



کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده



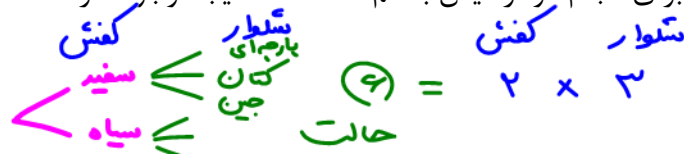
ترکیبیات

آنالیز ترکیبی

به روش‌هایی که بتوان به کمک آن‌ها عناصر یک مجموعه‌ی گسسته و متناهی را شمارش نمود، نظریه‌ی شمارش یا آنالیز ترکیبی می‌گویند.

اصل اساسی شمارش (اصل ضرب):

اگر در بررسی دو آزمایش که اولی به n روش قابل انجام بوده و برای هر کدام از این n روش ممکن در آزمایش ۱، m نتیجه‌ی ممکن در آزمایش ۲ وجود داشته باشد، آن‌گاه برای انجام دو آزمایش با هم، $m \times n$ نتیجه وجود دارد.

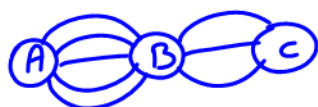


تعمیم اصل ضرب:

فرض کنید r آزمایش انجام می‌گیرد. به طوری که آزمایش اول، n_1 نتیجه‌ی ممکن دارد. برای هر کدام از نتایج آزمایش اول، آزمایش دوم n_2 نتیجه‌ی ممکن داشته و برای هر کدام از نتایج دو آزمایش اول، n_3 نتیجه‌ی ممکن برای آزمایش سوم و ... و برای هر نتیجه از $r - 1$ آزمایش اول، n_r نتیجه برای آزمایش r ام وجود دارد. آن‌گاه تعداد حالات ممکن برای نتیجه‌ی این آزمایش تصادفی، برابر است با:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_r$$

مثال: فردی می‌خواهد از شهر A به شهر C برود و برای این سفر قصد دارد حتماً از شهر B عبور کند. اگر از A به B ، ۵ جاده و از B به C ، ۳ جاده وجود داشته باشد، این فرد به چند طریق می‌تواند:



$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \\ 5 \times 3 = 15$$

الف) از شهر A به شهر C برود؟

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow B, B \rightarrow A \\ 5 \times 3 \times 3 \times 5 = 225$$

ب) از شهر A به C سفر کرده و دوباره به A بازگردد؟

پ) از A به C سفر کرده و به طوری به شهر A برگردد که از جاده‌هایی که در مسیر رفت از آن‌ها تردد کرده است، عبور نکند؟

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow B, B \rightarrow A \\ 5 \times 3 \times 2 \times 4 = 120$$

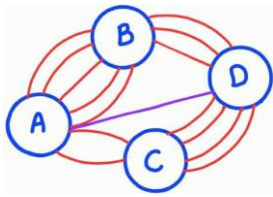
ت) از همان جاده‌ای که در مسیر رفت از B به C رفته بود، برگردد ولی از جاده‌ای که در مسیر رفت بین A و B تردد کرده است، استفاده نکند.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow B, B \rightarrow A \\ 5 \times 3 \times 1 \times 4 = 60$$

اصل جمع:

اگر عملی به روش‌های مختلفی قابل انجام باشد که در مفهوم آن عبارت ((یا)) نهفته باشد، از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به بیان دیگر اگر عملی به m روش ((یا)) به طریقی دیگر به n روش قابل انجام باشد، کل عمل به $m + n$ روش قابل انجام خواهد بود.

مثال: اگر شخصی بخواهد از شهر A به شهر D سفر کند و تعداد مسیرهای موجود در این سفر به شکل زیر باشد، به چند طریق می‌تواند از شهر A به شهر D برود؟



$$A \rightarrow B \rightarrow D \text{ یا } A \rightarrow C \rightarrow D \text{ یا } A \rightarrow D$$

$$5 \times 3 + 2 \times 4 + 1$$

$$15 + 8 + 1 = 24 \text{ حالت}$$

مثال: با حروف کلمه pencil چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که تکرار حروف جایز نباشد.

Pencil

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

تذکره: در مسائل در صورتی که قید نشود، حروف بدون تکرار در نظر گرفته می‌شوند و اعداد با تکرار در نظر گرفته می‌شوند.

مثال: چند عدد چهار رقمی با ارقام زوج می‌توان تولید کرد؟

تکرار جایز نباشد، اولیت بندی داریم

$$\frac{4}{\text{غیاز صفر}} \times \frac{5}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{5}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{5}{\text{اولیت ۲}} = 500$$

تذکره: در مسائل ساخت کلمه و عدد، ابتدا به سراغ خانه‌ی شرط رفته و اگر برای یک عدد دو شرط (بیش از یک شرط) اعمال شود، از اصل جمع استفاده می‌کنیم. مثلاً در ساخت عدد زوج، اگر رقم صفر مدنظر طراح باشد، این رقم در خانه‌ی سمت چپ نمی‌تواند قرار گیرد (شرط اول) و از سویی دیگر، رقم صفر اگر در سمت راست قرار گیرد، عدد زوج می‌سازد (شرط دوم)، یکی از محدودیت‌ها را در چند حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم مثلاً اینکه عدد با رقم صفر زوج شود یا با رقم غیر صفر، جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد سه رقمی زوج در دو حالت تکرار مجاز و تکرار غیرمجاز اعداد می‌توان ساخت؟

تکرار مجاز نباشد:

تکرار مجاز باشد: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷

$$\frac{7}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{7}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{3}{\text{اولیت ۲}} = 147$$

$$\frac{5}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{6}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{3}{\text{اولیت ۲}} = 90$$

اعدادی که هم‌زمان تکراری دارند: $147 - 90 = 57$ اصل مستقیم

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد سه رقمی زوج در دو حالت تکرار مجاز و تکرار غیرمجاز اعداد می‌توان ساخت؟

تکرار مجاز نباشد:

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

تکرار مجاز باشد:

عدد با صفر در مکان زوج شود:

$$\frac{7}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{6}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{1}{\text{اولیت ۱}} = 42$$

(یا)

عدد بدون صفر در مکان زوج شود:

$$\frac{6}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{6}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{3}{\text{اولیت ۲}} = 108$$

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

$$\frac{7}{\text{صفر نیاید}} \times \frac{8}{\text{اولیت ۲}} \times \frac{4}{\text{اولیت ۲}} = 224$$

تکلیف: با ارقام فرد چند عدد ۴ رقمی متمایز بزرگتر از ۳۰۰۰ می توان نوشت؟

تکراری نداریم دانسته باشیم



$$\frac{4}{\geq 3} \times \frac{5}{3,5,7,9} \times \frac{5}{3,5,7,9} \times \frac{5}{3,5,7,9} = 500$$

تکلیف: با ارقام متمایز، چند عدد ۳ رقمی بین ۴۰۰ و ۸۰۰ می توان نوشت؟

رقم یکان، رقم دهگان، رقم صدگان



$$\frac{4}{\text{اولیت ۱}} \times \frac{9}{4 \leq x < 8} \times \frac{8}{4,5,6,7} = 288$$

(عدد)

متغیر
تکرار ارقام مجاز نباشد.

نکته: اگر عملی به n روش قابل انجام باشد و بخواهیم k مرتبه این آزمایش را تکرار کنیم، کل حالات ممکن برای انجام

این عمل برابر است با: n^k

با این تفاسیر:

تعداد حالات ممکن برای پرتاب k بار یک سکه برابر است با: 2^k

تعداد حالات ممکن در جنسیت نوزادان یک خانواده k فرزندی برابر است با: 2^k

تعداد حالات ممکن در پرتاب k بار یک تاس برابر است با: 6^k

مثال: ۷ نفر وارد شهری می شوند که در آن ۵ هتل وجود دارد. این ۷ نفر به چند طریق می توانند در هتل ها اقامت کنند؟

$$\text{هتلی، د، ... د، هی د، ادلی} \\ 5 \times 5 \times \dots \times 5 = 5^7$$

مثال: از میان ۴ کتاب ریاضی، ۵ کتاب فیزیک و ۳ کتاب شیمی، به چند طریق می توان ۲ کتاب با زمینه های مختلف

علمی انتخاب کرد؟

$$1 \text{ ف دایش یا ۱ ر دایش یا ۱ ا ر دایش} \\ 5 \times 4 + 3 \times 4 + 3 \times 5 = 20 + 12 + 15 = 47$$

مثال: با حروف کلمه pencil چند کلمه ی چهار حرفی می توان ساخت به طوری که:

الف) با حرف p شروع شود.

ب) با حرف n شروع شده و شامل حرف l نباشد.

$$\frac{1}{\text{اولیت ۱ اینجا p است}} \times \frac{5}{\text{اولیت ۱ اینجا n است}} \times \frac{4}{\text{اولیت ۱ اینجا p است}} \times \frac{3}{\text{اولیت ۱ اینجا p است}} = 60$$

p e n c i l

$$\frac{1}{\text{اولیت ۱ اینجا n است}} \times \frac{4}{\text{اولیت ۱ اینجا n است}} \times \frac{3}{\text{اولیت ۱ اینجا n است}} \times \frac{2}{\text{اولیت ۱ اینجا n است}} = 24$$

فاکتوریل:

حاصلضرب اعداد از ۱ تا n را، n فاکتوریل گویند و با نماد $n!$ نمایش می‌دهند.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3!$$

فاکتوریل اعداد زیر را باید حفظ باشیم.

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720$$

نکته: در ساده کردن عبارات شامل فاکتوریل، عبارت فاکتوریل را تا جایی که نیاز است بسط می‌دهیم (باز می‌کنیم).

$$n! = n(n-1)!$$

$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

$$5! = (5)(4!)$$

$$5! = (5)(4)(3!)$$

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

مثال: عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1) = n^2 + n$$

مثال: مقدار x را بیابید.

$$(x-4)! = 120 \Rightarrow (x-4)! = 5! \Rightarrow x-4 = 5 \Rightarrow x = 9$$

مثال: مقدار n را بیابید.

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 20 \Rightarrow (n-1)(n-2) = 20$$

$$5 \times 4 = 20 \Rightarrow n = 6$$

جایگشت n شیء متمایز (n شیء، n جایگاه)

به تعداد حالت‌های ترتیب قرارگیری n شیء متمایز (در n جایگاه) در کنار یکدیگر، جایگشت آن n شیء گویند و آن را

$$P_n = n! \quad \text{جایگشت } n \text{ شیء متمایز}$$

با نماد P_n نمایش می‌دهند که برابر است با: $n!$

مثال: با حروف a, b, c, d, e چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

$$P_5 = 5! = 120$$

۵ حرف ۵ جایگاه

مثال: ۵ نفر در یک مسابقه‌ی دو و میدانی، به چند طریق می‌توانند از خط پایان عبور کنند به طوری که هیچ دو نفری با

هم از خط پایان مسابقه نگذرند؟

$$P_5 = 5! = 120$$

مثال: ۷ نفر می‌خواهند سخنرانی کنند، به چند طریق عرفان از معین زودتر سخنرانی خواهد کرد؟

$$P_7 = 7! = 5040 \quad \text{حالت}$$

$$\frac{5040}{2} = \frac{7!}{2} = 2520$$

عرفان زودتر از معین سخنرانی کند نصف حالات

قرارگیری یکی در میان:

الف) اعضای دو دسته برابرند: $n! \times n! \times 2!$

ب) یک دسته n عضو و دیگری $n+1$ عضو دارد: $(n+1)! \times n!$

مثال: با ارقام ۱ تا ۹، چند عدد ۹ رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که ارقام یکی در میان زوج و فرد باشند؟

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{۴ تا زوج (n)} \\ \text{۵ تا فرد (n+1)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{باید با فرد شروع کنیم}} 5! \times 4! = 5 \times 4! \times 4! = 5 \times (4!)^2 = \underbrace{5 \times 5!}_{4!} \times 4! = 4! \times 5!$$

مثال: ۵ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را چگونه می توان یکی در میان در کنار هم در یک قفسه قرار داد؟

$$5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$$

مثال: ۴ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را چگونه می توان یکی در میان در کنار هم در یک قفسه قرار داد؟

$$4! \times 4! \times 2 = 24 \times 24 \times 2 = 1152$$

جایگشت n شیء غیر متمایز (n شیء با تکرار، n جایگاه) - جایگشت با تکرار

اگر بخواهیم n شیء را که n_1 تای آن شبیه هم، n_2 تای آن شبیه هم، ... و n_k تای آن شبیه هم باشد، کنار هم و در یک ردیف قرار دهیم، به طوری که: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

$$BANANA : \frac{6!}{2! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3!} = 60$$

a a b b

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$$

مثال: با حروف a, a, b, b چند کلمه ی چهار حرفی می توان نوشت؟

aabb, abab, baba
bbaa, abba, baab

مثال: با حروف a, a, b, b, c, c, c چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت؟

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 3!} = 210$$

مثال: با ارقام ۲، ۲، ۳، ۳، ۰، ۵ رقمی فرد می توان نوشت؟

۲ ۲ ۳ ۳ ۰

$$\frac{3}{2!} \times \frac{3}{2!} \times \frac{2}{1!} \times \frac{1}{1!} \times \frac{2}{3!} = 36$$

اولیت ۲
صفر نیاید
اردیت ۱

$$\frac{36}{2! \times 2!} = 9$$

تکلیف: با ارقام ۷،۶،۰،۰،۰ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟



مثال: با ارقام ۱،۳،۳،۵،۵،۵ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟

دسته بندی کردن (تشکیل Box)

اگر بخواهیم در جایگشت n شیء، تعدادی عضو همواره کنار هم باشند، آن ها را یک دسته (Box) در نظر گرفته، جایگشت این Box را (بعنوان یک شیء) با اعضای باقی مانده در نظر گرفته و در جایگشت تعداد اعضای داخل بسته ضرب می کنیم.

مثال: به چند طریق می توان ۵ دانش آموز ریاضی و ۵ دانش آموز تجربی را در یک ردیف قرار داد به طوری که :
(الف) دانش آموزان ریاضی کنار هم و دانش آموزان تجربی نیز کنار هم باشند.

(ب) فقط دانش آموزان ریاضی کنار هم باشند.

(پ) دانش آموزان بصورت یکی در میان قرار گرفته باشند.

تکلیف: ۵ دانش آموز کلاس اول و ۳ دانش آموز کلاس دوم در یک صف ایستاده اند. تعداد حالتی را بیابید که نفرات اول و آخر صف، کلاس اولی باشند.



مثال: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی $SYSTEM$ که S ها کنار هم نباشند را بیابید.

تکلیف: با ارقام $۰, ۵, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۶, ۸$ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان نوشت؟



جایگشت n شیء متمایز دور میزگرد

اگر بخواهیم n شیء متمایز (در n جایگاه) دور میز گردی قرار گیرند، تعداد حالات ممکن برابر است با: $(n - ۱)!$

اگر جهت دور زدن اهمیت نداشته باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با: $\frac{(n - ۱)!}{۲}$

مثال: ۴ نفر به چند طریق دور یک میز گرد می‌نشینند؟

مثال: اگر قرار باشد ۷ نفر دور یک میز بنشینند، تعداد حالاتی را بیابید که :
الف) نفر A کنار B و C بنشیند.

ب) نفرات A, B و C کنار هم بنشینند.

تکلیف: ۴ مرد و ۳ زن به چند طریق می‌توانند دور یک میزگرد کنار هم بنشینند به طوری که زن‌ها همواره کنار هم باشند؟



ترتیب و ترکیب:

اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم، از فرمول‌های ترتیب و ترکیب استفاده می‌کنیم. در فرمول ترکیب فقط انتخاب انجام می‌شود و جایگشت اشیاء انتخاب شده، مورد محاسبه قرار نمی‌گیرد و یا به عبارت دیگر، جابجایی اعضا برای ما اهمیتی نداشته و حالت جدیدی تولید نمی‌کند ولی در ترتیب، همانطور که از اسم آن برمی‌آید، ترتیب قرارگیری اشیاء انتخاب شده برای ما اهمیت داشته و با جابجایی آن‌ها حالت جدیدی که مدنظر مسئله است، تولید می‌شود.

$$P_r^n = P(n, r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_r^n = C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$$P(n, r) = C(n, r) \times r!$$

تذکر: معمولاً در محاسبات گزینشی در کنکور، ما با ترتیب کار نداریم و گزینش اعضا را با ترکیب انجام می‌دهیم و در صورتی که جابجایی اعضا مدنظر ما بوده و حالت جدیدی تولید کند، جمله‌ی جایگشت $r!$ را خودمان منظور کرده و در پاسخ سؤال ضرب می‌کنیم.

فرمول‌های مهم ترکیب عبارتند از:

$$\boxed{1} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\boxed{5} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\boxed{2} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\boxed{6} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\boxed{3} \quad \binom{n}{2} = \frac{(n)(n-1)}{2}$$

$$\boxed{7} \quad \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$$\boxed{4} \quad \binom{n}{3} = \frac{(n)(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\boxed{8} \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

مثال: به چند طریق می‌توان از یک گروه ۷ نفره، ۳ نفر را برای یک شورا انتخاب کرد به طوری که: الف) یکی رئیس، یکی نایب رئیس و دیگری منشی شوند.

ب) یک شورای سه نفره گزینش شود.

مثال: از بین ۸ دانش آموز تجربی و ۴ دانش آموز ریاضی به چند طریق می توان :
الف) یک گروه ۳ نفره تشکیل داد؟

ب) یک گروه ۵ نفره شامل ۳ دانش آموز تجربی و ۲ دانش آموز ریاضی تشکیل داد؟

پ) یک گروه ۳ نفره شامل حداقل دو دانش آموز ریاضی تشکیل داد؟

ت) یک گروه ۳ نفره شامل حداکثر ۲ دانش آموز ریاضی تشکیل داد.

تکلیف: درون کیسه ای ۵ مهره ی قرمز، ۳ مهره ی آبی و ۴ مهره ی سبز داریم. به چند طریق می توان سه مهره ی هم رنگ از درون کیسه خارج کرد؟



مثال: به چند طریق می توان ۶ نفر را از میان جمعی ۱۵ نفره انتخاب کرد به طوری که:
الف) شامل اشخاص a و b باشد.

ب) شامل اشخاص c, d و e نباشد.

پ) شامل اشخاص a و b بوده و شامل اشخاص c, d و e نباشد.

مثال: از میان ۵ جفت کفش، ۴ لنگه به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست تعداد حالاتی که:
الف) هیچ دوتایی متعلق به یک جفت نباشد.

ب) دقیقاً یک جفت در بین آن ها موجود باشد.

نکته: در مسائلی که عنوان می شود تعدادی عنصر کنار هم نباشند به طریق زیر عمل می کنیم.

(۱) عناصری که قرار است کنار هم نباشند را کنار گذاشته و بقیه ی عناصر را با جایگشت های متفاوت کنار هم در نظر می گیریم.

(۲) از مکان ها و جاهای به وجود آمده از چیدمان بقیه ی حروف، به تعداد عناصری که نمی خواهند کنار هم باشند، انتخاب می کنیم.

(۳) این عناصر را در مکان های انتخابی مرتب می کنیم.

تذکر: از روش متمم در محاسبه ی قرار نگرفتن ۲ شیء در کنار هم استفاده می کنیم ولی برای بیش از ۲ شیء روش مناسبی نیست و به ۳ مرحله ی ذکر شده عمل می کنیم.

مثال: به چند طریق می توان با حروف a, a, b, c, c, d, e یک کلمه ی ۷ حرفی ساخت که b, d, e کنار هم نباشند.

تکلیف: به چند طریق می توان ۵ زن و ۸ مرد را در یک ردیف مرتب نمود به طوری که هیچ دو زنی کنار هم نباشند.



تکلیف: اگر $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 6$ حاصل $\binom{n}{2}$ را بیابید.



تکلیف: مقدار n را از معادله ی $\binom{18}{n} = \binom{18}{2n-3}$ بیابید.



تکلیف: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\binom{15}{4} + \binom{15}{5} + \binom{16}{6} + \binom{17}{10} =$$



نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{r}$

نکته: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر است با: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های مَحْض (خالص) یک مجموعه (به جز خود مجموعه) برابر است با: $2^n - 1$

تکلیف: اگر به یک مجموعه‌ی n عضوی، ۲ عضو اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۹۲ واحد افزوده می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی این مجموعه را بیابید.



کاربرد تبدیل:

تبدیل (ترتیب) دو جا اهمیت دارد:

۱) سؤالی که در آن، معادله‌ی تبدیل باشد.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = 26$$

۲) زمانی که ضرب تعدادی عدد طبیعی متوالی را داشته باشیم که یکی یکی کم شده‌اند ولی به ۲ نمی‌رسند.

$$10 \times 9 \times 8 = P(10, 3)$$

مثال: احتمال آن که در یک کلاس ۲۵ نفری، هیچ دو نفری در یک روز از سال متولد نشده باشند را بیابید.

احتمال

پدیده تصادفی: آزمایشی که قبل از انجام، نتیجه آن مشخص نیست، ولی همه‌ی حالت‌های مختلف برای نتیجه‌ی آزمایش مشخص باشد، یک پدیده تصادفی (آزمایش تصادفی) می‌گویند.

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن برای نتیجه‌ی یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

فضای نمونه‌ای بر دو نوع گسسته (قابل شمارش) و پیوسته (غیرقابل شمارش) تقسیم بندی می‌شود.
برآمد: هر عضو فضای نمونه‌ای را یک برآمد گوئیم.

پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد گوئیم.

احتمال مقدماتی: فرض می‌کنیم A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته و هم‌شانس S باشد. احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

احتمال قطعی (حتمی): پیشامدی را که به طور قطع رخ خواهد داد و احتمال وقوع آن ۱۰۰ درصد است، احتمال قطعی می‌گویند و در این حالت، پیشامد همان فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی است.

احتمال غیرممکن: پیشامدی را که احتمال وقوع آن صفر درصد باشد و امکان ندارد که به وقوع بپیوندد، احتمال غیرممکن می‌گویند و در این حالت پیشامد همان مجموعه‌ی تهی می‌باشد.

$$P(S) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

اعمال روی پیشامدها:

(۱) متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضا باشد، متمم پیشامد A را با A' یا $\bar{A}$ یا A^c نمایش می‌دهیم و بدین معنی است که: ((رخ ندهد))

(۲) اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $A \cup B$ به این معنی است که: ((یا A یا B رخ دهد))

تذکر: حداقل یکی از دو پیشامد، به معنی $A \cup B$ است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(۳) اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $A \cap B$ به این معنی است که: ((هر دو A و B رخ دهند))

(۴) تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $A - B$ به این معنی است که: $((A$ رخ دهد ولی B رخ ندهند))

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$$

$$P(A - B) = P(A \cap B')$$

(۵) پیشامد آن که از A و B دقیقاً یکی رخ دهد:

$$P(A \Delta B) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

(۶) پیشامد آن که نه A رخ دهد و نه B :

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

(۷) پیشامد آن که از A و B حداکثر یکی رخ دهد (هر دو باهم، رخ ندهند):

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$

مثال: سکه‌ای را ۲۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم، پیشامد A که در آن حداقل ۲ بار رو در آزمایش حاصل شود، چند عضو دارد؟

مثال: در پرتاب دو تاس، A پیشامد آن است که مجموع اعداد دو تاس فرد باشد و B پیشامد آن است که حداقل یکی از دو تاس ۴ باشد. پیشامد آن که دقیقاً یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، چند عضو دارد؟

مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر مضرب ۳ بیاید، ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم و در غیر اینصورت، ۲ تاس دیگر را پرتاب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بیابید.

تکلیف: در پرتاب ۳ سکه، احتمال آن که دقیقاً دو بار ((رو)) بیاید را محاسبه نمایید.



مثال: کیسه‌ای شامل ۶ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سبز است. ۲ مهره به تصادف و همزمان از داخل این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:
الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) هر دو مهره هم‌رنگ باشند.

پ) مهره‌ها هم‌رنگ نباشند.

مثال: دو تاس را با هم به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که عدد رو شده‌ی هر دو تاس، زوج باشد.

تکلیف: کیسه‌ای شامل ۶ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی است. ۲ مهره به طور همزمان از داخل کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که هر دو مهره قرمز باشند؟



اگر خارج کردن بصورت متوالی و با جایگذاری انجام شود، احتمال آن که هر دو مهره قرمز باشد چقدر است؟

اگر خارج شدن مهره‌ها به صورت متوالی و بدون جایگذاری باشد، احتمال آن که هر دو مهره قرمز باشد را بیابید.

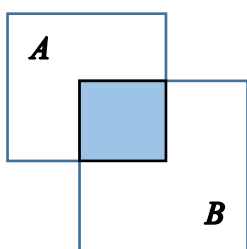
تکلیف: خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است. احتمال آن را بیابید که این خانواده دارای ۴ فرزند پسر باشد.



مثال: ظرفی شامل ۴ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی زرد است. مهره‌ای از ظرف انتخاب کرده و بدون آن که به رنگ آن نگاه کنیم، آن را کنار می‌گذاریم. مهره‌ی دیگری را از داخل ظرف خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این مهره سبز باشد؟

مثال: ظرفی شامل ۶ مهره‌ی آبی، ۵ مهره‌ی قرمز و ۷ مهره‌ی سبز است. مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم و بدون آن که به آن نگاه کنیم، به ما می‌گویند که آبی نیست. چقدر احتمال دارد این مهره قرمز باشد؟

مثال: شخصی به سمت یک تخته مطابق شکل مقابل شلیک می‌کند. احتمال زدن حداقل یکی از دو ناحیه 0.7 و احتمال زدن ناحیه‌ی مشترک، 0.4 است. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال آن که:
الف) حداقل یکی از دو ناحیه‌ی A و B را بزند.



ب) دقیقاً یکی از دو ناحیه‌ی A و B را بزند.

پ) نه ناحیه‌ی A را بزند و نه ناحیه‌ی B را بزند.

تکلیف: دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا اعداد رو شده زوج باشد را بیابید.





تکلیف: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که مجموع اعداد ظاهر شده بیشتر از ۴ باشد.

مثال: احتمال آن که علی تیری را به هدف بزند، $\frac{1}{4}$ و محمد و علی هر دو به هدف بزنند، $\frac{1}{5}$ است. احتمال آن را بیابید که علی به هدف بزند ولی محمد نزند.

دو پیشامد ناسازگار:

دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هر گاه نتوانند با هم رخ دهند یعنی:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

تعمیم پیشامدهای ناسازگار:

اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

مثال: در جامعه‌ای درصد نوع گروه خونی به صورت زیر است.

$$45\% = O, \quad 7\% = AB, \quad 10\% = B, \quad 38\% = A$$

مجروحی به بیمارستانی از این جامعه منتقل می‌شود. احتمال آن را بیابید که گروه خونی فرد مورد نظر از نوع A ، B یا O باشد.

نکته: اگر $P(A) + P(B) \geq 1$ باشد، حتماً A و B ناسازگارند.

دو پیشامد مستقل:

دو پیشامد A و B را مستقل گویند هر گاه رخ دادن یکی، روی وقوع یا عدم وقوع دیگری تاثیری ندارد.

قانون ضرب احتمالات در دو پیشامد مستقل:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، متمم‌های آن‌ها نیز مستقل هستند.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

$$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

تذکر: برای آن که RH خون فردی منفی باشد، لازم است دو ژن منفی داشته باشد.

مثال: اگر ۳۰٪ ژن‌های تعیین کننده‌ی عامل RH خون منفی باشد، احتمال آن که فردی دارای RH منفی باشد را بیابید.

مثال: اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین کننده‌ی عامل RH خون منفی باشد، احتمال آن که در خانواده‌ای، اولین فرزند با RH منفی، فرزند سوم خانواده باشد، چقدر است؟

تکلیف: احتمال آن که علی تیری را به هدف بزند، $\frac{1}{4}$ و احتمال آن که محمد تیری را به هدف بزند، $\frac{1}{3}$ است. احتمال آن را بیابید که حداقل یکی از این دو نفر تیر خود را به هدف بزنند، چقدر است؟



مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. احتمال آن که فرزندان این خانواده از نظر جنسیت، یکی در میان پسر و دختر باشند را بیابید.

مثال: احتمال قبول شدن سه نفر A و B و C ، به ترتیب $0/8$ ، $0/6$ و $0/5$ است. احتمال آن که حداقل یکی از این سه نفر قبول شوند را بیابید.

نکته: اگر سه پیشامد A و B و C مستقل باشند:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \times P(C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \times P(C)$$

نکته: تهی و فضای نمونه‌ای با هر پیشامدی مستقل می‌باشند.

$$P(S \cap A) = P(S) \times P(A)$$

$$P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) \times P(A)$$

نکته: اگر پیشامدی با خودش مستقل باشد، آن گاه یا تهی است یا برابر خود فضای نمونه‌ای.

$$P(A \cap A) = P(A) \Rightarrow P(A) \times P(A) = P(A) \Rightarrow P(A)(P(A) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \\ P(A) = 1 \Rightarrow A = S \end{cases}$$

نکته: با توجه به وابسته یا مستقل بودن دو پیشامد و سازگار یا ناسازگار بودن دو پیشامد، چهار حالت برای دو پیشامد رخ می‌دهد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \\ P(B) = 0 \Rightarrow B = \emptyset \end{cases}$$

نتیجه‌گیری: دو پیشامد مستقل غیرتهی، حتماً سازگارند.

احتمال شرطی: اگر A و B دو پیشامد باشند و $P(B) > 0$ ، در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را که با نماد $P(A|B)$ (احتمال شرطی A به شرط وقوع B) نمایش می‌دهند، برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

مثال: در آزمایشگاهی ۵ موش سیاه و ۴ موش سفید داریم. قبلاً موش سفیدی برای آزمایش انتخاب کرده‌ایم. اگر بخواهیم آزمایش را برای یک موش دیگر که آزمایش روی آن انجام نشده است انجام دهیم، چقدر احتمال دارد که موش دوم نیز سفید باشد؟

مثال: کارمندان شرکتی مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد، چقدر است؟

	زن	مرد
تحصیلات دانشگاهی	۲۰	۲۵
تحصیلات کمتر از دانشگاهی	۹۰	۱۰۰

تکلیف: خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. اگر بدانیم فرزند آخر پسر است، احتمال آن که خانواده دارای ۲ پسر باشد را بیابید.



تکلیف: تاسی را می‌اندازیم و می‌دانیم برآمد زوج است. احتمال آن که شماره‌ی ۲ یا ۶ ظاهر شود، چقدر است؟



نکته:

$$P(A | B) = 1$$

$$P(A | S) = P(A)$$

$$P(A | A \cap B) = 1$$

$$P(\emptyset | B) = 0$$

$$P(S | A) = 1$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(B | A) = 1$$

$$P(A' | A) = 0$$

$$P(A \cup B | A) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(B | A) = P(A | B) = 0$$

نکته:

$$P(A' | B) = 1 - P(A | B)$$

تکلیف: عدد طبیعی و نابیشتر از ۱۰۰ را انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده مضرب ۴ نباشد ولی بدانیم مضرب ۶ است، چقدر است؟



قانون ضرب احتمالات:

$$P(A \cap B) = P(B | A) \times P(A)$$

$$P(B \cap A) = P(A | B) \times P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C | A \cap B) \times P(B | A) \times P(A)$$

تکلیف: دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که مهره اول سفید و دومی سیاه باشد.



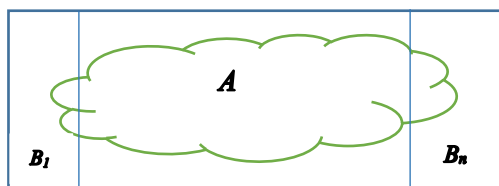
تکلیف: در جعبه‌ای ۱۰ سیب سالم و ۶ سیب خراب قرار دارد. از این جعبه ۳ سیب متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. مطلوبست محاسبه‌ی احتمال آن که اولی و دومی سالم و سومی خراب باشد.



مثال: اگر بدانیم $P(A | B) = ۰/۶$ و $P(B) = ۰/۴$ و $P(B | A) = ۰/۵$ ، آن‌گاه $P(A)$ را بیابید.

مثال: احتمال آن که شخصی در عملی زنده بماند ۰/۷ و احتمال آن که در دوران نقاهت بعد از عمل زنده بماند ۰/۸ است. احتمال آن که این شخص سالم بیمارستان را ترک کند بیابید.

قانون احتمال کل:



$$P(A) = P(A \cap S) = P\left(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)\right) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \Rightarrow$$

$$P(A) = P(A | B_1) \times P(B_1) + P(A | B_2) \times P(B_2) + \dots + P(A | B_n) \times P(B_n) \Rightarrow$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) \times P(B_i)$$

برای حل مسائلی که فضای نمونه‌ای به مجموعه‌های مختلفی افراز می‌شود که اجتماع تمامی این حالت‌ها با یکدیگر، تمامی حالت‌های مختلف ممکن برای فضای نمونه‌ای را شامل می‌شود، به جای استفاده از فرمول پیچیده‌ی فوق، از نمودار درختی بهره می‌بریم.

به این طریق که اعداد موجود برای احتمال ممکن در هر شاخه را در هم ضرب کرده و در نهایت وقتی از شاخه‌ای به شاخه‌ی دیگر می‌رویم، اعداد نظیر حاصل روی شاخه‌ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

مثال: انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۸ است. والدینی که ناقل این بیماری هستند، انتظار تولد فرزندی را دارند. مطلوبست احتمال آن که این فرزند سالم متولد شود.

تکلیف: ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ مابقی را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۸٪ زنان و ۹٪ مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟



مثال: سه ظرف همانند داریم. در ظرف اول ۲ مهره سفید و ۷ مهره سیاه، در ظرف دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و در ظرف سوم ۱ مهره سفید و ۸ مهره سیاه موجود است. ظرفی را به تصادف انتخاب و مهره‌ای را از آن برمی‌داریم. احتمال آن را بیابید که مهره انتخابی سفید باشد.

تکلیف: دو ظرف همانند داریم. در ظرف اول ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. مهره‌ای از ظرف اول به تصادف انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس از ظرف دوم مهره‌ای را انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را تعیین کنید که مهره انتخاب شده از ظرف دوم سفید باشد.



آمار و مدل سازی

اندازه گیری و مدل سازی

آمار: علم جمع آوری اطلاعات، خلاصه کردن، طبقه بندی کردن و نمایش داده های عددی و تجزیه و تحلیل و استخراج نتایج را آمار می گویند.

اندازه گیری: تخصیص معیار عددی به یک صفت را اندازه گیری گویند. اندازه گیری اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی می باشد.

مدل سازی: بیان مسئله به زبان ریاضی را مدل سازی ریاضی می گوئیم. هرچقدر مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده تر و ابتدایی تر و نتیجه به پدیده ی مورد نظر نزدیک تر باشد، مدل سازی با ارزش تر است.

جامعه و نمونه

جامعه: مجموعه ای از افراد یا اشیاء که در مورد آن ها می خواهیم موضوع یا موضوعاتی را بررسی نماییم، جامعه می نامند.

اندازه ی جامعه: به تعداد اعضای جامعه ی آماری، اندازه ی جامعه می گویند.

سرشماری: اگر تمام افراد یک جامعه ی آماری را برای بررسی یک یا چند موضوع یا صفت مورد بررسی قرار دهیم، سرشماری کرده ایم.

مشکلات سرشماری:

(۱) در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه ی آماری

(۲) وقت گیر بودن دسترسی به تمام اعضای جامعه ی آماری

(۳) هزینه ی بالای بررسی تمام اعضای جامعه ی آماری

(۴) از بین رفتن اعضای جامعه ی آماری در برخی از مطالعات

نمونه: زیرمجموعه ای از جامعه ی آماری که بیان کننده ی ویژگی های جامعه ی آماری باشد را نمونه می گویند که معمولاً به علت مشکلات نامبرده شده ی فوق در سرشماری، نمونه گیری انجام می دهند.

تذکر: نمونه گیری مهم ترین بخش آمار است.

خواص نمونه: برای آن که نمونه بیان گر خصوصیات تمام جامعه باشد، باید به اندازه ی کافی بزرگ باشد. همچنین اعضای نمونه باید بصورت تصادفی انتخاب گردند یعنی انتخاب اعضای نمونه، از قانون یا قاعده ی خاصی پیروی نکند و تمامی اعضای جامعه شانس انتخاب شدن برای نمونه ی مورد نظر را داشته باشند. هرچقدر جامعه ی آماری بزرگ تر باشد، نمونه ی منتخب نیز باید بزرگ تر باشد تا بتواند بیان گر تمامی خصوصیات جامعه ی آماری باشد.

اندازه ی نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه ی نمونه می نامند.

نمونه ی تصادفی: به زیرمجموعه ای از جامعه ی آماری که دارای خصوصیات زیر باشد، نمونه ی تصادفی می گویند:

(۱) هر یک از اعضای جامعه ی آماری امکان انتخاب شدن برای نمونه ی مورد نظر را داشته باشد.

(۲) قبل از انتخاب نمونه ی مورد نظر، نتوانیم در مورد وجود یا عدم وجود هر کدام از اعضای جامعه ی آماری اظهار نظر

نماییم.

مشاهدات آماری: جمع‌آوری اطلاعات مربوط به صفت متغیر اعضای جامعه‌ی آماری را مشاهدات آماری گویند.
داده: نتایج حاصل از اندازه‌گیری یا بررسی نمونه را داده می‌گویند.

روش‌های جمع‌آوری داده‌های آماری:

- (۱) از طریق پرسش که به‌صورت پرسش شفاهی (مصاحبه) یا پرسش کتبی انجام می‌گیرد.
 - (۲) از طریق مشاهده و ثبت وقایع
 - (۳) از طریق آزمایش
 - (۴) از طریق داده‌های از پیش تعیین شده
- تذکر: مهم‌ترین عواملی که باید در طراحی پرسش‌نامه کتبی (که بر مصاحبه ارجحیت دارد) مدنظر قرار گیرد، عبارتند از:
- (۱) هدف از پرسش‌نامه تعیین شود.
 - (۲) محتوای پرسش‌نامه سازماندهی شود.
 - (۳) فقط اطلاعات مورد نیاز جمع‌آوری شود.
 - (۴) از سؤالات هدایت‌کننده در طرح پرسش‌نامه پرهیز شود.
 - (۵) در انتها از پاسخ‌دهنده تشکر شود.

متغیر تصادفی

متغیر تصادفی: موضوعاتی را که روی نمونه‌ی مورد بررسی از جامعه‌ی آماری مورد مطالعه قرار می‌گیرد، متغیر تصادفی نامند. متغیر تصادفی از نمونه‌ای به نمونه‌ی دیگر تغییر می‌کند چون خواص اعضای نمونه از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند.

انواع متغیر تصادفی:

- (۱) **متغیر تصادفی کمی:** متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری باشند، کمی می‌نامند که بر دو نوع پیوسته و گسسته می‌باشد.
متغیر تصادفی کمی پیوسته: اگر متغیری بتواند بین دو عدد مشخص، هر عددی را (حتی اعشاری) اختیار کند، به آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گویند که برای مثال می‌توان به زمان، طول یا وزن اشاره کرد.
متغیر تصادفی کمی گسسته: متغیری را که قابلیت شمارش داشته باشد، متغیر تصادفی کمی گسسته می‌نامند مانند تعداد.
- (۲) **متغیر تصادفی کیفی:** متغیرهای تصادفی که قابلیت اندازه‌گیری نداشته باشند، متغیرهای تصادفی کیفی می‌گویند.
این متغیرها بر دو نوع اسمی و ترتیبی می‌باشند.
متغیر تصادفی کیفی ترتیبی: متغیرهای کیفی هستند که ترتیب طبیعی بین حالت‌های مختلف آن وجود دارد، مانند مراحل مختلف سن از کودکی تا کهن‌سالی یا مراحل مدارج تحصیلی از دوران ابتدایی تا دکتری.
متغیر تصادفی کیفی اسمی: متغیری که ترتیبی نباشد، اسمی می‌گویند مانند انواع گروه خونی یا رنگ چشم افراد.

شاخص‌های مرکزی

شاخص‌های عددی: شاخص‌هایی را که تمرکز یا پراکندگی داده‌ها را نمایش می‌دهند، شاخص‌های عددی نامند.
شاخص مرکزی: شاخص‌هایی هستند که محل تمرکز داده‌های آماری را نشان می‌دهند و عبارتند از مد، میانه و میانگین.
مد (X): به داده‌ای که بیشترین فراوانی (تکرار داده‌ی آماری) را دارد، مد می‌گویند.
 مثال: در داده‌های آماری زیر مد را بیابید.

۱-۵-۲-۴-۷-۲-۱-۳-۵-۴-۱-۲-۱

میانه (X): داده‌ای را که نیمی از داده‌های آماری از آن بیشتر و نیمی دیگر از آن کمتر می‌باشند، میانه می‌نامند. برای محاسبه‌ی میانه، اگر تعداد داده‌های آماری فرد باشد، عدد وسط میانه را مشخص می‌کند و اگر تعداد داده‌های آماری زوج باشد، میانگین دو داده‌ی وسطی، همان میانه است.
 مثال: میانه‌ی داده‌های آماری زیر را بیابید.

۴-۵-۲-۷-۱۲-۴-۵-۷-۸-۶-۳

مثال: میانه‌ی داده‌های آماری زیر را بیابید.

۱۲-۵-۷-۱۱-۵-۸-۳-۴-۹-۱۰-۴-۶

تکلیف: میانه‌ی اعداد طبیعی فرد کمتر از ۱۰۰ را بیابید.



تذکر: میانه‌ی داده‌های آماری می‌تواند جزو داده‌های آماری نباشد (در حالتی که تعداد داده‌های آماری زوج باشد)
تذکر: اگر همه‌ی داده‌های آماری در عددی ضرب شوند، یا با عددی جمع و تفریق شوند، میانه نیز در آن عدد ضرب شده یا با عدد مورد نظر جمع و تفریق می‌شود.

میانگین ($\bar{X}$): برای محاسبه‌ی میانگین داده‌های آماری، تمامی داده‌ها را با یکدیگر جمع کرده و حاصل به‌دست آمده را بر تعداد کل داده‌های آماری تقسیم می‌کنیم.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

تذکر: اگر همه‌ی داده‌های آماری در عددی ضرب شوند، یا با عددی جمع و تفریق شوند، میانگین نیز در آن عدد ضرب شده یا با عدد مورد نظر جمع و تفریق می‌شود.

نکته: اگر داده‌های آماری به صورت یک دنباله‌ی حسابی باشند، میانگین از نصف مجموع جملات اول و آخر به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

نکته: اگر n_1 داده با میانگین $\bar{x}_1$ ، n_2 عدد با میانگین $\bar{x}_2$ و ... مفروض باشند، میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

تذکر: اگر تمامی داده‌های آماری با هم برابر باشند، میانگین داده‌های آماری برابر یکی از داده‌ها می‌باشد.

مثال: اگر میانگین اعداد $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ باشد، میانگین اعداد $2x_1 + 3, 2x_2 + 3, \dots, 2x_{20} + 3$ را بیابید.

مثال: میانگین اعداد $4, 8, 12, \dots, 84$ زیر را بیابید.

مثال: میانگین درصد ۱۰ دانش‌آموز برابر ۵۸ و میانین درصد ۱۵ دانش‌آموز دیگر برابر ۶۵ است. میانگین درصد کل دانش‌آموزان را بیابید.

تکلیف: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۵ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $2x_1 + 1, 2x_2 + 3, \dots, 2x_n + 39$ را بیابید.



میانگین وزنی: اگر داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ دارای ضرایب $w_1, w_2, \dots, w_n$ باشد، میانگین کل با احتساب ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: میانگین وزن دار جدول فراوانی زیر را بیابید.

۲۰	۱۵	۱۰	۵	داده
۷	۶	۳	۲	وزن

محاسبه‌ی سریع میانگین:

ابتدا میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را حدس می‌زنیم (y). میانگین تخمینی را از تک تک داده‌ها کم می‌کنیم. برای اعداد به‌دست آمده میانگینی محاسبه کرده و به عدد مورد نظر، میانگین تخمینی را می‌افزاییم.

$$A = \frac{(x_1 - y) + (x_2 - y) + \dots + (x_n - y)}{n}$$

$$\bar{x} = A + y$$

مثال: نمرات دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است. میانگین نمرات را بیابید.

۱۴-۱۳-۱۸-۱۷-۱۶-۱۵

شاخص‌های پراکندگی

شاخص‌هایی که نحوه‌ی تجمع داده‌های آماری را حول شاخص‌های مرکزی نمایش می‌دهند، شاخص‌های پراکندگی می‌نامند. شاخص‌های پراکندگی عبارتند از: دامنه‌ی تغییرات، انحراف از میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات. **دامنه‌ی تغییرات:** اختلاف بین بزرگ‌ترین داده‌ی آماری و کوچک‌ترین داده‌ی آماری را دامنه‌ی تغییرات می‌نامند.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

تذکر: اگر داده‌های آماری در عددی ضرب شوند، دامنه‌ی تغییرات در قدرمطلق آن عدد ضرب می‌شود.

تذکر: اگر داده‌های آماری با عددی جمع شوند، دامنه‌ی تغییرات ثابت می‌ماند.

مثال: اگر دامنه‌ی تغییرات داده‌های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر با ۳۰ باشد، دامنه‌ی تغییرات داده‌های آماری زیر را بیابید.

$$\frac{x_1}{6} - 3, \frac{x_2}{6} - 3, \dots, \frac{x_n}{6} - 3$$

مثال: اگر دامنه‌ی تغییرات داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_7, 5$ برابر صفر باشد، میانگین و مد و میانه‌ی داده‌های مورد نظر را بیابید.

چارک‌ها:

چارک اول: میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌های آماری (داده‌هایی که از میانه کمتر می‌باشند) را چارک اول می‌نامند.

چارک دوم: میانه‌ی داده‌های آماری همان چارک دوم است.

چارک سوم: میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌های آماری (داده‌هایی که از میانه بیشتر می‌باشند) را چارک سوم می‌نامند.

مثال: در داده‌های آماری زیر، چارک اول، دوم و سوم را بیابید.

۵-۴-۵-۶-۷-۱۰-۹-۸-۸

نمودار جعبه‌ای: نموداری که به شکل زیر حاوی ۵ زیر باشد، نمودار جعبه‌ای می‌نامند.

۱- کوچکترین داده (a) - ۲- چارک اول (Q_1) - ۳- چارک دوم (میانه Q_2) - ۴- چارک اول (Q_1) - ۵- بزرگترین داده (b)

نکته: اختلاف چارک اول و سوم در یک نمودار جعبه‌ای را طول جعبه ($Q_3 - Q_1$) می‌نامند.

دامنه‌ی میان‌چارکی (دامنه‌ی تغییر چارک‌ها): اختلاف بین چارک اول و سوم (طول جعبه) را دامنه‌ی میان‌چارکی نامند.

$$\text{دامنه‌ی میان‌چارکی} = Q_3 - Q_1$$

نکته: دامنه‌ی تغییرات فقط بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌های آماری را مشخص می‌کند و نحوه‌ی توزیع داده‌ها را بین این دو مقدار مشخص نمی‌کند، لذا معیار مناسبی برای نحوه‌ی توزیع داده‌های آماری نمی‌باشد.

واریانس (پراش - σ^2): میانگین مجذور انحراف معیار از میانگین را واریانس می‌نامند و از فرمول زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

نکته: از فرمول دوم زمانی استفاده می‌کنیم که مجموع مربعات داده‌ها در صورت سؤال مطرح گردد.

محاسبه‌ی واریانس در جدول فراوانی: اگر مرکز دسته‌ها را با x_i و فراوانی دسته‌ها را با f_i نمایش دهیم، واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{\sum f_i = n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum f_i = n} - \bar{x}^2$$

مثال: واریانس داده‌های ۱، ۴، ۷، ۸ را بیابید.

مثال: اگر واریانس ۵ عدد برابر ۱۴ بوده و $\sum_{i=1}^n x_i^2 = ۳۹۰$ ، میانگین اعداد را بیابید.

تکلیف: اگر مجموع مربعات ۱۰ داده‌ی آماری برابر ۲۰۰ و مجموع این ۱۰ داده برابر ۴۰ باشد، واریانس داده‌ها را بیابید.



تذکر: اگر واریانس داده‌ها به صفر نزدیک‌تر شود یعنی پراکندگی داده‌ها کمتر بوده و داده‌ها به میانگین نزدیک‌تر هستند.

تذکر: در صورتی که داده‌ها برابر باشند، واریانس صفر بوده و بالعکس.

تذکر: اگر به تمام داده‌های آماری عددی اضافه و یا کم شود، واریانس تغییری نخواهد کرد و در صورتی که داده‌های آماری

در عددی ضرب شوند، واریانس در مربع همان عدد ضرب خواهد شد.

تذکر: اگر n داده‌ی آماری تشکیل تصاعدی عددی با قدرنسبت d بدهند، واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{(n^2 - 1)}{12} \times d^2$$

مثال: اگر واریانس داده‌های آماری ۵، X_1 ، X_2 ، $\dots$ ، X_{19} برابر صفر باشد، جمع این داده‌ی آماری را بیابید.

مثال: اگر $y = 3x + 10$ و واریانس x برابر با ۱۰ باشد، واریانس y را بیابید.

تکلیف: اگر واریانس داده‌های X_1 ، X_2 ، $\dots$ ، X_n برابر ۲۰ باشد، واریانس داده‌های زیر را بیابید.

$$\frac{1}{4}X_1 + 2, \frac{1}{4}X_2 + 2, \dots, \frac{1}{4}X_n + 2$$



تکلیف: واریانس داده‌های آماری زیر را بیابید.

$$4, 8, 12, 16, 20$$



مثال: واریانس داده‌های جدول مقابل را بیابید.

X_i	۱	۳	۵	۷
f_i	۱	۲	۹	۴

انحراف معیار (σ): جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامیم.

مثال: مجموع مربعات ۱۰ داده‌ی آماری برابر ۹۶/۴ و میانگین آن‌ها ۳ می‌باشد. انحراف معیار این ۱۰ داده را بیابید.

تذکر: اگر به تمام داده‌های آماری عددی اضافه و یا کم شود، انحراف معیار تغییری نخواهد کرد و در صورتی که داده‌های آماری در عددی ضرب شوند، انحراف معیار در قدرمطلق همان عدد ضرب خواهد شد.

تذکر: در صورتی که داده‌ها برابر باشند، انحراف معیار صفر بوده و بالعکس.

مثال: اگر انحراف معیار مقادیر ۱۶، X_1 ، X_2 ، $\dots$ ، X_n برابر صفر باشد، میانگین داده‌های زیر را بیابید.

$$3X_1 - 1, 3X_2 - 1, \dots, 3X_n - 1$$

ضریب تغییرات: ضریب تغییرات تنها شاخص پراکندگی است که واحد ندارد و آن را با نماد CV نمایش می‌دهند. این شاخص از تقسیم انحراف معیار بر میانگین داده‌های آماری به دست می‌آید.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

مثال: ضریب تغییرات داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را بیابید.

تذکر: اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند، ضریب تغییرات صفر است و بالعکس.

تذکر: اگر تمامی داده‌های آماری در عددی ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییری نمی‌کند.

تذکر: اگر به همه‌ی داده‌های آماری عدد مثبتی را اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید نسبت به ضریب تغییرات داده‌های قبلی کاهش یافته و همچنین اگر به همه‌ی داده‌های آماری عددی منفی را اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید نسبت به ضریب تغییرات داده‌های قبلی افزایش می‌یابد.

مثال: اگر در جامعه‌ی آماری X ، $\bar{X} = 35$ و $\sigma_X = 5$ باشد، ضریب تغییرات Y که بر طبق رابطه‌ی $Y = 2X - 20$ ، از X تبعیت می‌کند را بیابید.

تکلیف: اگر میانگین داده‌های آماری $X_1, X_2, \dots, X_n$ برابر ۴ و انحراف معیار آن‌ها برابر با $0/8$ باشد، ضریب تغییرات داده‌های آماری $1 + 2X_1, 1 + 2X_2, \dots, 1 + 2X_n$ را بیابید.



مثال: در ۵۰ داده‌ی آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۱۰۰ و مجموع مجذورات داده‌ها برابر ۲۵۰ است. ضریب تغییرات این داده‌های آماری را بیابید.

تکلیف: واریانس ۱۱ داده‌ی آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ به این داده‌ها اضافه شوند، میانگین داده‌ها تغییری نمی‌کند. انحراف معیار ۱۴ داده‌ی آماری حاصل را بیابید.

