

کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده



حد و پیوستگی

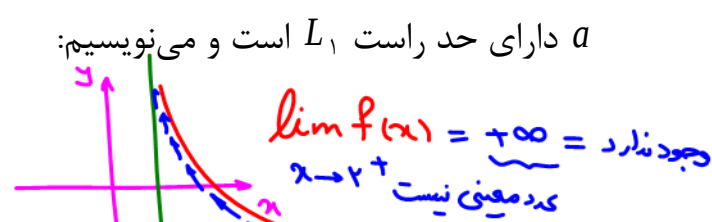
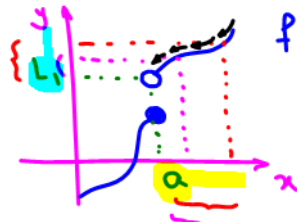
حد

تابع حقیقی $f(x)$ را در بازه‌ی I که شامل a باشد، در نظر می‌گیریم. تابع $f(x)$ می‌تواند در خود a تعریف شده نباشد.

تعریف حد راست: هر گاه بتوانیم هر چقدر که بخواهیم تابع $f(x)$ را به عدد حقیقی L_1 نزدیک کنیم، به شرط آن که متغیر x به اندازه‌ی کافی از سمت راست به عدد a نزدیک شود، می‌گوییم تابع $f(x)$ در

a دارای حد راست L_1 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$



تعریف حد چپ: هر گاه بتوانیم هر چقدر که بخواهیم تابع $f(x)$ را به عدد حقیقی L_2 نزدیک کنیم، به شرط آن که متغیر x به اندازه‌ی کافی از سمت چپ به عدد a نزدیک شود، می‌گوییم تابع $f(x)$ در

a دارای حد چپ L_2 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$



تذکر: وقتی تابع $f(x)$ به صورت بی‌کران بزرگ یا کوچک شود ($+\infty$ یا $-\infty$)، حدهای راست و چپ موجود نمی‌باشند.

تعریف حد: اگر نقاط اطراف a جزو دامنه‌ی تابع باشد و بتوانیم هر چقدر که می‌خواهیم به نقطه‌ی a نزدیک شویم و در این صورت تابع $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شود، می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a دارای حد L است و می‌گوییم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

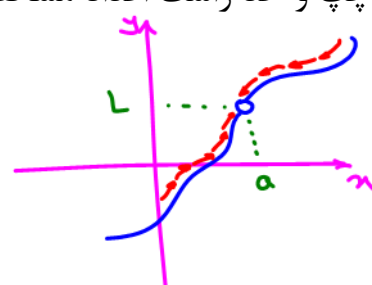
تذکر (نقطه‌ی میانی): اگر نقطه‌ی a جزو نقاط میانی دامنه باشد، یعنی در هر دو سمت نقطه‌ی a مسیری برای نزدیک شدن به نقطه‌ی a وجود داشته باشد، در این صورت: حد در صورتی موجود است که حد چپ و حد راست اعداد مشخص و معینی شده و با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

$$\xrightarrow{L_1 = L_2} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

نقطه‌ی واحدی

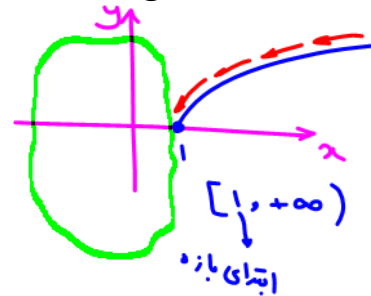


تذکر (نقطه‌ی ابتدایی): اگر نقطه‌ی a یک نقطه‌ی ابتدایی از دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد (فقط در سمت راست نقطه‌ی a مسیری برای نزدیک شدن به نقطه‌ی a وجود داشته باشد)، در صورتی که حد راست تابع وجود داشته باشد نیز تابع فاقد حد است زیرا تابع حد چپ ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{1^+-1} = \sqrt{0^+} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} = \sqrt{1^--1} = \sqrt{0^-} \notin \mathbb{R}; \quad 1^- \notin D_f$$

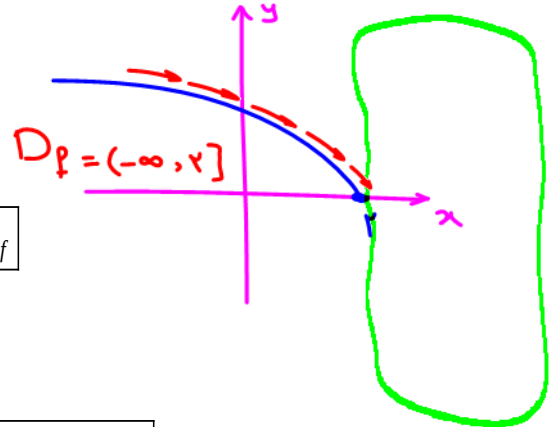


تذکر (نقطه‌ی انتهایی): اگر نقطه‌ی a یک نقطه‌ی انتهایی از دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد (فقط در سمت چپ نقطه‌ی a مسیری برای نزدیک شدن به نقطه‌ی a وجود داشته باشد)، در صورتی که حد چپ تابع وجود داشته باشد نیز تابع فاقد حد است زیرا تابع حد راست ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = \sqrt{2-2^-} = \sqrt{0^+} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x} = \sqrt{2-2^+} = \sqrt{0^-} \notin \mathbb{R}; \quad 2^+ \notin D_f$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{[3^-]-3} = \frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{[3^+]-3} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}; \quad 3^+ \notin D_f$$

$$f(x) = \frac{1}{[x]-3} \quad [x]=3 \rightarrow 3 \leq x < 4 \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{[4^-]-3} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0}$$

نکته: در تعاریف حد، با دو مقدار ε (اپسیلن) و δ (دلتا) مواجه می‌شویم که منظور از آن‌ها مقادیر بسیار کوچک (نزدیک به صفر) و مثبت می‌باشد.

$$0 < \delta, \quad \varepsilon \ll 1$$

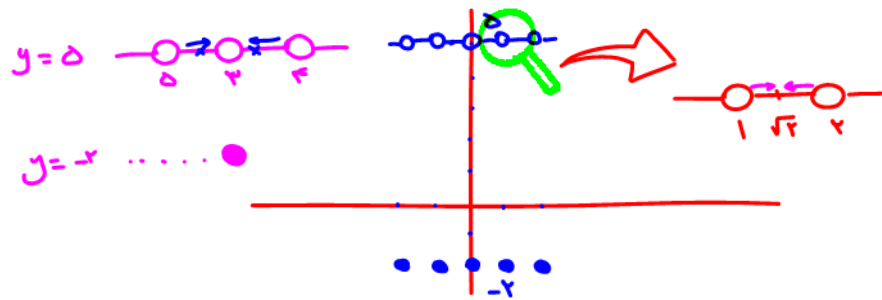
مفهوم میل کردن: وقتی می‌گوییم متغیر x به عدد a میل کرده است و با نماد $x \rightarrow a$ نمایش می‌دهیم، منظور این است که از دو سمت (مقادیر بیشتر از a از سمت راست و مقادیر کمتر از a از سمت چپ) متغیر x به عدد a نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه به عدد a نمی‌رسد.

$$x \rightarrow a \Rightarrow x \in (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 5 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \text{صفر}$$

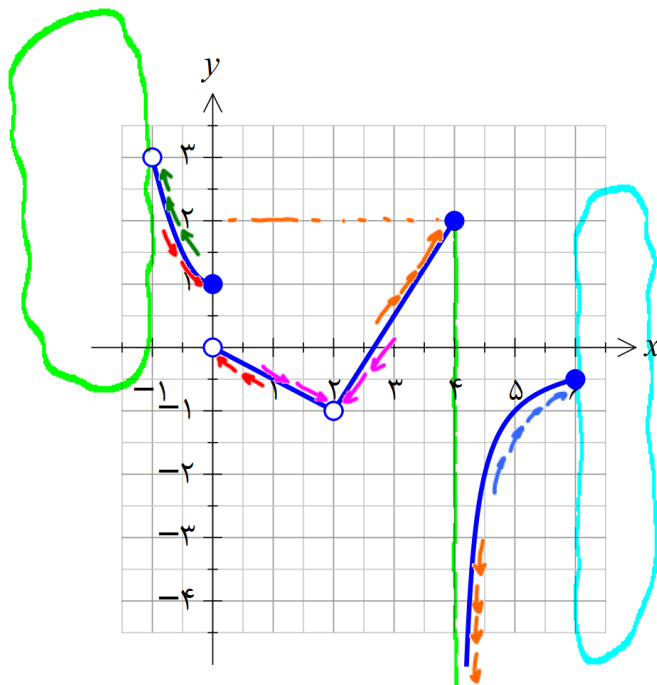


محاسبه‌ی حد از روی نمودار:

برای محاسبه‌ی حد راست، از مسیر سمت راست تابع (در صورت وجود) به سمت نقطه‌ی حدی نزدیک می‌شویم و زمانی که به نقطه‌ی مورد نظر رسیدیم، مقدار y نقطه‌ی مورد نظر را به عنوان حد راست معرفی می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی حد چپ، از مسیر سمت چپ تابع (در صورت وجود) به سمت نقطه‌ی حدی نزدیک می‌شویم و زمانی که به نقطه‌ی مورد نظر رسیدیم، مقدار y نقطه‌ی مورد نظر را به عنوان حد چپ معرفی می‌کنیم.

مثال: حد تابع $f(x)$ که نمودار آن در شکل مقابل ترسیم گردیده است را در نقاط با طول‌های $x = -1, 0, 2, 4, 6$ بیابید.



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

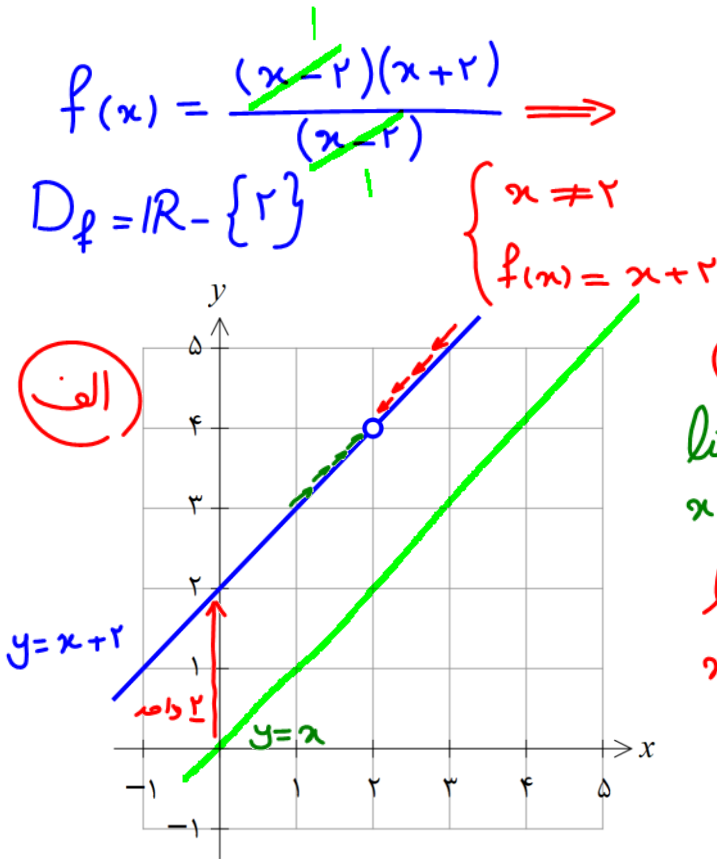
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مثال: تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را در نظر بگیرید.

الف) تابع مورد نظر را رسم نمایید.

ب) آیا تابع مورد نظر در نقطه‌ی $x = 2$ حد دارد؟



ب

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

مثال: با توجه به شکل مقابل، موارد خواسته شده را بنویسید.

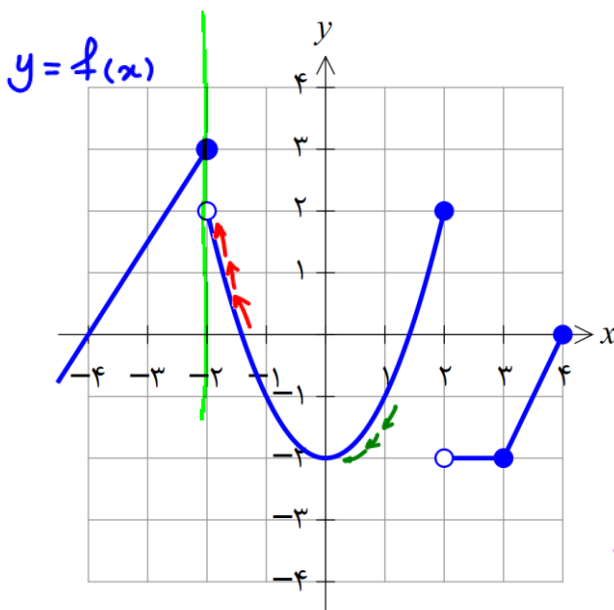
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x) = f(-1.9) = f(-2^+) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 2$

$x \rightarrow 2^-$
 $x = 1.9$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x+2)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2)$



ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$

$x \rightarrow (-2)^+$
 $x = -1.99$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 2$

$x \rightarrow 0^-$
 $x = -0.1$

مواردی که باید حدود چپ و راست به طور جداگانه محاسبه شوند

۱- حد در نقاط ابتدا یا انتهای بازه:

در نقاط ابتدا یا انتهای بازه، از آنجایی که از یک طرف نمی توان حد را مورد محاسبه قرار داد، مقدار حد تابع حتی در صورتی که حد یک طرفه ی آن (سمتی که جزو دامنه ی تابع می باشد) موجود باشد، ناموجود است.

تذکر: حدود یک طرفه معمولاً در دو مورد تولید می شوند:

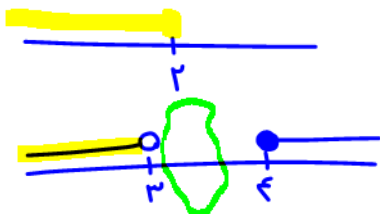
الف) توابع رادیکالی فرجه ی زوج که در عدد حدی، عبارت زیر رادیکال صفر شود.

ب) توابع به فرم جزء صحیح که مخرج در عدد حدی، صفر مطلق شود.

مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه ی $x=2$ دارای حد است؟

$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_f = (-\infty, 2]$$



$$[x] - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$[x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

مخرج را منفی کن.

$$D_f = \mathbb{R} - [3, 4) \Rightarrow$$

$$D_f = (-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x} &= \text{وجود ندارد} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: آیا تابع $f(x) = \frac{1}{[x] - 3}$ در نقطه ی $x=3$ دارای حد است؟

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x] - 3} = \frac{1}{[3^-] - 3} = \frac{1}{2-3} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

۲- حد توابع کسری اگر نقطه ی حدی ریشه ی ساده ی مخرج باشد:

اگر نقطه ی حدی داده شده، فقط مخرج کسر را صفر کند و این ریشه از نوع ریشه ی ساده باشد، باید حد

راست و چپ به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند. $\frac{3}{0^+} = \frac{3}{0.000...1} = \frac{3}{1.000...0} = \frac{3}{1.000...0} = 3.000...0 = +\infty$ (تأصغر ۱.۰۰ تا صفر ۱.۰۰)

مثال: حد تابع $f(x) = 3^{x-2}$ را وقتی که $x \rightarrow 2$ بیابید.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} 3^{\frac{3}{x-2}} &= 3^{\frac{3}{2^- - 2}} = 3^{\frac{3}{0^-}} = 3^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 3^{\frac{3}{x-2}} &= 3^{\frac{3}{2^+ - 2}} = 3^{\frac{3}{0^+}} = 3^{+\infty} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: آیا تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ در نقطه‌ی $x = 1$ دارای حد است؟



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(\underbrace{1^- - 1}_{0^-})^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(\underbrace{1^+ - 1}_{0^+})^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۳- توابع شامل قدرمطلق:

اگر عدد حدی ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدرمطلق باشد (عدد حدی عبارت داخل قدرمطلق را صفر کند) باید حدود چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

نکته: در موارد فوق باید عبارت داخل قدرمطلق را در طرفین عدد حدی (a^- و a^+) تعیین علامت کنیم.

مثال: آیا تابع $f(x) = 2 + \frac{x-3}{|x-3|}$ در نقطه‌ی $x = 3$ حد دارد؟

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \frac{x-3}{|x-3|} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \frac{\cancel{x-3}}{-\cancel{(x-3)}} = 2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 + \frac{x-3}{|x-3|} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 + \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}} = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} 2 + \frac{x-3}{|x-3|} \text{ وجود ندارد}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ را وقتی $x \rightarrow 2$ بیابید.

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{(x-2)^2}} \Rightarrow$$



$$\left(f(x) = \frac{2(x-1)^2}{|x-2|} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)^2}{\underbrace{|x-2|}_{0^\pm} = 0^\pm} = \frac{+2}{0^\pm} = +\infty \text{ وجود ندارد}$$

نیاز نیست چپ و راستی را بررسی کنیم. $x=2$ ریشه مضاعف منخرج است.

۴- توابع چند ضابطه‌ای:

اگر نقطه‌ی حدی همان نقطه‌ی تغییر ضابطه‌ی تابع باشد، از آنجایی که ضابطه‌ی تابع در طرفین نقطه‌ی حدی عوض شده است، باید حدود چپ و راست جداگانه محاسبه شوند.

مثال: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ 3x - 3 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ دارای حد است؟

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 3) &= 3(1) - 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x) &= (1)^2 - 2(1) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & x \geq 2 \\ ax - b & x < 2 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $3a - 2b$ را طوری بیابید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 &\rightarrow 2a - b = 1 \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 &\rightarrow 4a + 2b + 2 = 4 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = 1 \quad (+) \\ \hline 3a - 2b &= \frac{3}{2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ b &= 0 \end{aligned}$$

گنگ و گویا

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ مفروض است. این تابع در کدامیک از نقاط زیر حد دارد؟

الف) $x = 0$ (ب) $x = \frac{\pi}{2}$ (ج) $x = \frac{2\pi}{3}$ (د) $x = \frac{\pi}{6}$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$

۵- حد توابع جزء صحیح:

معرفی جزء صحیح: اگر هر عدد حقیقی a را به صورت $a = n + p$ بنویسیم که در آن n قسمت صحیح عدد بوده و p قسمت اعشاری مثبت عدد باشد، آن گاه جزء صحیح عدد a که با نماد $[a]$ معرفی می گردد برابر است با:

$$a = n + p \xrightarrow{p \geq 0} [a] = n$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$x \notin \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n < x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow [x + n] = [x] + n$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فرضی

$$0 \leq nx - [nx] < 1$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

در مواردی که عدد حدی عبارت داخل جزء صحیح را عددی صحیح نکند، نیازی به محاسبه‌ی حدود چپ و راست نداریم ولی اگر عدد حدی، حاصل عبارت داخل جزء صحیح را عددی صحیح کند، باید حدود چپ و راست جداگانه بررسی شوند.

مثال: حد توابع زیر را در نقاط خواسته شده بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} [x - 2] = \left[\frac{3}{2} - 2 \right] = \left[-\frac{1}{2} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{[-x+1]-2} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{[-x+1]-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$2^- \approx 1.9 \quad [-1.9+1] = [-0.9] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{[-x+1]-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{-2-2} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$2^+ \approx 2.1 \quad [-2.1+1] = [-1.1] = -2$$

$-1 \in \mathbb{Z}$

چپ دراست چپا نه صاب کنیم

تذکر: در مواردی که با اختصاص عددی تقریبی (در نزدیکی عدد حدی) به متغیر x نتوانیم حدود مقدار عبارت داخل جزء صحیح را تعیین نماییم، به روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

۱- در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ اگر حد عبارت داخل جزء صحیح به سمت عدد صحیح L برود، مقدار $f(x) - L$ را به دست آورده و آن را در اطراف $x = a$ تعیین علامت می‌نماییم.
اگر $f(x) - L < 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) < L$ بوده و $f(x) \rightarrow L^-$ می‌رود.
اگر $f(x) - L > 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) > L$ بوده و $f(x) \rightarrow L^+$ می‌رود.

۲- در موارد کسری از آنجایی که نمی‌توانیم بگوییم تأثیر عبارت صورت بیشتر بوده یا مخرج، سعی می‌کنیم که مضربی از مخرج را در عبارت صورت ایجاد کنیم و پس از تفکیک کسر به دست آمده، قسمت صحیح را از داخل جزء صحیح خارج کرده و قسمت باقیمانده را تعیین مقدار نماییم.
مثال: حدود خواسته شده‌ی زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2x + 7}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2(x+2) + 3}{(x+2)} \right] =$$

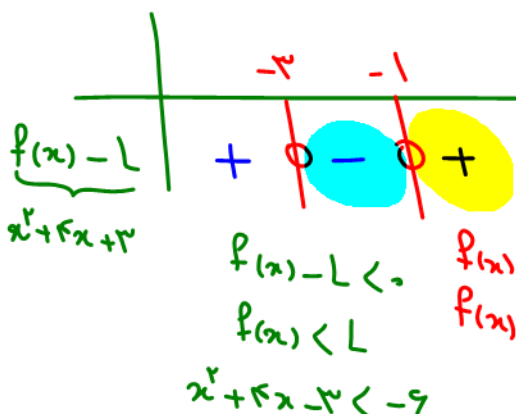
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[2 + \frac{3}{x+2} \right] = 2 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{x+2} \right] = 2 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1.99} \right] = 2$$

$$f(x) - L < 0 \Rightarrow f(x) < L \quad \text{و} \quad f(x) - L > 0 \Rightarrow f(x) > L$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2 + 4x - 3}{L = -6 \in \mathbb{Z}} \right] =$$

$$f(x) - L = x^2 + 4x - 3 - (-6)$$

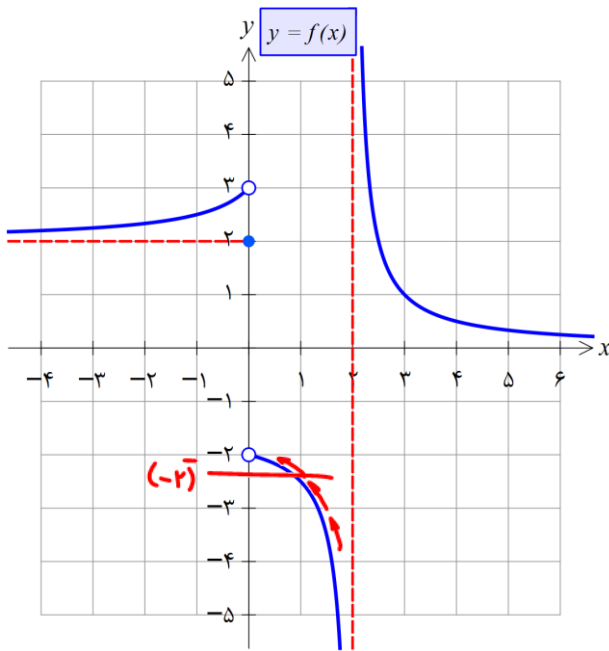
$$f(x) - L = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x^2 + 4x - 3] = [(-6)^+] = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x^2 + 4x - 3] = [(-6)^-] = -6$$

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت شکل مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 5}{2[f(x)] + 3}$ را بیابید.



$$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \neq \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \quad \star$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} 5}{2 \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^+} 3} = \frac{-2 + 5}{2[-2] + 3} = \frac{3}{-4 + 3} = \frac{3}{-1} = -3$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x + 2) \left[\frac{1}{x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x + 2) \times 0 = 0$$

$$\left[\frac{1}{-1 + 3} \right] = \left[\frac{1}{2} \right] = 0 \text{ مطلق}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - [3x]}{2|x| + [2x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|x|}{x} - \frac{[3x]}{x}}{\frac{2|x|}{x} + \frac{[2x]}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{[3x]}{x}}{2 + \frac{[2x]}{x}} = \frac{1}{2}$$



$$[3x] = [3 \times 0^+] = [0^+] = 0$$

$$[2x] = [2 \times 0^+] = [0^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 2[x]}{\sin^2 \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{\sin^2 \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{(\pi x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi^2} = \frac{3}{\pi^2}$$

$$[x] = [0^+] = [0.01] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad x \rightarrow 0 \quad \sin x \sim x$$

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sin u &\sim u \\ \tan u &\sim u \end{aligned} \right\} \text{دقت کم}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin u &\sim u - \frac{u^3}{6} \\ \tan u &\sim u + \frac{u^3}{3} \end{aligned} \right\} \text{دقت بالاتر}$$

مثال: به ازای چه مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (-3 - [x])([2x] - a)$ در $x = 0$ دارای حد است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow$$

$$(-3 - [-0])([2 \cdot 0] - a) = (-3 - [-0])([2 \cdot 0] - a)$$

$$(-3)(-1-a) = (-3)(-a) \rightarrow 3 + 3a = 3a \rightarrow a = 3$$

نکته: از آنجایی که تابع جزء صحیح در نقاط صحیح دارای حد نمی‌باشد، اگر بخواهیم تابعی به صورت $f(x) = g(x)[x]$ در نقاط صحیح دارای حد باشد، الزاماً باید در نقاط صحیح مورد نظر مقدار تابع $g(x) = 0$ برابر صفر باشد.

مثال: تابع $f(x) = (3x^2 + 7x - 10)[x]$ در چه نقاطی با طول صحیح دارای حد است؟

$$3x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$a + b + c = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-7}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$x = 1$$

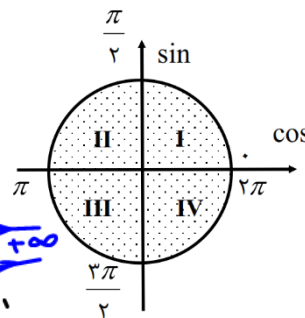
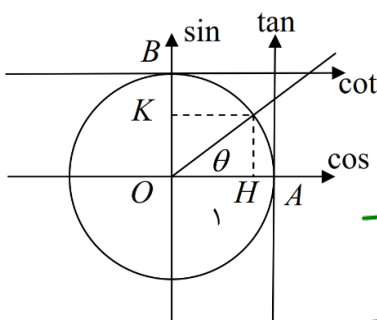
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 0 \times [1^+] = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 0 \times [1^-] = 0 \times 0 = 0$$

حد توابع مثلثاتی:

توابع سینوس و کسینوس ساده می‌باشند و حدود آن‌ها فقط با جایگذاری قابل حصول است.

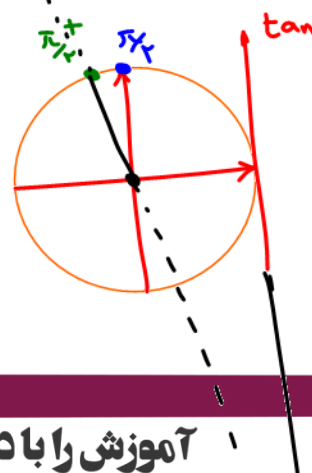
در سوی مقابل توابع تانژانت و کتانژانت، از آنجایی که یک تابع کسری می‌باشند، حتماً باید ابتدا به فرم کسری نوشته شوند و در صورتی که نقطه‌ی حدی ریشه‌ی ساده‌ی مخرج باشد، با توجه به مسیر نزدیک شدن به نقطه‌ی حدی، ابتدا باید ربع مثلثاتی مورد نظر را تعیین کرده و سپس با توجه به اعداد و علامت‌های به‌دست آمده در صورت و مخرج کسر، به محاسبه‌ی مقدار عددی حد تابع داده شده بپردازیم.



بعنوان مثال:

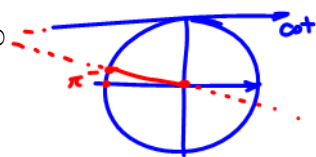
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$



نکته: در نقاط راست و چپ دایره‌ی مثلثاتی (زوایای صفر و ۱۸۰ درجه)، مقدار کتانژانت ∞ می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} \cot(\pi)^+ = +\infty \\ \cot(\pi)^- = -\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \cot(0)^+ = +\infty \\ \cot(0)^- = -\infty \end{cases}$$



نکته: در نقاط بالا و پایین دایره‌ی مثلثاتی (زوایای ۹۰ و ۲۷۰ درجه)، مقدار تانژانت ∞ می‌شود و داریم:

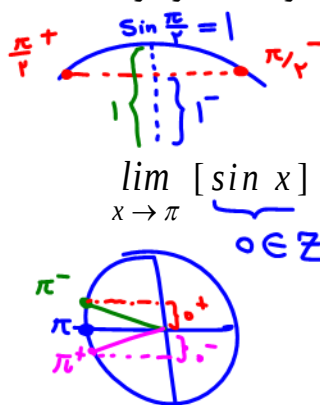
$$\begin{cases} \tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^+ = -\infty \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^- = +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = -\infty \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = +\infty \end{cases}$$

نکته: در نقاط چپ و راست، مقدار تانژانت و در نقاط بالا و پایین مقدار کتانژانت صفر می‌شوند و فقط زمانی که تابع مورد نظر در جزء صحیح یا قدر مطلق مطرح شود، علامت صفر مورد نظر (0^+ یا 0^-) اهمیت پیدا می‌کند.

همچنین در مورد مقادیر سینوس یا کسینوس، اگر تابع در جزء صحیح مطرح شود، باید به طریق ترسیمی علامت عبارت مثلثاتی مورد نظر، در ربع مورد نظر تعیین شود و سپس با توجه به علامت‌ها و اعداد موجود، پاسخ حد محاسبه گردد.

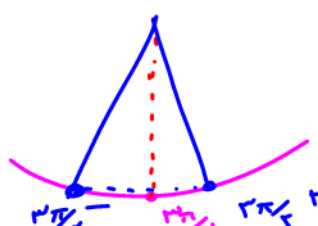
مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] = [0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x] = [0^-] = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x] = \text{وجود ندارد}$$

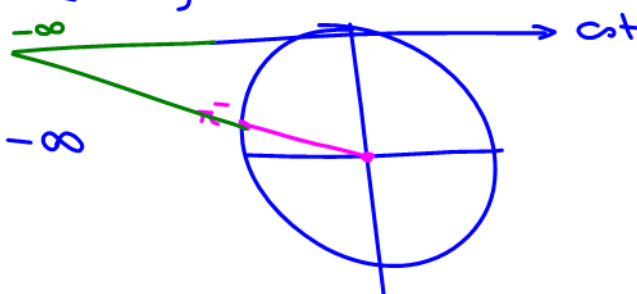


$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin x} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} \left[\frac{1}{\sin x} \right] = \left[\frac{1}{(-1)^+} \right] = \left[\frac{1}{-0.99} \right] = \left[-\frac{1.00}{.99} \right] = -2$$

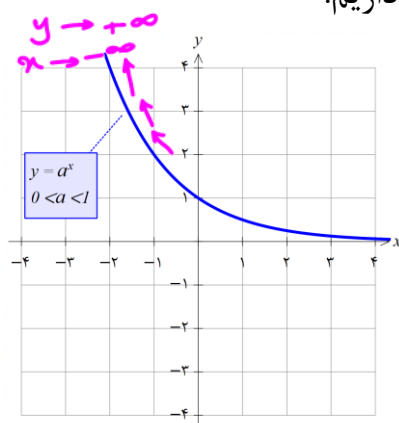


$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



حد توابع نمایی:

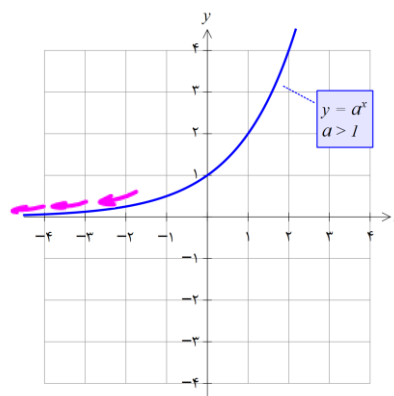
با توجه به نمودار توابع نمایی در دو حالت مختلف برای پایه‌ی تابع نمایی، داریم:



$$\text{if } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$



$$\text{if } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$$

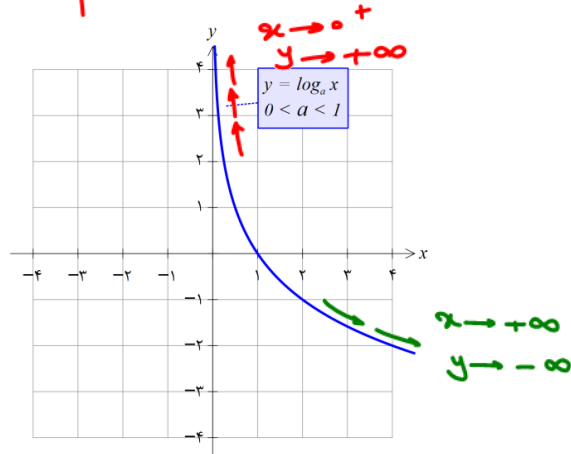
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)^x = 0$$



حد توابع لگاریتمی:

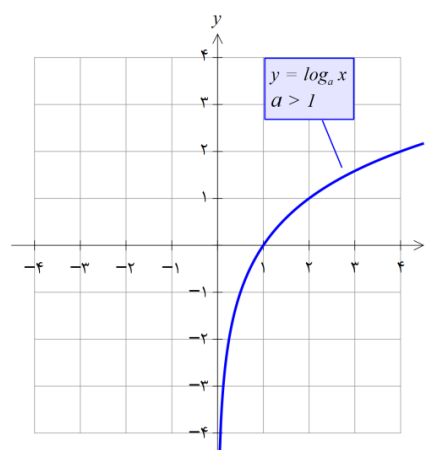
با توجه به نمودار توابع لگاریتمی در دو حالت مختلف برای پایه‌ی تابع لگاریتمی، داریم:



$$\text{if } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$



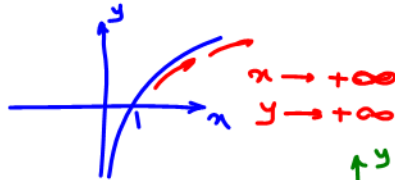
$$\text{if } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

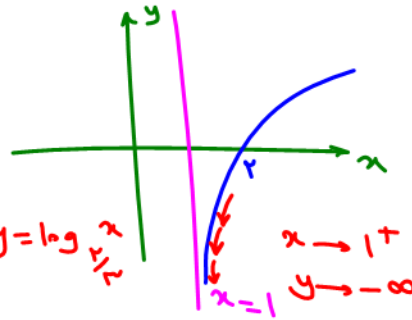
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

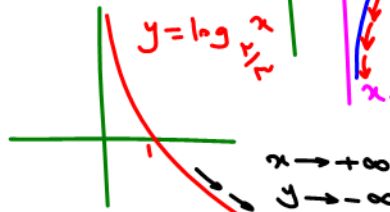
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_3(x-1) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{2}{3}} x = -\infty$$

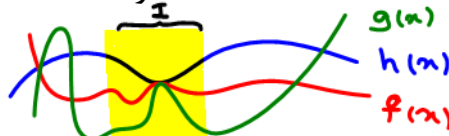


$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{2\sqrt{2}}{3}}(3x-2) = \text{وجود ندارد}$$



قضیه فشردگی:

اگر برای توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ در بازه I که شامل نقطه a باشد، به ازای هر x از بازه I مگر احتمالاً در خود نقطه a ، داشته باشیم: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



نکته: شرط $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فقط کافی است در همسایگی نقطه a برقرار باشد و نیازی نیست در کل دامنه لزوماً رابطه‌ی فوق برقرار باشد.

نکته‌ی قضیه‌ی فشردگی در توابع کران‌دار: اگر تابع $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی $x = a$ کران‌دار باشد و حد تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر صفر باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \times f(x)) = 0$$

تذکر: توابعی از جنس $\sin u$ ، $\cos u$ ، $u - [u]$ و $[u] + [-u]$ توابع کران‌دار هستند.

$$[u] + [-u] = \begin{cases} -1 & u \notin \mathbb{Z} \\ 0 & u \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \leq u - [u] < 1$$

$$u - 1 < [u] \leq u$$

$$-1 \leq \sin u < 1$$

$$-1 \leq \cos u < 1$$

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) =$$

$\underbrace{0^+ \times \text{کراندار}}_{\text{صفت حد}} = 0$

$$-1 \leq \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \leq 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^2$$

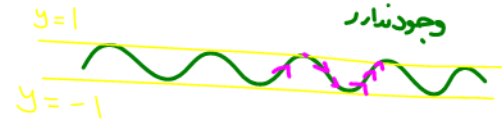
$$\underbrace{-x^2}_{\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0} \leq x^2 \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \leq \underbrace{x^2}_{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0}$$

طبق قضیه فشردگی

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad -1 \leq \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{0^+} \right) = \cos (\pm \infty)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] \right) = 1$$

طبق فشردگی

$$\frac{1}{x^2} - 1 < \left[\frac{1}{x^2} \right] \leq \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0}$$

$$\underbrace{1 - x^2}_{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2 = 1} < x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] \leq \underbrace{1}_{\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1}$$

مثال: اگر برای تابع $f(x)$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ ، آن گاه حد تابع $(f(x) - 2) \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right)$

را وقتی که $x \rightarrow 0$ بیابید.



حد بینهایت:

تابع $f(x)$ را در بازه‌ی I که شامل نقطه‌ی a باشد در نظر می‌گیریم.

حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، $+\infty$ است، در صورتی که وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، $f(x)$ از هر مقدار بسیار بزرگ مثبتی، بزرگ‌تر شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، $-\infty$ است، در صورتی که وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، $f(x)$ از هر مقدار بسیار کوچک منفی، کوچک‌تر شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{0^\pm} = \pm\infty$

$$\frac{L > 0}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{L > 0}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{L < 0}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{L < 0}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x^2 - 4} = \frac{5}{(2^+)^2 - 4} = \frac{5}{4^+ - 4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$4^+ > 4 > 4^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{(x-2)(x-3)} = \frac{5}{0^+ \times (-1)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ آن‌گاه:

برای محاسبه‌ی حدود توابع $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$ ، عدد M هیچ تأثیری بر روی مقدار بسیار بزرگ

$+\infty$ یا بسیار کوچک $-\infty$ ندارد.

$$(L) + (+\infty) = +\infty$$

$$(L) + (-\infty) = -\infty$$

برای محاسبه‌ی حدود توابع $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$ ، حاصل حد از جنس حد بینهایت می‌شود و برای

تعیین علامت بینهایت، علامت بینهایت تابع $f(x)$ را در علامت عدد M ضرب می‌کنیم.

$$(L > 0) \times (+\infty) = +\infty$$

$$(L > 0) \times (-\infty) = -\infty$$

$$(L < 0) \times (-\infty) = +\infty$$

$$(L < 0) \times (+\infty) = -\infty$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{x^2-9} = \frac{3-4}{(3^+)^2-9} = \frac{-1}{9^+-9} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{2(2)}{(2^-)^2-4} = \frac{4}{4^--4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3)^2+2(3)-1}{\underbrace{(x-3)}_{\substack{3^--3 \\ (0^-) \times \sqrt{\quad} = 0^-}} \underbrace{(x+4)}_{\sqrt{\quad}}} = \frac{14}{0^-} = -\infty$$

انواع صفر

۱- صفر مطلق: صفر مطلق در واقع خودِ عددِ صفر می باشد که معمولاً در توابع جزء صحیح یا توابعی به فرم $|x| \pm x$ رخ می دهد.

۲- صفر حدی: یک عدد بسیار نزدیک به عدد صفر است که به دو صورت 0^+ یا 0^- می باشد.
نکته: در مورد صفرهای مطلق و حدی به نکات زیر توجه می کنیم:

$$\frac{0}{0^\pm} = 0 \quad \text{مطلق}$$

$$\frac{0^\pm}{0^\pm} = \text{مجهول} \rightarrow \text{رفع ابهام}$$

$$\frac{0^\pm}{0} \notin \mathbb{R}$$

$$\frac{0}{0} \notin \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{[x]-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{3-3} = \frac{3^+-3}{0^-} = \frac{0^+}{0^-} = \text{تعریف نشده}$$

$[3^+] = 3$ (خدا!)

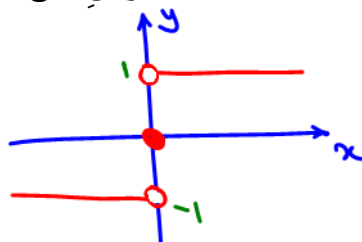
نکته ی بسیار مهم: در توابعی که شامل قدرمطلق، جزء صحیح یا تابع علامت باشند:

در مورد تابع قدرمطلق، در حوالی نقطه ی حدی، ابتدا علامت تابع قدرمطلق را مشخص می کنیم.

در مورد تابع جزء صحیح، در حوالی نقطه ی حدی، ابتدا عددِ تابع جزء صحیح را مشخص می کنیم.

در مورد تابع علامت، در حوالی نقطه ی حدی، ابتدا $+1$ یا -1 بودنِ تابع علامت را مشخص می کنیم.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{Sgn}(7) &= 1 = +1 & \text{Sgn}(-3) &= -1 \\ \text{Sgn}(2) &= 1 = +1 & \text{Sgn}(-5) &= -1 \\ \text{Sgn}(0) &= 0 \end{aligned}$$

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - [x]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 2}{x - 2} = \frac{0}{2^+ - 2} = \frac{0}{0^+} = 0$$

$[2^+] = 2$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x - |x|}{[x] - 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x - \sqrt{x^2}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x - (-x)}{-2x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x}{-2x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{0} = \frac{\sin(0^+)}{0} = \frac{0^+}{0} = \text{تعریف نشده}$$

$[x] = [(-1)^-] = [-1, 0] = -1$ ناحیه اول

$[x] = [0^+] = [0, 1] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{[\sin x]} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{-1} = \frac{\sin(\pi^+)}{-1} = \frac{0^-}{-1} = 0^+ = 0$$

یعنی اینده جواب

$$[\sin(\pi^+)] = [0^-] = -1$$

مقادیر $f(x)$ از اعداد بیشتر از صفر، به صفر نزدیک می شوند



حد در بینهایت:

حد تابع وقتی $x \rightarrow +\infty$ وقتی x به $+\infty$ میل می کند، حد تابع $f(x)$ حد حقیقی L است اگر x از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی بزرگ تر باشد، $f(x)$ به عدد حقیقی L میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ وقتی x به $-\infty$ میل می کند، حد تابع $f(x)$ حد حقیقی L است اگر x از هر عدد بسیار کوچک منفی کوچک تر باشد، $f(x)$ به عدد حقیقی L میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

تذکر: در محاسبه ی حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، جواب حد می تواند عدد حقیقی L نشده و $\pm\infty$ شود.

نکته ی عملیات دو بینهایت:

$+\infty + \infty = +\infty$	$(+\infty)(+\infty) = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$	$(-\infty)(-\infty) = +\infty$
$-\infty + \infty = \text{م}$	$(-\infty)(+\infty) = -\infty$
$+\infty - \infty = \text{م}$	$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

م به معنی مقدار نامشخص

حد توابع چندجمله‌ای در بینهایت: به طور کلی وقتی $x \rightarrow \pm \infty$ ، در محاسبه‌ی حد توابع چندجمله‌ای، فقط جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه را در محاسبه مدنظر قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a x^n + b x^{n-1} + \dots + c) \approx \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a x^n$$

نکته: در بررسی حد توابع گویا با توجه به نکته‌ی فوق، در صورت و مخرج کسر بالاترین درجه‌ی چندجمله‌ای‌ها را انتخاب کرده و در سه حالت به وجود آمده، به محاسبه‌ی حد می‌پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(a x^n + b x^{n-1} + \dots + c)}{(a' x^m + b' x^{m-1} + \dots + c')} \approx \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a x^n}{a' x^m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x^3 + 5}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3}{-x^2} = +\infty$$

$$x \cdot \sqrt[3]{x^3} = x^{1/3} \cdot x^{2/3} = x^{1/3+2/3} = x^1 = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 3x\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{4}x}{4x + 6x^2\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^{1/3}}{6x^{5/3}} = \left(\frac{-1}{2}\right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \left(\frac{-1}{2}\right)(+\infty) = -\infty$$

$$x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{1/3} = x^{2+1/3} = x^{7/3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - [3x^2]}{4 + 6x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{6x^3} = 0$$

$$\frac{a}{4(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0^+$$

$$0 \leq u - [u] < 1$$

$$اعشار \quad x = n + p, [x] = n, 0 < p < 1$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x^3 - bx^2 - \sqrt{4}}{(a+3)x^2 + x - 3} = -2$ مقدار $2a - b$ را بیابید.

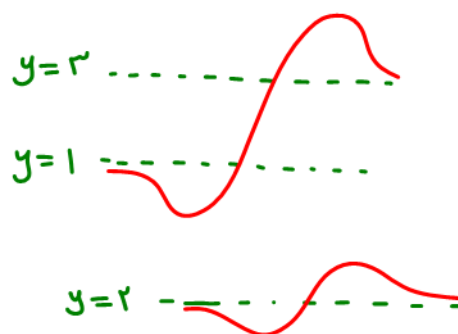
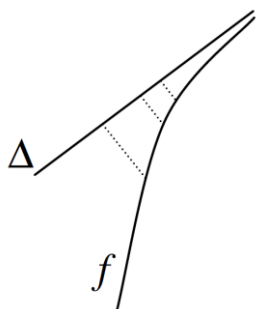
درج مخرج = درج صورت $\rightarrow$ عدد شده $\rightarrow$ ولی عدد $\rightarrow$ $\frac{3 \text{ درج}}{2 \text{ درج}} = \infty$

$\Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow 2a - b = 2(-1) - (-4) = -2$

مجانب‌ها

مجانب‌ها خطوط مستقیمی هستند که رفتار تابع در دور دست‌ها را مشخص می‌کنند. در واقع فاصله‌ی نقاط نمودار تابع از خط مجانب مانند شکل مقابل در دوردست کم و کمتر می‌شود و به صفر میل می‌کند. مجانب‌ها سه نوعند.



✓ ۱- مجانب افقی

✓ ۲- مجانب قائم

۳- مجانب مایل

مجانب افقی

خط $y = b$ را مجانب افقی تابع f گوئیم، هرگاه حداقل یکی از دو حالت زیر رخ دهد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

لذا برای به دست آوردن مجانب افقی تابع f در صورتی که دامنه‌ی آن نامحدود باشد، کافی است، حد در بینهایت را به دست آوریم. در صورتی که حاصل حد، عدد حقیقی مانند b باشد، آن‌گاه گوئیم خط $y = b$ مجانب افقی تابع f است.

نکته: توابعی که دامنه‌ی آن‌ها محدود باشد، مجانب افقی ندارند.

مثال: تابع $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ چند مجانب افقی دارد؟

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{}$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$



ندارد

مثال: مجانب‌های افقی تابع $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ را بیابید.

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1 \rightarrow y = -1$$

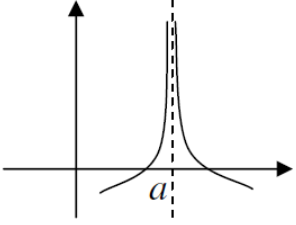
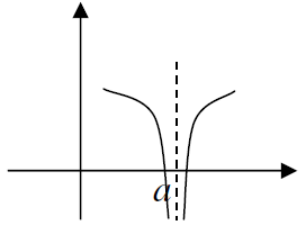
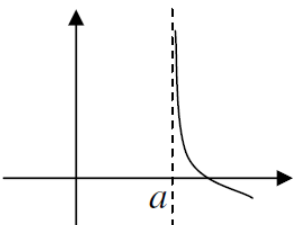
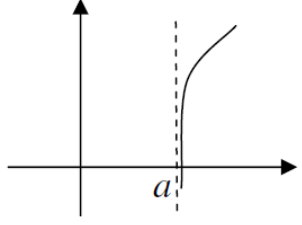
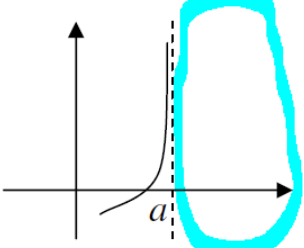
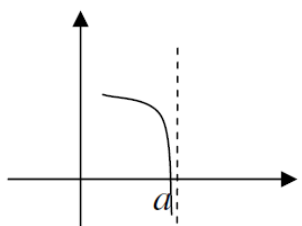
مجانب‌های افقی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = +1 \rightarrow y = +1$$



مجانِب قائم

فرض کنید که a یک عدد حقیقی باشد، آن گاه خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌گوییم، هر گاه یکی از حالات زیر برقرار باشد.

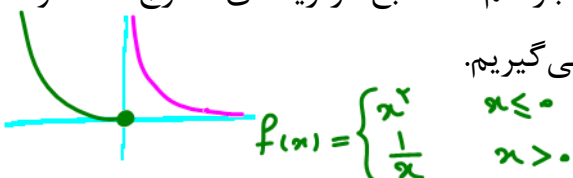
۱) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$		۲) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	
۳) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$		۴) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	
۵) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$		۶) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	

توجه: شرط اینکه خط $x = a$ مجانب قائم تابع f باشد، آن است که تابع در $x = a$ تعریف نشده بوده و وقتی که f از دو طرف و یا فقط از طرف راست و یا فقط از طرف چپ به $x = a$ میل می‌کند، $f(x)$ بی‌کران افزایش یا کاهش یابد (حالت حدی عدد تقسیم بر ~~صفر~~ ^{بی‌نهایت}). لذا مجانب قائم معمولاً در توابع کسری و یا در توابع لگاریتمی وجود دارد.

برای محاسبه‌ی مجانب قائم در توابع کسری، مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مخرج را می‌یابیم.

ریشه‌های مخرج کسر، به شرطی مجانب قائم تابع $f(x)$ هستند که صورت کسر را صفر نکنند.

نکته: اگر ریشه‌های مخرج کسر، صورت کسر را صفر کنند ولی باز هم حد تابع در ریشه‌ی مخرج $+\infty$ و یا $-\infty$ شود، خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم.



نکته: اگر برد تابع محدود باشد، تابع دارای مجانب قائم نمی‌باشد؛ مانند: توابع سینوسی و کسینوسی.

تذکر: در تعیین مجانب قائم، باید توجه داشته باشیم که $x = a$ در همسایگی دامنه‌ی تعریف تابع باشد.

از $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ حداقل یکی در دامنه‌ی تعریف تابع باشد

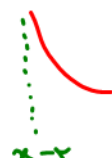
$$D_f: x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$D_f = (2, +\infty) - \{-1, 1\}$$

$$D_f = (2, +\infty) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{0^+} = \frac{4}{3} + \infty = +\infty$$

$$x=2, x=1, x=-1 \text{ غنق}$$



نتیجه: می‌توان گفت در توابع کسری که شامل عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج باشد، ریشه‌هایی از مخرج را مجانب قائم به حساب می‌آوریم که عبارت زیر رادیکال فرجه‌ی زوج را منفی نکند.

نکته: اگر ریشه‌های مخرج کسر، صورت کسر را صفر کنند ولی باز هم حد تابع در ریشه‌ی مخرج $+\infty$ یا $-\infty$ شود، خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم. یعنی می‌توانیم تابع کسری را ابتدا ساده کرده و در تابع ساده شده، اگر عددی ریشه‌ی مخرج باشد، آن عدد را بعنوان مجانب قائم نمودار در نظر می‌گیریم.

$$\text{قائم: } x^2-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0$$

$$x^2(x-1)(x+1)=0$$

مثال: تابع $y = \frac{x^2+x}{x^4-x^2}$ چند خط مجانب دارد؟

$$\text{افقی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x}{x^4-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{افقی } y=0$$

$$x=0 \text{ بیسی} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x-1)} = \pm\infty$$

$$x=-1 \text{ بیسی} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}$$

نقطه‌ی حدی (حفره): نقطه‌ای که تابع در آن تعریف نشود ولی در آن نقطه حد تابع وجود داشته باشد که

این نقاط هم ریشه‌ی صورت کسر هستند و هم ریشه‌ی مخرج کسر. این نقاط در نمودار تابع به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر: } f(x) = \frac{x^2+x}{x^4-x^2} = \frac{x(x+1)}{x^2(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)} \\ x=0, x=1 \end{array} \right.$$

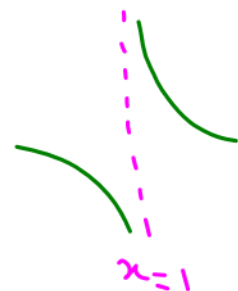
نقطه‌ی توخالی (حفره) رسم می‌شوند.

مثلاً در مثال قبل عدد $x = -1$ نقطه‌ی حدی تابع می‌باشد.

مثال: تابع $y = \frac{x^2+x}{x^2-x}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

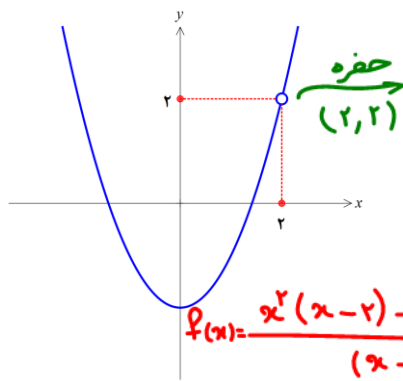
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

در مختصات $(-1, 0)$ یک حفره داریم.

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + a}{x + b}$ است. مقادیر a و b را بیابید.



$$\text{مخرج } (x = -2) = 0 \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

$$\text{صورت } (x = 2) = 0 \Rightarrow (2)^3 - 2(2)^2 - 2(2) + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$f(x) = \frac{x^3(x-2) - 2(x-2)}{(x-2)} = \frac{(x-2)(x^3-2)}{(x-2)}$$

نکته: برای بررسی رفتار تابع در همسایگی مجانب قائم، حد چپ و راست تابع را در طرفین مجانب قائم بررسی می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{x^2 + 1}{x|x| + x}$ در اطراف مجانب قائمش به کدام صورت است؟



$$\text{مخرج } = 0 \Rightarrow x|x| + x = 0 \Rightarrow (x)(|x| + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x|x| + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x(x+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x|x| + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x(-x+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

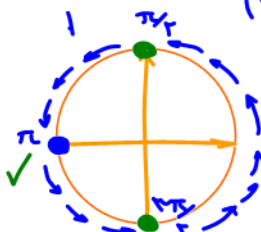


مثال: منحنی $y = \frac{\tan x + 2}{\cos x + 1}$ روی بازه $(0, 2\pi)$ چند مجانب قائم دارد؟

$$y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2}{\cos x + 1} = \frac{\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}}{\cos x + 1} = \frac{\sin x + 2\cos x}{(\cos x)(\cos x + 1)}$$

$$\cos x = 0 \quad \checkmark$$

$$\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \quad \checkmark$$



مثال: منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

$$x > 0$$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

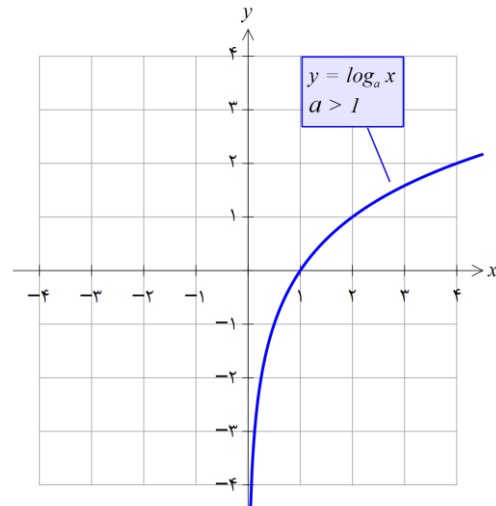
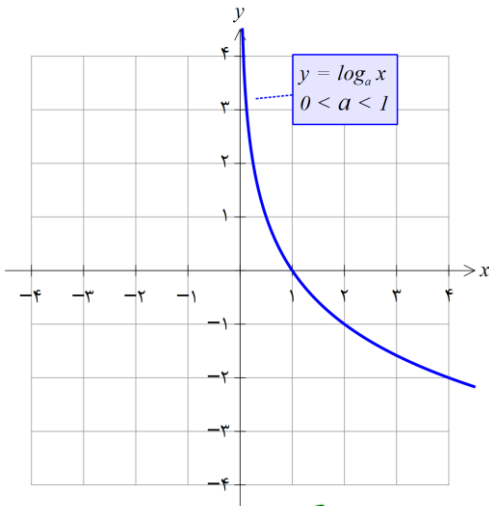
$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$D_f = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 1 + \frac{1}{0^+} + \frac{1}{\sqrt{3}} = +\infty$$



یادآوری نمودار تابع لگاریتمی:



if $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

if $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

نکته: در توابع به فرم $y = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ ریشه‌های معادله‌های $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ به شرط

آن که در همسایگی دامنه‌ی تابع باشند، مجانب‌های قائم تابع می‌باشند.

$f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow$
 $D_f = \{x \mid g(x) > 0\}$

مثال: منحنی $y = \log x + \frac{1}{x^2 - x - 2}$ چند خط مجانب دارد؟

$D_f: x > 0$

$$x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \neq 0$$

$$x \neq 2, x \neq -1$$

$D_f = (0, +\infty) - \{-1, 2\}$

$D_f = (0, 2) \cup (2, +\infty)$



$\lim_{x \rightarrow 2} \log x + \frac{1}{(x-2)(x+1)}$

$\log 2 \approx 0.3$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$

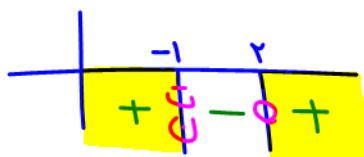
$\lim_{x \rightarrow 2^+} \log x = \log 2^+ = \log 2 + \frac{1}{2}$

$-\infty + \frac{1}{2} = -\infty$

$x=2$ is a vertical asymptote.

مثال: تابع $y = \log \frac{x-2}{x+1}$ چند مجانب دارد؟

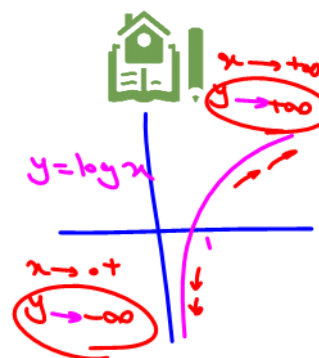
$\frac{x-2}{x+1} > 0$



$D_f = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \log \frac{x-2}{x+1} = \log \frac{-3}{0^-} = \log \frac{+}{-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \log \frac{x-2}{x+1} = \log \frac{0^+}{3} = \log 0^+ = -\infty$



صورت‌های مبهم در محاسبه‌ی حد و رفع ابهام

در محاسبه‌ی حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

گاهی اوقات به یکی از حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، 1^∞ ، 0^∞ و ∞^0 برخورد می‌کنیم. به این حالات،

صورت‌های مبهم گویند و پس از رفع مشکل ابهام در محاسبه‌ی حد، به پاسخ حد می‌رسیم.

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\frac{0}{0}$:

۱- حدود گویا: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ موجود باشد و $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x

باشند، ابتدا صورت و مخرج را تجزیه کرده تا عامل صفرکننده‌ی $x - a$ در صورت و مخرج ظاهر شود، سپس با حذف عامل‌های صفرکننده‌ی صورت و مخرج، با قرار دادن عدد حدی در عبارت باقی‌مانده، جواب حد را می‌یابیم. (اگر تجزیه‌ی عبارت کار مشکلی باشد، می‌توانیم عبارت مورد نظر را بر $x - a$ تقسیم کنیم)

مثال: حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Hopl} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 2}{2x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^4 + x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{2} = 1$$



$$\text{Hopl} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x}{2x} = 1$$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
1	-1	1	-1	0	0
1	0	0	0	0	0

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(x^2 - 4x + 9)} = \frac{2}{(-\frac{5}{2})^2} = \frac{2}{\frac{25}{4}} = \frac{8}{25}$$

$$2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 2 & -13 & 24 & -9 & \\ \hline 2 & -12 & 18 & 0 & \end{array}$$

$$(x - \frac{1}{2})(2x^2 - 12x + 18) = (2x - 1)(x^2 - 4x + 9)$$

$$\text{Hopl} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x}{9x^2 - 12x + 24} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{9}{4} - 6 + 24} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{4}{15}$$

۲- حدود اصم (رادیکالی): اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ موجود باشد و یکی از دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ و

یا هر دوی آن‌ها رادیکالی باشند، ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی که رادیکال‌های موجود را از بین ببرد (مزدوج برای فرجه‌ی ۲ و چاق و لاغر برای فرجه‌ی ۳) ضرب کرده تا عامل ابهام (صفرکننده) ظاهر شود. سپس با حذف عامل‌های صفرکننده در صورت و مخرج با جایگذاری عدد حدی در عبارت باقی‌مانده، پاسخ حد را جستجو می‌کنیم.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 81} = \frac{0}{0} \quad \text{رفع ابهام مبرم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)}{x^2 - 81} \times \frac{(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x - 9)}{9(x + 9)(x - 9)} = \frac{1}{108}$$

مقام = 9

$$\text{Hop} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0}{2x - 0} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}}{18} = \frac{1}{108}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{3x^2 - 8} - 2} = \frac{0}{0} = \text{Hop} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \times 3}{\frac{1}{2\sqrt{3x^2-8}} \times 6x} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{1}} = -\frac{1}{4}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{3x - 2})}{(\sqrt{3x^2 - 8} - 2)} \times \frac{(2 + \sqrt{3x - 2})}{(2 + \sqrt{3x - 2})} \times \frac{(\sqrt{3x^2 - 8} + 2)}{(\sqrt{3x^2 - 8} + 2)} =$$

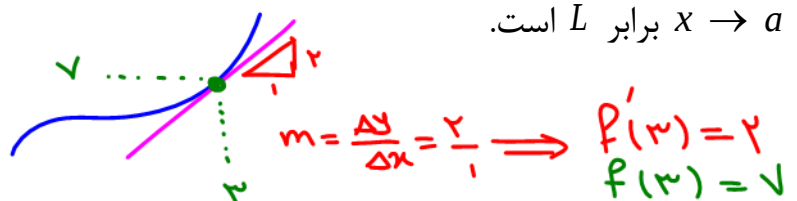
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - (3x - 2))}{(3x^2 - 8 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 3x}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x - 2)}{3(x + 2)(x - 2)} = -\frac{1}{4}$$

۳- قاعده‌ی هوییتال: هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی

محذوف a مشتق‌پذیر باشند و $g'(a) \neq 0$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ، آن‌گاه حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز وقتی

$x \rightarrow a$ برابر L است.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$



قواعد مشتق گیری

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع بر حسب متغیر x باشند، فرمول های مهم مشتق گیری به صورت زیر می باشند.

ردیف	تابع	مشتق تابع
۱	$y = c \quad (c \in \mathbb{R})$	$y' = 0$
۲	$y = a f(x)$	$y' = a f'(x)$
۳	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
۴	$y = u \times v$	$y' = u'v + v'u$
۵	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
۶	$y = u^n$	$y' = n u^{n-1} \times u'$
۷	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
۸	$y = \sqrt[m]{u^n} = u^{n/m}$	$y' = \frac{n u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$
۹	$y = \frac{1}{u}$	$y' = \frac{-1}{u^2}$
۱۰	$y = u $	$y' = \frac{u u'}{ u }$
☆ ۱۱	$y = f(u)$	$y' = f'(u) \times u'$
۱۲	$y = \sin u$	$y' = \cos u \times u'$
۱۳	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \times u'$
۱۴	$y = \tan u$	$y' = (1 + \tan^2 u) \times u'$
۱۵	$y = \cot u$	$y' = -(1 + \cot^2 u) \times u'$
۱۶	$y = \frac{au + b}{cu + d}$	$y' = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2}$

$\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$ مشتق $\frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$

$\sqrt{\sin^3 3x} \Rightarrow x \rightarrow \boxed{3x} \rightarrow \boxed{\sin} \rightarrow \boxed{(\)^3} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \sqrt{\sin^3 3x}$

مثال: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$f(x) = (x^5 - 5x^2 + 3)^4 \rightarrow f'(x) = 4(x^5 - 5x^2 + 3)^3 \times (5x^4 - 10x)$

کد رادیکال

$x \rightarrow \boxed{x^5 - 5x^2 + 3} \rightarrow \boxed{(\)^4}$

$\frac{1}{2\sqrt{\sin^3 3x}} \times 3\sin^2 3x \times \cos 3x \times 3$

کارضیب کارسینوس کارتان

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ را در $x=9$ بیابید.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 - 0 \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{6}$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt[5]{(2x+3)^3}$ را در $x=-1$ بیابید.

$$\left(\sqrt[m]{u^n} \right)' = \frac{n u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$f(x) = (2x+3)^{3/5} = u^{3/5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5} (2x+3)^{-2/5} \times 2 \xrightarrow{x=-1} \left(\frac{4}{5} \right)$$

تذکر: اگر پس از یک بار استفاده از قضیه ی هویتال، مجدداً به حالت مبهم برخورد کردیم و باز هم شرایط قضیه ی هویتال برقرار بود، می توانیم مجدداً از این قضیه بهره ببریم.

تذکر: قضیه ی هویتال برای محاسبه ی حدود $\frac{\infty}{\infty}$ نیز مناسب است.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \text{Hop} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \text{Hop} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \text{Hop} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{3x^3 - 3x^2} = \text{Hop} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{9x^2 - 6x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{9-6} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{18}$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax+3a}{2-\sqrt{2x+10}} = 3$ ، مقدار a را بیابید. $\Rightarrow (x+3)=0 \Rightarrow (x+3)=0$ صورت ، $\Rightarrow$ مبهم $\frac{0}{0}$ جواب $= 3$ (رفع ابهام)

$$a(-3)+3a=0 \quad \checkmark$$

$$\text{Hop} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a}{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x+10}}} = \frac{\frac{a}{1}}{-\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\sin(u) \sim u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots$$

$(u \rightarrow 0)$
ضعیف: $\sin u \sim u$ قوی: $\sin u \sim u - \frac{u^3}{6}$

۴- روش هم‌ارزی: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \vee \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \vee \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در هم‌سایگی $x = a$ معادل یا هم‌ارز می‌باشند و داریم: $f(x) \approx g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. جدول هم‌ارزی‌های مهم عبارتند از:

ردیف	نقطه	تابع	هم‌ارز
۱	$x \rightarrow 0$	$ax + bx^2 + cx^3 + \dots$	ax
۲	$x \rightarrow \infty$	$ax^n + bx^{n-1} + \dots$	ax^n
۳	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan^n u$ و $\sin^n u$	u^n
۴	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\sin u$	$u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots$
۵	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan u$	$u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \dots$
۶	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\cos u$	$1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots$
۷	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$u - \sin u$	$\frac{u^3}{6}$
۸	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan u - u$	$\frac{u^3}{3}$
۹	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan u - \sin u$	$\frac{u^3}{2}$
۱۰	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$1 - \cos u$	$\frac{u^2}{2}$
۱۱	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$1 - \cos^m u$	$\frac{m u^2}{2}$
۱۲	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$(1+u)^n$	$1 + nu$
۱۳	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\sqrt[n]{1+u}$	$1 + \frac{u}{n}$
۱۴	$a > 0$ و n زوج و $x \rightarrow \infty$	$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots}$	$\sqrt[n]{a} \left x + \frac{b}{na} \right $
۱۵	n فرد و $x \rightarrow \infty$	$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots}$	$\sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right)$
۱۶	$x \rightarrow \infty$	$[u]$	u
۱۷	$x \rightarrow +\infty$ ($a > b$)	$a^x + b^x$	a^x
۱۸	$x \rightarrow -\infty$ ($a > b$)	$a^x + b^x$	b^x
۱۹	$f \rightarrow 1$, $g \rightarrow \infty$	f^g	$e^{(f-1)g}$

$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$
 $\frac{u^2}{2} \sim 1 - \cos u$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

$$\tan u \sim u$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(\tan x - \sin x)}}{\tan x \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{6})}}{x\sqrt{x} + \frac{(x\sqrt{x})^3}{3}} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = 1$$

$$\tan x \sim x + \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin 2x) \sqrt{1 - \cos x}}{2x^2 + 3x^3 + \dots + 9x^9} =$$

مثال: اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = 2$ مقدار $2a - 3b$ را بیابید.

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$:

۱- اگر صورت و مخرج کسر بصورت چندجمله‌ای باشد، جمله‌ی با بالاترین توان صورت و مخرج را نگه داشته و از بقیه‌ی جملات که درجه‌ی کمتری دارند، صرف‌نظر می‌کنیم.

۲- اگر صورت و مخرج کسر به‌صورت تابع نمایی باشد:

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت با بزرگ‌ترین پایه را در صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

اگر $x \rightarrow -\infty$ ، عبارت با کوچک‌ترین پایه را در صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

۳- اگر صورت و مخرج به‌صورت مثلثاتی باشد، عکس عبارت صورت را در مخرج نوشته و عکس عبارت مخرج را در صورت می‌نویسیم. در این صورت حالت مبهم تبدیل به حالت صفرصفرم می‌شود.

تذکر: معمولاً به جای $\tan x$ عبارت $\frac{1}{\cot x}$ و به جای $\cot x$ عبارت $\frac{1}{\tan x}$ را می‌نویسیم.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{5^x + 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot 5x}{\cot 10x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x^3} - \sqrt[5]{x}}{5x\sqrt{x} - 7} =$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5x + 3}{(a-2)x^4 + bx^3 - 4} = 6$ باشد، مقدار $2a + 3b$ را بیابید.

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 11} - 3}{ax^{n-1} + 12}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ را بیابید.

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\infty - \infty$:

۱- در توابع رادیکالی، از هم‌ارزی رادیکالی که در جدول صفحه‌ی ۱۹ در ردیف ۱۴ و ۱۵ مطرح گردید، استفاده می‌کنیم.

۲- در توابع غیررادیکالی، دو تابعی را که حدشان بینهایت شده است، با مواردی نظیر مخرج مشترک‌گیری، ضرب در عبارت مزدوج و ... تبدیل به یک تابع می‌کنیم و در این حالت حد تبدیل به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شود.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x+4} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x (\cot 3x - \cot 4x) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^4 + x + 1} - \sqrt{x^4 + x + 5} \right) =$$

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\infty \times \infty$: (مطالعه آزاد)

برای رفع ابهام حالت مبهم $\infty \times \infty$ ، یکی از توابع را معکوس می‌کنیم و در مخرج کسر دیگر می‌نویسیم. با این کار حالت مبهم $\infty - \infty$ به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل خواهد شد که در هر دو حالت با استفاده از قاعده‌ی هسپیتال به رفع ابهام حد مورد نظر می‌پردازیم.

معمولاً به جای $\tan x$ عبارت $\frac{1}{\cot x}$ و به جای $\cot x$ عبارت $\frac{1}{\tan x}$ را می‌نویسیم تا حالت مبهم به $\infty \times \infty$ تغییر کند.

در توابع رادیکالی نیز می‌توانیم با ضرب یا تقسیم کردن بر عبارت مزدوج، حالت مبهم را به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ بیاوریم.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 3x) \tan \left(\frac{3\pi}{2x} \right) =$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{\sqrt{x+4}} - 1 \right) =$$

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم 1^∞ : (مطالعه آزاد)

در حدود مبهم این دسته، از هم‌ارزی عدد نپر (e) استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

اگر عبارت f^g به شکل مبهم 1^∞ درآید، برای رفع ابهام آن می‌توان از هم‌ارزی زیر استفاده کرد.

$$f^g = e^{(f-1)g}$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{x+2} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3n+2} \right)^{3n-1} =$$

پیوستگی

پیوستگی تابع در یک نقطه

اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی I که شامل نقطه‌ی a است، تعریف شده باشد. می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a پیوسته است اگر دو شرط زیر همزمان برقرار باشد:

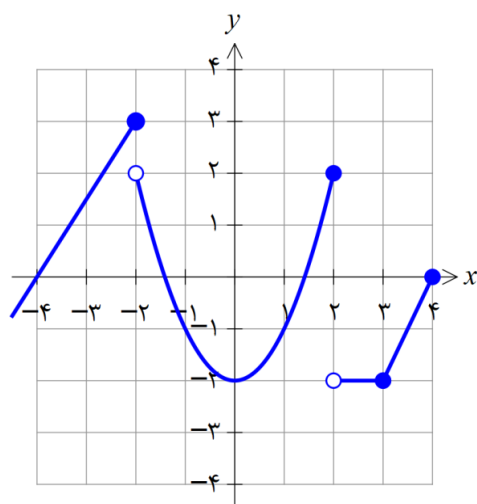
$$1- \text{تابع در } x = a \text{ حد داشته باشد؛ یعنی: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

$$2- \text{حد تابع در نقطه‌ی } x = a \text{ با مقدار تابع در نقطه‌ی } a \text{ برابر باشد؛ یعنی: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

پیوستگی راست: اگر حد راست تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، گوییم تابع در آن نقطه پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: اگر حد چپ تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، گوییم تابع در آن نقطه پیوستگی چپ دارد.

مثال: با توجه به شکل زیر، پیوستگی تابع رسم شده در نقاط صحیح را بررسی نمایید.



مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{4 \tan \frac{x}{2}} & x < 0 \\ 2a + b & x = 0 \\ [-2x] + 3b & x > 0 \end{cases}$$

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & x \geq 3 \\ 2x - 7 & x < 3 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 3$ بررسی نمایید.



مثال: مقدار $f(2)$ را چه عددی انتخاب کنیم تا تابع $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد؟

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = [3 \sin x]$ را در نقاط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ بررسی نمایید.

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4a & x > 2 \\ 2 & x = 2 \\ bx - 2 & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار $-4a + 3b$ را بیابید.

مثال: به ازای کدام مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{|3x|}{x} & x \neq 0 \\ 2a - 7 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوستگی چپ دارد؟



مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{|x^2 - 1|}{x-1} & x < 1 \\ 3a - [5x] & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a را بیابید.

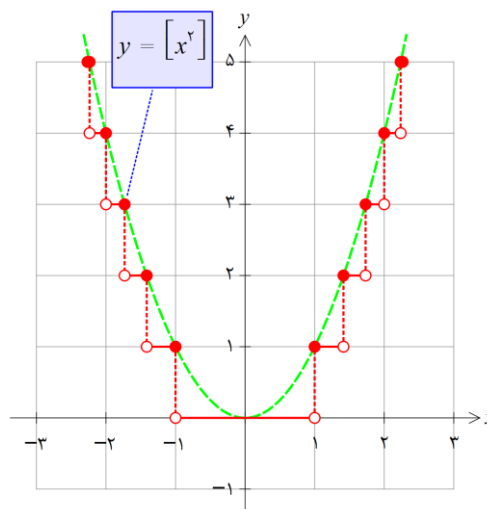
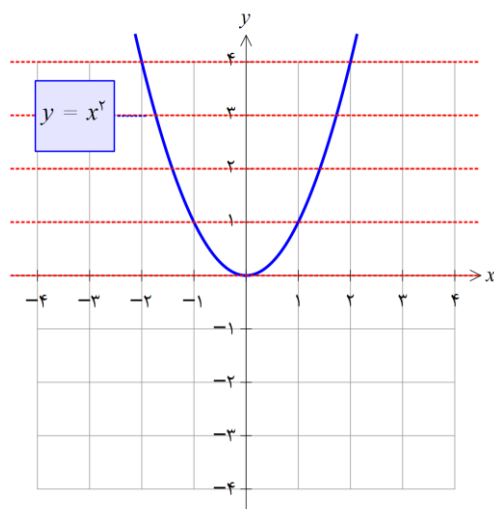
مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \cos \left(\pi \left[\frac{x}{3} \right] \right)$ را در $x = 3$ بررسی نمایید.

بررسی تابع جزء صحیح از نظر وجود حد و پیوستگی:

رسم تابع جزء صحیح:

برای رسم تابع $f(x) = [g(x)]$ در دستگاه مختصات، ابتدا تابع $g(x)$ را رسم کرده و سپس خطوط افقی را که در آن‌ها عرض نقاط اعداد صحیح هستند رسم می‌کنیم (خطوطی را رسم می‌کنیم که تابع رسم شده را قطع کنند).

هر یک از نقاط تقاطع را ابتدا توپر کرده و سپس روی خط پایینی تصویر کرده و تصویر آن را توخالی در نظر می‌گیریم.



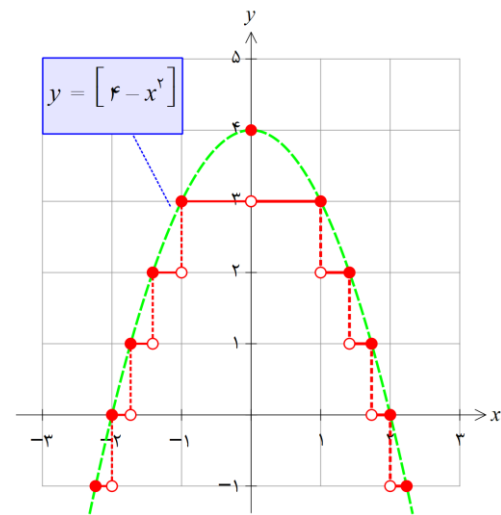
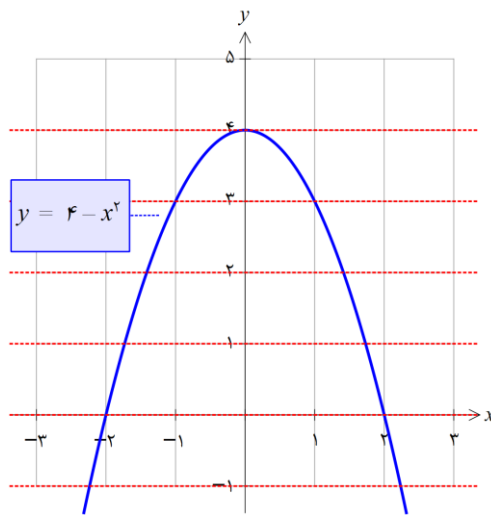
نکته ۱: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ مقدار $g(a)$ یک عدد غیر صحیح باشد، تابع در آن نقطه حد داشته و همچنین پیوسته می‌باشد.

نکته ۲: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ اکیداً صعودی بوده و در نقطه‌ی $x = a$ مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه فاقد حد و ناپیوسته بوده ولی پیوستگی راست دارد.

نکته ۳: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ اکیداً نزولی بوده و در نقطه‌ی $x = a$ مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه فاقد حد و ناپیوسته بوده ولی پیوستگی چپ دارد.

نکته ۴: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ مینیم بوده و مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه حد داد و همچنین پیوسته می‌باشد.

نکته ۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ ماکزیم بوده و مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه حد دارد ولی ناپیوسته می‌باشد.



تذکر: تابع $f(x) = g(x) [x]$ در نقاطی که $g(x) = 0$ شود، پیوسته می‌باشد. (حتی در صورتی که داخل براکت عدد صحیح شود)

مثال: نمودار تابع $f(x) = [\sin x]$ را در بازه‌ی یک دوره‌ی تناوب آن از مبدأ مختصات با شرط $x > 0$ رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آن را بیابید.

مثال: تابع $f(x) = (x^2 + ax + b) [-x]$ در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ پیوسته می‌باشد. مقادیر a و b را بیابید.



مثال: تابع $f(x) = (x^3 - x)[x]$ در چند نقطه با طول صحیح پیوسته است؟

مثال: تابع $f(x) = [x^2 - 4x + 3]$ در چه نقطه‌ای با طول صحیح، پیوسته است؟

پیوستگی روی بازه

تابع $f(x)$ روی بازه‌ی (a, b) پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد.

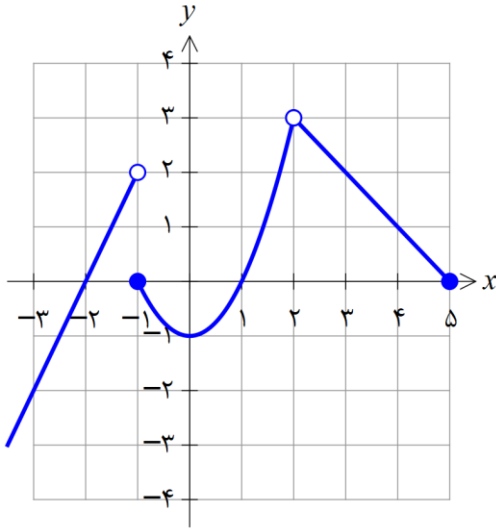
تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد و در نقطه‌ی a پیوستگی راست و در نقطه‌ی b پیوستگی چپ داشته باشد.

تابع $f(x)$ روی بازه‌ی (a, b) پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد و در نقطه‌ی a پیوستگی راست داشته باشد.

تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد و در نقطه‌ی b پیوستگی چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و $f(x)$ در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، گوییم $f(x)$ روی بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)$ به شکل زیر مفروض است. پیوستگی آن را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $[2, 5]$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.



در مورد تابع فوق، کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) f روی بازه‌ی $(-\infty, -1]$ پیوسته است.

ب) f روی بازه‌ی $(-\infty, -1)$ پیوسته است.

پ) f روی بازه‌ی $[2, 5]$ پیوسته است.

ت) f روی بازه‌ی $(-2, 0)$ پیوسته است.

ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

