac{1}{x} + 2x$  آن گاه حاصل  $\frac{1}{x^4} + x^4$  کدام است؟

(۴) ۴۳۳

(۳) ۴۴۹

(۲) ۳۸۹

(۱) ۳۸۰

مثال: اگر  $9 = x^2 + \frac{100}{x^2 + 1}$  باشد، مقدار  $\frac{100}{(x^2 + 1)^2} + (x^2 + 1)^2$  کدام

است؟

(تجربی ارزشیابی ۱۴۰۴)

(۴) ۸۰

(۳) ۸۸

(۲) ۹۰

(۱) ۹۸

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، می‌توان اتحادهای فرعی زیر را نتیجه گرفت.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

نکته: عبارت‌هایی که شامل دو جمله‌ای  $x^2 + ax$  هستند را می‌توان به یک عبارت شامل یک مربع کامل تبدیل کرد. برای این منظور، مربع نصف ضریب  $x$  را اضافه و کم می‌کنیم.

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

مثال: اگر مجموع دو عدد برابر ۸ و مجموع مربعاتشان برابر ۳۴ باشد، آنگاه قدرمطلق تفاضلشان کدام است؟

$\sqrt{2}$  (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)



مثال: هرگاه  $a$  و  $b$  اعداد طبیعی و  $a^2 - 4b^2 = 5$  باشد،  $a$  کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



مثال: حاصل عبارت  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$ ، کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: مقدار عبارت  $\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} - \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ ، برابر کدام عدد زیر است؟

$\sqrt{8}$  (۴)

۲ (۳)

$\sqrt[4]{8}$  (۲)

۸ (۱)



اتحاد مزدوج

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

اتحاد یک جمله‌ی مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

نکته: با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای و فاکتورگیری از  $3ab$  در اتحاد داریم:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

مثال: عبارت  $(\sqrt{2} - 1)^3$  را به شکل  $a + b\sqrt{2}$  نوشته‌ایم. حاصل  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۳      (۲) -۳      (۳) -۲      (۴) ۲



مثال: اگر  $a = x + \frac{3}{x}$  آن گاه حاصل  $x^3 + \frac{27}{x^3}$ ، کدام است؟

(۱)  $a^3 - 3a$       (۲)  $a^3 - 9a$       (۳)  $a^3$       (۴)  $a^3 - a$

مثال: اگر  $a + b + c = 0$  آن گاه نشان دهید:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$



اتحاد مجموع یا تفاضل دو مکعب ( چاق و لاغر )

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال: حاصل عبارت  $(x^4 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)$  به ازای  $x = \sqrt[3]{2}$

کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۶ (۳)

۳۲ (۲)

۶۳ (۱)



### تجزیه‌ی یک عبارت چندجمله‌ای

اگر بتوانیم یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند عبارت چندجمله‌ای (عامل) با درجه‌های کمتر از درجه‌ی اولیه بنویسیم، می‌گوییم آن چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم. تجزیه وقتی کامل است که هر یک از عامل‌های به‌دست آمده، دیگر قابل تجزیه نباشند. برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها از اتحادها، دسته‌بندی مناسب، تفکیک کردن عبارات، اضافه و کم کردن عبارات و یا فاکتورگیری بهره می‌بریم.

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1 =$$



$$9x^2 - 6x - 3 =$$

$$3x^2 + 5x - 2 =$$

$$10x^2 + 3x - 1 =$$

$$8x^2 + 2x - 15 =$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 =$$

$$3x^2 + 7x + 2 =$$

$$x^3 + x - 10 =$$

$$x^5 - x^4 - 4x + 4 =$$

## عبارت‌های گویا و گویا کردن مخرج کسرها

### عبارت‌های گویا

عبارتی کسری را که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، عبارت گویا می‌نامیم.

یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج کسر را صفر کنند، تعریف نمی‌شود و اصطلاحاً ریشه‌های مخرج یک عبارت گویا، جزو دامنه‌ی عبارت گویای مورد نظر قرار نمی‌گیرند.

مثلاً عبارت گویای  $\frac{2}{x-3}$  به ازای  $x = 3$  تعریف نمی‌شود و دامنه‌ی این عبارت گویا عبارت است

از:

$$D = \mathbb{R} - \{ 3 \}$$

### ساده سازی عبارت های گویا

برای ساده کردن عبارت گویای  $\frac{A}{B}$  باید هر یک از دو چند جمله ای  $A$  و  $B$  را به حاصل ضرب عامل های

اول تجزیه کرده و سپس عامل های مشترک را در صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

مثال: در عبارت  $P = \frac{y^4 - 7y^2 + 12}{y^2 - 4y + 4}$  کدامیک از چند جمله ای های زیر وجود ندارد؟

$y^2 + 3$  (۴)       $y - 2$  (۳)       $y^2 - 3$  (۲)       $y + 2$  (۱)

$$P = \frac{y^4 - 7y^2 + 12}{y^2 - 4y + 4}$$



مثال: حاصل عبارت گویای  $P = \left(1 - \frac{2}{x^4 + x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2}$  کدام است؟

$\frac{1}{x^2}$  (۱)      ۱ (۲)       $1 + \frac{1}{x^2}$  (۳)      صفر (۴)



مثال: اگر  $\frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x^2 - 4}$  باشد، آنگاه مقدار  $B$  کدام است؟

۶ (۱)      - ۶ (۲)      - ۴ (۳)      ۴ (۴)



### گویا کردن مخرج کسرها

گویا کردن مخرج کسرها به از بین بردن رادیکال ایجاد شده در مخرج کسر گفته می‌شود که در این حالت پس از از بین بردن رادیکال در مخرج کسر، در صورت کسر رادیکالی ظاهر خواهد شد. مهمترین حالات گویا کردن مخرج کسر، در موارد زیر بیان گردیده‌اند.

۱- مخرج کسر به صورت  $\sqrt[m]{a^n}$  باشد (  $n < m$  )

به طور کلی برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن‌ها به صورت  $\sqrt[m]{a^n}$  باشد، صورت و مخرج کسر را در  $\sqrt[m]{a^{m-n}}$  ضرب می‌کنیم.  
مثال: مخرج کسر  $\frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$  را گویا کنید.



مثال: کسر  $\frac{30}{\sqrt{\sqrt{45} + \sqrt{5}}}$  چند برابر  $\sqrt[4]{125}$  است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{4}{3}$



### ۲- گویا کردن مخرج کسرها به کمک اتحاد مزدوج

برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن به صورت  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  یا  $a \pm \sqrt{b}$  باشد، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر  $\frac{5}{\sqrt{x+1} - 2}$  را گویا کنید.

$$\frac{5}{\sqrt{x+1} - 2}$$

مثال: مخرج کسر  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$  را گویا کنید.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$



نکته: گاهی لازم است بیش از یکبار از مزدوج ضرب کردن استفاده کنیم تا مخرج کسر از حالت گنگ رادیکالی خارج شود.

مثال: مخرج کسر  $\frac{1}{2 - \sqrt[4]{3}}$  را گویا کنید.



### ۳- گویا کردن مخرج کسرها با استفاده از اتحاد چاق و لاغر

برای گویا کردن مخرج کسرهایی با مخرج  $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$  از اتحاد چاق و لاغر استفاده کرده و صورت و مخرج را در قسمت چاق اتحاد چاق و لاغر یعنی  $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{ab}$  ضرب می‌کنیم. به‌طریق مشابه، برای گویا کردن مخرج کسرهایی با مخرج  $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{ab}$  ، با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، صورت و مخرج کسر را در قسمت لاغر یعنی  $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$  ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$$



$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

رادیکال‌ها

(تجربی فارغ ۹۹)

مثال: حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1}$  ، کدام است؟

(۴) ۱

(۳)  $1+\sqrt{3}$

(۲)  $2\sqrt{3}$

(۱)  $1+2\sqrt{3}$

(تجربی ۹۹)

مثال: حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}$  ، کدام است؟

(۴)  $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

(۳)  $1-\sqrt{2}$

(۲)  $-1+\sqrt{2}$

(۱)  $1+\sqrt{3}$

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

مثال: اگر  $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$  باشد، حاصل  $3B + 1$  کدام است؟

(۴)  $2\sqrt{7}$

(۳)  $2\sqrt{2}$

(۲)  $\sqrt{7}$

(۱)  $\sqrt{2}$

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

مثال: حاصل عبارت  $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}}}$  کدام است؟

(۴)  $8\sqrt[3]{2}$

(۳)  $8\sqrt{2}$

(۲)  $16\sqrt[3]{2}$

(۱)  $16\sqrt{2}$

(تجربی خارج ۱۴۰۳)

مثال: حاصل عبارت  $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{27}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}} \times 81^{-\frac{3}{4}}}$  ، کدام است؟

(۴)  $81\sqrt[3]{3}$

(۳)  $27\sqrt[3]{3}$

(۲) ۸۱

(۱) ۲۷

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

مثال: حاصل عبارت  $2 - \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}} - \sqrt{2}}$  کدام است؟

- (۱)  $-2\sqrt{3}$  (۲)  $-\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{6}$

(تجربی تیر ۱۴۰۴)

مثال: حاصل عبارت  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}} \times \sqrt[4]{162} \times \sqrt[4]{4\sqrt[6]{2}}$  چند برابر  $\sqrt{6}$  است؟

- (۱) ۲ (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{6}$  (۴) ۳