زمان: **۱۲۰ دقیقه** رشته: **ریاضی و فیزیک**

نام و نام‌خانوادگی: .... تاریخ: **۱۴۰۴/۰۳/۱۸** نوبت: **خرداد ۱۴۰۴**

ردیف	سؤالات	بارم

۱ **درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** ۰/۵

$f = U^n$ $f' = nU^{n-1} \times U'$

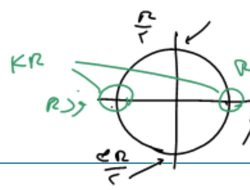
الف) تابع $f(x) = (۱-x)^۳$، تابعی اکیداً نزولی است. ☑ درست ❑ نادرست

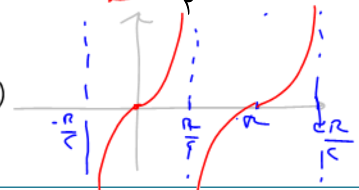
$f' = ۳(۱-x)^۲(-۱) = -۳(۱-x)^۲ =$ همواره منفی

ب) دامنهٔ تابع $y = \tan x$، برابر با مجموعهٔ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ است. ❑ درست ☑ نادرست

$k\pi$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cos x = ۰$ $k\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$





۲ **جاهای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید.** ([] نماد جزء صحیح است.) ۰/۵

الف) مشتق تابع $f(x) = \sqrt{۲}$ در $x = ۱$، برابر ...صفر... است. (صفر، یک)

کوچک‌تر یا مساوی همسایگی   بزرگ‌تر مساوی همسایگی   ماکزیمم نسبی

ب) نقطه‌ای به طول $x = ۲$، نقطهٔ .... تابع $f(x) = [x]$ است. (ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی)

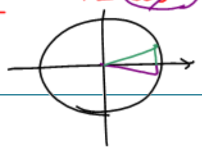
$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = [۲^-] = [۱/۹۹۹] = ۱$ $f(۲) = ۲$

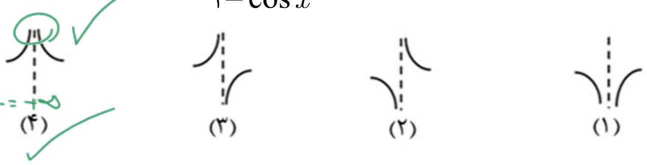
$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = [۲^+] = [۲/۰۰۰۱] = ۲$

۳ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{۱ - \cos x}$ را در همسایگی $x = ۰$ نمایش می‌دهد؟ ۰/۲۵

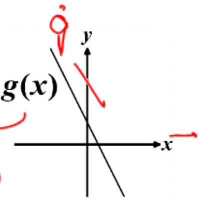
$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \frac{۱}{۱ - \cos ۰^-} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \frac{۱}{۱ - \cos ۰^+} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$



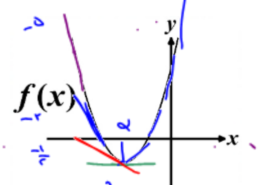


۴ نمودار توابع f و g به صورت زیر است. ۰/۵



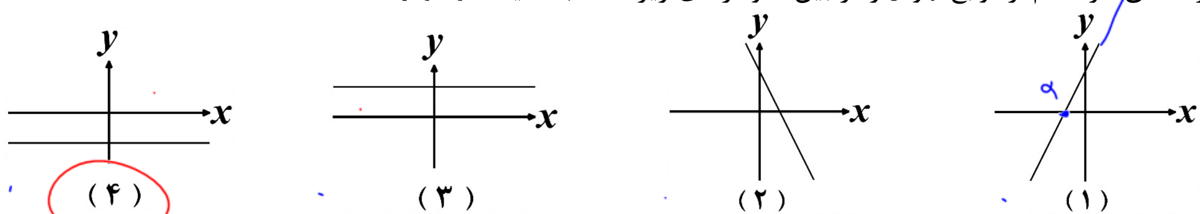
شیب ثابت   شیب −

(ب)



(الف)

نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. (دو نمودار اضافه است.)

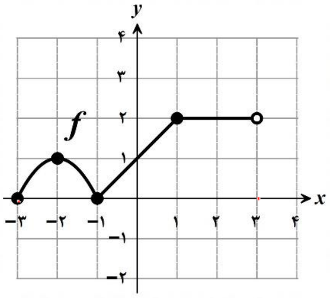


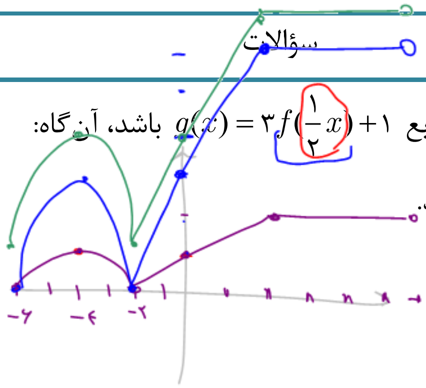
(۴) g' (۳)   (۲)   (۱) f'

ردیف	سؤالات	بارم

۵ — بارم: ۱/۵

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $g(x)=3f(\frac{1}{2}x)+1$ باشد، آن‌گاه:





الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید.

$-3 \leq \frac{1}{2}x < 3$

$-6 \leq x < 6$

$D_g=[-6,6)$

$R_f\ [0,2]$

$R_g\ [0,6] \xrightarrow{+1} R_g=[1,7]$

ب) اگر $A=(-2,1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ متناظر A، روی نمودار تابع g را بنویسید.

$f(-2)=1$

$\frac{1}{2}x=-2 \Rightarrow x=-4$

$g(x)=3f(\frac{1}{2}x)+1$

$g(-4)=3\times 1+1=4$

$(-4,4)$

۶ — بارم: ۱/۲۵

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=2x^3+ax^2-bx+2$ بر $x+2$ بخش‌پذیر و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ برابر با ۲ باشد.

$x+2=0 \to x=-2 \quad P(-2)=0=-16+4a+2b+2=0$

$4a+2b=14$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad P(1)=2=2+a-b+2=2$

$a-b=-2$

$4a+2b=14$

$2a-2b=-4$

$6a=10 \to a=\frac{5}{3}$

$6b=22 \Rightarrow b=\frac{11}{3}$

۷ — بارم: ۰/۵

دورهٔ تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=2-3\sin 4x$ را به دست آورید.

$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$T=\frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|}$

$-1 \leq \sin 4x \leq 1$

$\max \quad \sin 4x=-1 \to \max=2-3(-1)=5$

۸ — بارم: ۱/۵

جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $2+3\sin x=\cos 2x$ را به دست آورید.

$\cos 2x=\overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}-\overbrace{\sin^2 x}^{1-\cos^2 x}$

$=1-2\sin^2 x$

$=2\cos^2 x-1$

$2+3\sin x=1-2\sin^2 x$

$2\sin^2 x+3\sin x+1=0$

$a+c=b \to \sin x=-1 \to x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$\sin x=-\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$

$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{6})$

$x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$

$2k\pi+\pi-\alpha \quad 2k\pi+\alpha \quad 2k\pi+\pi \quad 2k\pi \quad \alpha$

$x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}$

$(2k+1)\pi$

ردیف	سؤالات	بارم
۹	اگر $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ و $\tan\beta=-۱$ باشد، آن‌گاه مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.	۰/۷۵

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-۱+\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\dfrac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\boxed{-\dfrac{۱}{۵}}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

ردیف	سؤالات	بارم
۱۰	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)	۱/۲۵

الف) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\frac{۰+۱}{۰^+}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۳+۵x+۲}{۷x^۳+۳x^۲}=\frac{-۴\cancel{x^۳}}{۷\cancel{x^۳}}=\boxed{-\frac{۴}{۷}}$

$\frac{۱}{۰}=$ تعریف نشده ، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}=$ مبهم ، $\frac{\text{مطلق صفر}}{\text{عدد}}=۰$

$[۰^+]\to$ مطلق ۰

$\frac{+\text{عدد}}{۰^+}=+\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}=$ مبهم ، مطلق $۰\times\infty=۰$

$\frac{-\text{عدد}}{۰^+}=-\infty$ ، $۰\times\infty=$ مبهم

$\lim_{x\to\infty}f(x)=$ عدد ، $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$

ردیف	سؤالات	بارم
۱۱	مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۵x+۲}{x^۲-۴}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)	۱/۵

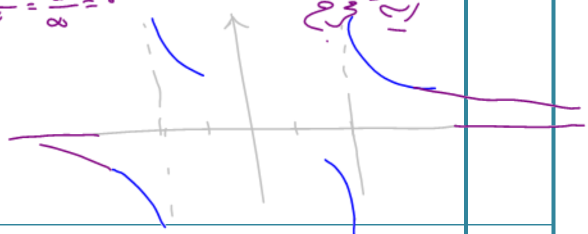
ریشه مخرج

$x^۲-۴=۰\to x=\pm۲$

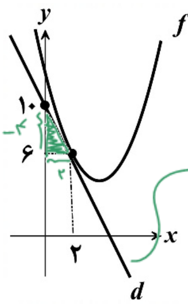
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{۵x}{x^۲}=\frac{۵}{\infty}=۰$ ، $\boxed{y=۰}$

$\lim_{x\to۲}f(x)=\dfrac{۱۰+۲}{۴-۴}$: $۲^+:\ \frac{۱۲}{۴^+-۴}=+\infty$ ، $۲^-:\ \frac{۱۲}{۴^--۴}=-\infty$ ، $\boxed{x=۲}$

$\lim_{x\to-۲}f(x)=\dfrac{-۱۰+۲}{۴-۴}$: $-۲^-:\ \frac{-۸}{۴^+-۴}=\frac{-۸}{۰^+}=-\infty$ ، $-۲^+:\ \frac{-۸}{۴^--۴}=\frac{-۸}{۰^-}=+\infty$ ، $\boxed{x=-۲}$



ردیف	سؤالات	بارم
۱۲	مطابق شکل روبه‌رو، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $(۲,۶)$ مماس است. حاصل $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{۳h}$ را به دست آورید.	۰/۷۵



شیب خط $=f'(۲)=-۲$ ، $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-۴}{۲}$

تعریف مشتق: a در نقطه $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ \| $f'(x)=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(۲)=\lim\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\to-\frac{۱}{۳}f'(۲)=-\frac{۱}{۳}\times-۲=\frac{۲}{۳}$

ردیف	سؤالات	بارم
۱۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	۱/۷۵

الف) $f(x)=(۱+\sin ۵x)^۳$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$f'(x)=۳(۱+\sin ۵x)^۲(۱+\sin ۵x)'$

$=۳(۱+\sin ۵x)^۲(۵\cos ۵x)$

ب) $g(x)=(x^۳-۵x)(\sqrt{x^۲+۱})$

$g'(x)=(x^۳-۵x)'(\sqrt{x^۲+۱})+(\sqrt{x^۲+۱})'(x^۳-۵x)$

$=(۳x^۲-۵)(\sqrt{x^۲+۱})+\dfrac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}(x^۳-۵x)$

ردیف	سؤالات	بارم
۱۴	به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۳ & x\geq ۱\\ ۴x & x<۱\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۵	الف) اگر f تابعی پیوسته با دامنهٔ اعداد حقیقی باشد و $f(۳)=۸+f(۱)$، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازهٔ $[۱,۳]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در نقطهٔ $x=۲۷$، به دست آورید.	۱
۱۶	مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{-۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۴x+۱$ را در بازهٔ $[-۳,۲]$ به دست آورید.	۲
۱۷	مقادیـر a و b را در تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx$ طوری به دست آورید که $x=۲$، طول نقطه اکسترمم نسبی و $x=۰$، طول نقطهٔ عطف این تابع باشد.	۱/۲۵
۱۸	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$ را رسم کنید.	۲

۱۴:

$f=\begin{cases}۲x & x>۱\\ ۴ & x<۱\end{cases}$

$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$

$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}+۳-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=\lim_{x\to ۱^{+}} x+۱=۲$

$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{۴x-۴}{x-۱}=\frac{۴\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}}=۴$

مشتق‌پذیر نیست

$f'_{+}(a)=f'_{-}(a)$

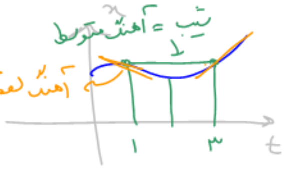
f' ← موجود

پیوسته

$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=\lim_{x\to a^{+}} f(x)$

نوک تیز، سرجدولی، چپ وراست، برابر نیست

۱۵:



$f(۳)-f(۱)=۸$

$\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=\frac{۸}{۲}=\boxed{۴}$

$g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}\Rightarrow g'(۲۷)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۲۷^{۲}}}$

$x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow \frac{۱}{۳}x^{\frac{۱}{۳}-۱}=\frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

$g'(۲۷)=\frac{۱}{۳\times ۳^{۲}}=\frac{۱}{۲۷}$

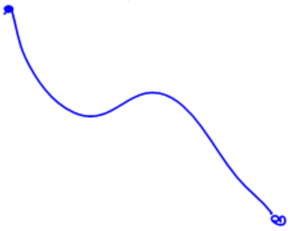
۱۶:

$f'(x)=-۲x^{۲}-۲x+۴=۰ \quad a+b+c=۰\to x=۱ \quad x=\frac{۴}{-۲}=-۲$

$f(۱)=-\frac{۲}{۳}-\cancel{۱}+۴+\cancel{۱}=\frac{۱۰}{۳}$ ماکسیمم مطلق

$f(۲)=-\frac{۱۶}{۳}-\cancel{۴}+۸+۱=-\frac{۱}{۳}$

$f(-۳)=۱۸-۹-۱۲+۱=-۲$ مینیمم مطلق



۱۷:

$f'(۲)=۰$

$f''(۰)=۰$

$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\to f'(۲)=۱۲+\cancel{۴a}+b=۰ \quad \boxed{b=-۱۲}$

$f''(x)=۶x+۲a\longrightarrow f''(۰)=۰+۲a=۰$

$a=۰$

۱۸:

$۲x+۴=۰\to x=-۲$

$x=۱$ مجانب قائم

$f'(x)=\frac{۲(x-۱)-۱(۲x+۴)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۶}{(x-۱)^{۲}}<۰$

$\cancel{۲x}-۲-\cancel{۲x}-۴$

$y=۲$ مجانب افقی

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۲x}{x}=۲$

$\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{-۶}{۰^{+}}=+\infty$

$\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-۶}{۰^{-}}=-\infty$