کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

استاد سهیل بابازاده

درس ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

برای شخصی توصیف می‌کنیم که خانه‌مان چه شکلی است؟
تصور کنیم یک اتاق کمتر یا آشپزخانه بزرگ‌تری داشتیم.
در این صورت خانه جدید، چه شکلی بود؟

به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می‌کنیم، فکر کنیم.
آیا می توانیم این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهیم؟

در حالت های بالا ما به موضوعی فکر کردیم، اما از عبارات، جملات و شیوه های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن ما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به ما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنیم. این شیوه از تفکر را تفکر تجسمی می نامیم.

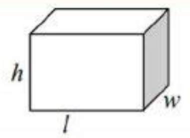
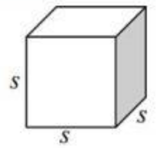
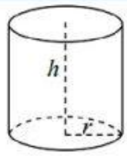
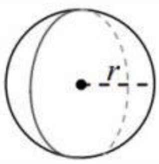
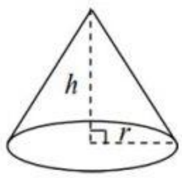
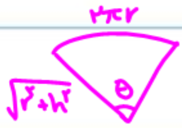
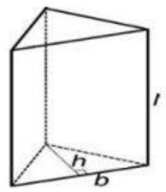
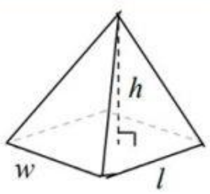
فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد.

موقعیت هایی که می تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت اند از: تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول سطح گسترده یک محور در صفحه و فضا و تجسم اجسام هندسی بعد از برش. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، دوران اشکال هندسی حول یک محور و برش اجسام را بررسی می کنیم.

از آنجایی که در این فصل عموماً بعد از برش و دوران، به محاسبهٔ مساحت و حجم اشکال فضایی تشکیل شده می‌پردازیم، بهتر است قبل از ورود به مبحث برش و دوران در جدول زیر فرمول‌های مهم برای محاسبهٔ مساحت جانبی، مساحت کل و حجم اشکال مختلف فضایی بپردازیم.

یادآوری فرمول‌های مهم محاسبهٔ مساحت و حجم اشکال فضایی

فرمول‌های مهم اشکال فضایی زیر را به خاطر می‌سپاریم.

اشکال سه بعدی			
	شکل	حجم (V)	مساحت جانبی (S)
مکعب مستطیل		طول × عرض × ارتفاع	۲×(طول × ارتفاع + عرض × ارتفاع + عرض × طول)
		$V = hwl$	$S = ۲\times(wl + wh + lh)$
مکعب		^{۳}(طول ضلع)	۶ × ^{۲}(طول ضلع)
		$V = s^{۳}$	$S = ۶s^{۲}$
استوانه		π × ^{۲}(شعاع) × ارتفاع	۲ × π × (شعاع) × ارتفاع
		$V = \pi r^{۲}h$	$S = ۲\pi rh$
کره		$\frac{۴}{۳}$ × π × ^{۳}(شعاع)	۴ × π × ^{۲}(شعاع)
		$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$	$S = ۴\pi r^{۲}$
مخروط		$\frac{۱}{۳}$ × π × ^{۲}(شعاع) × ارتفاع	π × (شعاع) × (شعاع + $\sqrt{}$(ارتفاع^{۲} + شعاع^{۲}))
		$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ 	$S = \pi r(r + \sqrt{r^{۲} + h^{۲}})$
منشور		مساحت قاعده × طول	محیط قاعده × طول
		$V = \frac{۱}{۲}bhl$	$S = ۳b \times l$
هرم		$\frac{۱}{۳}$ × طول × عرض × ارتفاع	مجموع مساحت چهار وجه
		$V = \frac{۱}{۳}lwh$	$S = \sqrt{h^{۲} + \frac{l^{۲}}{۴}}\,w + \sqrt{h^{۲} + \frac{w^{۲}}{۴}}\,l$

دوران حول محور

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن یک استوانه (Cylinder) است.

ب) شکل حاصل از دوران یک پاره‌خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است یک دایره (Circle) است.

پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمهٔ آن، یک مَخروط (Cone) است.

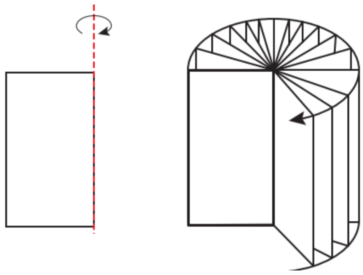
ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن، یک کُره (Sphere) است.

ث) شکل حاصل از دوران یک نیم‌دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیم‌کره (Hemisphere) است.

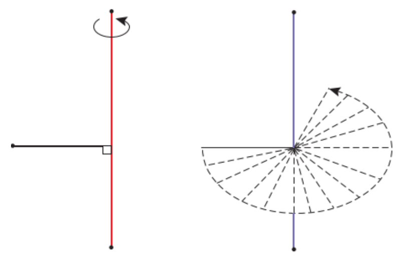
ج) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول محوری خارج دایره، یک چَنبَره (Torus) است.

چ) شکل حاصل از دوران یک مربع، حول محوری که با ضلع مربع موازی و خارج آن است، یک استوانه توخالی است.

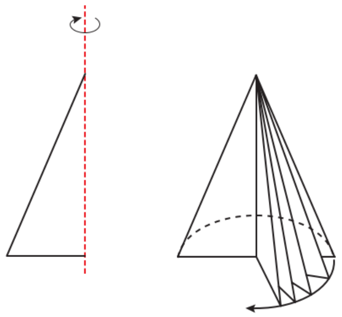
ح) شکل حاصل از دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، حول ارتفاع آن، یک مَخروط ناقص است.



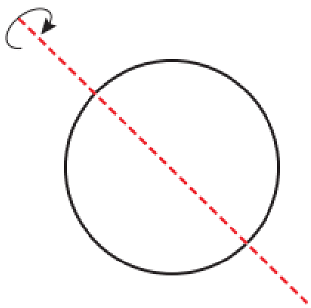
(الف)



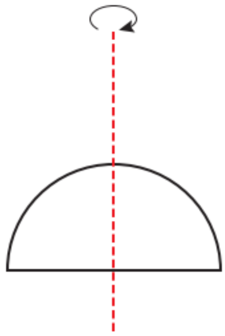
(ب)



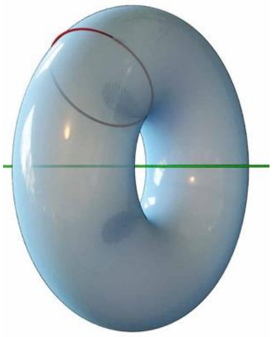
(پ)



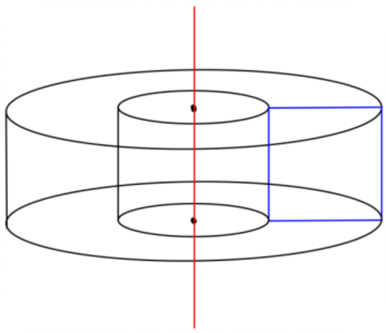
(ت)



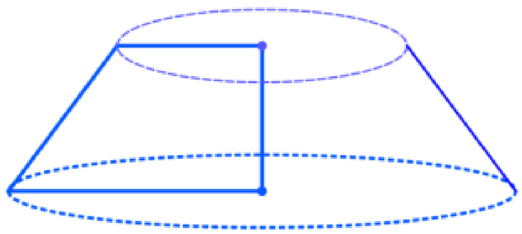
(ث)



(ج)



(چ)



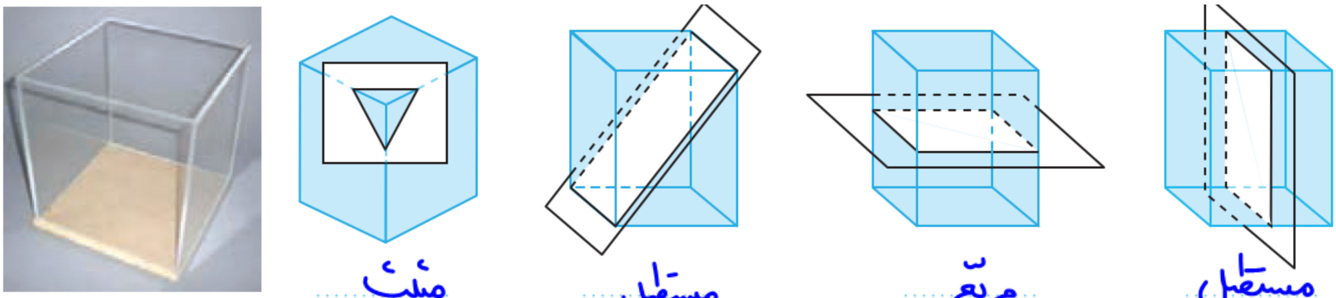
(ح)

برش

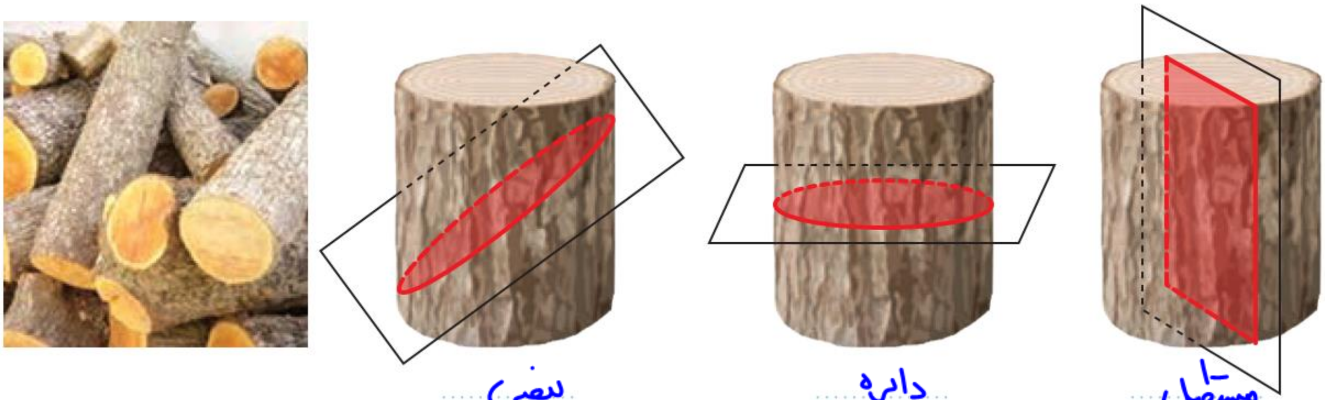
می‌خواهیم اجسام سه‌بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه شده‌ایم. این اجسام در موارد مختلف می‌توانند توپر یا توخالی باشند.

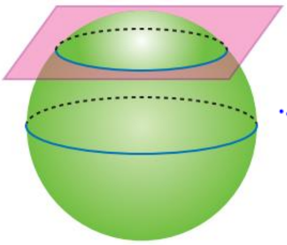
شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

مثال: بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



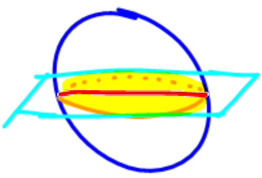
مثال: سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، چه شکلی است؟





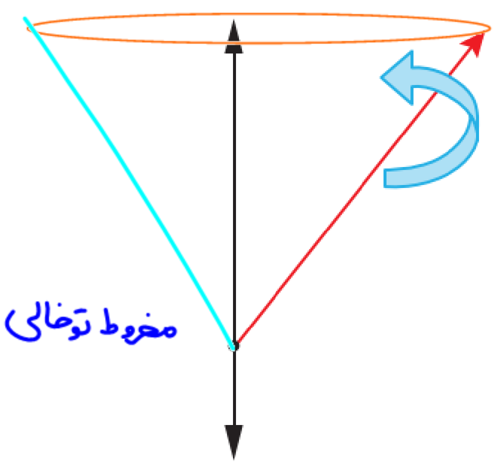
مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکلی است؟ دایره

در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟ صفحهٔ برش، شامل مرکز کره باشد.

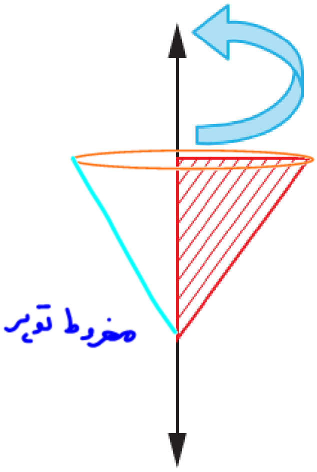


مثال: شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید:

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور



ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



مثال: مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

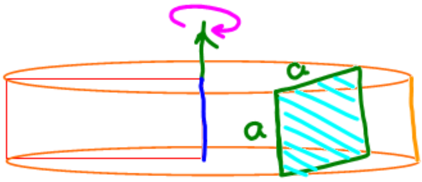
الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

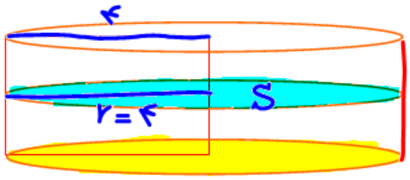
پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳ و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

الف)



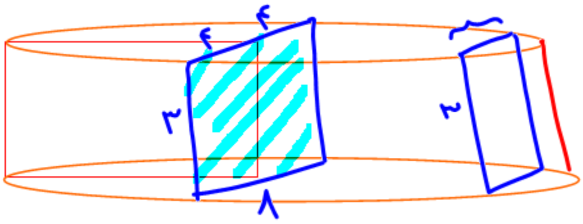
ب) a = ارتفاع استوانه = اندازه وتر
(عرض مستطیل)



پ) $S=\pi r^2$, $r=4$

$S=\pi(4)^2=16\pi$

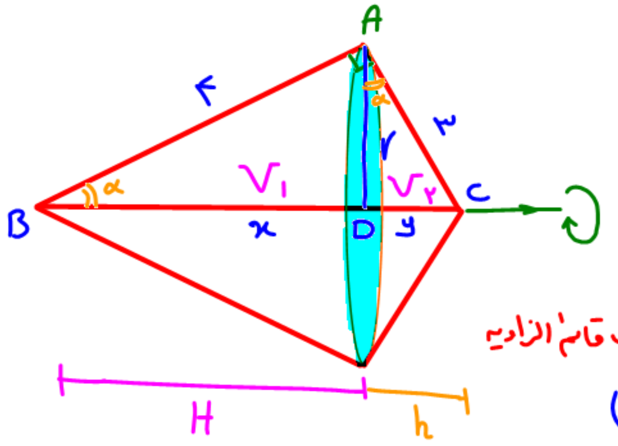
ت)



$S=3\times 8=24$

مثال: شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟ دو مخروط با قاعده‌ی مشترک.

اگر ابعاد اضلاع قائمهٔ این مثلث قائم‌الزاویه ۳ و ۴ سانتی‌متر باشند، حجم شکل حاصل از دوران را بیابید.



$$V_T = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h =$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 (\underbrace{H+h}_{5}) = \frac{5}{3}\pi r^2 = \frac{5}{3}\pi \times 3{,}2 \times 1{,}8$$

$$\boxed{V_T = 9{,}6\pi}$$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

$$(AB)^2 = x \times BC \Rightarrow 4^2 = x \times 5 \Rightarrow x = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

$$H + h = 5$$

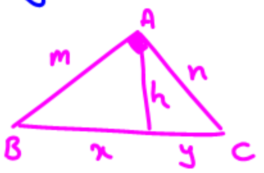
$$x + y = 5 \Rightarrow y = 1{,}8$$

$$\begin{cases} H = 3{,}2 \\ h = 1{,}8 \end{cases}$$

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$r^2 = x \cdot y = 3{,}2 \times 1{,}8$$

$$3^2 + 4^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 5 \Rightarrow H + h = 5$$



$$h^2 = x \cdot y \qquad m \times n = h(x+y)$$

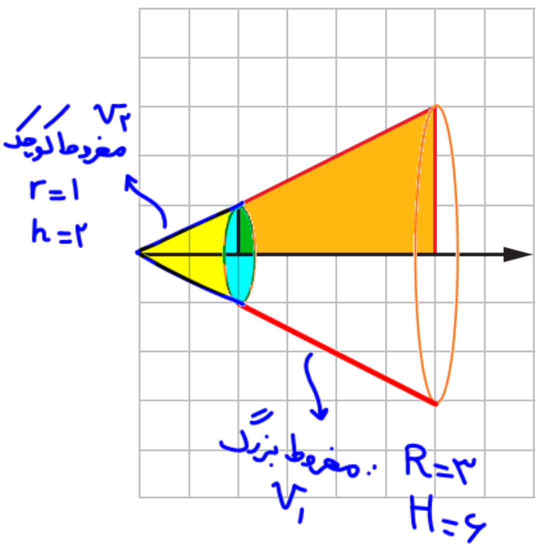
$$m^2 = x \times (x+y)$$

$$n^2 = y \times (x+y)$$

مثال: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقهٔ قائمه را حول محور آن دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



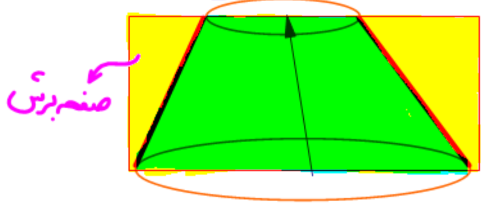
الف)

$$V_{\text{ناقص}} = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h =$$

$$\frac{1}{3}\pi (R^2 H - r^2 h) = \frac{\pi}{3}(\underbrace{9 \times 6 - 1 \times 2}_{52}) =$$

$$V_{\text{ناقص}} = \frac{52\pi}{3}$$

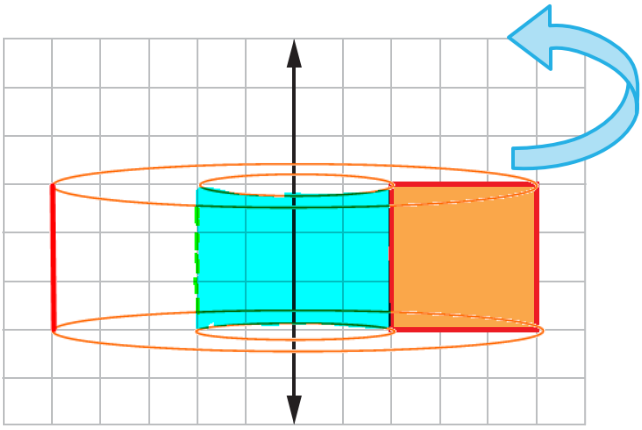
ب) سطح مقطع: ذوزنقه متساوی‌الساقین



مثال: مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

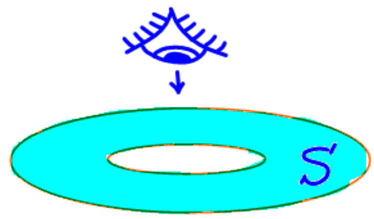


الف) استوانه کوچک V_2 : $r=2$ ، $H=3$

استوانه بزرگ V_1 : $R=5$

$$V_{\text{استوانه توخالی}} = V_1 - V_2 = \pi R^2 H - \pi r^2 H = \pi H(R^2 - r^2) = \pi \times 3(5^2 - 2^2) = 63\pi$$

ب)

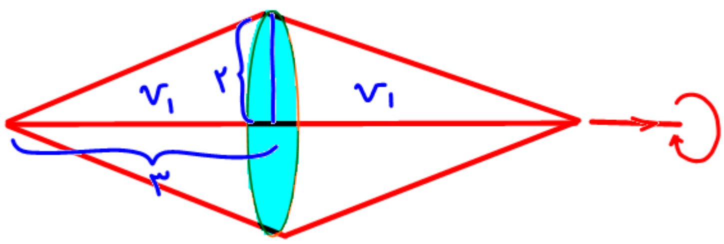


دو دایرهٔ هم مرکز به شعاع‌های ۵ و ۲ واحد

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 21\pi$$

مثال: اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ سانتی‌متر، حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ، $r=2$ ، $h=3$

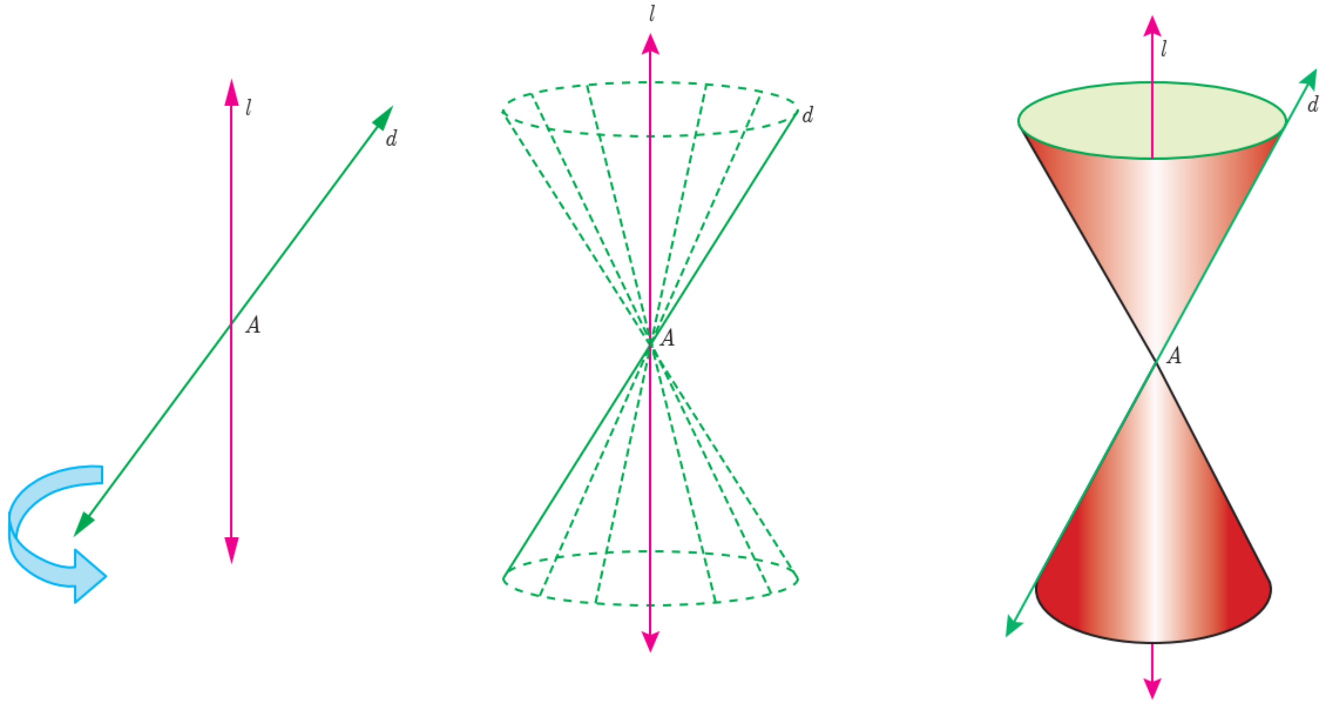


$$V_T = 2V_1 = 2 \times \frac{1}{3}\pi (2)^2 (3) = 8\pi$$

$$\boxed{V_T = 8\pi}$$

مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط l محور، نقطهٔ A رأس و خط d، مولد این سطح مخروطی است.



وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است.

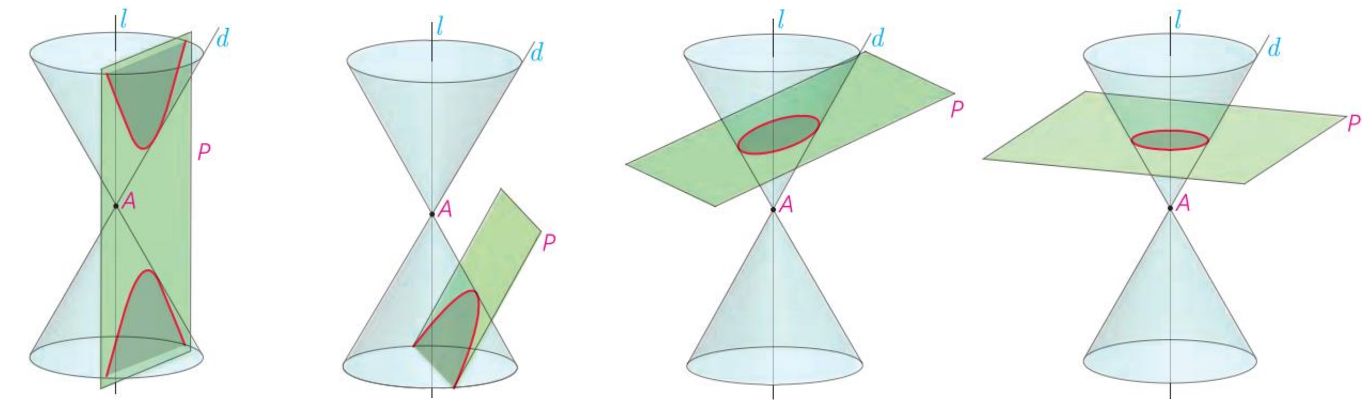
از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند.

الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل، دایره است.

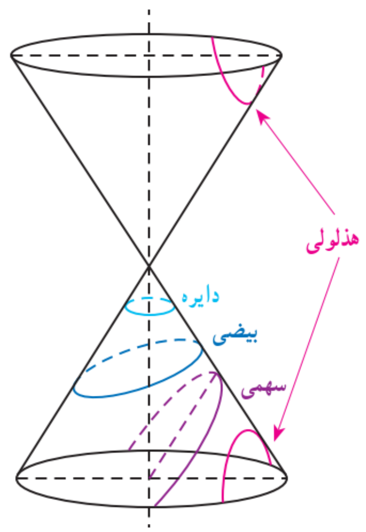
ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشده و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.

پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.

ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هُذلولی می‌نامیم.

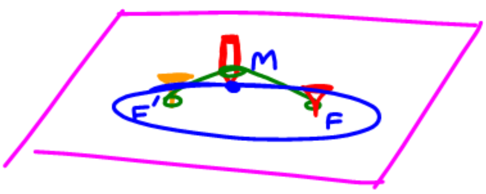


(الف)　(ب)　(پ)　(ت)



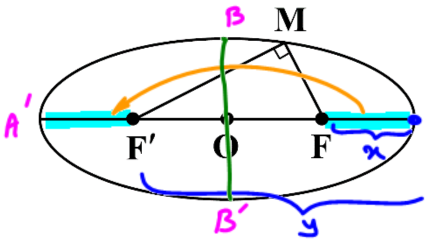
بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون‌های بیضی)، مقداری ثابت است.



$$|MF|+|MF'|=۲a$$

ثابت بیضی



اجزای بیضی

$x+y=$ قطر بزرگ $=۲a$

۱- نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند و FF' را فاصله‌ی کانونی بیضی می‌گوییم.

فاصله‌ی کانونی $=۲c=\left|FF'\right|$

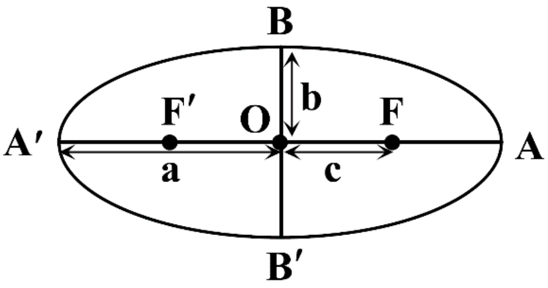
۲- خط AA' را محور کانونی و خط BB' را محور ناکانونی می‌گوییم (این دو خط محور تقارن بیضی هستند)

قطر بزرگ $=۲a=\left|AA'\right|$　　قطر کوچک $=۲b=\left|BB'\right|$

۳- نقاط A و A' (محل برخورد محور کانونی با بیضی) را رئوس کانونی و نقاط B و B' (محل برخورد محور ناکانونی با بیضی) را رئوس ناکانونی می‌گوییم.

۴- نقطه‌ی $W(\alpha,\beta)=O(\alpha,\beta)$ که محل برخورد محورهای تقارن بیضی است را مرکز بیضی گویند.

نکته: در هر بیضی همواره رابطه‌ی مهم زیر برقرار است. $a^2=b^2+c^2$



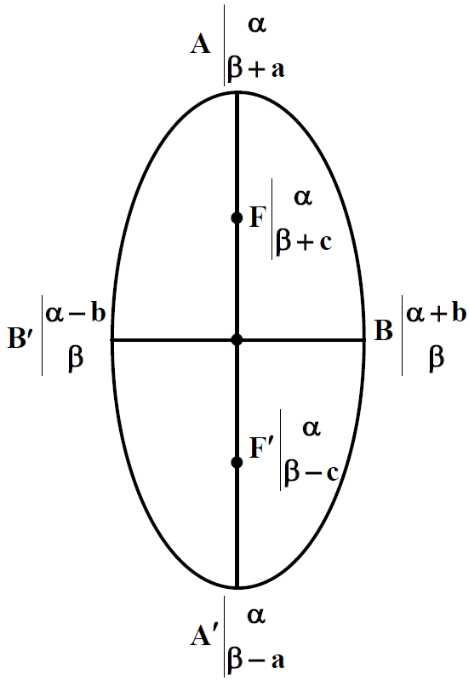
انواع بیضی

۱) بیضی افقی: هر گاه محور کانونی موازی محور x ها باشد، بیضی را افقی گوییم.

۲) بیضی قائم: هر گاه محور کانونی موازی محور y ها باشد، بیضی را قائم گوییم.

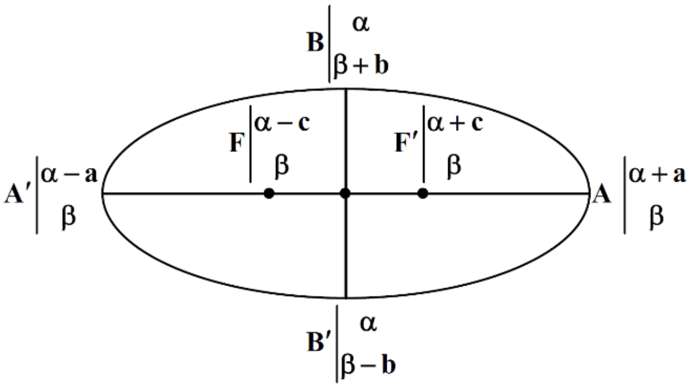
معادله‌ی بیضی قائم

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$



معادله‌ی بیضی افقی

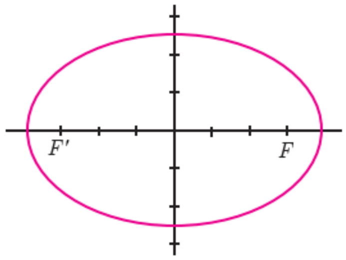
$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$



نکته: در هر بیضی همواره $a>b$

نکته: در بیضی افقی W، F، F'، A و A' دارای عرض یکسان و B و B' دارای طول یکسان می‌باشند. این مطلب در مورد بیضی قائم برعکس است.

مثال: اگر در یک بیضی، $c = ۳$ و $a = ۴$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک بیضی چقدر است؟



$$\left.\begin{array}{l} c = ۳ \\ a = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b^۲ = ۷$$

$$\boxed{b = \sqrt{۷}}$$

قطر کوچک $|BB'| = ۲b = ۲\sqrt{۷}$

مثال: اگر در یک بیضی داشته باشیم، $a = ۵$ و $b = ۳$، در این صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۹ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴$$

فاصلهٔ کانونی $|FF'| = ۲c = ۸$

مثال: در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴, ۵)$ باشد:

الف) $|AA'| = ۶ \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow \boxed{a = ۳}$

$|BB'| = ۴ \Rightarrow ۲b = ۴ \Rightarrow \boxed{b = ۲}$

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

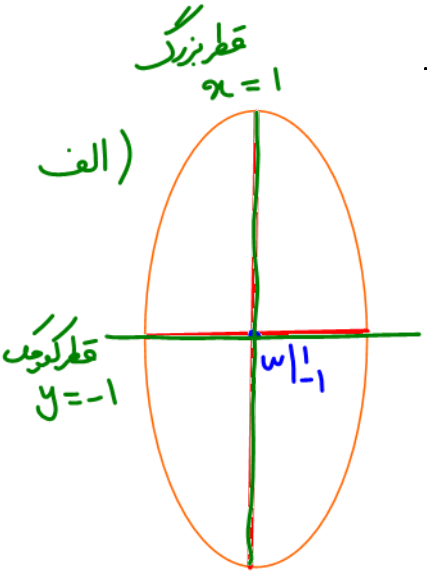
$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow |FF'| = ۲\sqrt{۵}$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

مثال: کانون‌های یک بیضی نقاط (۳ , ۱) و (۵− , ۱) است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



$$F' \,|\, 1, -5 \quad F \,|\, 1, 3 \Rightarrow w \,\Big|\, 1, \frac{3+(-5)}{2} \Rightarrow w(1,-1)$$

$$|FF'| = 8, \quad 2c = 8 \Rightarrow \boxed{c=4}$$

ب) $a = 6$, $c = 4$ $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20 \rightarrow$

$$b = 2\sqrt{5} \Rightarrow |BB'| = 2b = 4\sqrt{5}$$

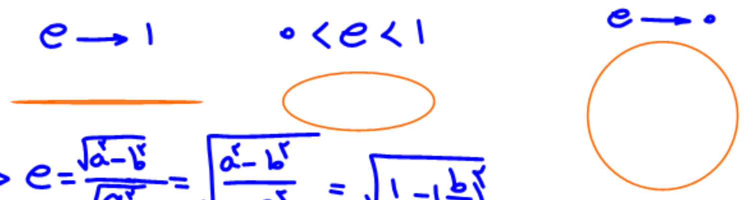
$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{e = \frac{2}{3}}$$

خروج از مرکز بیضی

در هر بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و آن را با حرف e نمایش می‌دهیم. خروج از مرکز عددی است که میزان کشیدگی بیضی را مشخص می‌کند.

خروج از مرکز همواره عددی بین صفر و ۱ است و هر چه خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک‌تر شود، بیضی بیشتر شبیه به دایره خواهد شد (اندازه‌ی قطرها تقریباً با هم برابر می‌شوند)

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad , \quad 0 < e < 1$$



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

مثال: خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن (۴− , ۱−) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

الف) $e = \frac{4}{5}$ $\quad w \,|\, -4, -1$ $\quad |BB'| = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \sqrt{1 - \frac{9}{a^2}} \Rightarrow \frac{16}{25} = 1 - \frac{9}{a^2} \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

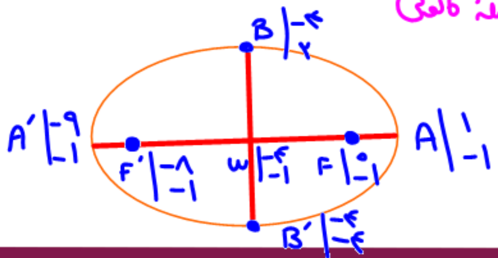
راه اول: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

راه دوم: $e = \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow \boxed{c = 4}$

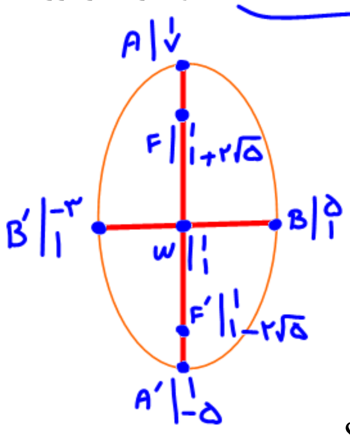
قطر کانونی $|AA'| = 2a = 10$

فاصله کانونی $|FF'| = 2c = 8$

ب)



مثال: مختصات دو سر قطر کوچک و مختصات دو کانون بیضی را بیابید که $A(1,7)$ و $A'(1,-5)$ دو سر قطر بزرگ آن و $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ خروج از مرکز آن باشد.



$$w\left|\begin{matrix}1\\ \frac{7+(-5)}{2}\end{matrix}\right. \Rightarrow w(1,1)$$

$$|AA'| = 2a = 12 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{c}{6} \Rightarrow \boxed{c=2\sqrt{5}}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 36=b^2+20 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

مثال: قطر بزرگ یک بیضی دو برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

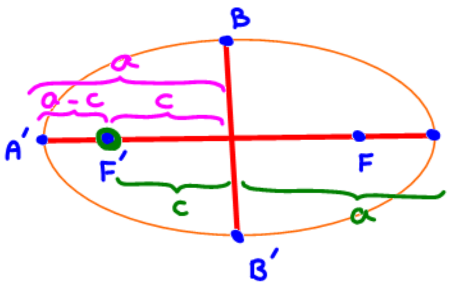
۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{|AA'|}{|BB'|}=2 \Rightarrow \frac{a}{b}=2 \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

مثال: در یک بیضی، فاصله‌ی یک کانون از دورترین نقطه‌ی بیضی، ۳ برابر فاصله‌ی همان کانون از نزدیک‌ترین نقطه‌ی بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$ ✓



$$a+c=3(a-c) \Rightarrow a+c=3a-3c \Rightarrow 4c=2a \Rightarrow \boxed{a=2c}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{2c}=\frac{1}{2}$$

مثال: اگر فاصله‌ی کانونی یک بیضی را نصف و قطر بزرگ را ۲ برابر کنیم، خروج از مرکز بیضی جدید چند برابر می‌شود؟

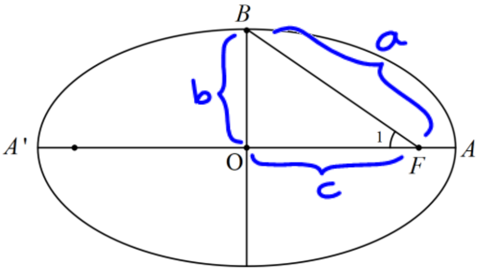
۱) $\frac{1}{4}$ ✓ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

فاصله‌ی کانونی $2c \xrightarrow{\text{نصف}} c$

قطر بزرگ $2a \xrightarrow{\text{دو برابر}} 4a$

$$e=\frac{c}{a} \qquad e'=\frac{\frac{1}{2}c}{2a} \Rightarrow e'=\frac{1}{4}\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow e'=\frac{1}{4}e$$

مثال: در شکل مقابل، اگر زاویه‌ی F_1 برابر با ۳۰ درجه باشد، خروج از مرکز بیضی را بیابید.

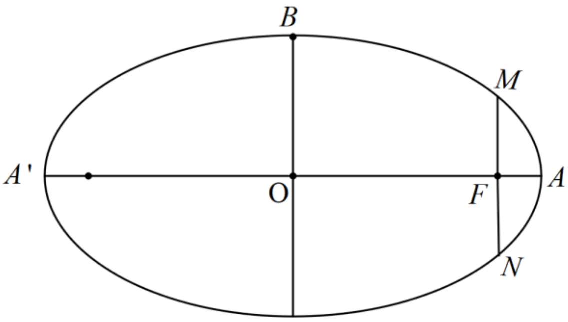


$\cos \hat{F}_1 = \frac{c}{a} = e$

$\cos 30^\circ = e \Rightarrow \boxed{e = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

وتر کانونی

پاره‌خطی که دو سر آن روی بیضی قرار داشته و از کانون گذشته و بر محور کانونی عمود باشد، وتر کانونی نام دارد که طول آن برابر است با: $|MN| = \frac{2b^2}{a}$



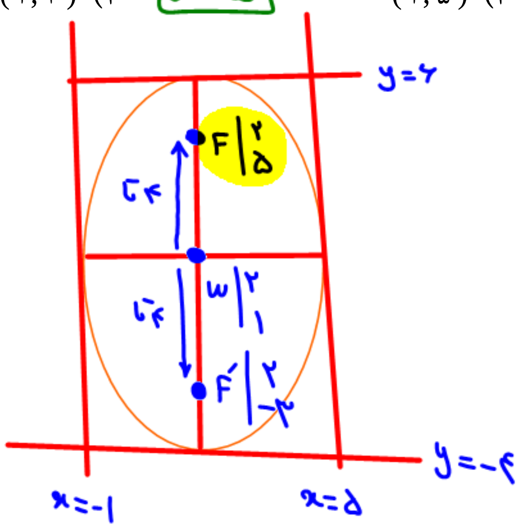
مماس در رئوس بیضی

رئوس بیضی نقاطی می‌باشند که در آن‌ها، مماس بر بیضی موازی محورهای مختصات می‌باشند که دقیقاً همان ۴ نقطه‌ی دو سر قطرهای بیضی را تشکیل می‌دهند. برای به‌دست آوردن معادله‌ی این خطوط، مختصات رئوس را یافته و با توجه به این‌که این مماس‌ها موازی محورهای مختصات هستند، معادله‌ی آن‌ها را می‌نویسیم.

مثال: مختصات کانون F یک بیضی با عرض مثبت که بر ۴ خط $\underbrace{x = -1 \text{ و } x = 5}_{2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}}$ و $\underbrace{y = -4 \text{ و } y = 6}_{2a = 10}$ مماس است، کدام است؟

$\boxed{a = 5}$

۱) $(2, 5)$ ✓
۲) $(2, 3)$
۳) $(1, 5)$
۴) $(1, 3)$



$\left.\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

یادآوری

$A\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix}4\\9\end{matrix}\right. \Longrightarrow |AB|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ $\quad M\left|\begin{matrix}\frac{1+4}{2}=2/5\\ \frac{5+9}{2}=7\end{matrix}\right.$

۱) فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با: $|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

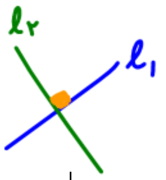
۲) مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB برابر است با: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

۳) معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی (x_0, y_0) و شیب m برابر است با: $y-y_0 = m(x-x_0)$

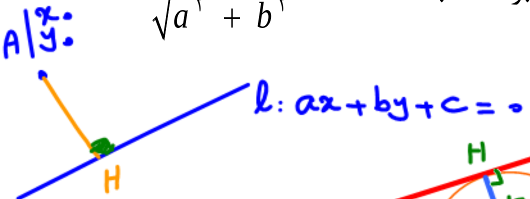
۴) در معادله‌ی خط $ax+by+c=0$ شیب خط برابر است با: $m = \frac{-a}{b}$

۵) اگر دو خط موازی باشند، شیب‌های برابر دارند. $m_1 = m_2$

۶) اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه‌اند. $m_1 \times m_2 = -1$

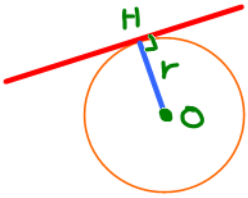


۷) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ برابر است با: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



۸) در هر دایره قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

۹) در هر دایره، خط مماس در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است.



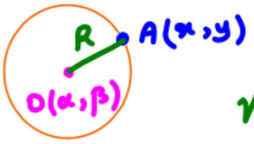
دایره

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به فاصله‌ی ثابتی به نام شعاع باشند.

برای نوشتن معادله‌ی هر دایره احتیاج به دو عامل داریم:

۱- مختصات مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$

۲- طول شعاع دایره R



$|OA| = R \Longrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \xrightarrow{(\ )^2}$

فرم استاندارد (کلاسیک) دایره به صورت زیر است: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$

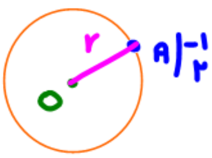
مثال: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(-1, 3)$ و شعاع ۵ را بنویسید.

$O\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. , r=5$

$(x-(-1))^2+(y-3)^2=5^2 \Longrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که از نقطه‌ی $(-1, 2)$ بگذرد.

$O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ مبداء مختصات $\quad A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

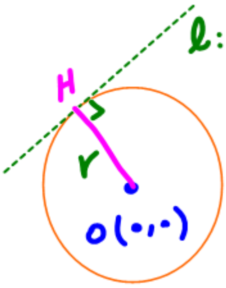


$|OA| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \Longrightarrow r=\sqrt{5} , O(0,0)$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=\sqrt{5}^2 \Longrightarrow$

$\boxed{x^2+y^2=25}$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات بوده و بر خط $4x + 3y = 10$ مماس باشد.

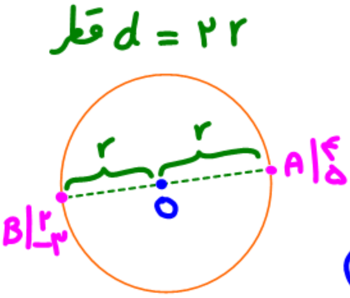


$$r = |OH| = \frac{|4(\cancel{0}) + 3(\cancel{0}) - 10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Longrightarrow r = 2 \;,\; O\Big|{}^{0}_{0}$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $A(4,5)$ و $B(2,-3)$ نقاط واقع در دو سر قطر آن باشند.

قطر $d = 2r$



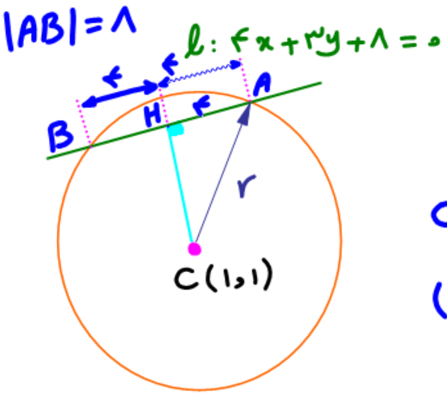
$$O\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) \Longrightarrow O(3,1)$$

$$d = |AB| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = \sqrt{4\times 17} = \overset{\text{قطر}}{2\sqrt{17}} \xrightarrow{\div 2} \boxed{r = \sqrt{17}}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 17$$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $C(1,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $4x + 3y + 8 = 0$ وتری به طول ۸ جدا کند.

$|AB| = 8$



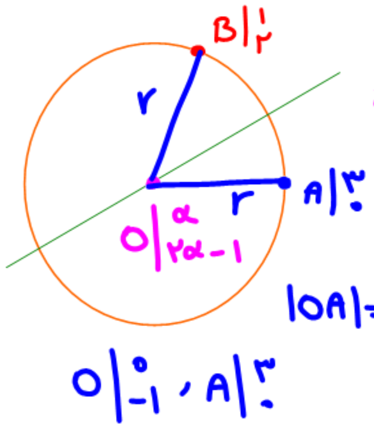
$$|CH| = \frac{|4(1) + 3(1) + 8|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{15}{5} = 3 \Longrightarrow |CH| = 3$$
$$|AH| = 4$$

$$OA^2 = AH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Longrightarrow |OA| = 5 \Longrightarrow r = 5$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Longrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

مثال: شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $(1,2)$ و $(3,0)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ می‌باشد را بیابید.

$$O\Big|{}^{\alpha}_{\beta} \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{\text{روی خط } y=2x-1} \beta = 2\alpha - 1 \Longrightarrow O(\alpha, 2\alpha-1)$$



$$r = |OA| = |OB| \Longrightarrow \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha-1)^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-3)^2} \xrightarrow{(\;)^2}$$

$$\cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 + \cancel{4\alpha^2} - 4\alpha + 1 = \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 1 + \cancel{4\alpha^2} - 12\alpha + 9 \Longrightarrow$$

$$-10\alpha + 10 = -14\alpha + 10 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 0} \Longrightarrow O(0,-1)$$

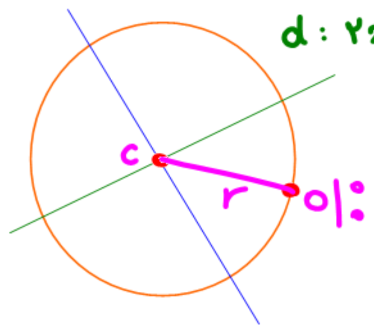
$$|OA| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 10$$

$O\Big|{}^{0}_{-1} \;,\; A\Big|{}^{3}_{0}$

مثال: معادلات دو قطر دایره‌ای $2x - 3y = 5$ و $x - 2y = 3$ می‌باشند. اگر دایره از مبدأ مختصات عبور کند، معادله‌ی دایره را بنویسید.

$l: x-2y-3=0$



$d: 2x-3y-5=0$

$C: \begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \xRightarrow{\times(-2)} \begin{cases} \cancel{-2x}+4y=-6 \\ \cancel{2x}-3y=5 \end{cases} \oplus$

$y=-1 \Rightarrow x-2(-1)=3$

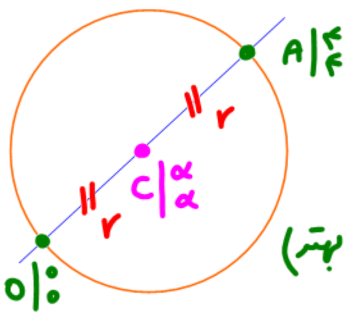
$\boxed{y=-1}\,,\ \boxed{x=1}$ مرکز

$|OC|=r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی نیمساز ناحیه اول است و از مبدأ مختصات و نقطه‌ی $(4,4)$ می‌گذرد.

$y=x \quad x,y>0$



راه اول:

$r=|AC|=|OC| \Rightarrow \sqrt{(\alpha-4)^2+(\alpha-4)^2}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^2} \xrightarrow{(\ )^2}$

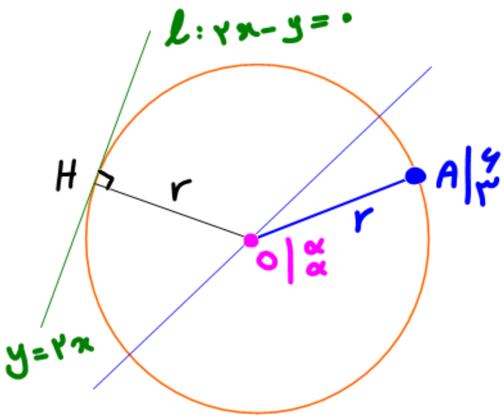
$2(\alpha-4)^2=2\alpha^2 \xRightarrow{\div 2} \alpha^2-8\alpha+16=\alpha^2 \xRightarrow{-\alpha^2} \boxed{\alpha=2}$

راه دوم (بهتر): وسط C $\Rightarrow C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \Rightarrow C(2,2)$

$|OC|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8} \Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8$

مثال: مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(6,3)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y = 2x$ مماس شود، شعاع آن را بیابید.

$y=x$



$r=|OA|=|OH| \Rightarrow$

$\sqrt{(\alpha-6)^2+(\alpha-3)^2}=\frac{|2(\alpha)-(\alpha)|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}} \xRightarrow{(\ )^2}$

$\alpha^2-12\alpha+36+\alpha^2-6\alpha+9=\frac{\alpha^2}{5} \xRightarrow{\times 5}$

$10\alpha^2-90\alpha+225=\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2-10\alpha+25=0 \Rightarrow$

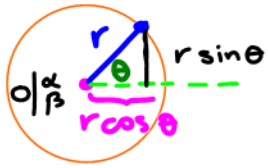
$(\alpha-5)^2=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=5} \Rightarrow O(5,5)\,,\ A(6,3)$

$r=|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5} \Rightarrow r=\sqrt{5}\,,\ O(5,5)$

$(x-5)^2+(y-5)^2=5$

نکته: اگر معادله‌ی دایره به صورت سینوس و کسینوس بیان شود و ضرایب سینوس و کسینوس با هم برابر باشند، معادله‌ی پارامتری داده شده را معادله‌ی پارامتری دایره می‌نامند که در آن ضرایب سینوس و کسینوس بیانگر اندازه‌ی شعاع دایره بوده و اعدادی که با سینوس و کسینوس جمع و تفریق می‌شوند بیانگر مرکز دایره می‌باشند.

$$\begin{cases} x = \alpha \pm R\cos\theta \\ y = \beta \pm R\sin\theta \end{cases}, \quad ۰ \le \theta \le ۲\pi \quad \equiv \quad (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$$



مثال: مکان هندسی نقطه‌ی $M\left(\underset{\alpha}{-۲} + \underset{r}{۳}\sin\theta \,,\, \underset{\beta}{۱} + ۳\cos\theta\right)$ وقتی که $۰ \le \theta \le ۲\pi$ تغییر را بیابید.

$$\begin{cases} x = -۲ + ۳\sin\theta \\ y = ۱ + ۳\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{x+۲}{۳} \\ \cos\theta &= \frac{y-۱}{۳} \end{aligned} \Rightarrow \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \Rightarrow \left(\frac{x+۲}{۳}\right)^۲ + \left(\frac{y-۱}{۳}\right)^۲ = ۱ \xRightarrow{\times ۹} \boxed{(x+۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹}$$

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow$$

$$x^۲ + y^۲ \underbrace{- ۲\alpha x}_{A} \underbrace{- ۲\beta y}_{B} + \underbrace{\alpha^۲ + \beta^۲ - r^۲}_{C} = ۰$$

$$\boxed{x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰}$$

$$A = -۲\alpha \xRightarrow{\div(-۲)} \alpha = \frac{-A}{۲}$$

$$B = -۲\beta \xRightarrow{\div(-۲)} \beta = \frac{-B}{۲}$$

فرم گسترده‌ی (تحلیلی) معادله‌ی دایره

اگر در معادله‌ی استاندارد دایره، پرانتزها را به توان ۲ برسانیم و همه‌ی جملات را به یک طرف تساوی منتقل نماییم، معادله‌ی حاصل را معادله‌ی گسترده‌ی دایره می‌نامیم.

فرم گسترده‌ی معادله‌ی دایره به صورت مقابل است:

$$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$$

نکته‌ی۱: در معادله‌ی گسترده‌ی دایره، ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر است و معادله جمله‌ی شامل عبارت xy ندارد.

نکته‌ی۲: اگر $x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$ معادله‌ی گسترده‌ی دایره باشد (ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر با عدد ۱ است)، همواره داریم:

$$f'_x = ۰ \Rightarrow ۲x + A = ۰ \Rightarrow x = \frac{-A}{۲}$$

$$f'_y = ۰ \Rightarrow ۲y + B = ۰ \Rightarrow y = \frac{-B}{۲}$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{A^۲ + B^۲ - ۴C}$$

تذکر: در تمام مقاطع مخروطی که مرکز تقارن دارند، مختصات مرکز تقارن با مشتقات نسبی به‌دست می‌آیند.

مثال: دایره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2-4x+6y+2=0$ مفروض است. مرکز و شعاع دایره را تعیین کنید. و معادله‌ی این دایره را به صورت استاندارد بنویسید.

$\underbrace{x^2-4x+4}-4+\underbrace{y^2+6y+9}-9=-2$

$(x-2)^2+(y+3)^2=11$

$O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix} \quad r=\sqrt{11}$

$A=-4 \longrightarrow \alpha=\frac{-A}{2}=+2 \Rightarrow O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix}$

$B=+6 \longrightarrow \beta=\frac{-B}{2}=-3$

$C=2$

$(x-2)^2+(y+3)^2=11$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(6)^2-4(2)}=\frac{\sqrt{44}}{2}=\sqrt{11} \Rightarrow \boxed{r=\sqrt{11}}$

مثال: شعاع دایره‌ی $ax^2+y^2+2x+4y-k=0$ برابر با ۲ است. مقدار ثابت k را بیابید.

$a=1 \longrightarrow x^2+2x+1-1+y^2+4y+4-4=k$

$(x+1)^2+(y+2)^2=\underbrace{k+5}_{r^2} \Rightarrow k+5=4 \Rightarrow k=-1$

فرمول: $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}=\frac{1}{2}\sqrt{(2)^2+(4)^2-4(-k)}=2 \xRightarrow{\times 2}$

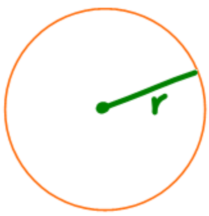
$\sqrt{20+4k}=4 \Rightarrow 20+4k=16 \Rightarrow 4k=-4 \Rightarrow k=-1$

نکته: عبارت $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ را در نظر بگیرید.

الف) دایره است: $A^2+B^2-4C>0$

ب) نقطه است: $A^2+B^2-4C=0$

پ) تهی است: $A^2+B^2-4C<0$



$r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

مثال: به ازای چند مقدار k نمودار $kx^2+\frac{y^2}{k}=2x+k^2-3$ یک دایره است؟

$kx^2+\frac{1}{k}y^2-2x-k^2+3=0$

$\frac{k}{1}=\frac{1}{k} \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm 1$

$k=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x+2=0 \Rightarrow A^2+B^2-4C=(-2)^2+(0)^2-4(2)=-4<0$ تهی

$k=-1 \Rightarrow x^2+y^2+2x-2=0 \Rightarrow A^2+B^2-4C=(2)^2+(0)^2-4(-2)=12>0$ دایره

$(x+1)^2+y^2=3 \xrightarrow{\text{دایره}} O\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix} , r=\sqrt{3}$

معادله‌ی دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات:

۱) دایره‌ی مماس بر محور x ها

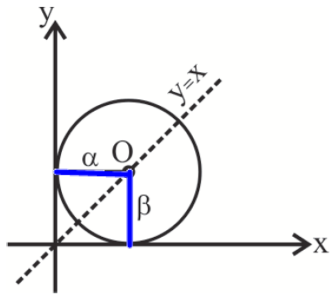
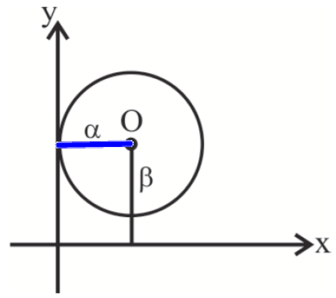
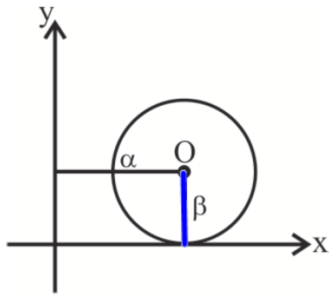
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\beta^2 \qquad |\beta|=r$$

۲) دایره‌ی مماس بر محور y ها

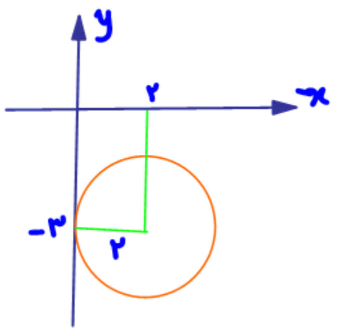
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2 \qquad |\alpha|=r$$

۳) دایره‌ی مماس بر هر دو محور

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \qquad |\alpha|=|\beta|=r$$

دایره مماس بر هر دو محور	دایره مماس بر محور y	دایره مماس بر محور x
		
$\lvert\alpha\rvert=\lvert\beta\rvert=r$	$\lvert\alpha\rvert=r$	$\lvert\beta\rvert=r$

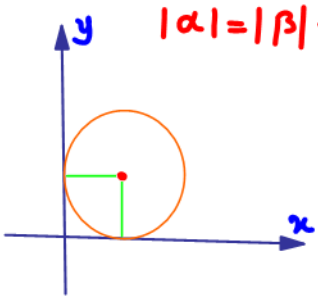
مثال: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $A(2,-3)$ که بر محور قائم مماس باشد را بنویسید.



$\alpha=2 \Rightarrow |\alpha|=r \Rightarrow r=2$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4$

مثال: اگر دایره‌ی $x^2+y^2+ax-4y=b$ در ربع اول بر هر دو محور دستگاه مختصات مماس باشد، $a+2b$ را بیابید.



$|\alpha|=|\beta|=r \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow$

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

$x^2+y^2+ax-4y-b=0$

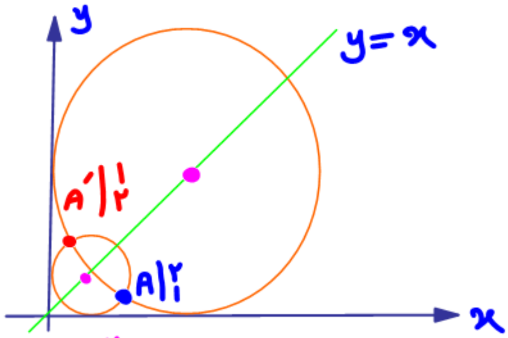
$\alpha=\frac{-a}{2} \qquad \beta=\frac{-B}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2 \Rightarrow \beta=2 \Rightarrow r=2$

$\frac{-a}{2}=2 \Rightarrow \boxed{a=-4} \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(-b)}=2 \Rightarrow$

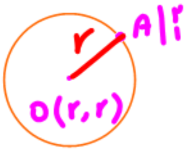
$a+2b=-4+2(-4)=-12 \Rightarrow \boxed{a+2b=-12} \qquad 32+4b=16 \Rightarrow \boxed{b=-4}$

مثال: دو دایره از نقطه‌ی $A(2,1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع این دایره‌ها را بیابید.

$|\alpha|=|\beta|=r$



$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \Rightarrow$



$\sqrt{(r-2)^2+(r-1)^2}=r \xRightarrow{()^2}$

$\cancel{r^2}-4r+4+r^2-2r+1=\cancel{r^2} \Rightarrow$

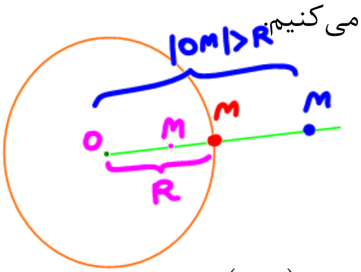
$r^2-6r+5=0 \Rightarrow$

$(r-5)(r-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \to (x-1)^2+(y-1)^2=1 \\ r=5 \to (x-5)^2+(y-5)^2=25 \end{cases}$

وضعیت نقطه و دایره

نقطه‌ی M و دایره‌ی C مفروضند. وضعیت این نقطه و دایره به این ترتیب مشخص می‌شود که:

۱) فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر را از مرکز دایره به‌دست آورده و با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.



اگر $OM>R$، نقطه بیرون دایره است. ✓

اگر $OM=R$، نقطه روی محیط دایره است. ✓

اگر $OM<R$، نقطه درون دایره است. ✓

۲) اگر مختصات نقطه‌ی $M(x_\circ , y_\circ)$ را در فرمول دایره قرار دهیم، پارامتر $C(M)=C(x_\circ , y_\circ)$ را قوّت دایره می‌نامیم که علامت این پارامتر، وضعیت نقطه نسبت به دایره را مشخص می‌نماید.

اگر $C(M)>0$، نقطه بیرون دایره است.

اگر $C(M)=0$، نقطه روی محیط دایره است.

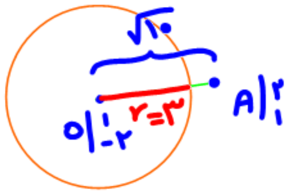
اگر $C(M)<0$، نقطه درون دایره است.

مثال: نقطه‌ی $A(2,1)$ چه وضعیتی نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ دارد؟

$C(2,1)=4+1-4+4-4$

$C(2,1)=1>0$ بیرون دایره

$(x-1)^2+(y+2)^2=9 \to r=3$

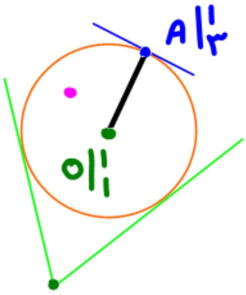


$O\,|\,{1 \atop -2}$ $\Rightarrow |OA|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}>3$

$A\,|\,{2 \atop 1}$

مثال: از نقطه‌ی $A(1,3)$ چند مماس می‌توان بر دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ رسم کرد؟

۱- صفر ۲- یک ✓ ۳- دو ۴- بی‌شمار



$C(1,3)=(1)^2+(3)^2-2(1)-2(3)-2=0$ نقطه روی دایره

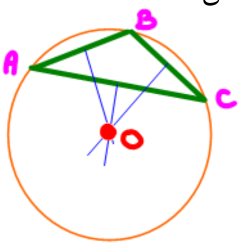
تشریحی: $(x-1)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow r=2$

$O\,|\,{1 \atop 1}$ $A\,|\,{1 \atop 3} \Rightarrow |OA|=2$

دایره‌ی گذرا از ۳ نقطه

بر هر ۳ نقطه‌ای که بر یک امتداد راست قرار نداشته باشند، فقط و فقط یک دایره می‌گذرد که همان دایره‌ی محیطی است که بر مثلث ABC محیط شده است. مرکز این دایره محل تقاطع عمودمنصف‌های مثلث ABC است.

برای یافتن فرمول گسترده‌ی این دایره، ابتدا مختصات ۳ نقطه را درون معادله‌ی دایره قرار داده و سپس با حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهول به‌دست آمده، مقادیر A، B و C را به‌دست می‌آوریم.



مثال: طول شعاع دایره‌ای را بیابید که از سه نقطه‌ی $A(-۱,۰)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ می‌گذرد.

$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \longrightarrow x^2+y^2-2x+2y-3=0$

$A\left|\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right. \Rightarrow 1+0-A+0+C=0 \Rightarrow \begin{cases} A-\cancel{C}=1 \\ 3A+\cancel{C}=-9 \end{cases}$ $\oplus$ $A=-2\ ,\ C=-3$

$B\left|\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right. \Rightarrow 9+0+3A+0+C=0 \Rightarrow$

$C\left|\begin{smallmatrix}0\\-3\end{smallmatrix}\right. \Rightarrow 0+9+0-3B+C=0 \Rightarrow$

$3B=C+9 \Rightarrow 3B=6 \Rightarrow B=2$

$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

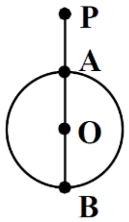
$O\left|\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right.\ ,\ r=\sqrt{5}$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-4(-3)}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

فاصله‌ی نقطه از دایره

۱- نقطه روی محیط دایره است: در این صورت فاصله‌ی نقطه تا دایره، صفر است.

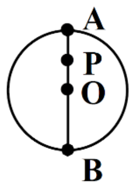
۲- نقطه خارج از دایره است: در این صورت از نقطه‌ی مورد نظر به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. کمترین و بیشترین فاصله‌ی نقطه از دایره برابر است با:



$min = AP = OP - R$

$max = BP = OP + R$

۳- نقطه داخل دایره است: در این صورت از نقطه‌ی مورد نظر به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. کمترین و بیشترین فاصله‌ی نقطه از دایره برابر است با:



$min = AP = R - OP$

$max = BP = R + OP$

نتیجه: min و max فاصله‌ی یک نقطه از دایره از روابط زیر به دست می‌آیند.

$min = |OP - R| = |R - OP|$

$max = OP + R$

مثال: فاصله‌ی دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌ی واقع بر محیط دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ را از نقطه‌ی $A(۳,-۳)$ بیابید.

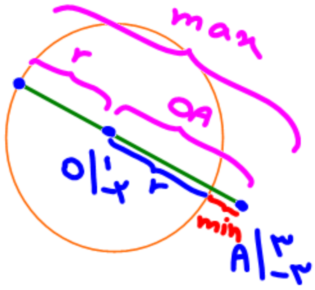
$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

$O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.\quad,\quad r=2$

$A\left|\begin{matrix}3\\-3\end{matrix}\right.$

$|OA|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$$\begin{cases}\max = |OA|+r = \sqrt{5}+2\\ \min = |OA|-r = \sqrt{5}-2\end{cases}$$



اوضاع نسبی خط و دایره

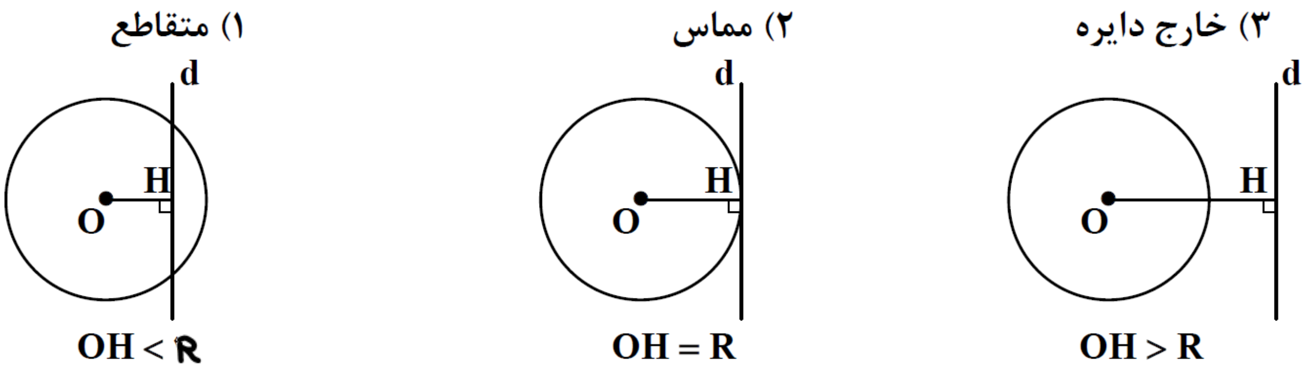
خط نسبت به دایره، سه وضعیت می‌توانند داشته باشند.

۱) متقاطع

۲) مماس

۳) خارج از دایره

که برای تشخیص این حالت‌ها، باید فاصله‌ی نقطه‌ی مرکز از خط را به دست آوریم و با شعاع دایره مقایسه کنیم.

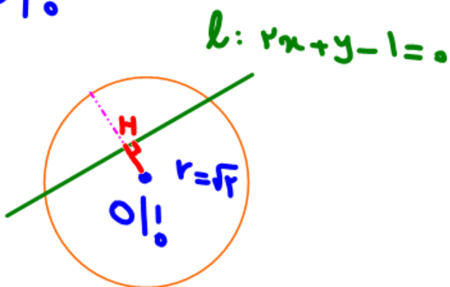


مثال: وضعیت نسبی خط $۲x + y - ۱ = ۰$ و دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ را مشخص کنید.

$(x-1)^2+y^2=2$

$O\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$$|OH|=\frac{|2(1)+(0)-1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\sqrt{2}$$



مثال: به ازای کدام مقدار a، خط $x+۳y=۰$ بر دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+a=۰$ مماس است؟

۱- $\frac{۳}{۲}$ ۲- $\frac{۵}{۲}$ ✓ ۳- ۳ ۴- ۵

$(x-1)^2+(y+2)^2=5-a$

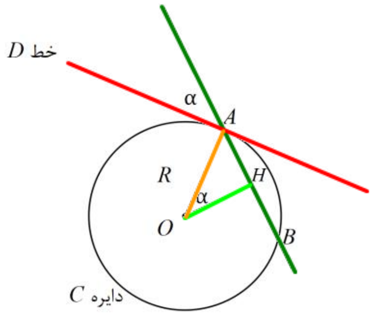
$O\Big|_{-2}^{1}$ $\quad l: x+3y=0$

$|OH|=\frac{|(1)+3(-2)|}{\sqrt{(1)^2+(3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt5\times\cancel{\sqrt5}}{\sqrt2\times\cancel{\sqrt5}}=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\sqrt{5-a}=\frac{\sqrt{10}}{2}\xrightarrow{(\ )^2}5-a=\frac{10}{4}\Longrightarrow a=\frac{5}{2}$

زاویه‌ی بین خط و دایره

زاویه‌ی بین خط و دایره در نقطه‌ی تقاطع، زاویه‌ای است که بین خط مورد نظر و خط مماس بر دایره در نقطه‌ی برخورد ایجاد می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$\cos\alpha=\frac{OH}{R}$$

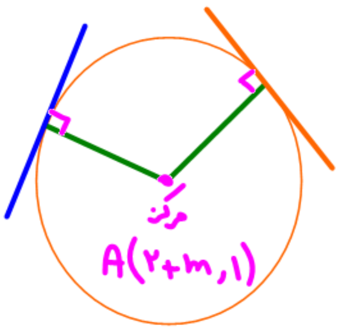
نکته: در این حالت اندازه‌ی وتری را که دایره مورد نظر بر خط ایجاد می‌کند، می‌توان از قضیه‌ی فیثاغورس به‌دست آورد.

$$AB=۲AH=۲\sqrt{R^{۲}-OH^{۲}}$$

نکته: زاویه‌ی خط مماس بر دایره با دایره برابر صفر است.

نکته: خطی که از مرکز دایره عبور کند، بر دایره و خط مماس بر آن عمود بوده و آن را عمود بر دایره می‌نامند.

مثال: از نقطه‌ی $A(۲+m\ ,\ ۱)$ بی‌شمار قائم می‌توان بر دایره $۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)-۴x+ny=۹$ رسم نمود. مقدار $m+n$ را بیابید.



$\div 2$

$x^2+y^2-2x+\overbrace{\frac{n}{2}}^{B}y=\frac{9}{2}$

$2+m=\frac{-A}{2}\Longrightarrow 2+m=1\Longrightarrow m=-1$

$1=\frac{-B}{2}\Longrightarrow B=-2\Longrightarrow\frac{n}{2}=-2\Longrightarrow \boxed{n=-4}$

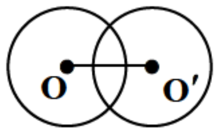
$\boxed{m+n=-5}$

مثال: طول پاره‌خطی که توسط خط $۴x+۳y+۸=۰$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲۳$ ایجاد می‌شود را بیابید.

وضعیت نسبی دو دایره

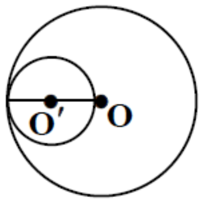
برای تعیین وضعیت نسبی دو دایره نسبت به یکدیگر، فاصله‌ی بین دو مرکز دایره را یافته و سپس آن را با مجموع یا اختلاف اندازه‌های دو شعاع مقایسه می‌کنیم.

۳) متقاطع



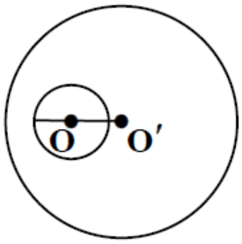
$|R-R'|<|OO'|<R+R'$

۲) مماس داخل



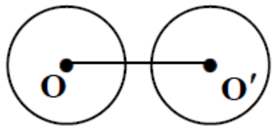
$|OO'|=|R'-R|$

۱) متداخل



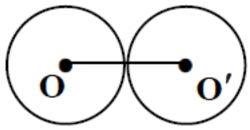
$|OO'|<|R'-R|$

۵) متخارج



$|OO'|>R+R'$

۴) مماس خارج



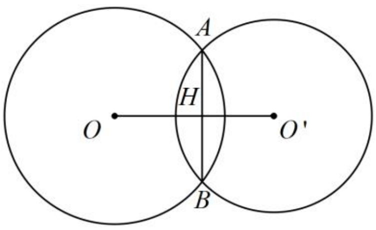
$|OO'|=R+R'$

مثال: دایره‌های $x^۲+y^۲-۲x=۱$ و $x^۲+y^۲-۲y=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

مثال: به ازای کدام مقدار a، دایره‌های $x^۲+y^۲+۴x=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x+۸y+a=۰$ مماس خارج هستند؟

معادله‌ی وتر مشترک دو دایره

خطی که از محل تقاطع دو دایره‌ی متقاطع عبور می‌کند را در نظر می‌گیریم. به قسمتی از این خط که بین دو نقطه‌ی تقاطع واقع شده است، وتر مشترک دو دایره می‌گوییم.



یافتن معادله‌ی وتر مشترک:

معادلات دو دایره را از هم کم کنیم به شرطی که ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ باشد.

یافتن اندازه‌ی وتر مشترک:

از قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB=۲\sqrt{R^۲-OH^۲}$$

مثال: معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ را بیابید. اندازه‌ی وتر مشترک را نیز بیابید.

نکته: برای یافتن نقاط تقاطع دو دایره‌ی متقاطع، ابتدا وتر مشترک را یافته و سپس وتر مشترک را با یکی از دایره‌ها در یک دستگاه قرار داده و با حل دستگاه مورد نظر، نقاط تقاطع به دست می‌آیند.