کارنامه خرد

# جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده

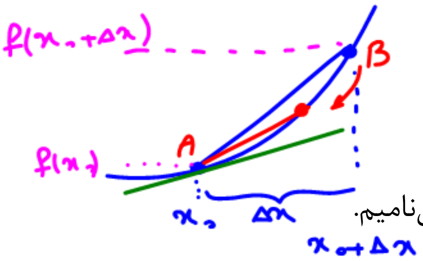
# مشتق

## نمو تابع و منو متغیر

تابع حقیقی $f(x)$ را در بازه‌ی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم که شامل نقطه‌ی $x_\circ \in (a,b)$ باشد. اگر مقدار عددی $\Delta x$ را طوری برگزینیم که $(x_\circ + \Delta x) \in (a,b)$ باشد، در این صورت $\Delta x$ را نمو متغیر و $\Delta y$ را نمو تابع می‌نامیم.

$\Delta x = x - x_\circ$

$\Delta y = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)$




نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را نسبت نمو تابع به نمو متغیر می‌نامیم.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

## تعریف مشتق:

اگر تابع $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی $x_\circ$ از بازه‌ی $I$ تعریف شده باشد، حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر را در شرایطی که $\Delta x \to \circ$ محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار موجود باشد، می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق پذیر بوده و مقدار مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ را با $f'(x_\circ)$ نشان می‌دهیم.

شیب خط مماس در $(x=x_\circ)$

$$f'(x_\circ) = \lim_{\Delta x \to \circ} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \circ} \frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

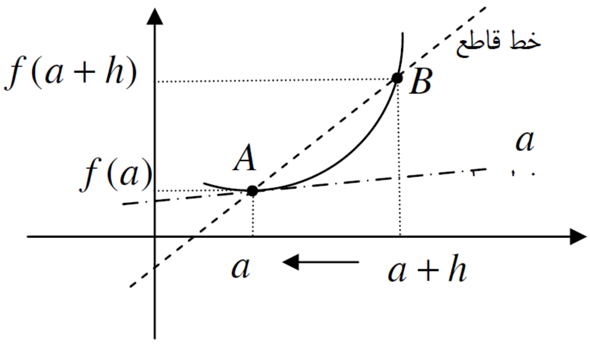
تذکر: با توجه به تعریف نمو متغیر $\Delta x = x - x_\circ$، می‌توان نوشت: $x = x_\circ + \Delta x$

اگر نمو متغیر به سمت صفر میل کند $\Delta x \to \circ$، مقدار $x$ به $x_\circ$ بسیار نزدیک خواهد شد، یعنی: $x \to x_\circ$

فرمول مشتق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

شیب خط مماس در $x=x_\circ$

$$f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$




$$f(x) = x^2 + 2x \xrightarrow{\text{تعریف}} f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2 + 2(x+h)}^{f(x+h)} - \overbrace{(x^2+2x)}^{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2xh + \cancel{2x} + 2h - \cancel{x^2} - \cancel{2x}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h + 2x + 2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h + 2x + 2 = 2x + 2$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2-3x$ را در نقطه‌ی $x=2$ بیابید.

$f(2)=(2)^2-3(2)=-2$

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\overbrace{x^2-3x-(-2)}^{x^2-3x+2}}{x-2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$

$f'(2)=1$

معادله‌ی خط مماس: $A(2,-2)$، $m=1$ : $y-(-2)=1(x-2)\Longrightarrow y+2=x-2$

$y=x-4$

معادله‌ی قائم: $m_N=-1$

$y-(-2)=-(x-2)$

$y+2=-x+2$

$y=-x$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-3}$ را در نقطه‌ی $x=7$ بیابید.

$f'(7)=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{f(x)-f(7)}{x-7}=$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(\sqrt{x-3}-2)}{x-7}\times\dfrac{(\sqrt{x-3}+2)}{(\sqrt{x-3}+2)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\overbrace{x-3-4}^{\cancel{(x-7)}}}{\cancel{(x-7)}(\sqrt{x-3}+2)}=\dfrac{1}{4}$

$\left(f(2x)\right)'=f'(2x)\times 2$

مثال: اگر $f'(-2)=3$ باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-\overbrace{f(-2)}^{\text{عدد}}}{\underbrace{6(x+2)}_{6x+12}}=\dfrac{1}{6}\overbrace{\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}^{f'(-2)}=\dfrac{1}{6}f'(-2)=\dfrac{1}{6}(3)=\dfrac{1}{2}$

$\text{Hop}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f'(x)(1)-0}{6+0}=\dfrac{f'(-2)}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

مثال: اگر تابع $f(x)$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{6h}=3$ باشد، مقدار $f'(2)$ را بیابید.

$\text{Hop}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(2+h)(1)-f'(2-h)(-1)}{6}=\dfrac{2f'(2)}{6}=\dfrac{f'(2)}{3}$

$\dfrac{f'(2)}{3}=\dfrac{3}{1}\Longrightarrow f'(2)=9$

تشریحی

$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}+\dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right)=\dfrac{1}{6}\left(2f'(2)\right)=\dfrac{f'(2)}{3}$

مثلاً $f(x)=(2x-3)^7=u^7$ ، $u=2x-3$ $g(x)=\sqrt{5x^2-3x}=\sqrt{u}$ ، $u=5x^2-3x$

## قواعد مشتق‌گیری

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع بر حسب متغیر $x$ باشند، فرمول‌های مهم مشتق‌گیری به صورت زیر می‌باشند.

| ردیف | تابع | مشتق تابع |
|---|---|---|
| ۱ | عدد ثابت $y=c \quad (c\in\mathbb{R})$ $y=c$ | $y'=0$ |
| ۲ | ضریب (نوشته می‌شود) $y=a\ f(x)$ | $y'=a\ f'(x)$ |
| ۳ | جمع و تفریق $y=u\pm v$ | $y'=u'\pm v'$ |
| ۴ | حاصلضرب $y=u\times v$ | $y'=u'v+v'u$ |
| ۵ | حاصل تقسیم $y=\frac{u}{v}$ | $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ |
| ۶ $y=(2x-1)^5 \Rightarrow y'=5(2x-1)^4\times 2$ | بیاد بنشت، یکی ازش کم بشه کار توان: $y=u^n$ | $y'=nu^{n-1}\times u'$ |
| ۷ $\frac{1}{\text{۲ برابر خودش}}$ | کار رادیکال: $y=\sqrt{u}$ | $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| ۸ $y=u^{n/m}$ ، $y'=\frac{n}{m}u^{\frac{n}{m}-1}\times u'$ | راه بهتر: توان کن با $y=\sqrt[m]{u^n}$ | $y'=\frac{n\ u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ |
| ۹ | $y=\frac{1}{u}$ | $y'=\frac{-1}{u^2}\times u'$ |
| ۱۰ علامت عبارت قدرمطلق | اول تعیین تکلیف $y=\|u\|$ | $y'=\frac{u\ u'}{\|u\|}$ |
| (مهمترین) ★ ۱۱ | تابع مرکب $y=f(u)$ | $y'=f'(u)\times u'$ |
| ۱۲ | $y=\sin u$ | $y'=\cos u\times u'$ |
| ۱۳ | $y=\cos u$ | $y'=-\sin u\times u'$ |
| ۱۴ | $y=\tan u$ | $y'=(1+\tan^2 u)\times u'$ |
| ۱۵ | $y=\cot u$ | $y'=-(1+\cot^2 u)\times u'$ |
| ۱۶ عدد نپر (نپر) | $e\simeq 2{,}71$ $y=e^u$ | $y'=e^u\times u'$ |
| حذف ۱۷ | نمایی $y=a^u$ | $y'=a^u\times u'\times \ln a$ |
| ۱۸ | لگاریتم طبیعی $y=\ln u=\log_e u$ | $y'=\frac{u'}{u}$ |
| ۱۹ | لگاریتمی $y=\log_a u$ | $y'=\frac{u'}{u}\times\frac{1}{\ln a}$ |
| ۲۰ | شبه هموگرافیک $y=\frac{au+b}{cu+d}$ | $y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$ |

مثال: مشتق تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱)=۰$ ، $f'(۱)=-۶$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ را بیابید.

$y'(1)=3$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} \xrightarrow{x=1}$$

$$\frac{f'(1)g(1)-\cancel{g'(1)\overset{\text{صفر}}{f(1)}}}{g^2(1)}=\frac{3}{1} \xrightarrow{g(1)=a}$$

$$\frac{-6a}{a^2}=\frac{3}{1} \overset{\div 3}{\Longrightarrow} \frac{-2a}{a^2}=1 \Rightarrow a^2=-2a \Rightarrow a^2+2a=0$$

$a(a+2)=0$ ⟨ $a=0$ غ ق ق ، $a=-2 \longrightarrow g(1)=-2$

مثال: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$$f(x)=\left(x^{۵}-۵x^{۲}+۳\right)^{۴} = u^4 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4u^3\times u'$$

$$f'(x)=\underbrace{4(x^5-5x^2+3)^3}_{4u^3}\times\underbrace{(5x^4-10x)}_{u'}$$

نکته: در مشتق‌گیری از تابع داده شده، همواره تا حد امکان تابع مورد نظر را ساده کرده و سپس از تابع ساده شده مشتق‌گیری می‌کنیم.

مثال: مشتق تابع $f(x)=(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۴}+۱)(x^{۸}+۱)$ را محاسبه نمایید.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{(x^2-1)}(x^2+1)}_{(x^4-1)}(x^4+1)}_{(x^8-1)}(x^8+1)}$$

$f(x)=x^{16}-1 \longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=16x^{15}-0 \longrightarrow D_{f'}=\mathbb{R}$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{4x+4\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}$ را بیابید.

$$f(x)=\frac{4x^{3/3}+4x^{2/3}}{x^{1/3}+1}$$

$$f(x)=\frac{(4x^{2/3})\cancel{(x^{1/3}+1)}}{\cancel{(x^{1/3}+1)}}=4x^{2/3}\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)=\frac{8}{3}x^{-1/3}$$

$$f'(x)=\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x$ و $g(x)=\sqrt{x^2-1}-x$ باشد، حاصل $\underbrace{f'(5)g(5)+g'(5)f(5)}_{(fg)'(5)}$ را بیابید.

$$f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=x^2-1-x^2=-1$$

$$f\cdot g=-1\longrightarrow(f\cdot g)'=0$$

مثال: اگر $f(x)=\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)^7$ و $g(x)=\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)^7$ باشد، حاصل $\underbrace{\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}}$ را بیابید. $(x\neq 0)$

$$\frac{f'g+g'f}{fg}=\frac{(fg)'}{(fg)}=\frac{(x^7)'}{x^7}=\frac{7x^6}{x^7}=\frac{7}{x}$$

$$f(x)\cdot g(x)=\Big(\underbrace{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}_{(\cancel{x^2}+x)-\cancel{x^2}}\Big)^7=x^7$$

مثال: اگر $f(x)=x^{۲}-۲x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)\cdot g(۴+h)-۱۶}{h}$ را بیابید.

$$\underset{h\to 0}{\text{Hop}\lim}\ \frac{f'(4+\cancel{h})\,g(4+\cancel{h})+g'(4+\cancel{h})f(4+\cancel{h})-0}{1}=\underbrace{f'g+g'f}_{\text{از همین حل می‌کنیم.}}=\underbrace{(fg)'}_{\text{به درد نخور}}\quad x=4$$

$$f(x)=x^{۲}-۲x \Longrightarrow f'(x)=۲x-۲$$
$$f(۴)=۸ \qquad f'(۴)=۶$$
$$g(x)=\sqrt{x} \Longrightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$
$$g(۴)=۲ \qquad g'(۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$=۶\times۲+\frac{۱}{۴}\times۸=۱۲+۲=۱۴$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+x+۱}$ و $g(x)=\frac{x^{۳}}{x^{۲}+x+۱}$ باشد، حاصل $\underbrace{f'(x)-g'(x)}_{(f-g)'}$ را بیابید.

$$f-g=\frac{1-x^{۳}}{x^{۲}+x+1}=\frac{(1-x)\cancel{(1+x+x^{۲})}}{\cancel{(1+x+x^{۲})}}=1-x$$

$$(f-g)'=(1-x)'=0-1=-1 \Longrightarrow f'(x)-g'(x)=-1$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}+۱}$ را در $x=۹$ بیابید.

$$f(x)=\frac{\cancel{(\sqrt{x}+1)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{(\sqrt{x}+1)}}\Longrightarrow$$

$$f(x)=\sqrt{x}-1 \Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{۲\sqrt{x}} \xrightarrow{x=9} f'(9)=\frac{1}{۶}$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[5]{(2x+3)^3}$ را در $x=-1$ بیابید.

$y=\sqrt[m]{u^n} \Longrightarrow y'=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

$\left.\begin{matrix} u=2x+3 \\ n=3 \\ m=5 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{3\times(2)}{5\sqrt[5]{(2x+3)^2}} \xrightarrow{x=-1} f'(-1)=\dfrac{6}{5}$

$f(x)=(2x+3)^{3/5} \longrightarrow f'(x)=\frac{3}{5}(2x+3)^{-2/5}\times 2 \Rightarrow f'(-1)=\frac{6}{5}$

$x=-1$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{3+2\sin^2 x}$ را در $x=\dfrac{\pi}{6}$ بیابید.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$f(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{3+2\sin^2 x}=\dfrac{-\sin^2 x+1}{2\sin^2 x+3}$

$y=\dfrac{au+b}{cu+d} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$

$u=\sin^2 x \xrightarrow{\text{مشتق}} u'=?$

$u'=\underbrace{2\sin x\times\cos x}_{\text{کارتال}}$

$u'=\sin 2x$

$f'(x)=\dfrac{(-1)(3)-(1)(2)}{(2\sin^2 x+3)^2}\times\sin 2x \xrightarrow{x=\pi/6}$

$\dfrac{\frac{-5}{1}}{\frac{49}{4}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-10\sqrt{3}}{49}$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\cot 2x-\tan 2x$ را به ازای $x=\dfrac{\pi}{16}$ بیابید.

$\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha$

$f(x)=2\cot 4x \longrightarrow f'(x)=\underset{\text{ضریب}}{-2}\underbrace{(1+\cot^2 4x)}_{\text{cot تابع}}\times\underset{u'}{4}$

$f'\left(\frac{\pi}{16}\right)=-16$

مثال: اگر $f(x) = \sin \pi x^{۲}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$ را بیابید.

$$\text{Hop} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(1+\cancel{\Delta x})(1)-0}{1} = f'(1)$$

$$f(x) = \sin(\pi x^2) \longrightarrow f'(x) = \cos(\pi x^2) \times (2\pi x) \xrightarrow{x=1}$$

$$f'(1) = \underbrace{(\cos\pi)}_{-1}(2\pi) \Longrightarrow \boxed{f'(1) = -2\pi}$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = \ln \sin x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ بیابید.

$$y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$f(x) = \ln \sin x \Longrightarrow f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$f'(x) = \cot x \xrightarrow{x=\pi/6} f'(\pi/6) = \cot \pi/6 = \sqrt{3}$$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{e^{x^{۲}-x}}{۲+\tan x}$ را در $x = ۰$ بیابید.

$$y = e^u \longrightarrow y' = e^u \times u'$$

$$y' = \frac{e^{x^2-x} \times (2x-1) \times (2+\tan x) - (1+\tan^2 x)\, e^{x^2-x}}{(2+\tan x)^2} \Rightarrow y'(0) = \frac{-2-1}{(2)^2} = \frac{-3}{4}$$

$$h(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{صفرکننده}} \cdot g(x) \xrightarrow[f(a)=0]{h'(a)=?}$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \Longrightarrow h'(a) = f'(a) \cdot g(a) + \cancel{g'(a) \cdot f(a)}$$

صفر

**عامل صفرکننده**

در محاسبه‌ی مقدار مشتق تابع $h(x) = f(x).g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$، اگر $f(a) = ۰$ باشد، به $f(x)$ عامل صفرکننده در نقطه‌ی $x=a$ گفته و برای به‌دست آوردن مقدار مشتق در نقطه‌ی $x=a$، کافیست فقط از عامل صفرکننده مشتق گرفته و در بقیه‌ی عبارت ضرب کنیم و در نهایت عدد $x=a$ را در تابع مشتق حاصل، جایگذاری نماییم.

$$h(x) = f(x).g(x) \Rightarrow h'(a) = f'(a).g(a)$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=\dfrac{(x^{۲}-۴)(۲x+\cos \pi x)^{۲}}{\sqrt[۴]{x^{۳}+۸}}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بیابید.

عامل صفرکننده

$$f(x)=(x-۲)\dfrac{(x+۲)(۲x+\cos\pi x)^{۲}}{\sqrt[۴]{x^{۳}+۸}}$$

مشتق

$$f'(۲)=۱\times\dfrac{(۴)\ (۲۵)}{۲}\Rightarrow f'(۲)=۵۰$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=x(x-۵)(x-۲)(x-۶)$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بیابید.

مشتق

$$۱\times(۰-۵)(۰-۲)(۰-۶)=-۶۰$$

مثال: اگر تابع $f(x)=\dfrac{(x-۲)\log(x+۸)}{(x^{۳}-۲)^{۲}}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ را بیابید.

$$f'(۲)=۱\times\dfrac{\overbrace{\log(۲+۸)}^{\log ۱۰=۱}}{(۲^{۳}-۲)^{۲}}=\dfrac{۱}{۳۶}$$

نکته: اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای عامل صفرکننده‌ی از مرتبه‌ی $n$ باشد، برای یافتن مشتق مرتبه‌ی $n$ام تابع در نقطه‌ی $x=a$، کافیست از عامل صفرکننده $n$ بار مشتق گرفته و در بقیه‌ی عبارت ضرب نماییم.

مثال: مشتق دوم تابع $f(x)=(۲x-۱)^{۲}\sqrt{x^{۲}+۴x}$ را در $x=\dfrac{۱}{۲}$ بیابید.

عامل صفرکننده‌ی مرتبه‌ی ۲ : $(۲x-۱)^{۲}=۴x^{۲}-۴x+۱\xrightarrow{\text{مشتق اول}}۸x-۴\xrightarrow{\text{مشتق دوم}}۸$

$$f''\left(\tfrac{۱}{۲}\right)=۸\times\sqrt{\left(\tfrac{۱}{۲}\right)^{۲}+۴\left(\tfrac{۱}{۲}\right)}=۸\times\sqrt{\tfrac{۹}{۴}}=۸\times\tfrac{۳}{۲}=۱۲$$

**مشتق تابع مرکب (قاعده‌ی مشتق‌گیری زنجیره‌ای)**

اگر تابع $g(x)$ در $a$ مشتق‌پذیر بوده و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق‌پذیر باشد، برای یافتن مشتق تابع $fog(x)$ در نقطه‌ی $a$ به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$(fog)'(a) = (f(g(x)))'(a) = f'(g(a)).g'(a)$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = f'(u).u'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \times \frac{\cancel{du}}{dx} \Rightarrow y'_x = y'_u . u'_x$$

$y \to u \to x$

$y'_u \times u'_x$

یا تشکیل بدهیم بعد مشتق بگیریم $y(u(x)) \Rightarrow y'_x$

$y'_x = \frac{dy}{dx}$ , $u'_y = \frac{du}{dy}$

مثال: اگر $f(x) = x^۲ - ۴x$، مشتق تابع $f(\sin x)$ را بیابید.

مشتق

$f'(x) = ۲x - ۴$

$f'(\sin x) = ۲\sin x - ۴$

$$(f(\sin x))' = f'(\sin x) \times \cos x =$$

$$(۲\sin x - ۴)(\cos x) = ۲\sin x\cos x - ۴\cos x$$

$$= \sin ۲x - ۴\cos x$$

مثال: اگر $f'(x) = \frac{۱}{۲x^۲ + ۳}$ باشد، مقدار مشتق تابع $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ را به ازای $x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بیابید.

$x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$x = \sqrt{۲}$

$f'(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{۲(\sqrt{۲})^۲ + ۳} = \frac{۱}{۷}$

$$\left(f\left(\frac{۱}{x}\right)\right)' = f'\left(\frac{۱}{x}\right) \times \frac{-۱}{x^۲} = \underbrace{f'(\sqrt{۲})}_{\frac{۱}{۷}} \times (-۲) = \frac{-۲}{۷}$$

$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

مثال: اگر $f\left(\frac{۱}{x}\right) = \sqrt{x+۳}$ باشد، مقدار $f'(۱)$ را بیابید.

$$f\left(\frac{۱}{x}\right) = \sqrt{x+۳}$$ از طرفین مشتق بگیریم

$$f'\left(\frac{۱}{x}\right) \times \frac{-۱}{x^۲} = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}$$

$f'(۱) = ?$ $\xrightarrow{\quad}$ $x = ۱$

$$f'(۱) \times \frac{-۱}{(۱)^۲} = \frac{۱}{۲\sqrt{۱+۳}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{-۱}{۴}$$

مثال: اگر $f(2x)+g(1-2x)=x^2+2x$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$ باشد، مقدار $g'(1)$ را بیابید.

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{f'(0)=3}$

$$f(2x)+g(1-2x)=x^2+2x \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$f'(2x)(2)+g'(1-2x)(-2)=2x+2 \xrightarrow[x=0]{g'(1)=?}$$

$$2f'(0)-2g'(1)=2 \xrightarrow{\div 2} \underbrace{f'(0)}_{3}-g'(1)=1 \Rightarrow 2=g'(1)$$

مثال: اگر $y=u^3-2u$ و $u=\cos 2x$، مقدار مشتق $y$ بر حسب متغیر $x$ را در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{6}$ بیابید.

$$y=u^3-2u \longrightarrow y'_u=3u^2-2$$

$$x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow u=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$u=\cos 2x \longrightarrow u'_x=-2\sin 2x$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "y'_u"] \arrow[rr, bend right, "y'_x"'] & u \arrow[r, "u'_x"] & x \end{tikzcd}$$

$y'_u \times u'_x$

$$y'_x=(3u^2-2)(-2\sin 2x)=\underbrace{\left(3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\right)}_{-\frac{5}{4}}\times\underbrace{\left(-2\sin\tfrac{\pi}{3}\right)}_{-\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

مثال: اگر $f(x)=\cos 4x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، مقدار مشتق تابع $gof(x)$ را در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{12}$ بیابید.

$$\left(g\left(f\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\right)\right)'=g'\left(\underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{12}\right)}\right)\times\underbrace{f'\left(\tfrac{\pi}{12}\right)} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}}$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{12}\right)=\cos 4\left(\tfrac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-4\sin 4x$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'\left(\tfrac{1}{2}\right)\times f'\left(\tfrac{\pi}{12}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\left(-4\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-2\sqrt{3})=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{6}$$

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=-\dfrac{1}{3}$ باشد، مشتق $f\left(\sqrt{|x|+13}\right)$ در نقطه‌ی $x=-12$ را بیابید.

$$f'(5)=\frac{-1}{3}$$

$$x=-12 \xRightarrow{x<0} |x|=-x$$

$$f\left(\sqrt{|x|+13}\right)=f\left(\sqrt{13-x}\right) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$f'\left(\sqrt{13-x}\right)\times\frac{-1}{2\sqrt{13-x}} \xrightarrow{x=-12}$$

$$f'(5)\times\frac{-1}{10}=\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{10}\right)=\frac{+1}{30}$$

**مشتق‌گیری ضمنی**

در مواردی که نتوانیم تابع $y$ را بر حسب متغیر $x$ مرتب کنیم، از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم. دراین موارد تابع به طور صریح بر حسب متغیر قابل بیان کردن نیست لذا ارتباط آن‌ها به یکدیگر را ضمنی می‌نامند.

برای محاسبه‌ی مشتق تابع نسبت به متغیر ( $y'_x$ ) زمانی که رابطه‌ی بین آن‌ها ضمنی باشد، دو راه وجود دارد.

**راه اول:** در این روش متغیر $y$ را تابعی بر حسب متغیر $x$ فرض کرده و در رابطه‌ی ضمنی داده شده، از رابطه مشتق می‌گیریم با این فرض که زمانی که می‌خواهیم از متغیر $y$ نسبت به $x$ مشتق بگیریم، مشتق آن را به صورت $y'$ در نظر می‌گیریم.

**راه دوم:** کل پارامترهای رابطه‌ی داده شده را به یک سمت علامت تساوی منتقل کرده و سپس از فرمول مقابل به محاسبه‌ی مشتق می‌پردازیم.

$y=\sin(xy) \Longrightarrow \underbrace{y-\sin(xy)=0}_{f(x,y)}$

$$f(x,y)=0 \Rightarrow f'(x,y)=y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

y را عدد ثابت فرض می‌کنیم

x را عدد ثابت فرض می‌کنیم

$$y'_x=-\frac{0-\cos(xy)\times y}{1-\cos(xy)\times x}$$

تذکر: در رابطه‌ی فوق منظور از $f'_x$ این است که در طول مشتق گیری متغیر $y$ را عدد ثابت فرض کرده و مشتق را نسبت به متغیر $x$ می‌گیریم.

تذکر: در رابطه‌ی فوق منظور از $f'_y$ این است که در طول مشتق گیری متغیر $x$ را عدد ثابت فرض کرده و مشتق را نسبت به متغیر $y$ می‌گیریم.

مثال: اگر رابطه‌ی بین متغیرهای $x$ و $y$ به صورت $5x^3+4y^2=7$ بیان شده باشد، $y'_x$ را محاسبه نمایید.

$y^2=\frac{7-5x^3}{4}$

$$\underbrace{5x^3+4y^2-7}_{f(x,y)}=0 \Longrightarrow y'_x=-\frac{15x^2}{8y}$$

مثال: اگر $y=\sin xy$ باشد، مقدار $f'(0,\pi)$ را بیابید.

$$\underbrace{y-\sin(xy)}_{f(x,y)}=0 \Longrightarrow y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-y\cos(xy)}{1-x\cos(xy)}=\frac{-\pi}{1-0}=-\pi$$

مثال: فرض می‌کنیم $x^{3}-4x^{2}y^{3}+\sqrt{xy}-\sin\dfrac{\pi x}{y}+2=0$ باشد، مقدار مشتق $y$ نسبت به متغیر $x$ را در نقطه‌ی $A\ (1,1)$ محاسبه نمایید.

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{3x^2-8xy^3+\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}-\cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)\times\left(\dfrac{\pi}{y}\right)+0}{0-12x^2y^2+\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}-\cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)\times\left(\dfrac{-\pi x}{y^2}\right)+0}=\frac{-\dfrac{9}{2}+\pi}{-\dfrac{23}{2}-\pi}=$$

$3-8+\frac{1}{2}+\pi$

$-12+\frac{1}{2}-\pi$

$x=1\ ,\ y=1$

$$\frac{\dfrac{9-2\pi}{2}}{\dfrac{23+2\pi}{2}}=\frac{9-2\pi}{23+2\pi}$$

مثال: اگر $xy^{2}+yx^{2}=\sin(x+y)$ باشد، مقدار $f'(0,0)$ را بیابید.

$$\overbrace{xy^2+yx^2-\sin(x+y)}^{f(x,y)}=0$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\cancel{y^2}+\cancel{2xy}-\cos(x+y)}{\cancel{2xy}+\cancel{x^2}-\cos(x+y)}=-1$$

$x=0\ ,\ y=0$

$$a^4\sin ax\xrightarrow{y'}a\cos ax\xrightarrow{y''}-a^2\sin ax\xrightarrow{y'''}-a^3\cos ax\xrightarrow{y^{(4)}}a^4\sin ax$$

## مشتق مراتب بالاتر

اگر تابع $f'(x)$ در نقطه‌ی $x_0$ در بازه‌ی $I$ تعریف شده باشد، مقدار زیر را مشتق دوم در نقطه‌ی $x_0$ می‌نامیم و آن را با نماد $f''(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

سایر مشتق‌های مراتب بالاتر نیز به همین صورت تعریف می‌شوند، به طور مثال اگر تابع $f''(x)$ در نقطه‌ی $x_0$ در بازه‌ی $I$ تعریف شده باشد، مقدار زیر را مشتق سوم در نقطه‌ی $x_0$ می‌نامیم و آن را با نماد $f'''(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x_0+\Delta x)-f''(x_0)}{\Delta x}$$

تذکر: مشتق مرتبه‌ی $n$ام در نقطه‌ی $x_0$ را با نماد $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}\left(f^{(n)}(x)\right)$$

### مشتق مرتبه‌ی $n$ام چند تابع خاص

مطالعه آزاد

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c \Rightarrow \begin{cases} y^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} \times a \times x^{(n-k)} & k < n \\ y^{(k)} = n! \times a & k = n \\ y^{(k)} = 0 & k > n \end{cases}$$

$$y = \frac{k}{ax+b} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{k \times (-a)^n \times n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$y = e^{(ax+b)} \Rightarrow y^{(n)} = a^n \times e^{(ax+b)}$$

$$y = \sin ax \Rightarrow y^{(n)} = a^n \times \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$y = \cos ax \Rightarrow y^{(n)} = a^n \times \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$y = x^5 + 4x$
$y' = 5x^4 + 4$
$y'' = 20x^3$
$y''' = 60x^2$
$y^{(4)} = 120x$
$y^{(5)} = 120$

مثال: مشتق مرتبه‌ی چهاردهم تابع $y = (x^2+1)^7 + x^{14}$ را بیابید.

$y = (x^{14} + \cdots) + x^{14}$

$y = 2x^{14} + \underbrace{\cdots}_{\text{درجه حداکثر ۱۳ است}}$

$y^{(14)} = 0$

$y^{(14)} = 2 \times 14!$

مثال: مشتق مرتبه‌ی نهم تابع $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ را در $x = 1$ بیابید.

$y = \dfrac{x^2-4+5}{x-2} = \dfrac{x^2-4}{x-2} + \dfrac{5}{x-2} =$

$y = \cancel{x+2} + \dfrac{5}{x-2}$

$y^{(9)} = 5 \times \dfrac{(-1)(9!)}{(x-2)^{10}}$

$\left(\dfrac{1}{x-2}\right)' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} = \dfrac{-1}{u}$ 1!

$\left(\dfrac{1}{x-2}\right)'' = \dfrac{1}{(x-2)^4} \times 2(x-2) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$ 2!

$\left(\dfrac{1}{x-2}\right)''' = \dfrac{-(3!)}{(x-2)^4}$

مثال: مشتق مرتبه‌ی پنجم تابع $y = \dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ را در $x = \dfrac{\pi}{6}$ بیابید.

جنس آن مشتق اول است.

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$y = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}\sin 2x = \left(\dfrac{1}{2}\right)(2)^5 \cos 2x$

$f^{(5)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2^4 \times \cos\frac{\pi}{3} = 8$

مثال: مشتق مرتبه‌ی هفتم تابع $y = \dfrac{1}{2^6}\cos 2x$ را در $x = \dfrac{\pi}{12}$ بیابید.

مثال: اگر $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ باشد، آن‌گاه $f''\left(\dfrac{1}{4}\right)$ را بیابید.

مثال: اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ را بر حسب $g''(0)$ بیابید.

## مشتق‌های یک‌طرفه و مشتق‌پذیری

**مشتق راست:** در مورد تابع $f(x)$ اگر حد زیر موجود و متناهی باشد، به آن مشتق راست در نقطه‌ی $x_\circ$ می‌گویند و آن را با نماد $f'_+(x_\circ)$ یا $f'(x_\circ^+)$ نمایش می‌دهند.

$$f'_+(x_\circ)=\lim_{\Delta x\to \circ^+}\frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

**مشتق چپ:** در مورد تابع $f(x)$ اگر حد زیر موجود و متناهی باشد، به آن مشتق چپ در نقطه‌ی $x_\circ$ می‌گویند و آن را با نماد $f'_-(x_\circ)$ یا $f'(x_\circ^-)$ نمایش می‌دهند.

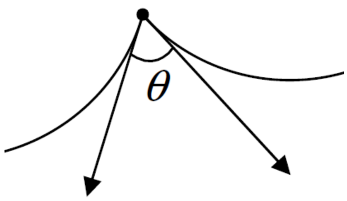
$$f'_-(x_\circ)=\lim_{\Delta x\to \circ^-}\frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

تذکر: تابع $f(x)$ به شرطی در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً داشته باشیم:

$$f'(x_\circ)=f'_+(x_\circ)=f'_-(x_\circ)$$

نکته: مقدار $f'_+(x_\circ)$ بیانگر شیب خط مماس بر منحنی که از سمت راست نقطه‌ی $x_\circ$ بر منحنی در نقطه‌ی مورد نظر مماس شده باشد و به این خط نیم‌مماس راست نیز می‌گویند.

نکته: مقدار $f'_-(x_\circ)$ بیانگر شیب خط مماس بر منحنی که از سمت چپ نقطه‌ی $x_\circ$ بر منحنی در نقطه‌ی مورد نظر مماس شده باشد و به این خط نیم‌مماس چپ نیز می‌گویند.




نکته: اگر بخواهیم از یک تابع چندضابطه‌ای که تک تک ضابطه‌هایش پیوسته بوده و در نقاط مرزی نیست پیوسته می‌باشد، مشتق بگیریم، از تک تک ضابطه‌هایش به‌طور جداگانه مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق راست و چپ تابع $f(x)=|x-۲|$ را در $x=۲$ یافته و سپس در مورد مشتق‌پذیری این تابع در نقطه‌ی $x=۲$ اظهارنظر کنید.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+2 & x\geq 1 \\ -3x+2 & x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

## قضیه‌ی اصلی مشتق‌پذیری

هر گاه تابع $f$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در $x=a$ پیوسته است. ( عکس این قضیه همواره برقرار نمی‌باشد )

به عبارت دیگر:

پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است ولی مشتق‌پذیری شرط کافی برای پیوستگی است.

مثال: کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x)=\begin{cases} \sin^2 x - x & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 2x-2 & x>0 \end{cases}$ صحیح می‌باشد؟

۱- تابع $f$ در نقطه‌ی $x=0$ نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ.

۲- تابع $f$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

۳- تابع $f$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.

۴- تابع $f$ در نقطه‌ی $x=0$ نه مشتق دارد.

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ae^x+1 & x\leq 0 \\ b+\ln(x+1) & x>0 \end{cases}$ مقدار $f'(0)$ وجود دارد. مقدار ثابت $b$ را بیابید.

مثال: اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} bx^{2}+x & x\leq 1 \\ 1+a\cos \pi x & x>1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار ثابت $a$ را بیابید.

مثال: کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x\cos \frac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases}$ صحیح است؟

۱- تابع $f$ در $x=0$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۲- تابع $f$ در $x=0$ پیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

۳- تابع $f$ در $x=0$ ناپیوسته است.

۴- تابع $f$ در $x=0$ دارای مشتق راست است.

مثال: اندازه‌ی اختلاف مشتق راست و چپ تابع $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ در نقطه‌ی $x=0$ را بیابید.

## نقاط مشتق‌ناپذیری توابع

نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$ عبارتند از:

۱- تابع در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$ ناپیوسته باشد.

۲- مشتق تابع در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$ موجود نباشد.

۳- مشتق راست و چپ در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$ برابر نباشند.

۴- مشتق تابع در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$ بی‌نهایت شود.

نکته: در بررسی مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_{\circ}$، الزاماً باید نقطه‌ی مورد نظر جزو دامنه‌ی تابع $f$ باشد.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^{۲} & x \leq ۱ \\ ۳ - x^{۲} & x > ۱ \end{cases}$ مفروض است. مشتق‌پذیری این تابع را در نقطه‌ی $x = ۱$ بررسی نمایید.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \left| x^{۲} - ۴x + ۳ \right|$ را در نقطه‌ی $x = ۳$ بررسی کنید.

**نقاط مشتق‌ناپذیری تابع قدرمطلق**

۱- توابع به فرم $y=|f(x)|$ در ریشه‌های غیرمکرر $f(x)=0$ (ریشه‌های ساده‌ی مرتبه‌ی ۱) مشتق‌ناپذیر است.

۲- توابع به فرم $y=g(x)|f(x)|$ در ریشه‌های غیرمکرر $f(x)=0$ ($f(a)=0$)، به شرطی مشتق‌پذیر هستند که $g(a)=0$.

مثال: تابع $y=(x^2-1)|x^2-3x+2|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

مثال: نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $y=|x^2-3x|$ را بیابید.

مثال: به ازای چه مقداری از $k$ تابع $y=(x-k)|x-2|$ در نقطه‌ی $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

**نقاط مشتق‌ناپذیری تابع جزء صحیح**

۱- تابع $y=[x]$ در نقطه‌ی $x=a$ :

الف) اگر $a\notin\mathbb{Z}$ باشد، تابع در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیر است. و مشتق آن برابر صفر می‌باشد.

ب) اگر $a\in\mathbb{Z}$ باشد، تابع در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌ناپذیر است.

۲- در توابع به فرم $y=[f(x)]$، هر جا پیوسته نباشد، مشتق‌پذیر نبوده و هر جا پیوسته باشد، مشتق دارد و مقدار مشتق آن برابر صفر است.

۳- در توابع به فرم $y=g(x)[x]$ هر گاه $g(a)=g'(a)=0$ باشد، تابع در $x=a$ مشتق‌پذیر است حتی اگر $a\in\mathbb{Z}$ باشد.

۴- در حالت برای محاسبه‌ی مشتق توابع شامل جزء صحیح:

الف) ابتدا پیوستگی تابع مورد نظر را بررسی کرده و در صورت پیوسته بودن، مقدار عددی جزء صحیح را به‌دست آورده و در نهایت پس از ساده کردن تابع، از آن مشتق گرفته و نقطه‌ی مورد نظر را در تابع مشتق به‌دست آمده جایگزین می‌کنیم.

ب) از راه تعریف مشتق، مقدار مشتق تابع در نقطه‌ی $x=x_0$ را به‌دست می‌آوریم؛ یعنی:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مثال: مشتق راست تابع $y=x^3[x]$ را در نقطه‌ی $x=2$ بیابید.

مثال: مشتق چپ تابع $y=x\left[x-۲\right]$ را در نقطه‌ی $x=۵$ بیابید.

مثال: هر گاه $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{۲}-x & x>۰\\ x\left[x\right] & x\leq ۰\end{cases}$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱- $f'_{-}(۰)$ وجود ندارد.

۲- $f'_{-}(۰)=۰$

۳- مشتق در نقطه‌ی $x=۱$ وجود ندارد.

۴- $f'_{-}(۰)=-۱$

**نقاط مشتق‌ناپذیری تابع رادیکالی**

تابع $f\left(x\right)=\sqrt[n]{P\left(x\right)}$ و نقطه‌ی $x=a\in D_f$ را در نظر می‌گیریم. اگر $P\left(a\right)=۰$ باشد، آن‌گاه $P\left(x\right)$ دارای عامل $\left(x-a\right)$ خواهد بود و می‌توان تابع $f\left(x\right)$ را به صورت $f\left(x\right)=\sqrt[n]{\left(x-a\right)^{m}H\left(x\right)}$ که در آن $H\left(a\right)\neq ۰$ تبدیل نمود. سه حالت زیر رخ می‌دهد.

۱- اگر $m<n$ باشد، آن‌گاه $f\left(x\right)$ در $x=a$ مشتق ندارد و ضمناً $f'\left(a\right)$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد شد.

۲- اگر $m>n$ باشد، آن‌گاه $f\left(x\right)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است و ضمناً $f'\left(a\right)=۰$ است.

۳- اگر $m=n$ باشد، آن‌گاه $f\left(x\right)$ در $x=a$ :

الف) اگر $n=۲k+۱$ باشد، تابع $f\left(x\right)$ به فرم $f\left(x\right)=\left(x-a\right)\sqrt[n]{H\left(x\right)}$ تبدیل می‌شود که مشتق‌پذیر است.

ب) اگر $n=۲k$ باشد، تابع $f\left(x\right)$ به فرم $f\left(x\right)=\left|x-a\right|\sqrt[n]{H\left(x\right)}$ تبدیل می‌شود که مشتق‌ناپذیر است.

تذکر: در توابع رادیکالی $f\left(x\right)=\sqrt[n]{P\left(x\right)}$ ، اگر در نقطه‌ی $x=a$ ، $P\left(a\right)\neq ۰$ ( نقطه‌ی $x=a$ ریشه‌ی زیر رادیکال نباشد)، تابع در نقطه‌ی مذکور مشتق‌پذیر است.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f\left(x\right)=\sqrt[۳]{x^{۲}\left(x-۱\right)}$ را در نقاط $x=۰$ ، $x=۱$ و $x=۳$ بررسی کنید.

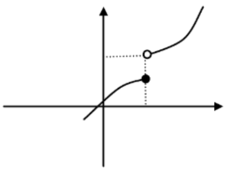
مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^{4}(x^{2}-4x)}$ در چند نقطه مشتق ندارد؟

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x^{2}(x+4)}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x^{3}(x-1)}$ باشد، مشتق توابع $f$ و $g$ را در نقطه‌ی $x=0$ محاسبه نمایید.

## مشتق‌پذیری تابع از روی نمودار

به طور کلی نقاط مشتق‌ناپذیری تابع از روی نمودار رسم شده‌ی آن به دسته‌بندی های زیر تفکیک می‌شوند.

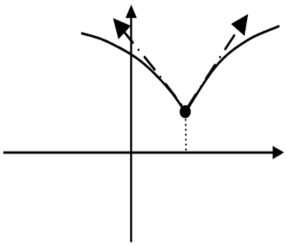
**۱- نقاط ناپیوستگی تابع:**

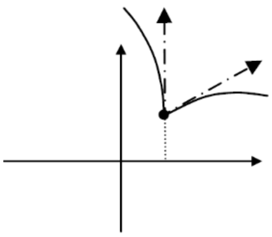


**۲- نقاط زاویه‌دار (گوشه):**

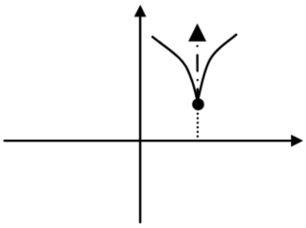
الف) مشتق چپ و راست هر دو اعدادی مشخص به‌دست آیند ولی با هم برابر نباشند.

ب) یکی از مشتق‌های چپ یا راست، عدد به دست آید و دیگری بی‌نهایت شود.

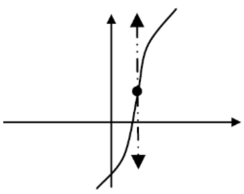




**۳- نقاط بازگشت:** مشتق‌های چپ و راست، هر دو بی‌نهایت شوند ولی مختلف‌العلامه باشند.



**۴- نقطه‌ی عطف قائم:** مشتق‌های چپ و راست هر دو بی‌نهایت شوند و هم‌علامت باشند.



## آهنگ تغییرات

**آهنگ متوسط:** اگر متغیر $x$ تابع از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}+\Delta x$ تغییر کند، متغیر $y$ از $f(x_{\circ})$ به $f(x_{\circ}+\Delta x)$ تغییر خواهد کرد. آهنگ متوسط عبارت است از آهنگ متوسط تغییر $y$ در واحد تغییرات متغیر $x$ ، وقتی $x$ از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}+\Delta x$ تغییر می‌کند و برابر است با نسبت نمو تابع به نمو متغیر:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{\circ}+\Delta x)-f(x_{\circ})}{\Delta x}$$

اگر $\Delta x=x_{۲}-x_{۱}$ باشد، آهنگ متوسط برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}}$$

**آهنگ لحظه‌ای (آنی):** حد آهنگ متوسط تابع را وقتی $\Delta x \to \circ$، آهنگ لحظه‌ای یا آنی تابع در لحظه‌ی $x_{\circ}$ می‌نامند و دقیقاً با مشتق تابع در نقطه‌ی $x_{\circ}$ برابر است.

$$f'(x_{\circ})=\lim_{\Delta x \to \circ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to \circ}\frac{f(x_{\circ}+\Delta x)-f(x_{\circ})}{\Delta x}$$

اگر $\Delta x=x_{۲}-x_{۱}$ باشد، آهنگ آنی برابر است با:

$$f'(x_{۱})=\lim_{x_{۲} \to x_{۱}}\frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}}$$

مثال: اگر $۸y^{۲}-۲xy^{۳}+۱۶=\circ$، آهنگ تغییر $y$ نسبت به $x$ را در نقطه‌ی $A(۳,۲)$ بیابید.

مثال: تابع $f$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$ مفروض است.

الف) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=۳$ و $\Delta x=\circ/۲$ بیابید.

ب) آهنگ آنی (لحظه‌ای) این تابع را در لحظه‌ی $x=۳$ بیابید.

**سرعت متوسط و لحظه‌ای:** اگر معادله‌ی حرکت جسمی بر حسب زمان، از تابع $S=f(t)$ به‌دست آید، آن‌گاه:

سرعت متوسط جسم برابر است با:

$$\bar{V}=\frac{S_۲-S_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$$

سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه‌ی $t_۱$ برابر است با:

$$V(t_۱)=f'(t_۱)$$

تذکر: سرعت لحظه‌ای می‌تواند مثبت و یا منفی باشد.

تذکر: مقدار سرعت لحظه‌ای در هر لحظه، برابر است با قدرمطلق سرعت لحظه‌ای که عددی مثبت است.

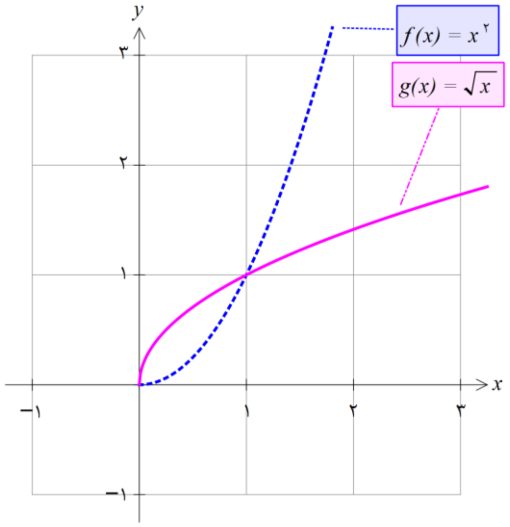
مثال: ذره‌ای روی یک خط مستقیم در حال حرکت بوده و معادله‌ی حرکت این جسم بر حسب زمان ( $t$ ) از رابطه‌ی $S=f(t)=\frac{۱}{۳}t^۳-\frac{۵}{۲}t^۲+۶t+۱۰$ به‌دست می‌آید. در چه بازه‌ی زمانی ذره در جهت مثبت مسیر حرکت می‌کند؟ در چه بازه‌ای ذره در جهت منفی مسیر حرکت می‌کند؟ لحظه‌های تغییر جهت ذره را بیابید.

مثال: در تابع $f(x)=\cos x$ ، آهنگ متوسط تابع را در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳}\right]$ بیابید.

مثال: اگر آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=۱$ برابر $-۲$ باشد، حاصل حد $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۳x-۳}$ را بیابید.

## سرعت صعود و نزول تابع

توابع $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در نظر می‌گیریم. در بازه‌ی $(0,+\infty)$ هر دو تابع صعودی هستند، ولی با توجه به ضابطه‌ی تابع مشتق آن‌ها، ملاحظه می‌شود که در تابع $g(x)$ با افزایش متغیر $x$، مقدار تابع مشتق یعنی $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ( سرعتِ صعودِ تابع ) کاهش می‌یابد ولی در مورد تابع $f(x)$ ملاحظه می‌شود که با افزایش متغیر $x$، مقدار تابع مشتق یعنی $f'(x)=2x$ ( سرعتِ صعودِ تابع ) افزایش می‌یابد به بیان دیگر اندازه‌ی مشتق تابع نشان دهنده‌ی این مفهوم است که تابع با چه سرعتی در حال صعود و یا نزول است. هر چه مقدار مشتق تابع مثبت تر باشد، یعنی شدت صعود تابع افزایش می‌یابد و هر چه مقدار مشتق تابع منفی‌تر باشد، شدت نزول تابع بیشتر است.




مثال: در چه نقاطی از تابع $f(x)=x^{3}-3x^{2}+x$ ، سرعت صعود تابع برابر ۱۰ می‌باشد؟

مثال: اندازه‌ی بیشترین سرعت نزول تابع $f(x)=x^{3}-\frac{x^{2}}{2}-2x$ را بیابید.

## معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی

### یادآوری نکات اولیه

۱- فرمول معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ و با شیب $m$ به صورت زیر است.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

۲- شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

۳- برای یافتن شیب خط از روی معادله‌ی داده شده‌ی آن (رابطه‌ی بین متغیرهای $x$ و $y$)، ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم ( متغیر $y$ را در یک سمت معادله تنها می‌کنیم) و سپس ضریب $x$ را در معادله‌ی استاندارد به‌عنوان شیب خط اعلام می‌کنیم.

۴- دو خط با شیب‌های $m_1$ و $m_2$، اگر موازی باشند: $m_1 = m_2$

۵- دو خط با شیب‌های $m_1$ و $m_2$، اگر بر هم عمود باشند: $m_1 \times m_2 = -1$ یا $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

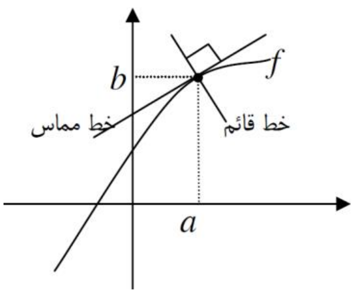
۶- شیب خطوط افقی برابر صفر است و برای خطوط قائم شیب تعریف نمی‌شود.

۷- شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

معادلات خطوط مماس و قائم در دو حالت بررسی می‌شوند.

ابتدا نقطه‌ی داده شده را در تابع داده شده جایگذاری می‌کنیم، در صورتی که در تابع صدق کند، نقطه روی منحنی قرار دارد و در صورتی که نقطه‌ی مورد نظر در تابع صدق نکند، خارج از منحنی تابع قرار دارد.

### ۱) نوشتن معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی منحنی تابع




معادله‌ی خط مماس: $m_T = f'(x_0) \Rightarrow y - y_0 = m_T(x - x_0)$

معادله‌ی خط قائم: $m_N = \frac{-1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = m_N(x - x_0)$

نحوه نوشتن معادلات فوق به این صورت است که در صورتی که نقطه‌ی مورد نظر در تابع داده شده صدق کند، ابتدا از معادله‌ی داده شده مشتق گرفته و با قرار دادن طول نقطه‌ی داده شده در معادله‌ی مشتق تابع، مقدار شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم و در صورتی که معادله‌ی خط قائم مدنظر باشد، شیب به‌دست آمده را قرینه و معکوس می‌کنیم.

سپس مقادیر شیب خط ( مماس یا قائم ) و همچنین طول و عرض نقطه‌ی مورد نظر در فرمول معادله‌ی خط، معادله‌ی خط مماس یا قائم را می‌یابیم.

نکته‌ی مهم:

شرط آن‌که خط $y_۱$ بر منحنی تابع $y_۲$ در نقطه‌ی $x_۰$ مماس شود، این است که معادله‌ی تلاقی خط با منحنی، ریشه‌ی مضاعق داشته باشد. یعنی معادله‌ی تلاقی به دست آمده را به یک سمت علامت مساوی منتقل کرده و در صورتی که معادله درجه‌ی دوم باشد، دلتای معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم.

اگر معادله‌ی منحنی درجه‌ی دوم نباشد، دو تابع ( خط مماس $y_۱$ و منحنی $y_۲$ ) را برابر قرار داده و دو معادله‌ی زیر را به‌طور همزمان حل می‌کنیم.
$y_۱ = y_۲$ و $y_۱' = y_۲'$

مثال: معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $y=\dfrac{x-۲}{x+۳}$ را در نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر منحنی بیابید.

مثال: خط مماس بر نمودار $y^۳+۳xy^۲-۳x^۳y=۱$ در نقطه‌ی $(۱,۱)$ از کدام نواحی می‌گذرد؟

مثال: در چه نقاطی از منحنی $x\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲$، خط مماس موازی محور $x$ها است؟

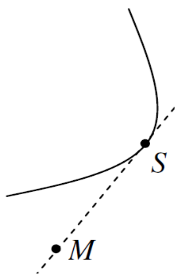
مثال: خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{x-3}{2x+1}$ بر خط به معادله‌ی $2y+14x=9$ عمود است. طول نقطه‌ی تماس کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۲  ۲) ۳  ۳) ۴  ۴) ۵

مثال: دو منحنی $y=x+\sin x$ و $y=ax+b+\cos x$ در مبدأ مختصات بر هم مماس‌اند. مقدار $2a+3b$ را بیابید.

**۲) نوشتن معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ خارج منحنی تابع**

اگر نقطه‌ی $A$ خارج از منحنی باشد و بخواهیم معادله‌ی خط ( خطوط ) مماس یا قائم بر منحنی را که از نقطه‌ی $A$ بر منحنی رسم می‌شوند بنویسیم، به دو روش زیر عمل می‌کنیم.




الف) روش $\alpha$ :

نقطه‌ی $S$ روی منحنی را با مختصات $(\alpha, f(\alpha))$ در نظر می‌گیریم.

معادله‌ی خط مماس یا قائم بر منحنی داده شده را در نقطه‌ی $S$ روی منحنی می‌نویسیم.

مختصات نقطه‌ی $M$ را در معادله‌ی خط به جای $x$ و $y$ قرار می‌دهیم تا $\alpha$ به‌دست آید.

مثال: از نقطه‌ای به طول ۳ روی محور افقی، قائمی بر منحنی تابع $f(x) = x^{۲}$ رسم شده است. معادله‌ی خط قائم را بیابید.

مثال: از نقطه‌ی $(۴,۱۵)$ دو مماس بر منحنی $y = x^{۲}$ رسم کرده‌ایم. شیب خطوط مماس را بیابید.

ب) روش $m$ :

معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را از نقطه‌ی $M$ خارج منحنی ( نقطه‌ی داده شده ) با شیب مجهول $m$ نوشته و معادله‌ی خط را با منحنی تلاقی داده ( برابر قرار می‌دهیم) و شرط ریشه‌ی مضاعف را در مورد آن اعمال می‌کنیم.

مثال: از نقطه‌ی $(۲- , ۱)$ دو مماس بر منحنی $y = x^{۲} + ۱$ رسم نموده‌ایم. شیب خطوط مماس را بیابید.

### زاویه‌ی بین خط و منحنی

۱- خط و منحنی را با یکدیگر تلاقی داده و نقطه‌ی تقاطع $A$ را به‌دست می‌آوریم.

۲- شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه‌ی $A$ با جایگذاری مختصات $A$ در مشتق تابع می‌یابیم.

۳- شیب خط $m_۱$ و شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $m_۲$ را در فرمول زیر جایگذاری کرده و زاویه‌ی بین دو منحنی را می‌یابیم.

$$tan\ \theta = \left| \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲} \right|$$

مثال: زاویه‌ی بین منحنی $y = x^۳$ و خط $y = -۲x + ۳$ را بیابید.

### زاویه‌ی بین دو منحنی

۱- منحنی‌های داده شده را با یکدیگر تلاقی داده و نقطه‌ی تقاطع $A$ را به‌دست می‌آوریم.

۲- شیب خطوط مماس بر منحنی را در نقطه‌ی $A$ با جایگذاری مختصات $A$ در مشتق دو تابع می‌یابیم.

۳- شیب خط مماس بر منحنی $y_۱$ $(m_۱)$ و شیب خط مماس بر منحنی $y_۲$ $(m_۲)$ را در فرمول زیر جایگذاری کرده و زاویه‌ی بین دو منحنی را می‌یابیم.

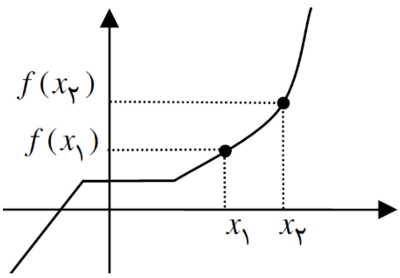
$$tan\ \theta = \left| \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲} \right|$$

مثال: زاویه‌ی بین دو منحنی $y = ۲\sin^۲ x$ و $y = \cos ۲x$ را بیابید.

# کاربرد مشتق

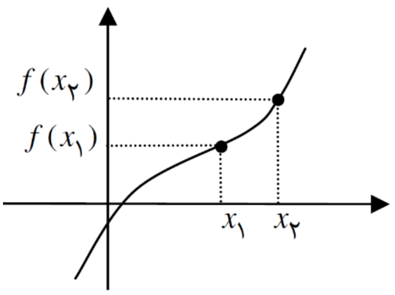
## توابع صعودی و نزولی

تابع حقیقی $f(x)$ را در بازه‌ی $I$ در نظر می‌گیریم. در این صورت:



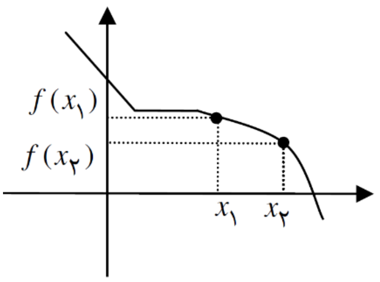

۱- تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$، صعودی است، هر گاه:

$$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



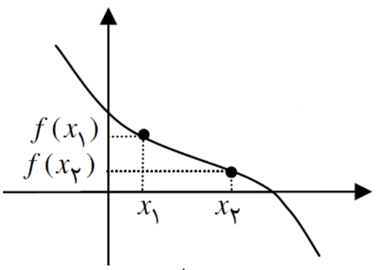

۲- تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$، اکیداً صعودی است، هر گاه:

$$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



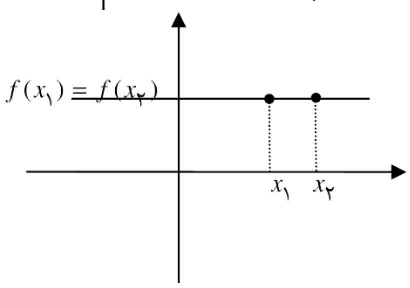

۳- تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$، نزولی است، هر گاه:

$$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$




۴- تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$، اکیداً نزولی است، هر گاه:

$$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$




۵- تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$، ثابت است، هر گاه:

$$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

تعریف تابع یکنوا: تابع $f(x)$ را روی بازه‌ی $I$ یکنوا گوییم، هرگاه تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$ یا صعودی یا نزولی باشد.

تعریف تابع اکیداً یکنوا: تابع $f(x)$ را روی بازه‌ی $I$ اکیداً یکنوا گوییم، هرگاه تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$ یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد.

نکته: تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

نکته: اگر تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $I$ اکیداً صعودی ( اکیداً نزولی ) باشد، آن‌گاه روی این بازه صعودی (نزولی ) است.

## رابطه‌ی یکنوایی و مشتق تابع

با توجه به فرمول آهنگ تغییرات تابع $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ از آن‌جایی که همواره مخرج کسر ( $x_2-x_1$ ) بزرگتر از صفر است، اگر مقدار صورت کسر مثبت باشد یعنی $f(x_2) \geq f(x_1)$، آن‌گاه آهنگ تغییرات متوسط تابع مثبت خواهد بود. یعنی اگر تابع صعودی باشد، آهنگ تغییرات متوسط تابع مثبت و در صورتی که تابع نزولی باشد، آهنگ تغیرات متوسط تابع منفی خواهد بود.

زمانی که $\Delta x \to 0$ نیز این تعریف صادق است یعنی هر جایی که تابع صعودی باشد، حد آهنگ تغییرات تابع (مشتق) مثبت و هر جایی که تابع نزولی باشد، حد آهنگ تغییرات (مشتق) تابع منفی خواهد بود.

$$\underbrace{x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)} \to f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}^{+}}{\underset{+}{\Delta x}} \to f'(x_0) \geq 0$$

$$\underbrace{x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)} \to f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}^{-}}{\underset{+}{\Delta x}} \to f'(x_0) \leq 0$$

نکته: علامت مشتق بیانگر صعودی یا نزولی بودن تابع می‌باشد ولی اندازه‌ی مشتق تابع بیانگر شدت صعود یا نزول تابع است. مثلاً تابع $g(x)=\sqrt{x}$ صعودی می‌باشد، چون $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ولی از آنجایی که با افزایش متغیر $x$، تابع مشتق آن $g'(x)$ کاهش می‌یابد، یعنی شدت صعود تابع (مشتق) کم می‌شود.

نکته: برای بررسی رفتار تابع از حیث صعودی یا نزولی بودن، از تابع مشتق گرفته ( در صورت وجود مشتق و پیوستگی تابع ) و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم، در بازه‌هایی که مشتق تابع مثبت است، تابع را صعودی و در بازه‌هایی که مشتق تابع منفی است، تابع را نزولی می‌نامند.

تذکر: اگر تابع پیوسته نباشد ( در $x=a$ ناپیوستگی و یا مجانب قائم داشته باشد ) امکان دارد مشتق تابع تغیر علامت ندهد ( این‌طور به نظر آید که تابع یکنواست ) در صورتی که تابع یکنوا نباشد.

مثال: تابع $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$ در چه بازه‌ای نزولی است؟

مثال: کدام گزینه بیانگر رفتار تابع $f(x) = x^{3} - 5x^{2} + 3x$ صحیح است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی ۳) صعودی – نزولی – صعودی ۴) نزولی – صعودی – نزولی

مثال: تابع $f(x) = \frac{x^{2} - 1}{x}$ در چه بازه‌ای صعودی است؟

۱) همواره صعودی است. ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(-3, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 3)$

مثال: کدام گزینه رفتار تابع $f(x) = \sin x + \cos x$ را در فاصله‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بیان می‌کند؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی ۳) ابتدا صعودی ، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی ، سپس صعودی

مثال: حدود $m$ را چنان بیابید که تابع $f(x) = mx^{3} - 3x^{2} + x$ همواره صعودی باشد.

## نقاط بحرانی

**نقطه‌ی درونی:** تابع $f(x)$ با دامنه‌ی $D$ را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی $c \in D$ را نقطه‌ی درونی تابع $f$ می‌نامند، هرگاه ابتدا و انتهای دامنه‌ی تابع نباشد. به عبارت دیگر اگر دامنه‌ی تابع $f$ برابر $[a,b]$ باشد، نقطه‌ی $c \in (a,b)$ را نقطه‌ی درونی تابع $f$ می‌نامند.

**نقطه‌ی بحرانی:** نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع $f$ گویند، هرگاه $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

لذا نقطه‌ی درونی دامنه‌ی تابع، بحرانی است اگر یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱- تابع مشتقی برابر صفر داشته باشد.

۲- تابع در نقطه‌ی مورد نظر ناپیوسته باشد.

۳- مشتق چپ و راست تابع در نقطه‌ی مورد نظر برابر نباشند.

۴- مشتق تابع در نقطه‌ی مورد نظر نامتناهی باشد.

نکته‌ی مهم: در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کسر به علت آن‌که جزو دامنه‌ی تابع محسوب نمی‌شوند، بحرانی نیستند.

**نقاط بحرانی مهم:**

الف) طول نقاط بحرانی توابع زیر فقط از حل معادله‌ی $f'(x) = ۰$ به‌دست می‌آیند.

۱- توابع چندجمله‌ای ۲- توابع $\sin x$ و $\cos x$ ۳- توابع نمایی ۴- توابع کسری ۵- ترکیب ۴مورد قبل

ب) طول نقاط بحرانی توابع $y = |f(x)|$ و $y = \sqrt[۲n+۱]{f(x)}$ از حل معادلات $f(x) = ۰$ و $f'(x) = ۰$ به‌دست می‌آیند.

پ) طول نقاط بحرانی توابع $y = \sqrt[۲n]{f(x)}$ از حل معادلات $f(x) = ۰$ و $f'(x) = ۰$ به‌دست می‌آیند به شرطی که جزو دامنه‌ی تابع باشند یعنی در شرط $f(x) \geq ۰$ صدق کنند.

ت) تمام نقاط درونی دامنه‌ی توابعی به فرم $y = [f(x)]$ بحرانی هستند، چون در ریشه‌های صحیح تابع جزء صحیح، ناپیوستگی داریم ( مشتق وجود ندارد ) و در باقی نقاط نیز تابع شکل افقی دارد ( مشتق برابر صفر است )

مثال: تعداد نقاط بحرانی تابع $y = \sqrt[۳]{x^۳ - x}$ را بیابید.

مثال: طول نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x) = x^{\frac{7}{6}} - \frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}} + 4$ را بیابید.

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = x^2 - |x|$ را بیابید.

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = |x^2 - 2x|$ در صفحه‌ی مختصات یک شکل هندسی را ایجاد می‌کند. مساحت شکل حاصل را بیابید.

## اکسترموم‌های نسبی و مطلق

**مینیمم نسبی:** اگر تابع $f$ روی بازه‌ی $I$ تعریف شده باشد و نقطه‌ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \le f(x)$. آن‌گاه گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ مینیمم نسبی (موضعی) دارد. نقطه‌ی $c$ را نقطه‌ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می‌نامند.

**مینیمم مطلق:** اگر تابع $f$ با دامنه‌ی $D_f$ تعریف شده باشد و نقطه‌ای مانند $c \in D_f$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(c) \le f(x)$. آن‌گاه گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ مینیمم مطلق (سراسری) دارد. نقطه‌ی $c$ را نقطه‌ی مینیمم مطلق و $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع می‌نامند. (پایین‌ترین نقطه‌ی تابع)

**ماکزیمم نسبی:** اگر تابع $f$ روی بازه‌ی $I$ تعریف شده باشد و نقطه‌ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \ge f(x)$. آن‌گاه گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد. نقطه‌ی $c$ را نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می‌نامند.

**ماکزیمم مطلق:** اگر تابع $f$ با دامنه‌ی $D_f$ تعریف شده باشد و نقطه‌ای مانند $c \in D_f$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(c) \ge f(x)$. آن‌گاه گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ ماکزیمم مطلق (سراسری) دارد. نقطه‌ی $c$ را نقطه‌ی ماکزیمم مطلق و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع می‌نامند. (بالاترین نقطه‌ی تابع)

## نکات مهم اسکترموم‌های نسبی و مطلق

۱- اصطلاح اکسترموم نسبی (مطلق) اشاره به ماکزیمم یا مینیمم نسبی (مطلق) دارد.

۲- منظور از اکسترموم تابع مقدار عرض نقاط اکسترموم می‌باشد.

۳- در تمام نقاط اکسترموم نسبی و مطلق، مشتق تابع یا صفر می‌باشد و یا وجود ندارد و یا اینکه تابع ناپیوسته است.

۴- شرط آن‌که نقطه‌ی $c$ اکسترموم نسبی تابع $f$ باشد، آن است که تابع $f$ در یک همسایگی دوطرفه‌ی نقطه‌ی $c$ تعریف شده باشد. بنابراین اگر تابع $f$ روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، نقاط ابتدایی و انتهایی $a$ و $b$ نمی‌توانند اکسترموم نسبی باشند ولی می‌توانند اکسترموم مطلق باشند.

۵- اگر تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ دارای اکسترموم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه: $f'(c) = 0$

۶- نقطه‌ی اکسترموم مطلق تابع، اگر نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ای نباشند، اکسترموم نسبی نیز هستند.

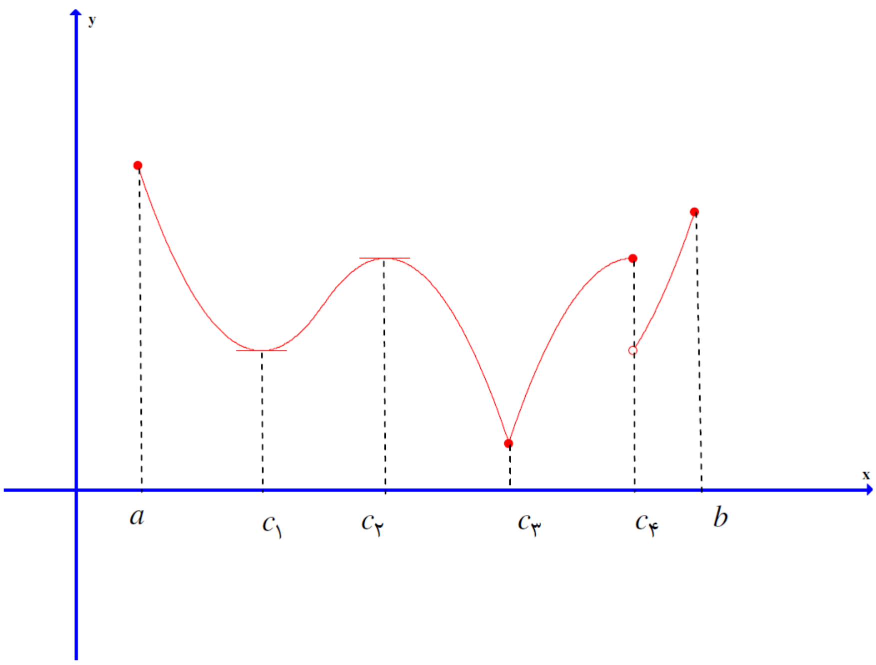
۷- هر نقطه‌ی واقع بر یک تابع ثابت و یا بخشی از یک تابع که ثابت است، هم مینیمم نسبی است و هم ماکزیمم نسبی.

۸- هر نقطه‌ی اکسترموم نسبی یک نقطه‌ی بحرانی محسوب می‌شود ولی نقاط بحرانی لزوماً اکسترموم نسبی (یا مطلق) نیستند. مانند تابع $y = x^۳$ که در نقطه‌ی $x = ۰$ مشتقی برابر صفر دارد و بحرانی است، حال آن‌که این نقطه اکسترموم نیست زیرا نسبت به همسایگی سمت راست خود پایین‌تر و نسبت به همسایگی سمت چپ خود بالاتر قرار دارد.

۹- مقدار اکسترموم مطلق تابع در صورت وجود، منحصربفرد است ولی تابع ممکن است بی‌شمار اکسترموم نسبی داشته باشد.

۱۰- اگر تابع $f$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، لزوماً در این بازه دارای اکسترموم نسبی و مطلق می‌باشد.

مثال: نمودار تابع $f$ رسم شده است. طول نقاط اکسترموم نسبی و مطلق تابع را بیابید.



**محاسبه‌ی نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته‌ی $f$ در بازه‌ی $[a,b]$**

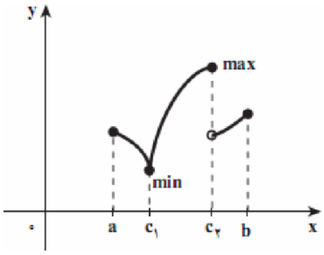
۱- نقاط بحرانی تابع $f$ را به‌دست می‌آوریم.

۲- تک تک نقاط بحرانی به‌دست آمده را در تابع قرار داده و مقدار عرض نقاط را می‌یابیم.

۳- نقاط $a$ و $b$ را نیز در تابع قرار داده و عرض آن‌ها را نیز می‌یابیم.

۴- بین عرض نقاط بحرانی ($f(c)$ها) و عرض نقاط $a$ و $b$ ($f(a)$ و $f(b)$) بزرگ‌ترین عدد، ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین عدد، مینیمم مطلق تابع است.

نکته: اگر تابع پیوسته باشد، لزوماً دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است (پیوستگی شرط کافی برای وجود اکسترموم‌های مطلق محسوب می‌شود) ولی ممکن است تابع اکسترموم‌های مطلق داشته باشد و ناپیوسته باشد.




مثال: تابع $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنه‌ی $[-۸\ ,\ ۲۷]$ مفروض است. ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را بیابید.

مثال: ماکزیمم مقدار تابع $f(x)=۱-(x-۳)^{\frac{۲}{۳}}$ را در فاصله‌ی $[-۵\ ,\ ۴]$ بیابید.

مثال: ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = -x|x|$ را در بازه‌ی $[-3, 2]$ بیابید.

مثال: کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ را در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

## موارد خاص تعیین اکسترموم‌های مطلق

### ۱- اکسترموم‌های مطلق توابع چندجمله‌ای

تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ که در آن $a_n \neq 0$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $n$ زوج باشد و $a_n > 0$، آن‌گاه تابع $f(x)$ مینیمم مطلق دارد و ماکزیمم مطلق ندارد.

ب) اگر $n$ زوج باشد و $a_n < 0$، آن‌گاه تابع $f(x)$ ماکزیمم مطلق دارد و مینیمم مطلق ندارد.

پ) اگر $n$ فرد باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

مثال: نوع اکسترموم مطلق توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = x^4 - x - 1$$

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

تذکر: در توابع چندجمله‌ای در حالت خاص $n = 2$، تابع به فرم درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ تبدیل می‌شود که:

۱- اگر $a > 0$، دهانه سهمی رو به بالا بوده و مقدار مینیمم مطلق تابع برابر است با:

$$\min y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

۲- اگر $a < 0$، دهانه سهمی رو به پایین بوده و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر است با:

$$\max y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

**۲- اکسترموم‌های مطلق توابع مثلثاتی**

می‌دانیم همواره $-۱ \le sin\ x \le ۱$ و $-۱ \le cos\ x \le ۱$ است. لذا برای تعیین برد توابع مثلثاتی (تعیین ماکزیمم و مینیمم مطلق)، معمولاً از عبارات ذکر شده استفاده کرده و تابع اصلی را شکل می‌دهیم.

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = sin^{۴} x + ۲$$

$$f(x) = \frac{۴}{|\cos x| + ۳}$$

**۳- اکسترموم‌های مطلق توابع** $y = a\ sin^{۲} x + b \sin x + c$ و $y = a\ cos^{۲} x + b \cos x + c$

کافی است به جای $sin\ x$ یا $cos\ x$ ، اعداد ۱ و $-۱$ و $\frac{-b}{۲a}$ ( به شرط آن‌که $\left|\frac{-b}{۲a}\right| < ۱$ ) را قرار دهیم.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد به‌دست آمده، به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع داده شده هستند.

مثال: برد تابع $y = ۳\ cos^{۲} x - ۲\cos x + \frac{۱}{۳}$ را بیابید.

**۴- برد توابع یکنوای هموار**

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ صعودی اکید و تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ نزولی اکید باشند، برد آن‌ها به صورت زیر خواهد بود.

$$R_f = [\ f(a)\ ,\ f(b)\ ]$$

$$R_g = [\ g(b)\ ,\ g(a)\ ]$$

مثال: برد تابع $y = x^{۵} + ۵x$ را در بازه‌ی $[-۱\ ,\ ۰]$ بیابید.

### روش‌های محاسبه‌ی نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f$

#### ۱- آزمون مقایسه در تعیین اکسترموم‌های نسبی

اگر بخواهیم نوع اکسترموم نسبی تابع $f$ را در نقطه‌ی $x = c$ بررسی کنیم، مقدار تابع در نقطه‌ی مورد نظر را با حد چپ و راست تابع در همان نقطه، مقایسه می‌کنیم که سه حالت رخ می‌دهد:

الف) اگر مقدار تابع از هر دو مقدار حدود چپ و راست بزرگ‌تر باشد، تابع در آن نقطه‌ی دارای ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر مقدار تابع از هر دو مقدار حدود چپ و راست کوچک‌تر باشد، تابع در آن نقطه‌ی دارای ماکزیمم نسبی است.

پ) اگر مقدار تابع از یکی از حدود چپ یا راست بزرگ‌تر و از دیگری کوچک‌تر باشد، تابع در آن نقطه اکسترموم ندارد.

مثال: نقطه‌ی $x = ۲$ برای تابع $y = x - [x]$ چه نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

مثال: تابع $y = |x-۲| \sqrt[۵]{(۲x+۴)^۲} + ۳$ را در نظر بگیرید. تابع در نقاط $x = ۲$ و $x = -۲$ چه نوع اکسترمومی دارد؟

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۰ \\ ۱ & x \le ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی $x = ۰$ برای این تابع چه نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

۱- فقط مینیمم نسبی ۲- فقط ماکزیمم نسبی ۳- ماکزیمم نسبی و مطلق ۴- مینیمم نسبی و مطلق

نکته: توابعی به فرم $f(x)=(x-a)^{2n}g(x)+K$ با فرض $g(a)\neq 0$ را در نظر می‌گیریم. تابع $f$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای اکسترموم نسبی است و طبق آزمون مقایسه داریم:

الف) اگر $g(a)>0$ باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای مینیمم نسبی است.

ب) اگر $g(a)<0$ باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای ماکزیمم نسبی است.

مثال: تابع $f(x)=(x+2)^{6}\sqrt[3]{x+10}$ مفروض است. نقطه‌ی $x=-2$ برای این تابع طول نقطه‌ی ................ است.

۱- مینیمم نسبی　　۲- ماکزیمم نسبی　　۳- عطف　　۴- معمولی

**۲- آزمون مشتق اول در تعیین اکسترموم‌های نسبی**

فرض کنید $c\in(a,b)$ نقطه‌ی بحرانی تابع $f$ باشد و تابع $f$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در تمام نقاط بازه‌ی $(a,b)$ بجز احتمالاً در نقطه‌ی $c$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف - اگر $f$ روی $(a,c)$ مثبت و روی $(c,b)$ منفی باشد، آن‌گاه تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ب - اگر $f$ روی $(a,c)$ منفی و روی $(c,b)$ مثبت باشد، آن‌گاه تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ مینیمم نسبی دارد.

توجه کنید که $f$ می‌تواند در $c$ مشتق‌پذیر ( $f'(c)=0$ ) یا مشتق‌ناپذیر ( $f'(c)$ وجود ندارد ) باشد، اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع آزمون مشتق اول، اکسترموم‌های نسبی پیوسته‌ی توابع را تعیین می‌کند.

در این آزمون از تابع مشتق گرفته و با استفاده از جدول تغییرات تابع، مشتق اول تابع را در نقاط بحرانی تابع، تعیین علامت می‌کنیم و نوع نقاط اکسترموم نسبی را تعیین می‌کنیم.

مثال: اکسترموم‌های نسبی تابع $f(x)=x^{4}+\frac{4}{3}x^{3}-4x^{2}$ را تعیین نمایید.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{32}{3}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{5}{3}$ | $\nearrow$ $+\infty$ |
| | | | min | | max | | min | |

مثال: اکسترموم‌های نسبی تابع $f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x$ را تعیین نمایید.

| $x$ | $-\infty$ | | $-۲$ | | $۱$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-۲۴$ | $\nearrow$ | $۳$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | | min | | | | |

**نکات:**

۱- نمودار تابع درجه‌ی دوم به شکل $y = ax^{۲} + bx + c$ همواره دارای نقطه‌ی اکسترمومی به طول $x = \frac{-b}{۲a}$ می‌باشد.

۲- در توابع مشتق‌پذیر، ریشه‌های ساده و ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی فرد معادله‌ی $f'(x) = ۰$، طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f$ هستند (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت می‌دهد)، اما ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج و ریشه‌های مضاعف معادله‌ی $f'(x) = ۰$، طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f$ نیستند (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت نمی‌دهد)

۳- برای تعیین علامت مشتق، می‌توان یک نقطه‌ی دلخواه (غیر از ریشه‌های مشتق) را انتخاب و با جایگزین نمودن آن نقطه در مشتق، علامت عدد حاصل را در جدول تغییرات مشتق تابع درج کرد.

۴- هر نقطه‌ی اکسترموم نسبی تابع، نقطه‌ای بحرانی است ولی عکس این قضیه الزاماً برقرار نمی‌باشد. ولی در مورد توابع چندجمله‌ای، سینوسی و کسینوسی، نمایی، کسری و ترکیبی از توابع فوق، نقاط بحرانی تابع فقط از حل معادله‌ی به‌دست می‌آیند. لذا برای تعیین نقاط اکسترموم نسبی تابع، کافی است ریشه‌های مشتق تابع را یافته و چنانچه مشتق تابع در این ریشه‌ها تغییر علامت بدهد، نقطه‌ی مورد نظر اکسترموم بوده و چنانچه مشتق تابع در این ریشه‌ها تغییر علامت ندهد، این نقاط اکسترموم نسبی تابع نیستند.

مثال: تابع $f(x) = \frac{\cos x}{۵ + ۳\cos x}$ در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right)$ چند اکسترموم نسبی دارد. نوع نقاط اکسترموم تابع را در صورت وجود تعیین نمایید.

**قضیه‌ی فرما:**

هر گاه تابع $f$ در نقطه‌ی $c$ اکسترموم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = ۰$ می‌باشد.

مثال: مقادیر $a$، $b$ و $c$ را چنان بیابید که تابع $y = ax^۲ + bx + c$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع از نقطه‌ی $(۲ , -۲)$ بگذرد.

مثال: مجموع طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} - \frac{۵}{۲}x^۲ - ۶x + ۱$ را بیابید.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x - a}$ مفروض است. اگر بین نقاط اکسترموم تابع رابطه‌ی $\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = ۲$ برقرار باشد، مقدار $a$ را بیابید.

مثال: تابع $y = x^{۲} \left| x - ۳ \right|$ به ترتیب ار راست به چپ، چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ - ۰ ۲) ۲ - ۱ ۳) ۱ - ۲ ۴) ۱ - ۱

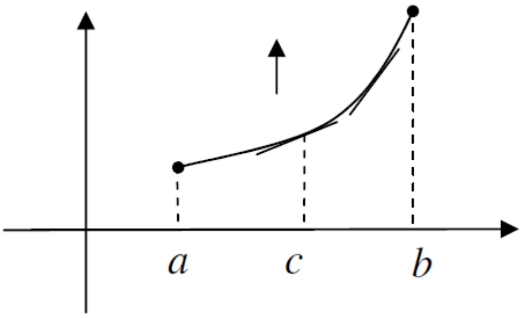
نکته: اگر تابعی کسری، مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه طول نقاط اکستروموم نسبی، در تابع، مشتق تابع و هوپیتال تابع، صدق می‌کند.

مثال: اگر $A(۲,۳)$ اکستروموم نسبی تابع $f(x) = \dfrac{ax^{۲} + b}{x^{۳}}$ باشد، مقدار $b$ را بیابید.

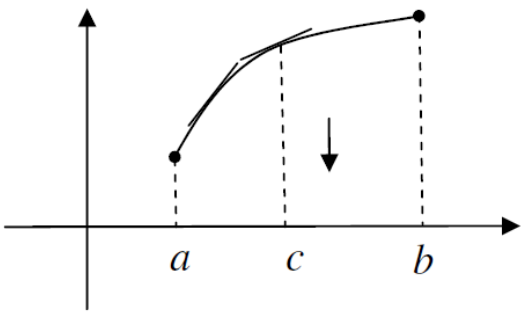
مثال: اگر $A(a,b)$ اکستروموم نسبی تابع $y = \dfrac{۲x^{۳}}{x^{۲} - ۴}$ باشد، مقدار $\dfrac{b}{a}$ را بیابید.

## تقعّر و تحدّب

به شکل‌های زیر توجه کنید. هر دو تابع روی بازه‌ی $(a\ ,\ b)$ صعودی‌اند. ولی در شکل (۱) تقعر (گودی) منحنی رو به بالا و در شکل (۲) تقعر رو به پایین است.



شکل (۱)

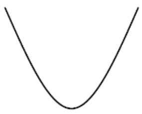


شکل (۲)

**تقعر رو به بالا:** گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ تقعر رو به بالا دارد، هر گاه $f'(c)$ موجود باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی $c$، منحنی تابع بالای خط مماس بر منحنی، در نقطه‌ی $c$ باشد. (شکل ۱)

**تقعر رو به پایین:** گوییم تابع $f$ در نقطه‌ی $(c\ ,\ f(c))$ تقعر رو به پایین دارد، هر گاه $f'(c)$ موجود باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی $c$، منحنی تابع پایینِ خط مماس بر منحنی، در نقطه‌ی $c$ باشد. (شکل ۲)

**تعریف مقعر (گود):** اگر نمودار تابع $f$ روی بازه‌ی $I$، بالای همه‌ی مماس‌هایش باشد،
آن‌گاه نمودار تابع $f$ را مقعر رو به بالا (یا به اختصار مقعر یا گود) می‌نامند.



**تعریف محدب (تپه):** اگر نمودار تابع $f$ روی بازه‌ی $I$، بالای همه‌ی مماس‌هایش باشد،
آن‌گاه نمودار تابع $f$ را مقعر رو به بالا (یا به اختصار مقعر یا گود) می‌نامند.

**قضیه‌ی تقعر:** فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر $x$ از بازه‌ی باز $I$ موجود باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) > 0$ باشد، آن‌گاه نمودار $f$ روی بازه‌ی $I$ تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) < 0$ باشد، آن‌گاه نمودار $f$ روی بازه‌ی $I$ تقعر رو به پایین دارد.

نکته: برای تعیین جهت تقعر منحنی تابع $f$، مشتق دوم تابع را محاسبه کرده، نقاطی که $f''$ در آن‌ها وجود ندارد یا برابر صفر است را یافته و $f''$ را تعیین علامت می‌کنیم. در هر بازه‌ای که $f'' > 0$ باشد، جهت تقعر $f$ رو به بالا و در هر بازه‌ای که $f'' < 0$ باشد، جهت تقعر $f$ رو به پایین است. جدول تعیین علامت $f''$ را جدول تقعر تابع نیز می‌نامند.

مثال: با تشکیل جدول تعیین علامت $f''$ تعیین کنید که تابع $f(x) = x^۴ - ۲۴x^۲ - x$ روی چه بازه‌ای دارای تقعر رو به بالا و روی چه بازه‌ای دارای تقعر رو به پایین است؟

| $x$ | $-\infty$ | $-۲$ | | $۲$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | ۰ | − | ۰ | + |
| $y$ | $+\infty$ $\cup$ | $-۷۸$ | $\cap$ | $-۸۲$ | $+\infty$ $\cup$ |

مثال: اگر جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{x^۴}{۱۲} + \frac{x^۳}{۳} + \frac{ax^۲}{۲} + ۷$ همواره رو به بالا باشد، حدود $a$ را بیابید.

مثال: تابع $y = (۱ - x)x^۳$ روی دامنه‌ی خود به ترتیب از راست به چپ، چند بار تعییر جهت و چند بار تغییر انحناء می‌دهد؟

۱) ۲ - ۲ ۲) ۲ - ۱ ۳) ۱ - ۲ ۴) ۱ - ۱

مثال: تقعر تابع $y = x^۲|x-۳|$ در بازه‌ی $(a, b)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار $b - a$ را بیابید.

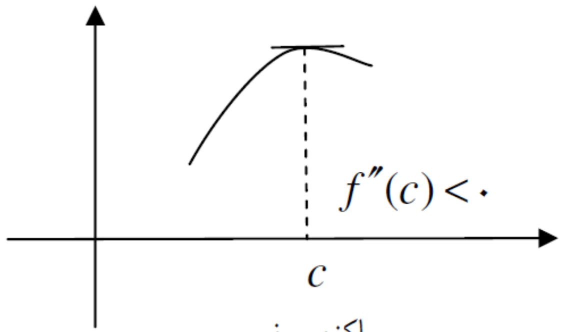
**آزمون مشتق دوم در تعیین اکسترموم نسبی تابع**

فرض کنید $(c\,,\,f(c))$ نقطه‌ی بحرانی تابع $f$ باشد و $f'(c)=0$ و $f''(c)$ موجود باشد. در این صورت:

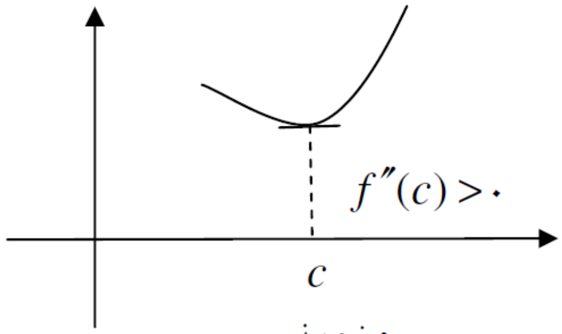
الف) اگر $f''(c)>0$ باشد، آن‌گاه $f$ در $c$ مینیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f''(c)<0$ باشد، آن‌گاه $f$ در $c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ج) اگر $f''(c)=0$ باشد، آن‌گاه آزمون بی‌نتیجه است (یعنی با این آزمون نمی‌توان حکم قطعی داد).



ماکزیمم نسبی



مینیمم نسبی

تذکر: از آنجا که طبق شرایط قضیه‌ی فوق، باید $f''(c)$ موجود باشد، لذا تابع $f$ باید در $x=c$ مشتق‌پذیر باشد و چون $x=c$ نقطه‌ی بحرانی $f$ است، لذا باید $f'(c)=0$ باشد. بنابراین با آزمون مشتق دوم، اکسترموم‌های نسبیِ مشتق‌پذیر توابع را می‌توان تعیین نمود.

مثال: نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$ را به کمک آزمون مشتق دوم بیابید.

مثال: در تابع $f(x)=\sin x+\cos x$، نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{4}$ چه نقطه‌ای است؟

۱- مینیمم نسبی ۲- ماکزیمم نسبی ۳- عطف ۴- معمولی

## نقطه‌ی عطف

نقطه‌ی $\left(c\ ,\ f\left(c\right)\right)$، نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f$ نامیده می‌شود (تابع $f$ در نقطه‌ی $c$، نقطه‌ی عطف دارد) هرگاه دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند.

۱- نمودار $f$ در $c$ دارای مماس واحد باشد. ( $f'(c)=L$ یا $f'(c)=+\infty$ یا $f'(c)=-\infty$ )

۲- جهت تقعر $f$ در $c$ عوض شود. ( $f''$ تغییر علامت دهد)

**نکات:**

۱- اگر نقطه‌ی $c$ حداقل یکی از شرایط فوق را نداشته باشد، نقطه‌ی عطف نمودار تابع نیست.

۲- نقطه‌ی عطف تنها نقطه‌ای از نمودار تابع است که منحنی دارای مماس واحد بوده و مماس بر منحنی در این نقطه از درون منحنی عبور می‌کند.

۳- با توجه به شرط اول نتیجه می‌شود که تابع در نقطه‌ی عطف پیوستگی دوطرفه دارد.

۴- $y''=0$ نه شرط لازم و نه شرط کافی برای نقطه‌ی عطف است.

۵- ریشه‌ی مضاعف $y''=0$ طول نقطه‌ی عطف تابع نمی‌باشد چون تقعر تابع در این نقاط عوض نمی‌شود.

۶- اگر $\left(c\ ,\ f\left(c\right)\right)$ یک نقطه‌ی عطف تابع $f$ باشد، در صورتی که $f''(c)$ موجود باشد، قطعاً برابر با صفر است.

۷- اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد:

الف) مختصات نقطه‌ی عطف در تابع صدق می‌کند.

ب) مشتق دوم تابع به ازای طول نقطه‌ی عطف تابع در صورت وجود برابر صفر است.

مثال: ضرایب $a$ و $b$ را چنان بیابید که نقطه‌ی $\left(۲\ ,\ -۴\right)$، نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=ax^{۳}-bx^{۲}+۱۲$ باشد.

مثال: مماس بر منحنی $y=ax^{۳}+۶x^{۲}$ در نقطه‌ای به طول ۱ از درون منحنی عبور می‌کند. مقدار $a$ را بیابید.

مثال: تابع $y = x^{۲} + \cos x$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

مثال: اگر $(۱ , ۳)$ نقطه‌ی عطف تابع $y = ax^{۳} + bx^{۲}$ باشد، مقدار $b - a$ را بیابید.

مثال: تعداد نقاط عطف تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۳} - ۶x^{۲} - ۱۶ & x \geq -۲ \\ \dfrac{۳۰x^{۲} - ۲۴}{x} & x < -۲ \end{cases}$ را بیابید.

**نکات مهم در محاسبه‌ی طول نقطه‌ی عطف تابع**

۱- در توابع به فرم $f(x)=(x-a)\left|x-a\right|$، طول $x=a$ نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد (با اینکه مشتق دوم در این نقطه وجود ندارد)

۲- در توابع به فرم $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$، ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ طول نقاط عطف تابع می‌باشند.

۳- در توابع به فرم $y=(x-a)^{2n+1}f(x)+K$ به طوری که $f(a)\neq 0$ باشد، تابع در $x=a$ دارای نقطه‌ی عطف است.

۴- ریشه‌های مضاعف مشتق اول تابع، طول نقطه‌ی عطف می‌باشند.

۵- نقاط اکسترموم نسبی نمودار مشتق تابع ($f'$)، نقاط عطف تابع $f(x)$ می‌باشند.

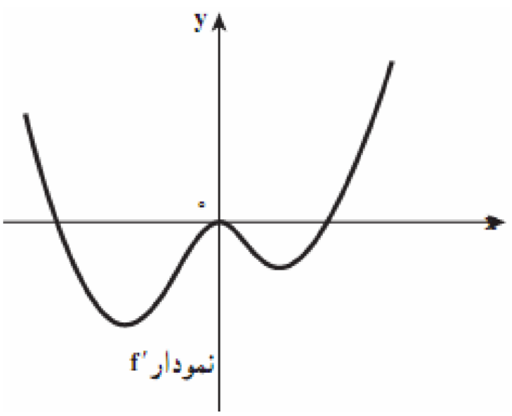
۶- محل برخورد نمودار مشتق تابع ($f'$)، با محور افقی، طول نقاط اکسترموم نسبی تابع $f(x)$ می‌باشند.

مثال: مبدأ مختصات برای تابع $f(x)=x\left|x\right|$، چه نوع نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

۱- مینیمم نسبی　　۲- ماکزیمم نسبی　　۳- عطف　　۴- معمولی

مثال: تابع $y=\sqrt[3]{x^2-4x+3}$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

مثال: نمودار شکل مقابل، نمودار تابع مشتقِ تابع $f(x)$ می‌باشد. تعداد و نوع نقاط اکسترموم نسبی تابع و نقاط عطف آن را بیابید.



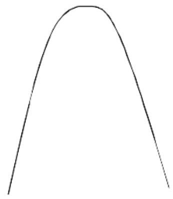
## منحنی‌های مهم

**تابع درجه دوم** $y=ax^2+bx+c$ **(سهمی قائم)**

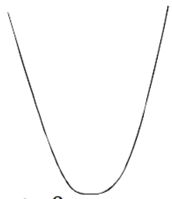
۱- برای یافتن طول نقطه‌ی اکسترموم این تابع می‌توان از رابطه مشتق گرفت:

$$y'=2ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow y'\left(\frac{-b}{2a}\right)=0$$

$$y''=2a \Rightarrow \begin{cases} a<0 \Rightarrow max \\ a>0 \Rightarrow min \end{cases}$$



a < 0 دارای ماکزیمم



a > 0 دارای می نیمم

۲- اگر عدد ثابت $c$ صفر باشد، منحنی تابع درجه دوم از مبدأ مختصات عبور خواهد کرد.

۳- نقطه‌ی اکسترموم سهمی، در رأس سهمی می‌باشد. $S=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

۴- خط $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد.

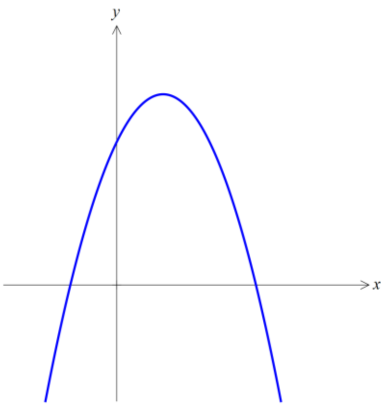
۵- اگر مبدأ مختصات را به رأس سهمی انتقال دهیم، معادله‌ی سهمی به صورت $Y=aX^2$ تبدیل می‌شود.

۶- در تابع درجه‌ی دوم، اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، نمودار آن از هر چهار ربع دستگاه مختصات خواهد گذشت.

مثال: اگر مقدار بیشینه‌ی سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-4x+2a+1$ برابر ۳ باشد، مقدار $a$ را بیابید.

مثال: معادله‌ی نمودار مقابل کدام است؟

۱) $y=x^2+2x-3$ ۲) $y=-x^2-2x+3$ ۳) $y=-x^2+2x-3$ ۴) $y=-x^2+2x+3$

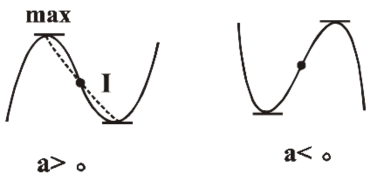


**تابع درجه‌ی سوم** $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \quad (a \neq ۰)$

در حالت کلی اگر $a > ۰$، نمودار از ربع سوم شروع و به ربع اول ختم می‌گردد و همچنین اگر $a < ۰$، نمودار از ربع دوم شروع و به ربع چهارم ختم می‌شود.

نمودار تابع درجه‌ی سوم در ۶ حالت قابلیت رسم دارد که با توجه به تعداد ریشه‌های معادله‌ی مشتق تابع و از روی معادله‌ی مشتق می‌توان تعیین نمود که شکل آن به کدام صورت می‌باشد.

$$y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \Rightarrow y' = ۳ax^{۲} + ۲bx + c \Rightarrow \Delta_{y'} = (۲b)^{۲} - ۴(۳a)(c)$$

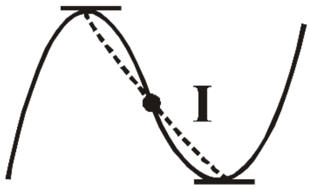



الف) معادله‌ی مشتق دو ریشه داشته باشد:

۱- در این حالت تابع دو نقطه‌ی اکسترموم خواهد داشت و یک نقطه‌ی عطف دارد.

۲- مختصات نقطه‌ی عطف از رابطه‌ی $\left(\frac{-b}{۳a}, f\left(\frac{-b}{۳a}\right)\right)$ به‌دست می‌آید.

۳- نقطه‌ی عطف وسط خط واصل بین نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع است.



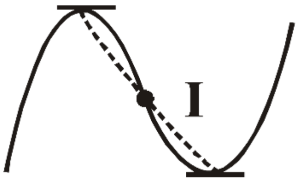

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{۲} \\ y_I = \dfrac{y_{max} + y_{min}}{۲} \end{cases}$$

۴- در تابع درجه‌ی سوم، خطی که از نقطه‌ی عطف عبور می‌کند، از نقاط $max$ و $min$ به یک فاصله است و روی تابع دو قطعه‌ی مساوی جدا می‌کند.

۵- در تابع درجه‌ی سوم، خطی که نقاط $max$ و $min$ را به یکدیگر وصل می‌کند، از نقطه‌ی عطف می‌گذرد.

۶- در تابع درجه‌ی سوم، فاصله‌ی دو خط مماس بر اکسترموم‌های نسبی تابع برابر است با: $I = y_{max} - y_{min}$

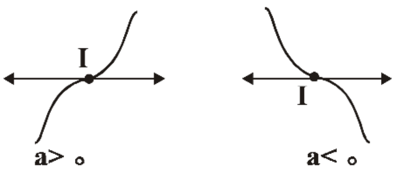
۷- در تابع درجه‌ی سوم، فاصله‌ی دو خط عمود بر اکسترموم‌های نسبی تابع برابر است با: $d = x_{max} - x_{min}$




ب) معادله‌ی مشتق، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

۱- در این حالت تابع اکسترموم نداشته و یک نقطه‌ی عطف خواهد داشت.

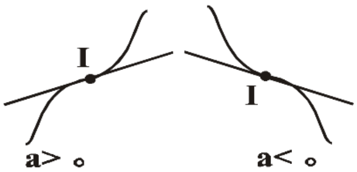
۲- مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف، کاملاً افقی و موازی محور $x$ ها خواهد بود.




پ) معادله‌ی مشتق، ریشه نداشته باشد:

۱- در این حالت تابع اکسترموم نداشته و یک نقطه‌ی عطف خواهد داشت.

۲- مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف مایل خواهد بود.



مثال: اگر طول نقطه‌ی عطف تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 3$ برابر ۲ باشد، مقدار $a$ را بیابید.

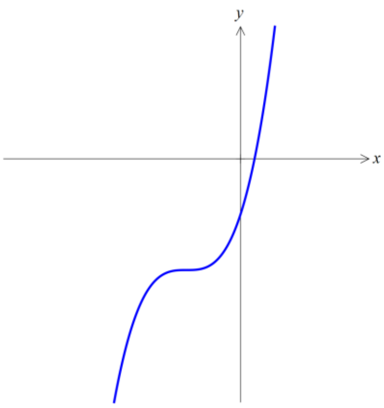
۱) $6$ ۲) $-6$ ۳) $3$ ۴) $-3$

مثال: اگر مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 4a - 5$ مساوی ۱۸ باشد، مقدار $a$ را بیابید.

۱) $1$ ۲) $-1$ ۳) $4$ ۴) $-4$

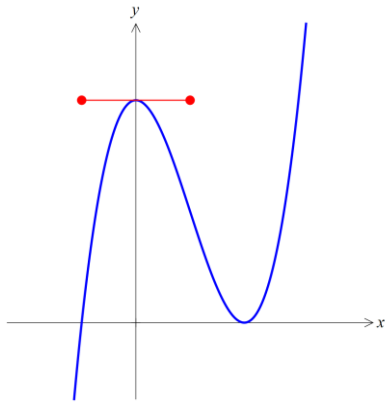
مثال: معادله‌ی نمودار مقابل کدام است؟

۱) $y = -x^3 + 1$ ۲) $y = x^3 + 1$ ۳) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ ۴) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$



مثال: نمودار تابع $y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۴$ به صورت شکل مقابل است. مقدار $a$ را بیابید.

۱) $-۴$ ۲) $-۳$ ۳) $-۲$ ۴) $-۱$




مثال: مقادیر $a$، $b$ و $c$ را چنان بیابید که تابع $y = ax^{۲} + bx + c$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع از نقطه‌ی $(۲ , -۲)$ بگذرد.

**بهینه سازی**

در اغلب موارد در زندگی روزمره با مسائلی روبرو هستیم که می‌خواهیم در آن حالتی که بهینه می‌باشد را پیدا کنیم، مثلاً در مورد مقدار هزینه در یک مورد، حات بهینه این است که کمترین هزینه را داشته باشیم و در مورد مساحت یک زمین با محیط ثابت بهتر است که بیشترین مساحت را داشته باشیم.

فرآیند حل مسائل بهینه سازی :

برای حل مسائل بهینه سازی، مراحل زیر را پی می گیریم.

۱- در صورت نیاز برای مسئله یک شکل رسم کرده و ابعاد آن را نام‌گذاری می کنیم.

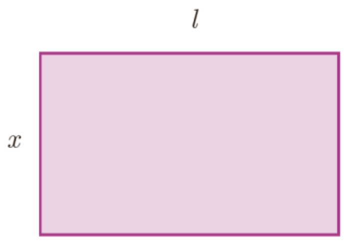
۲- پارامتری را که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود شناسایی کرده و برای آن فرمولی می‌نویسیم.

۳- تعداد متغیرهای مسئله را به کمک اطلاعات مسئله و روابط ریاضی به یک متغیر می‌رسانیم، به بیان دیگر پارامتری که می‌خواهیم بهینه کنیم، باید فقط به یک متغیر دیگر وابسته باشد.

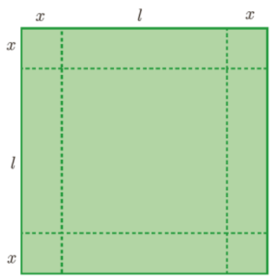
۴- اکسترموم‌های مطلق ( سراسری ) تابع خواسته شده را محاسبه می کنیم.

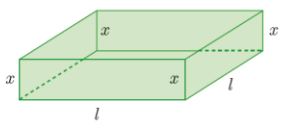
مثال: بیشترین مقدار حاصل‌ضرب دو عدد مثبت که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ باشد را بیابید.

مثال: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن برابر باشد.

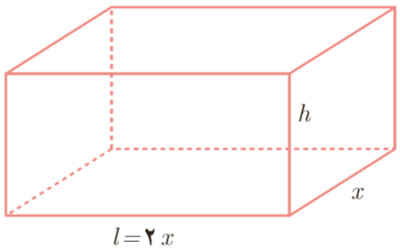



مثال: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع $x$ برش زده و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه‌ی در باز بسازیم. مقدار $x$ چقدر باشد تاحجم قوطی حداکثر مقدار ممکن شود؟

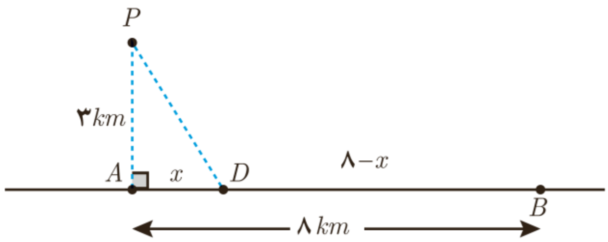


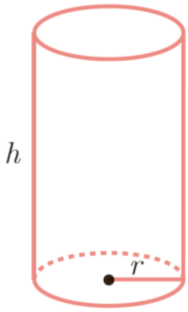
مثال: می‌خواهیم مخزنی به شکل مستطیل در باز بسازیم که حجم آن $10\ m^3$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر مترمربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه‌ی مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود؟




مثال: فردی درون قایقی در نقطه‌ی $P$ قرار دارد که فاصله‌ی آن از نزدیک‌ترین نقطه‌ی ساحل یعنی نقطه‌ی $A$، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه‌ی $B$ در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری $A$ قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ کیلومتر بر ساعت و سرعت پیاده‌روی فرد مورد نظر در ساحل ۴ کیلومتر بر ساعت باشد. اگر این فرد بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به نقطه‌ی $B$ برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی $B$ پیاده‌روی کند؟

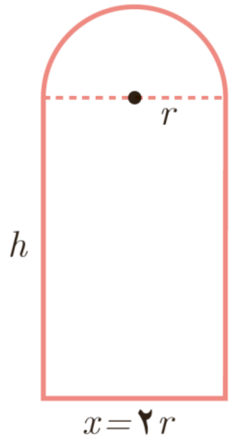


مثال: می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقا یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟




مثال: هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت $v$ کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰\ v^۲$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه‌ی آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟

مثال: در بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم‌دایره برابر پهنای مستطیل باشد. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.




**نکات تکمیلی:**

۱- اگر مجموع دو عدد مثبت، مقداری ثابت باشد، زمانی حاصل‌ضربِ آنها ماکسیمم می‌شود که آن دو عدد برابر باشند.

$$\begin{cases} x+y=k>0 \\ xy=max \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{k}{2} \Rightarrow max(xy)=\frac{k^2}{4}$$

۲- اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت مقدار ثابت $k$ باشد، آن‌گاه مجموع آن دو عدد زمانی مینیمم است که آن دو عدد برابر باشند.

$$\begin{cases} xy=k>0 \\ x+y=min \end{cases} \Rightarrow x=y=\sqrt{k} \Rightarrow min(x+y)=2\sqrt{k}$$

۳- اگر مجموع دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد، آن‌گاه مجموع توان $n$ ام های آن دو عدد زمانی مینیمم می‌شود که آن دو عدد برابر باشند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} x+y=k>0 \\ x^n+y^n=min \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{k}{2}$$

۴- اگر مجموع دو عدد مثبت $x$ و $y$ برابر مقدار ثابتِ مثبتِ $k$ باشند و قرار باشد $x^m y^n$ ماکسیمم باشد، آن‌گاه $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ خواهد بود.

مثال: اگر $a + ۲b = ۸$ و $a\ ,\ b > ۰$ باشند، $max(ab)$ چقدر است؟

مثال: از بین استوانه‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها ۳ واحد است. ماکسیمم حجم چقدر است؟

مثال: اگر $xy = ۹$، آن‌گاه کمترین مقدار $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۶x + ۳y)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۲۴

مثال: بیشترین مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر ۴ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) $۲\sqrt{۲}$