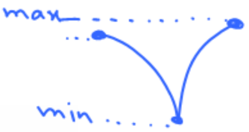
## محاسبه‌ی نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته‌ی $f$ در بازه‌ی $[a,b]$

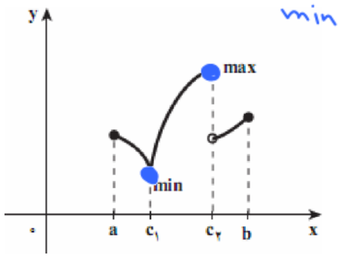
۱- نقاط بحرانی تابع $f$ را به‌دست می‌آوریم.

۲- تک تک نقاط بحرانی به‌دست آمده را در تابع قرار داده و مقدار عرض نقاط را می‌یابیم.

۳- نقاط $a$ و $b$ را نیز در تابع قرار داده و عرض آن‌ها را نیز می‌یابیم.

۴- بین عرض نقاط بحرانی ($f(c)$ ها) و عرض نقاط $a$ و $b$ ($f(a)$ و $f(b)$) بزرگ‌ترین عدد، ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین عدد، مینیمم مطلق تابع است.




نکته: اگر تابع پیوسته باشد، لزوماً دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است
(پیوستگی شرط کافی برای وجود اکسترموم‌های مطلق محسوب می‌شود)
ولی ممکن است تابع اکسترموم‌های مطلق داشته باشد و ناپیوسته باشد.

مثال: تابع $f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنه‌ی $[-۸ \,,\, ۲۷]$ مفروض است. ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را بیابید.

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = x^{۴/۳} - x^{۲/۳}$

$f'(x) = \frac{۴}{۳} x^{۱/۳} - \frac{۲}{۳} x^{-۱/۳}$

$f'(x) = \left(\frac{۲}{۳} x^{-۱/۳}\right)\left(۲ x^{۲/۳} - ۱\right)$

$f'(x) = \frac{۲\left(۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱\right)}{۳\sqrt[۳]{x}}$

$۲\sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۰ \Longrightarrow \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow x^۲ = \frac{۱}{۸} \Longrightarrow \boxed{x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۸}}}$

$\sqrt[۳]{x} = ۰ \Longrightarrow \boxed{x = ۰}$

نقاط بحرانی
$x = \frac{-۱}{\sqrt{۸}} \longrightarrow y = -۱/۴$
$x = \frac{۱}{\sqrt{۸}} \longrightarrow y = -۱/۴$
$x = ۰ \longrightarrow y = ۰$
$x = -۸ \longrightarrow y = ۱۲$
$x = ۲۷ \longrightarrow y = ۷۲$

$\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{\sqrt{۸}}\right)^۴} - \sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{\sqrt{۸}}\right)^۲}$

$\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{-۱}{۴}$

$(-۸)^{۴/۳} = \left((-۸)^{\frac{۱}{۳}}\right)^۴ = ۱۶$

$R_f = [-۱/۴ \,,\, ۷۲]$

مثال: ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = ۱ - (x - ۳)^{\frac{۲}{۳}}$ را در فاصله‌ی $[-۵ \,,\, ۴]$ بیابید.

$y = ۱ - \sqrt[۳]{(x-۳)^۲}$

$f(x) = ۱ - (x - ۳)^{۲/۳}$

$f'(x) = ۰ - \frac{۲}{۳}(\underbrace{x - ۳}_{u})^{-۱/۳} \times \underbrace{۱}_{u'}$

$f'(x) = \frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{x-۳}}$

$۳\sqrt[۳]{x-۳} = ۰ \Longrightarrow \boxed{x = ۳} \in D_f$

$f'(۳) =$ وجود ندارد $\longrightarrow x = ۳$ بحرانی

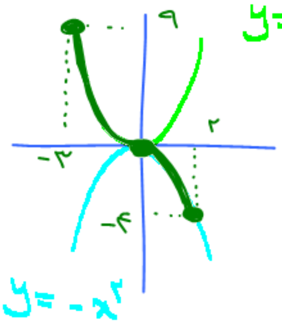
$x = ۳ \longrightarrow y = ۱$
$x = -۵ \longrightarrow y = -۳$
$x = ۴ \longrightarrow y = ۰$

$R_f = [-۳ \,,\, ۱]$

max مطلق در بازه‌ی $[-۵, ۴]$

مثال: ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = -x|x|$ را در بازه‌ی $[-3, 2]$ بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & 0\le x\le 2\\ x^2 & -3\le x<0\end{cases}$$




$R_f=[-4,+9]$

مثال: کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ را در بازه‌ی $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

$y=\dfrac{1}{u} \Longrightarrow y'=\dfrac{-1}{u^2}\times u'$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(\underbrace{\sin x+\cos x}_{u})^2}\times(\cos x-\sin x)$

$f'(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}=0 \Longrightarrow \sin x-\cos x=0 \Longrightarrow \sin x=\cos x \Longrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$(\sin x+\cos x)^2=0 \Longrightarrow \sin x=-\cos x \xrightarrow[\text{جواب ندارد}]{\div\cos x} \tan x=-1$

$\tan x=-1 \Longrightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x=k\pi-\pi/4$

$\notin [0, \pi/2]$

$x=0 \longrightarrow y=1$ مطلق $min=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{4} \longrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ مطلق $max=1$

$x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow y=1$

**موارد خاص تعیین اکسترموم‌های مطلق**

**۱- اکسترموم‌های مطلق توابع چندجمله‌ای**

تابع $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ که در آن $a_n\neq 0$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $n$ زوج باشد و $a_n>0$، آن‌گاه تابع $f(x)$ مینیمم مطلق دارد و ماکزیمم مطلق ندارد.

ب) اگر $n$ زوج باشد و $a_n<0$، آن‌گاه تابع $f(x)$ ماکزیمم مطلق دارد و مینیمم مطلق ندارد.

پ) اگر $n$ فرد باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

$y=ax^2+bx+c$


مثال: نوع اکسترموم مطلق توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$f(x)=x^4-x-1$


$f(x)=x^3+x-1$ اکسترموم مطلق ندارد

تذکر: در توابع چندجمله‌ای در حالت خاص $n=2$، تابع به فرم درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ تبدیل می‌شود که:

۱- اگر $a>0$، دهانه سهمی رو به بالا بوده و مقدار مینیمم مطلق تابع برابر است با:

$$min\ y=f\left(\frac{-b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$$

۲- اگر $a<0$، دهانه سهمی رو به پایین بوده و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر است با:

$$max\ y=f\left(\frac{-b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$$

## ۲- اکسترموم‌های مطلق توابع مثلثاتی

می‌دانیم همواره $-۱ \leq \sin x \leq ۱$ و $-۱ \leq \cos x \leq ۱$ است. لذا برای تعیین برد توابع مثلثاتی (تعیین ماکزیمم و مینیمم مطلق)، معمولاً از عبارات ذکر شده استفاده کرده و تابع اصلی را شکل می‌دهیم. $-۳ \leq x < ۴ \xrightarrow{(\ )^۲} ۰ \leq x^۲ < ۱۶$

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sin^۴ x + ۲$$

$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \xrightarrow{(\ )^۴} ۰ \leq \sin^۴ x \leq ۱ \xrightarrow{+۲} ۲ \leq \sin^۴ x + ۲ \leq ۳ \Longrightarrow R_f = [۲, ۳]$

$$f(x) = \frac{۴}{|\cos x| + ۳}$$

$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \Longrightarrow ۰ \leq |\cos x| \leq ۱ \xrightarrow{+۳} ۳ \leq |\cos x| + ۳ \leq ۴ \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{۳} \geq \frac{۱}{|\cos x| + ۳} \geq \frac{۱}{۴}$

$\xrightarrow{\times ۴} ۱ \leq y \leq \frac{۴}{۳} \Longrightarrow R_f = [۱, ۴/۳]$

## ۳- اکسترموم‌های مطلق توابع $y = a \sin^۲ x + b \sin x + c$ و $y = a \cos^۲ x + b \cos x + c$

کافی است به جای $\sin x$ یا $\cos x$، اعداد ۱ و ۱- و $\frac{-b}{۲a}$ (به شرط آن‌که $\left|\frac{-b}{۲a}\right| < ۱$) را قرار دهیم.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد به‌دست آمده، به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع داده شده هستند.

مثال: برد تابع $y = ۳\cos^۲ x - ۲\cos x + \frac{۱}{۳}$ را بیابید.

$y' = ۶\cos x(-\sin x) + ۲\sin x = ۰$

$(-۲\sin x)(۳\cos x - ۱) = ۰$

$\sin x = ۰ \Rightarrow \underbrace{\cos x = -۱}$ یا $\underbrace{\cos x = +۱}$

$۳\cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \underbrace{\cos x = ۱/۳}$

$\frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۲)}{۲(۳)} = \frac{۱}{۳} < ۱$

$\cos x = ۱ \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}$

$\cos x = -۱ \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۳}$

$\cos x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow y = ۰$

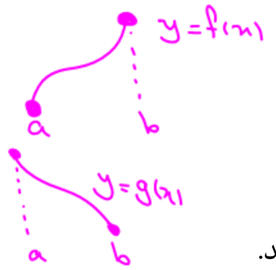
$R_f = [۰, \frac{۱۶}{۳}]$

## ۴- برد توابع یکنوای هموار

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ صعودی اکید و تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ نزولی اکید باشند، برد آن‌ها به صورت زیر خواهد بود.

$$R_f = [f(a), f(b)]$$

$$R_g = [g(b), g(a)]$$



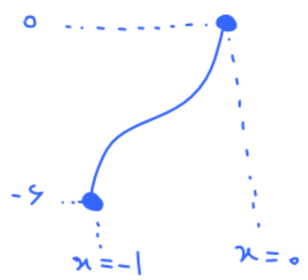

مثال: برد تابع $y = x^۵ + ۵x$ را در بازه‌ی $[-۱, ۰]$ بیابید.

$y = x^۵ + ۵x$ درجه ۵ (هموار)

همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$y' = \underbrace{۵x^۴}_{\geq ۰} + ۵ \Rightarrow y' > ۰$ اکیداً صعودی

$\underbrace{\qquad}_{\geq ۵}$




$f(-۱) = -۶$
$f(۰) = ۰$ $\Longrightarrow R_f = [-۶, ۰]$

**روش‌های محاسبه‌ی نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f$**

**۱- آزمون مقایسه در تعیین اکسترموم‌های نسبی**

اگر بخواهیم نوع اکسترموم نسبی تابع $f$ را در نقطه‌ی $x = c$ بررسی کنیم، مقدار تابع در نقطه‌ی مورد نظر را با حد چپ و راست تابع در همان نقطه، مقایسه می‌کنیم که سه حالت رخ می‌دهد:

الف) اگر مقدار تابع از هر دو مقدار حدود چپ و راست بزرگ‌تر باشد، تابع در آن نقطه‌ی دارای ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر مقدار تابع از هر دو مقدار حدود چپ و راست کوچک‌تر باشد، تابع در آن نقطه‌ی دارای ماکزیمم نسبی است.

پ) اگر مقدار تابع از یکی از حدود چپ یا راست بزرگ‌تر و از دیگری کوچک‌تر باشد، تابع در آن نقطه اکستروموم ندارد.

مثال: نقطه‌ی $x = ۲$ برای تابع $y = x - [x]$ چه نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

$f(۲) = (۲) - [۲] = ۰$

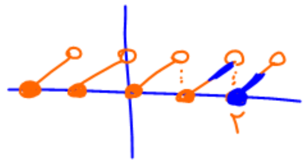
$\lim_{x \to ۲^-} x - [x] = \lim_{x \to ۲^-} x - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$

$\lim_{x \to ۲^+} x - [x] = \lim_{x \to ۲^+} x - ۲ = ۲^+ - ۲ = ۰^+$

$f(c) \leq f(x)$

$۰ \leq ۰^+$ یا $۱$

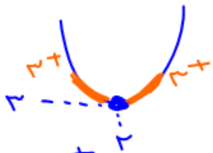
min نسبی




مثال: تابع $y = |x-۲|\sqrt[۵]{(۲x+۴)^۲} + ۳$ را در نظر بگیرید. تابع در نقاط $x = ۲$ و $x = -۲$ چه نوع اکسترمومی دارد؟

$x = ۲$

$f(۲) = \underbrace{|۲-۲|}_{\text{صفر}}\sqrt[۵]{(۲(۲)+۴)^۲} + ۳ \Longrightarrow \boxed{f(۲) = ۳}$




$\lim_{x \to ۲^-} |x-۲|\sqrt[۵]{(۲x+۴)^۲} + ۳ = \lim_{x \to ۲^-} \overbrace{|x-۲|}^{|۰^-| = ۰^+}\sqrt[۵]{۶۴} + ۳ = ۰^+ + ۳ = ۳^+$

$\lim_{x \to ۲^+} |x-۲|\sqrt[۵]{(۲x+۴)^۲} + ۳ = \lim_{x \to ۲^+} \overbrace{|x-۲|}^{|۰^+| = ۰^+}\sqrt[۵]{۶۴} + ۳ = ۰^+ + ۳ = ۳^+$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۰ \\ ۱ & x \leq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی $x = ۰$ برای این تابع چه نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

۱- فقط مینیمم نسبی ۲-فقط ماکزیمم نسبی ۳- ماکزیمم نسبی و مطلق ۴- مینیمم نسبی و مطلق

$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۰ \\ ۱ & x \leq ۰ \end{cases}$

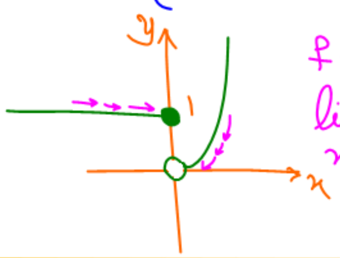
$f(\overset{c}{۰}) = ۱$

$\lim_{x \to ۰^-} ۱ = ۱$

$\lim_{x \to ۰^+} x^۲ = ۰^+$

$f(c = ۰) \geq f(x)$

$۱ \geq ۱$ یا $۰^+$




$f(۰) = ۱$

$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = ۱$

$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = ۰^+$

نکته: توابعی به فرم $f(x)=(x-a)^{2n}g(x)+K$ با فرض $g(a)\neq 0$ را در نظر می‌گیریم. تابع $f$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای اکسترموم نسبی است و طبق آزمون مقایسه داریم:

الف) اگر $g(a)>0$ باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای مینیمم نسبی است.

ب) اگر $g(a)<0$ باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای ماکزیمم نسبی است.

$y=ax^2$

$a>0$ min

$a<0$ max

مثال: تابع $f(x)=\underbrace{(x+2)^6}\overbrace{\sqrt[3]{x+10}}^{g(x)}$ مفروض است. نقطه‌ی $x=-2$ برای این تابع طول نقطه‌ی ................ است.

۱- مینیمم نسبی $\boxed{x=-2}$ ۲- ماکزیمم نسبی ۳- عطف ۴- معمولی

$$g(x)=\sqrt[3]{x+10}$$
$$g(-2)=\sqrt[3]{-2+10}=\sqrt[3]{8}=2$$
$$g(-2)=2>0$$

min

### ۲- آزمون مشتق اول در تعیین اکسترموم‌های نسبی

فرض کنید $c\in(a,b)$ نقطه‌ی بحرانی تابع $f$ باشد و تابع $f$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در تمام نقاط بازه‌ی $(a,b)$ بجز احتمالاً در نقطه‌ی $c$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف - اگر $f$ روی $(a,c)$ مثبت و روی $(c,b)$ منفی باشد، آن‌گاه تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ب - اگر $f$ روی $(a,c)$ منفی و روی $(c,b)$ مثبت باشد، آن‌گاه تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ مینیمم نسبی دارد.

توجه کنید که $f$ می‌تواند در $c$ مشتق‌پذیر ( $f'(c)=0$ ) یا مشتق‌ناپذیر ( $f'(c)$ وجود ندارد ) باشد، اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع آزمون مشتق اول، اکسترموم‌های نسبی پیوسته‌ی توابع را تعیین می‌کند.

در این آزمون از تابع مشتق گرفته و با استفاده از جدول تغییرات تابع، مشتق اول تابع را در نقاط بحرانی تابع، تعیین علامت می‌کنیم و نوع نقاط اکسترموم نسبی را تعیین می‌کنیم.

مثال: اکسترموم‌های نسبی تابع $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$ را تعیین نمایید.

$$f'(x)=4x^3+4x^2-8x \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

تعیین ریشه : $(4x)(x^2+x-2)=0$

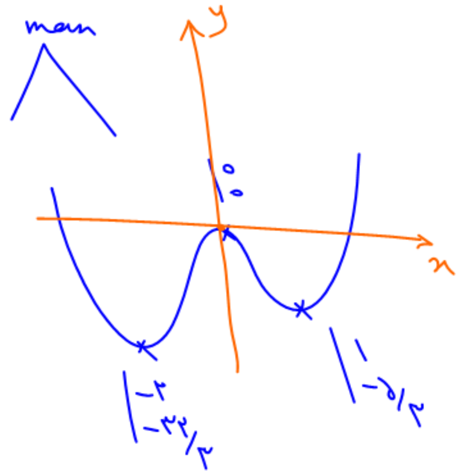
جدول رفتار $(4x)(x+2)(x-1)=0$

$x=0$ max

$x=-2$ min

$x=+1$ min

max min




جدول تغییرات

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{32}{3}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\frac{5}{3}$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | min | | max | | min | | |

مثال: اکسترموم‌های نسبی تابع $f(x)=x^4-6x^2+8x$ را تعیین نمایید.

$f(x)=x^4-6x^2+8x$

$f'(x)=4x^3-12x+8 \longrightarrow$ تعیین علامت

تعیین ریشه: $4x^3-12x+8=0 \xrightarrow{\div 4} x^3-3x+2=0$ ، $\boxed{2=3-1}$ ، $2=-3+5$

$\underbrace{x^3-1}-3x+3=0$

$(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=0 \longrightarrow$

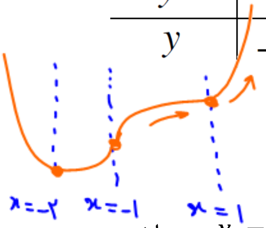
$(x-1)(x^2+x+1-3)=0 \longrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0$

$(x-1)(x-1)(x+2)=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$x=1$ مضاعف ، $x=-2$ ساده

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-24$ | ↗ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | min | | | | |




Desmos

$\min A\begin{vmatrix}-2\\-24\end{vmatrix}$

**نکات:**

۱- نمودار تابع درجه‌ی دوم به شکل $y=ax^2+bx+c$ همواره دارای نقطه‌ی اکسترمومی به طول $x=\frac{-b}{2a}$ می‌باشد.

۲- در توابع مشتق‌پذیر، ریشه‌های ساده و ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی فرد معادله‌ی $f'(x)=0$، طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f$ هستند (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت می‌دهد)، اما ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج و ریشه‌های مضاعف معادله‌ی $f'(x)=0$، طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f$ نیستند (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت نمی‌دهد)

۳- برای تعیین علامت مشتق، می‌توان یک نقطه‌ی دلخواه (غیر از ریشه‌های مشتق) را انتخاب و با جایگزین نمودن آن نقطه در مشتق، علامت عدد حاصل را در جدول تغییرات مشتق تابع درج کرد.

۴- هر نقطه‌ی اکسترموم نسبی تابع، نقطه‌ای بحرانی است ولی عکس این قضیه الزاماً برقرار نمی‌باشد. ولی در مورد توابع چندجمله‌ای، سینوسی و کسینوسی، نمایی، کسری و ترکیبی از توابع فوق، نقاط بحرانی تابع فقط از حل معادله‌ی $f'(x)=0$ به‌دست می‌آیند. لذا برای تعیین نقاط اکسترموم نسبی تابع، کافی است ریشه‌های مشتق تابع را یافته و چنانچه مشتق تابع در این ریشه‌ها تغییر علامت بدهد، نقطه‌ی مورد نظر اکسترموم بوده و چنانچه مشتق تابع در این ریشه‌ها تغییر علامت ندهد، این نقاط اکسترموم نسبی تابع نیستند.

مثال: تابع $f(x)=\frac{\cos x}{5+3\cos x}$ در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$ چند اکسترموم نسبی دارد. نوع نقاط اکسترموم تابع را در صورت وجود تعیین نمایید.

$y=\frac{au+b}{cu+d} \longrightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$

شبه هموگرافیک

$f(x)=\frac{\overset{u}{\cos x}+0}{3\cos x+5} \Longrightarrow f'(x)=\frac{(1)(5)-(0)(3)}{(3\cos x+5)^2}\times(-\sin x)$

$f'(x)=\frac{-5\sin x}{(3\cos x+5)^2}$

ریشه مخرج: $3\cos x+5=0 \Longrightarrow \cos x=-\frac{5}{3}$ جواب ندارد

ریشه‌های صورت: $-5\sin x=0 \longrightarrow \sin x=0$

$\{0,\pi,2\pi\}$

| $x$ | | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| | | max | | min | | max | |

$A\begin{vmatrix}0\\1/8\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}\pi\\-1/2\end{vmatrix}$ ، $C\begin{vmatrix}2\pi\\1/8\end{vmatrix}$

**قضیه‌ی فرما:**

هر گاه تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ اکسترموم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$ می‌باشد.

مثال: مقادیر $a$، $b$ و $c$ را چنان بیابید که تابع $y=ax^2+bx+c$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع از نقطه‌ی $(2,-2)$ بگذرد.

$f(x)=ax^2+bx+c \Longrightarrow f'(x)=2ax+b$

چندجمله‌ای (تحلیلی)

(همه‌جا مشتق‌پذیر) قضیه فرما

$\boxed{f'(1)=0} \Rightarrow 2a+b=0 \ (I)$

$f(1)=7 \Rightarrow a+b+\cancel{c}=7$

$f(2)=-2 \Rightarrow 4a+2b+\cancel{c}=-2$

$3a+b=-9 \ (II)$

max $A\left|\begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right.$ → $(1,7)\in f(x)$ , $\boxed{(1,0)\in f'(x)}$

$B\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right. \longrightarrow (2,-2)\in f(x)$

$\begin{cases}3a+\cancel{b}=-9\\2a+\cancel{b}=0\end{cases}$

$a=-9$

$2(-9)+b=0 \longrightarrow b=18$

$(-9)+(18)+(c)=7 \longrightarrow \boxed{c=-2}$

$\boxed{f(x)=-9x^2+18x-2}$

مثال: مجموع طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2-6x+1$ را بیابید.

$f'(x)=x^2-5x-6=0 <$ $\alpha$ , $\beta$

$\alpha+\beta=S=\frac{-b}{a}=\frac{5}{1} \longrightarrow \boxed{\alpha+\beta=5}$

$\alpha+\beta=?$

$f(-1)=\frac{-1}{3}-\frac{5}{2}+\frac{6}{1}=\frac{-2-15+36}{6}$

$f(6)=72-90-36+1=-53$

$(x-6)(x+1)=0 \Rightarrow x=6 , x=-1$

| $x$ | | $-1$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

max $\left|\begin{matrix}-1\\19/6\end{matrix}\right.$

min $\left|\begin{matrix}6\\-53\end{matrix}\right.$

مثال: تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x-a}$ مفروض است. اگر بین نقاط اکسترموم تابع رابطه‌ی $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ برقرار باشد، مقدار $a$ را بیابید.

$f(x)=\frac{x^2+1}{x-a} \longrightarrow f'(x)=\frac{2x(x-a)-(1)(x^2+1)}{(x-a)^2}=\frac{x^2-2ax-1}{(x-a)^2}$

$2x^2-2ax-x^2-1$

$D_f=\mathbb{R}-\{a\}$

$x^2-2ax-1=0 <$ $\alpha$ , $\beta$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2 \Longrightarrow \frac{\overbrace{x_1+x_2}^{S}}{\underbrace{x_1x_2}_{P}}=2 \Rightarrow \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{2a}{-1}=\frac{2}{1} \Rightarrow a=-1$

$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$

مثال: تابع $y = x^{2}\left|x-3\right|$ به ترتیب از راست به چپ، چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ - ۰  ۲) ۲ - ۱  ۳) ۱ - ۲  ۴) ۱ - ۱

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x < 3 \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

آزمون مقایسه برای $(x=3)$ : $f(3) = 0$ ، $\lim_{x \to 3^{\pm}} x^2|x-3| = 0^{+}$ $\Big\}$ $f(3) \leq \lim_{x\to 3} f(x)$ min نسبی $x=3$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}$$

$3x^2 - 6x = 0 \longrightarrow (3x)(x-2) = 0 \to x=0 ,\ x=2$

$\{0,2\} \notin (3,+\infty)$

$\{0,2\} \in (-\infty,3)$

$f'_{+}(3) = 9 \neq f'_{-}(3) = -9$

$D_{f'} = \mathbb{R} - \{3\}$ حذف شد

| | | min | | max | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2+6x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| | ↘ | | ↗ | | ↘ |

نکته: اگر تابعی کسری، مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه طول نقاط اکسترموم نسبی، در تابع، مشتق تابع و هوپیتال تابع، صدق می‌کند.

مثال: اگر $A(2,3)$ اکسترموم نسبی تابع $f(x) = \dfrac{ax^{2}+b}{x^{3}}$ باشد، مقدار $b$ را بیابید.

$f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^3} \xrightarrow{A(2,3)} \dfrac{4a+b}{8} = \dfrac{3}{1} \Longrightarrow \boxed{b = -12}$

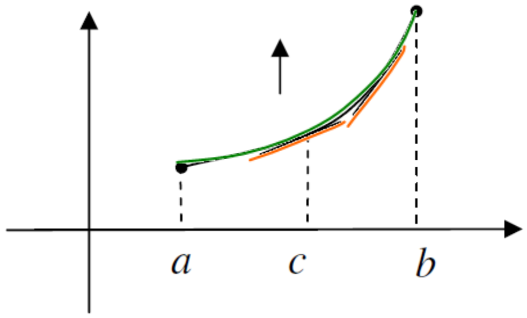
$Hop\ f(x) = \dfrac{2ax}{3x^2} \xrightarrow{A(2,3)} \dfrac{4a}{12} = 3 \Longrightarrow \boxed{a = 9}$

مثال: اگر $A(a,b)$ اکسترموم نسبی تابع $y = \dfrac{2x^{3}}{x^{2}-4}$ باشد، مقدار $\dfrac{b}{a}$ را بیابید.

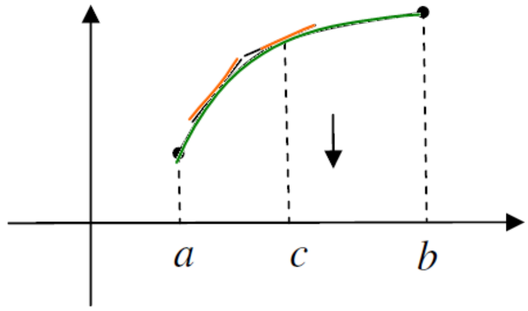
$Hop(y) = \dfrac{6x^2}{2x} = 3x \xRightarrow{(a,b)} 3a = b \longrightarrow \boxed{3 = \dfrac{b}{a}}$

## تقعّر و تحدّب

به شکل‌های زیر توجه کنید. هر دو تابع روی بازه‌ی $(a\ ,\ b)$ صعودی‌اند. ولی در شکل (۱) تقعر (گودی) منحنی رو به بالا و در شکل (۲) تقعر رو به پایین است.




شکل (۱)




شکل (۲)

**تقعر رو به بالا:** گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ تقعر رو به بالا دارد، هر گاه $f'(c)$ موجود باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی $c$، منحنی تابع بالای خط مماس بر منحنی، در نقطه‌ی $c$ باشد. (شکل ۱)

**تقعر رو به پایین:** گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ تقعر رو به پایین دارد، هر گاه $f'(c)$ موجود باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی $c$، منحنی تابع پایینِ خط مماس بر منحنی، در نقطه‌ی $c$ باشد. (شکل ۲)

**تعریف مقعر (گود):** اگر نمودار تابع $f$ روی بازه‌ی $I$، بالای همه‌ی مماس‌هایش باشد، آن‌گاه نمودار تابع $f$ را مقعر رو به بالا (یا به اختصار مقعر یا گود) می‌نامند.

**تعریف محدب (تپه):** اگر نمودار تابع $f$ روی بازه‌ی $I$، پایین همه‌ی مماس‌هایش باشد، آن‌گاه نمودار تابع $f$ را مقعر رو به بالا (یا به اختصار مقعر یا گود) می‌نامند.


**قضیه‌ی تقعر:** فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر $x$ از بازه‌ی باز $I$ موجود باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) > 0$ باشد، آن‌گاه نمودار $f$ روی بازه‌ی $I$ تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) < 0$ باشد، آن‌گاه نمودار $f$ روی بازه‌ی $I$ تقعر رو به پایین دارد.

نکته: برای تعیین جهت تقعر منحنی تابع $f$، مشتق دوم تابع را محاسبه کرده، نقاطی که $f''$ در آن‌ها وجود ندارد یا برابر صفر است را یافته و $f''$ را تعیین علامت می‌کنیم. در هر بازه‌ای که $f''>0$ باشد، جهت تقعر $f$ رو به بالا و در هر بازه‌ای که $f''<0$ باشد، جهت تقعر $f$ رو به پایین است. جدول تعیین علامت $f''$ را جدول تقعر تابع نیز می‌نامند.

مثال: با تشکیل جدول تعیین علامت $f''$ تعیین کنید که تابع $f(x) = x^۴ - ۲۴x^۲ - x$ روی چه بازه‌ای دارای تقعر رو به بالا و روی چه بازه‌ای دارای تقعر رو به پایین است؟

$f(x) = x^4 - 24x^2 - x$

$f'(x) = 4x^3 - 48x - 1$

$f''(x) = 12x^2 - 48 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$

$f'' > 0$ ∪

$f'' < 0$ ∩

| $x$ | $-\infty$ | -۲ | | ۲ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | ۰ | − | ۰ | + |
| $y$ | $+\infty$ ∪ | -۷۸ | ∩ | -۸۲ | $+\infty$ ∪ |

تقعر رو به بالا $f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

تقعر رو به پایین $f'' < 0 \Rightarrow x \in (-2, 2)$

مثال: اگر جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{x^۴}{۱۲} + \frac{x^۳}{۳} + \frac{ax^۲}{۲} + ۷$ همواره رو به بالا باشد، حدود $a$ را بیابید.

$f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + ax$

$f''(x) = x^2 + 2x + a > 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow$

$(2)^2 - 4(1)(a) < 0$

$4 - 4a < 0 \Rightarrow a > 1$

$\boxed{\text{همیشه} > 0}$

$A > 0 \rightarrow 1 > 0$

$\boxed{\Delta < 0}$

$y = Ax^2 + Bx + C$

مثال: تابع $y = (۱ - x)\, x^۳$ روی دامنه‌ی خود به ترتیب از راست به چپ، چند بار تغییر جهت و چند بار تغییر انحناء می‌دهد؟

۱) ۲ - ۲     ۲) ۲ - ۱     ۳) ۱ - ۲     ۴) ۱ - ۱

$f(x) = x^3 - x^4$

$f'(x) = 3x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow (x^2)(3 - 4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{مضاعف} \\ \boxed{x = 3/4} & \text{max} \end{cases}$

$(x-0)^2$

$y = 3x^2 - 4x^3$

| $x$ | | ۰ | | ۳/۴ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | ۰ | + | ۰ | − |

$f''(x) = 6x - 12x^2 = 0 \Rightarrow (6x)(1 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/2 \end{cases}$

مثال: تقعر تابع $y = x^۲ |x - ۳|$ در بازه‌ی $(a, b)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار $b - a$ را بیابید.

$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x < 3 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 & f'_+(3) = +9 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 & f'_-(3) = -9 \end{cases}$

$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x > 3 & f''_+(3) = +12 \\ -6x + 6 & x < 3 & f''_-(3) = -12 \end{cases}$

$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x > 3 \\ -6x + 6 & x < 3 \end{cases}$

$6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$ غ ق ق $\notin (3, +\infty)$

$-6x + 6 = 0 \rightarrow x = 1 \in (-\infty, 3)$

| $x$ | | ۱ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | ۰ | − | | + |

$\underbrace{1 \quad 3}_{\text{تقعر رو به پایین}}$

ساده

$(a, b) = (1, 3) \Rightarrow b - a = 3 - 1 = 2$

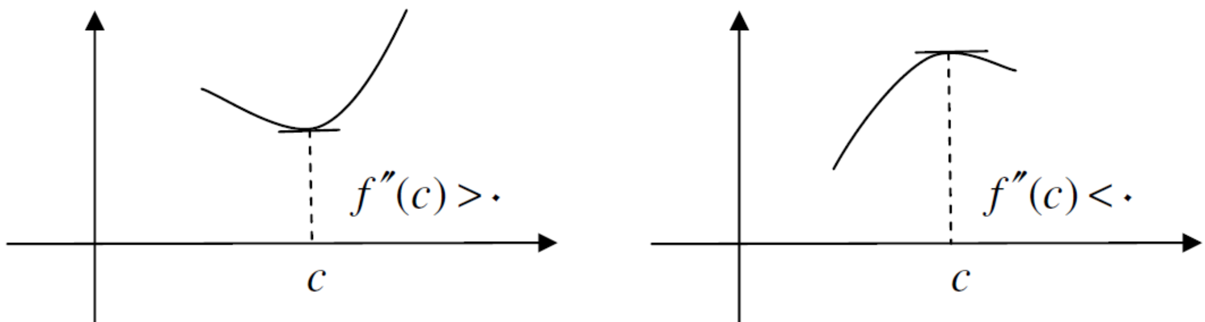
**آزمون مشتق دوم در تعیین اکسترموم نسبی تابع**

فرض کنید $(c\ ,\ f(c))$ نقطه‌ی بحرانی تابع $f$ باشد و $f'(c)=0$ و $f''(c)$ موجود باشد. در این صورت:

الف) اگر $f''(c)>0$ باشد، آن‌گاه $f$ در $c$ مینیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f''(c)<0$ باشد، آن‌گاه $f$ در $c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ج) اگر $f''(c)=0$ باشد، آن‌گاه آزمون بی‌نتیجه است (یعنی با این آزمون نمی‌توان حکم قطعی داد).




مینیمم نسبی　　　　ماکزیمم نسبی

تذکر: از آنجا که طبق شرایط قضیه‌ی فوق، باید $f''(c)$ موجود باشد، لذا تابع $f$ باید در $x=c$ مشتق‌پذیر باشد و چون $x=c$ نقطه‌ی بحرانی $f$ است، لذا باید $f'(c)=0$ باشد. بنابراین با آزمون مشتق دوم، اکسترموم‌های نسبیِ مشتق‌پذیر توابع را می‌توان تعیین نمود.

مثال: نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$ را به کمک آزمون مشتق دوم بیابید.

$f'(x)=6x^2-6x-12=0 \xrightarrow{\div 6}$　　$f''(x)=12x-6$

$x^2-x-2=0 \Longrightarrow$

$(x-2)(x+1)=0$ → $x=-1$ , $x=2$

$f''(-1)=-18$　max

$f''(2)=18$　min

مثال: در تابع $f(x)=\sin x+\cos x$، نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{4}$ چه نقطه‌ای است؟

۱- مینیمم نسبی　　۲- ماکزیمم نسبی　　۳- عطف　　۴- معمولی

$f'(x)=\cos x-\sin x \xrightarrow{\text{مشتق اول}}$

| | $\frac{\pi}{4}$ | |
|---|---|---|
| $y'$ + | 0 | − |

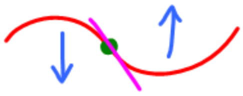
$x=\pi/4$ max نسبی

$f''(x)=-\sin x-\cos x \xrightarrow[\text{مشتق دوم}]{x=\pi/4} f''(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

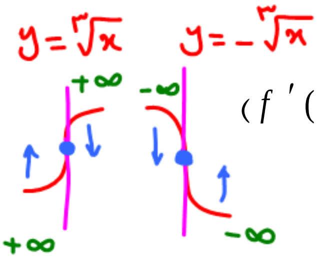
منفی

$f''(\frac{\pi}{4})<0$　max

## نقطه‌ی عطف



نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$، نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f$ نامیده می‌شود (تابع $f$ در نقطه‌ی $c$، نقطه‌ی عطف دارد) هرگاه دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند.



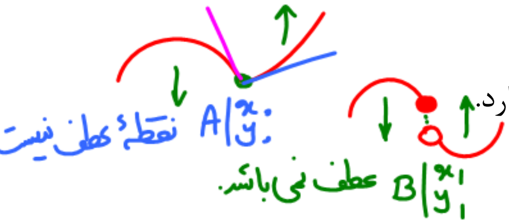

۱- نمودار $f$ در $c$ دارای مماس واحد باشد. ($f'(c) = L$ یا $f'(c) = +\infty$ یا $f'(c) = -\infty$)

۲- جهت تقعر $f$ در $c$ عوض شود. ($f''$ تغییر علامت دهد)

### نکات:

۱- اگر نقطه‌ی $c$ حداقل یکی از شرایط فوق را نداشته باشد، نقطه‌ی عطف نمودار تابع نیست.

۲- نقطه‌ی عطف تنها نقطه‌ای از نمودار تابع است که منحنی دارای مماس واحد بوده و مماس بر منحنی در این نقطه از درون منحنی عبور می‌کند.




۳- با توجه به شرط اول نتیجه می‌شود که تابع در نقطه‌ی عطف پیوستگی دوطرفه دارد.

۴- $y'' = ۰$ نه شرط لازم و نه شرط کافی برای نقطه‌ی عطف است.

۵- ریشه‌ی مضاعف $y'' = ۰$ طول نقطه‌ی عطف تابع نمی‌باشد چون تقعر تابع در این نقاط عوض نمی‌شود.

۶- اگر $(c\ ,\ f(c))$ یک نقطه‌ی عطف تابع $f$ باشد، در صورتی که $f''(c)$ موجود باشد، قطعاً برابر با صفر است.

۷- اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد:

الف) مختصات نقطه‌ی عطف در تابع صدق می‌کند.

ب) مشتق دوم تابع به ازای طول نقطه‌ی عطف تابع در صورت وجود برابر صفر است.

مثال: ضرایب $a$ و $b$ را چنان بیابید که نقطه‌ی $(۲\ ,\ -۴)$، نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = ax^{۳} - bx^{۲} + ۱۲$ باشد.

$f'(x) = ۳ax^{۲} - ۲bx$

$f''(x) = ۶ax - ۲b \xrightarrow[\text{عطف}]{f''(۲)=۰} ۱۲a - ۲b = ۰ \Longrightarrow \boxed{b = ۶a}$

$f(x) = ax^{۳} - bx^{۲} + ۱۲ \xrightarrow{f(۲)=-۴} ۸a - ۴b + ۱۲ = -۴ \Longrightarrow$

$۸a - ۲۴a + ۱۲ = -۴ \Longrightarrow ۱۶ = ۱۶a$

$\boxed{۱ = a} \rightarrow \boxed{b = ۶}$

مثال: مماس بر منحنی $y = ax^{۳} + ۶x^{۲}$ در نقطه‌ای به طول ۱ از درون منحنی عبور می‌کند. مقدار $a$ را بیابید.

عطف $A\Big|\begin{matrix}۱\\?\end{matrix} \Longrightarrow f''(۱) = ۰$ , $y' = ۳ax^{۲} + ۱۲x$

$y'' = ۶ax + ۱۲ \xrightarrow{y''(۱)=۰} ۶a + ۱۲ = ۰$

$\boxed{a = -۲}$

$y = -۲x^{۳} + ۶x^{۲}$

$y' = -۶x^{۲} + ۱۲x = ۰ \Longrightarrow \left.\begin{matrix}x=۰\\x=۲\end{matrix}\right\}$ اکسترمم

$y'' = -۱۲x + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\text{عطف}} \boxed{x = ۱}$

| $x$ | ۱ | |
|---|---|---|
| $y''$ | $+\ \ ۰$ | $-$ |

$f'(۱) = ۶$

مثال: تابع $y = x^{۲} + \cos x$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

$y''$ همواره وجود دارد

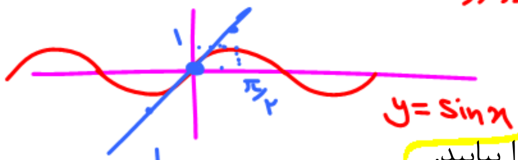
$f(x) = x^۲ + \cos x$

$f'(x) = ۲x - \sin x \xrightarrow[f'(x)=۰]{\text{اکسترموم نسبی}} ۲x = \sin x$ min نسبی $\boxed{x=۰}$ ۱ ریشه دارد ، $f(۰)=۱$

$f''(x) = ۲ - \cos x \xrightarrow[\text{وجود دارد}]{f''(x)} f''(x) = ۰ \Longrightarrow ۲ - \cos x = ۰ \Longrightarrow$ جواب ندارد

$\cos x = ۲$

تابع $f(x)$ نقطه‌ی عطف ندارد.




| $x$ | | ۰ | |
|---|---|---|---|
| $۲x - \sin x$ | $-$ | ۰ | $+$ |
| | ↘ | | ↗ |

مثال: اگر $(۱ , ۳)$ نقطه‌ی عطف تابع $y = ax^{۳} + bx^{۲}$ باشد، مقدار $b - a$ را بیابید.

$y = ax^۳ + bx^۲ \xrightarrow{f(۱)=۳} a + b = ۳$

$y' = ۳ax^۲ + ۲bx$

$y'' = ۶ax + ۲b \xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶a + ۲b = ۰ \longrightarrow b = -۳a$

$a = -۳/۲ \ , \ b = ۹/۲$

$b - a = ۹/۲ - (-۳/۲) = ۶$

مثال: تعداد نقاط عطف تابع
$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} - ۶x^{۲} - ۱۶ & x \geq -۲ \\ \dfrac{۳۰x^{۲} - ۲۴}{x} & x < -۲ \end{cases}$$
را بیابید.

$\to ۳۰x - \dfrac{۲۴}{x}$ ، $\left(\dfrac{۱}{u}\right)' = \dfrac{-۱}{u^۲} \times u'$

$\left(\dfrac{۲۴}{x^۲}\right)' = ۲۴ \times \left(\dfrac{۱}{x^۲}\right)' = ۲۴ \times \dfrac{-۱}{x^۴} \times (۲x)$

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۱۲x & x \geq -۲ \\ ۳۰ + \dfrac{۲۴}{x^۲} & x < -۲ \end{cases}$$

$f'_+(-۲) = +۳۶ = f'_-(-۲) = +۳۶$

$$f''(x) = \begin{cases} ۶x - ۱۲ & x > -۲ \\ \dfrac{-۴۸}{x^۳} & x < -۲ \end{cases}$$

$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{y''} ۶x - ۱۲ = ۰ \quad \boxed{x = ۲}$

| $x$ | | ۲ | |
|---|---|---|---|
| $۶x - ۱۲$ ($y''$) | $-$ | ۰ | $+$ |
| | ⌒ | | ◡ |

$f'(+۲) = -۱۲$

نقطه‌ی عطف $\in (-۲, +\infty)$

$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{y''} y'' = \dfrac{-۴۸}{x^۳}$ حذف شد

| $x$ | | ۰ | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{-۴۸}{x^۳}$ | $+$ | | $-$ |
| | ◡ | | ⌒ |

$f'(۰) = ۰$

عطف نیست $\boxed{x = ۰} \notin (-\infty, -۲)$

$f''_+(-۲) = -۲۴ \neq f''_-(-۲) = ۶$

| $x$ | | $-۲$ | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | | $-$ |
| | ◡ | | ⌒ |

$f'(-۲) = ۳۶$

خط مماس داریم

نقطه‌ی عطف $\boxed{x = -۲}$

**نکات مهم در محاسبه‌ی طول نقطه‌ی عطف تابع**

۱- در توابع به فرم $f(x)=(x-a)\,|x-a|$، طول $x=a$ نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد (با اینکه مشتق دوم در این نقطه وجود ندارد)

$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

۲- در توابع به فرم $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$، ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ طول نقاط عطف تابع می‌باشند.

$y=\sqrt[3]{x}$ عطف قائم $x=0$

۳- در توابع به فرم $y=(x-a)^{2n+1}f(x)+K$ به طوری که $f(a)\neq 0$ باشد، تابع در $x=a$ دارای نقطه‌ی عطف است.

min نسبی $y'>0$ $y'<0$ $f'$ $f''>0$

۴- ریشه‌های مضاعف مشتق اول تابع، طول نقطه‌ی عطف می‌باشند.

۵- نقاط اکسترموم نسبی نمودار مشتق تابع ($f'$)، نقاط عطف تابع $f(x)$ می‌باشند.

نقاط عطف $f''>0$ $f''<0$ $f'$

۶- محل برخورد نمودار مشتق تابع ($f'$)، با محور افقی، طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f(x)$ می‌باشند.

مثال: مبدأ مختصات برای تابع $f(x)=x|x|$، چه نوع نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

۱- مینیمم نسبی　　۲- ماکزیمم نسبی　　۳- عطف　　۴- معمولی

مثال: تابع $y=\sqrt[3]{x^2-4x+3}$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

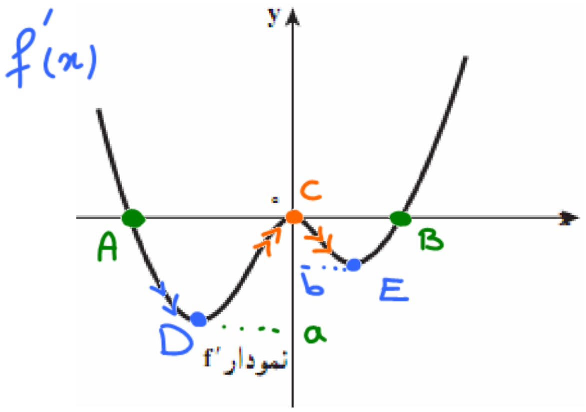
دو نقطه‌ی عطف دارد

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=3\ ,\ x=1$

مثال: نمودار شکل مقابل، نمودار تابع مشتقِ تابع $f(x)$ می‌باشد. تعداد و نوع نقاط اکسترموم نسبی تابع و نقاط عطف آن را بیابید.




A: $f'_-(A)>0$ ، $f'_+(A)<0$

| $x$ | | $A$ | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − |

A max نسبی است

B: $f'_-(B)<0$ ، $f'_+(B)>0$

| $x$ | | $B$ | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | − | 0 | + |

B min نسبی است

C: $f''_-(C)>0$ ، $f''_+(C)<0$ $\xrightarrow[\text{داده است}]{\text{مشتق دوم تغییر علامت}}$ $\underbrace{f'(C)=0}_{\text{مماس واحد داریم}}$ C عطف است

D, E (مشابه D): $f''_-(D)<0$ ، $f''_+(D)>0$ $\xrightarrow[\text{داده است}]{\text{مشتق دوم تغییر علامت}}$ $f'(D)<0$ D عطف

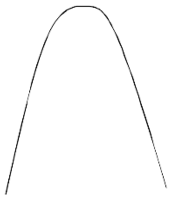
## منحنی‌های مهم

**تابع درجه دوم** $y = ax^{2} + bx + c$ **(سهمی قائم)**

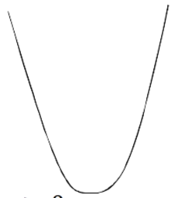
۱- برای یافتن طول نقطه‌ی اکسترموم این تابع می‌توان از رابطه مشتق گرفت:

$$y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y'\left(\frac{-b}{2a}\right) = 0$$

$$y'' = 2a \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow max \\ a > 0 \Rightarrow min \end{cases}$$



$a < 0$ دارای ماکزیمم



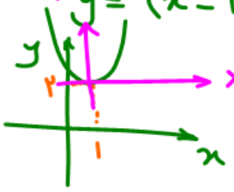
$a > 0$ دارای می نیمم

۲- اگر عدد ثابت $c$ صفر باشد، منحنی تابع درجه دوم از مبدأ مختصات عبور خواهد کرد.

۳- نقطه‌ی اکسترموم سهمی، در رأس سهمی می‌باشد. $S = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

۴- خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی $y = ax^{2} + bx + c$ می‌باشد.

$y = (x-1)^2 + 2$




۵- اگر مبدأ مختصات را به رأس سهمی انتقال دهیم، معادله‌ی سهمی به صورت $Y = aX^{2}$ تبدیل می‌شود.

۶- در تابع درجه‌ی دوم، اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، نمودار آن از هر چهار ربع دستگاه مختصات خواهد گذشت.

مثال: اگر مقدار بیشینه‌ی سهمی به معادله‌ی $y = ax^{2} - 4x + 2a + 1$ برابر ۳ باشد، مقدار $a$ را بیابید.

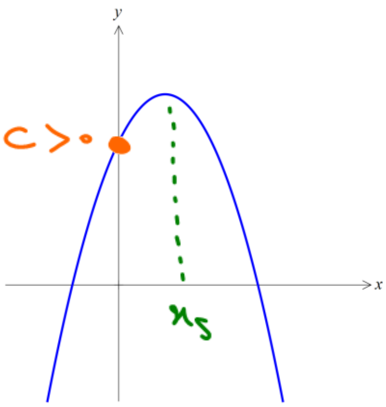

$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2a} = \frac{2}{a}$

$f(x_s) = 3 \Longrightarrow a\left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{a}\right) + 2a - 1 = 3$

$\frac{4}{a} - \frac{8}{a} + 2a = 4 \Rightarrow 2a^2 - 4a - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} a^2 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{a<0}$ غ ق ق ، $\boxed{1 - \sqrt{3}}$ ✓

مثال: معادله‌ی نمودار مقابل کدام است؟

۱) $y = x^{2} + 2x - 3$ ۲) $y = -x^{2} - 2x + 3$ ۳) $y = -x^{2} + 2x - 3$ ۴) $y = -x^{2} + 2x + 3$




$a < 0 \longrightarrow$ گ۱ حذف

$c > 0 \longrightarrow$ گ۳ حذف

$x_s > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow[(\times 2a)]{a<0} -b < 0 \xrightarrow{\times(-1)} \boxed{b > 0}$

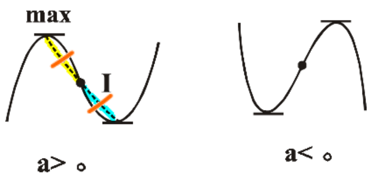
گ۴ درست است


**تابع درجه‌ی سوم** $y=ax^۳+bx^۲+cx+d \quad (a\neq ۰)$

در حالت کلی اگر $a>۰$، نمودار از ربع سوم شروع و به ربع اول ختم می‌گردد و همچنین اگر $a<۰$، نمودار از ربع دوم شروع و به ربع چهارم ختم می‌شود.

نمودار تابع درجه‌ی سوم در ۶ حالت قابلیت رسم دارد که با توجه به تعداد ریشه‌های معادله‌ی مشتق تابع و از روی معادله‌ی مشتق می‌توان تعیین نمود که شکل آن به کدام صورت می‌باشد.

$$y=ax^۳+bx^۲+cx+d \Rightarrow y'=۳ax^۲+۲bx+c \Rightarrow \Delta_{y'}=(۲b)^۲-۴(۳a)(c)$$




$y''=۶ax+۲b=۰ \Longrightarrow \boxed{x_I=\frac{-b}{۳a}}$

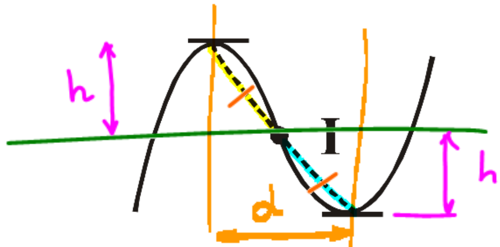
الف) معادله‌ی مشتق دو ریشه داشته باشد:

۱- در این حالت تابع دو نقطه‌ی اکسترموم خواهد داشت و یک نقطه‌ی عطف دارد.

۲- مختصات نقطه‌ی عطف از رابطه‌ی $\left(\frac{-b}{۳a}, f\left(\frac{-b}{۳a}\right)\right)$ به‌دست می‌آید.

۳- نقطه‌ی عطف وسط خط واصل بین نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع است.

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_{max}+x_{min}}{۲} \\ y_I=\dfrac{y_{max}+y_{min}}{۲} \end{cases}$$

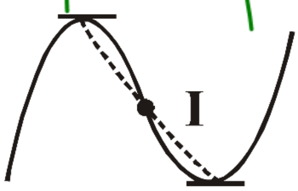



۴- در تابع درجه‌ی سوم، خطی که از نقطه‌ی عطف عبور می‌کند، از نقاط $max$ و $min$ به یک فاصله است و روی تابع دو قطعه‌ی مساوی جدا می‌کند.

۵- در تابع درجه‌ی سوم، خطی که نقاط $max$ و $min$ را به یکدیگر وصل می‌کند، از نقطه‌ی عطف می‌گذرد.

۶- در تابع درجه‌ی سوم، فاصله‌ی دو خط مماس بر اکسترموم‌های نسبی تابع برابر است با: $l=y_{max}-y_{min}$

۷- در تابع درجه‌ی سوم، فاصله‌ی دو خط عمود بر اکسترموم‌های نسبی تابع برابر است با: $d=|x_{max}-x_{min}|$

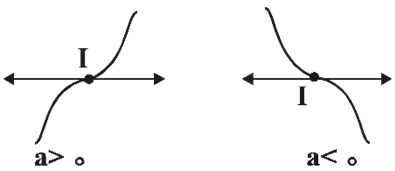



ب) معادله‌ی مشتق، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

۱- در این حالت تابع اکسترموم نداشته و یک نقطه‌ی عطف خواهد داشت.

۲- مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف، کاملاً افقی و موازی محور $x$ها خواهد بود.

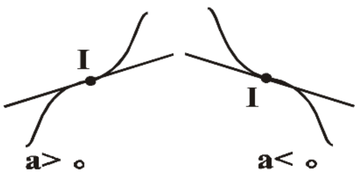
$y'=۰$




پ) معادله‌ی مشتق، ریشه نداشته باشد:

۱- در این حالت تابع اکسترموم نداشته و یک نقطه‌ی عطف خواهد داشت.

۲- مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف مایل خواهد بود. $y'>۰$ یا $y'<۰$



مثال: اگر طول نقطه‌ی عطف تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 3$ برابر ۲ باشد، مقدار $a$ را بیابید.

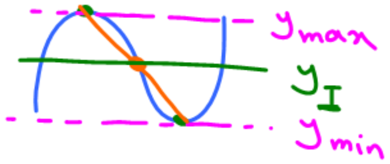
۱) ۶     ۲) $-6$     ۳) ۳     ۴) $-3$

$x_I = \frac{-b}{3a} = \frac{2}{1} \Longrightarrow \frac{-a}{3(1)} = 2 \Longrightarrow \boxed{a=-6}$

مثال: اگر مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \underset{a=1}{x^3} + \underbrace{3}_{b}x^2 - 8x + 4a - 5$ مساوی ۱۸ باشد، مقدار $a$ را بیابید.

۱) ۱     ۲) $-1$     ۳) ۴     ۴) $-4$

$y_I = \frac{\overset{18}{\boxed{y_{max}+y_{min}}}}{2} \Longrightarrow y_I = 9$

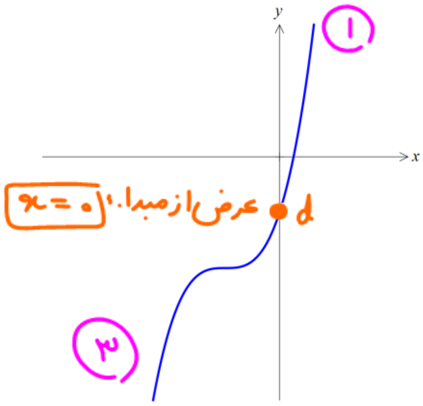



$x_I = \frac{-b}{3a} = \frac{-3}{3(1)} = -1$

$y_I = f(x_I) = f(-1) = 9 \Longrightarrow 5+4a = 9 \Longrightarrow \boxed{a=1}$

مثال: معادله‌ی نمودار مقابل کدام است؟

۱) $y = -x^3 + 1$     ۲) $y = x^3 + 1$     ۳) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$     ۴) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$




۳ $\longrightarrow$ ۱ $\Longrightarrow$ گ۱ و گ۳ حذف

$a>0$

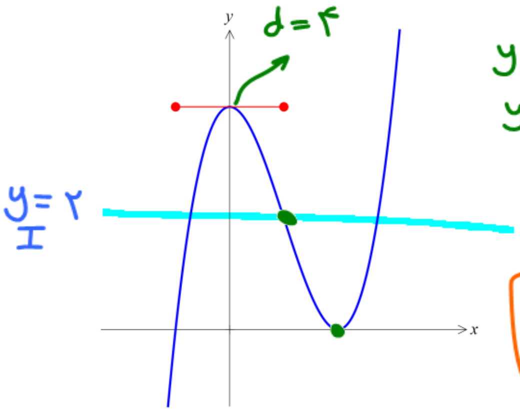
$d<0 \Longrightarrow$ گ۲ $d=1$ ✗

گ۴ $d=-1$ ✓

مثال: نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 4$ به صورت شکل مقابل است. مقدار $a$ را بیابید.

$d=4$

۱) $-4$     ۲) $-3$     ۳) $-2$     ۴) $-1$




$\left.\begin{array}{l} y_{max}=4 \\ y_{min}=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y_I = \frac{y_{min}+y_{max}}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$

$\boxed{x_I = \frac{-a}{3}}$

$y' = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{b=0}$

$\boxed{y = x^3 + ax^2 + 4}$

$f\left(\frac{-a}{3}\right) = 2 \Rightarrow \frac{-a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + 4 = 2 \xrightarrow{\times 27} 2a^3 = -54 \xrightarrow{\div 2} a^3 = -27 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

مثال: مقادیر $a$، $b$ و $c$ را چنان بیابید که تابع $y=ax^2+bx+c$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع از نقطه‌ی $(2\ ,\ -2)$ بگذرد.

$A(1,7)$ نسبی max

$f(1)=7 \Longrightarrow a+b+c=7$

$f'(1)=0 \Longrightarrow 2a+b=0 \Longrightarrow \boxed{b=-2a}$

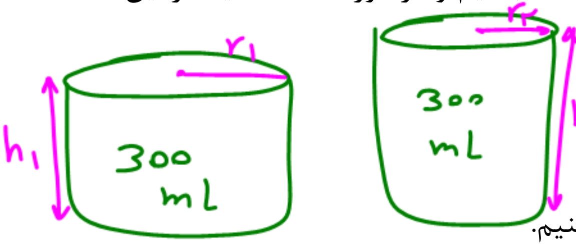
$B(2,-2)\in f(x) \Longrightarrow f(2)=-2 \Longrightarrow 4a+2b+c=-2 \Longrightarrow \boxed{c=-2}$

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y'=2ax+b \end{cases}$$

$a+b-2=7 \Longrightarrow a+b=9 \xrightarrow{b=-2a} \boxed{a=-9}\ \ \boxed{b=18}$

**بهینه سازی**

در اغلب موارد در زندگی روزمره با مسائلی روبرو هستیم که می‌خواهیم در آن حالتی که بهینه می‌باشد را پیدا کنیم، مثلاً در مورد مقدار هزینه در یک مورد، حات بهینه این است که کمترین هزینه را داشته باشیم و در مورد مساحت یک زمین با محیط ثابت بهتر است که بیشترین مساحت را داشته باشیم.




$V_1=V_2$

$S_1\neq S_2$

فرآیند حل مسائل بهینه سازی :

برای حل مسائل بهینه سازی، مراحل زیر را پی می‌گیریم.

۱- در صورت نیاز برای مسئله یک شکل رسم کرده و ابعاد آن را نام‌گذاری می‌کنیم.

۲- پارامتری را که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود شناسایی کرده و برای آن فرمولی می‌نویسیم.

۳- تعداد متغیرهای مسئله را به کمک اطلاعات مسئله و روابط ریاضی به یک متغیر می‌رسانیم، به بیان دیگر پارامتری که می‌خواهیم بهینه کنیم، باید فقط به یک متغیر دیگر وابسته باشد.

۴- اکسترموم‌های مطلق ( سراسری ) تابع خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

مثال: بیشترین مقدار $\underbrace{\text{حاصل‌ضرب}}_{S}$ دو عدد مثبت که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ باشد را بیابید.

$x,y>0$

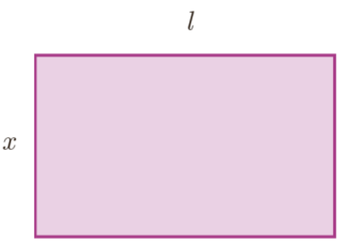
$x+y=10 \Longrightarrow \boxed{y=10-x}$

$S(x,y)=x\times y \Longrightarrow S(x)=x(10-x)$

$S(x)=-x^2+10x$

$S'=0 \Longrightarrow -2x+10=0 \Longrightarrow x=5\ ,\ y=5$

مثال: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن برابر باشد.




$P(x,l)=2(x+l)=14$

$x+l=7 \Longrightarrow l=7-x$

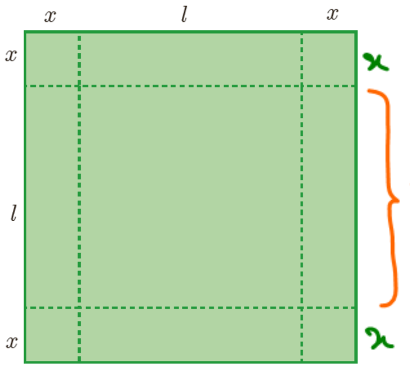
$S(x,l)=xl \Longrightarrow S(x)=x(7-x)$

$S(x)=-x^2+7x$

$S'=0 \Longrightarrow -2x+7=0 \Longrightarrow x=7/2\ ,\ y=7/2$

$\boxed{S_{max}=\frac{49}{4}}$

مثال: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع $x$ برش زده و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه‌ی در باز بسازیم. مقدار $x$ چقدر باشد تاحجم قوطی حداکثر مقدار ممکن شود؟




$V_{max}$ شود.

$$V(x) = (30 - 2x)^2 \cdot x \Longrightarrow$$

$$V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

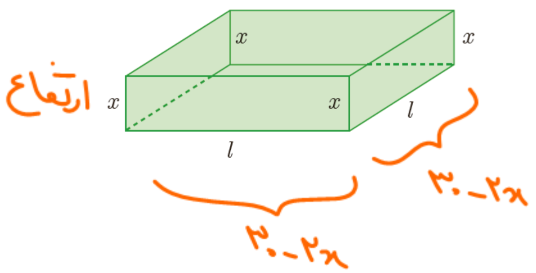
$$V' = 0 \Longrightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \xrightarrow{\div 12}$$

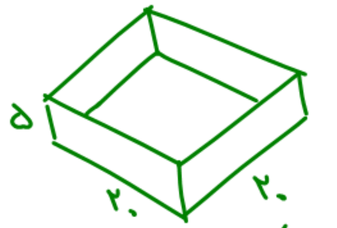
$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$(x-5)(x-15) = 0$$

$$\boxed{x = 5} \qquad x = 15$$

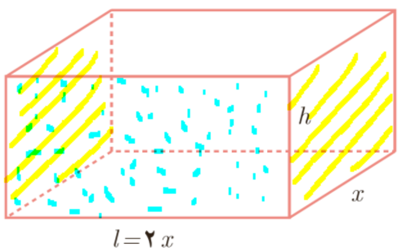
غ‌ق




$$V_{max} = 2000 \ (cm^3)$$

مثال: می‌خواهیم مخزنی به شکل مستطیل در باز بسازیم که حجم آن $10\ m^3$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر مترمربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه‌ی مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود؟




$$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 h = 10 \xrightarrow{\div 2} x^2 h = 5$$

$$\boxed{h = \frac{5}{x^2}} \quad \text{یا} \quad x = \sqrt{\frac{5}{h}}$$

یادآوری: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

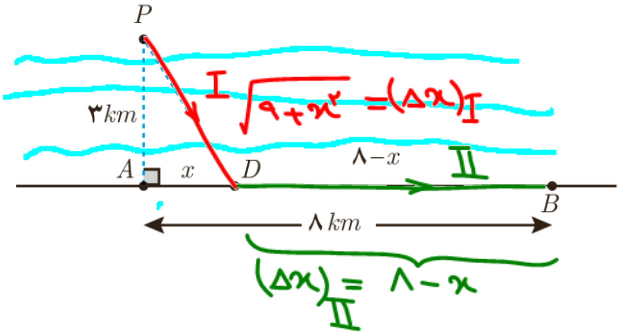
$$C(x,h) = 2x^2 \times 100 + \Big(\overbrace{2 \times (xh)}^{\text{دیواره چپ و راست}} + \overbrace{2 \times (2xh)}^{\text{دیوارهٔ جلو و عقب}}\Big) \times 60$$

$$C(x,h) = 200x^2 + 360xh \xrightarrow{h = \frac{5}{x^2}}$$

$$C(x) = 200x^2 + \frac{1800}{x}$$

$$C' = 0 \Longrightarrow 400x - \frac{1800}{x^2} = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}}$$

مثال: فردی درون قایقی در نقطه‌ی $P$ قرار دارد که فاصله‌ی آن از نزدیک‌ترین نقطه‌ی ساحل یعنی نقطه‌ی $A$، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه‌ی $B$ در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری $A$ قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ کیلومتر بر ساعت و سرعت پیاده‌روی فرد مورد نظر در ساحل ۴ کیلومتر بر ساعت باشد. اگر این فرد بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به نقطه‌ی $B$ برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی $B$ پیاده‌روی کند؟




$$\frac{v}{1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta x}{v}}$$

$$\Delta t = (\Delta t)_I + (\Delta t)_{II}$$

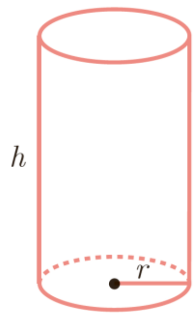
$$\Delta t = \frac{(\Delta x)_I}{v_I} + \frac{(\Delta x)_{II}}{v_{II}} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{2} + \frac{8-x}{4}$$

$$\frac{8}{4} - \frac{x}{4} = 2 - \frac{x}{4}$$

$$(\Delta t)_{(x)} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{2} + 2 - \frac{x}{4} \xrightarrow{(\Delta t)'_{(x)}=0} \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x^2+9} = 2x \xrightarrow{(\ )^2} x^2+9 = 4x^2 \Longrightarrow x^2 = 3 \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt{3}}$$

مثال: می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقا یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟




$$S_{\text{کل استوانه}} = S_{\text{کف}} + S_{\text{جانبی}}$$

سود min

$$V = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \pi r^2 h = 1 \Longrightarrow \boxed{h = \frac{1}{\pi r^2}}$$

ارتفاع × محیط قاعده

$$S(r,h) = S_{\text{کف}} + S_{\text{جانبی}} = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

$$S(r) = \pi r^2 + 2\cancel{\pi} r\left(\frac{1}{\cancel{\pi} r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{2}{r} \xrightarrow{S'(r)=0}$$

$$2\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \Longrightarrow 2\pi r = \frac{2}{r^2} \xrightarrow{\div 2} \pi r = \frac{1}{r^2} \Longrightarrow r^3 = \frac{1}{\pi} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}}$$

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\pi} \times \sqrt[3]{\pi^2} = \frac{\pi^{2/3}}{\pi^{3/3}} = \frac{1}{\pi^{1/3}} \Longrightarrow \boxed{h = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}}$$

مثال: هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت $v$ کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰\ v^۲$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه‌ی آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟

$v = ?$

$C_{min}\ (\Delta x = ۱)$

$C_{\text{هزینه کل}} = C_{\text{سوخت}} + C_{\text{سایر هزینه‌ها}} =$

$\frac{v}{۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta x}{v}}$

$C = ۳۲۰ v^۲ \times (\Delta t) + ۸۰۰۰۰۰ (\Delta t)$

$C = ۳۲۰ v^۲ \frac{\Delta x}{v} + ۸۰۰۰۰۰ \frac{\Delta x}{v} \xrightarrow{\Delta x = ۱}$

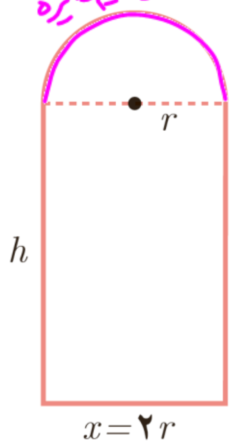
$C(v) = ۳۲۰ v + \frac{۸۰۰۰۰۰}{v} \xrightarrow{C'(v) = ۰}$

$۳۲۰ - \frac{۸۰۰۰۰۰}{v^۲} = ۰ \Longrightarrow v^۲ = ۲۵۰۰ \Longrightarrow v = ۵۰\ \left(\frac{Km}{h}\right)$

مثال: در بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم‌دایره برابر پهنای مستطیل باشد. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

$S_{max} = ?$

محیط نیم‌دایره $= \frac{۱}{۲}(۲\pi r)$




$P = \frac{۹}{۲} \Longrightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲} \Longrightarrow$

$\boxed{۲h = \frac{۹}{۲} - \pi r - ۲r}$

$S = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{نیم‌دایره}} + ۲rh + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ =$

$S = r(۲h) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ = r\left(\frac{۹}{۲} - \pi r - ۲r\right) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \Longrightarrow$

$\boxed{S(r) = \frac{۹}{۲} r - \frac{۱}{۲}\pi r^۲ - ۲r^۲}$

$S' = ۰ \Longrightarrow \frac{۹}{۲} - \pi r - ۴r = ۰ \Longrightarrow (۴ + \pi) r = \frac{۹}{۲} \Longrightarrow r = \frac{۹}{۲(\pi + ۴)} = \frac{۹}{۲\pi + ۸}$