

کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده

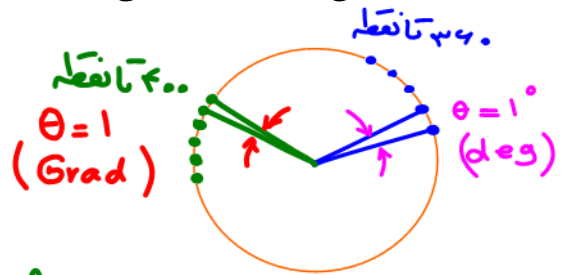
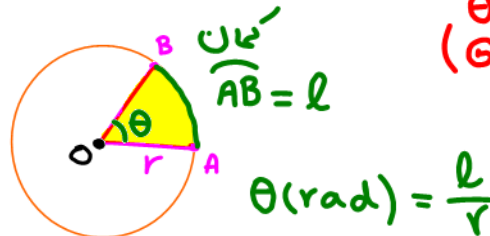


دایره کامل (۳۶۰°) $\Rightarrow \theta = \frac{l}{r} = \frac{\text{معیار}}{r} = \frac{r\pi}{r} = \pi$ مثلثات
 $360.(\text{deg}) \equiv \pi \text{ (rad)} \xrightarrow{\div 2} \pi \text{ (rad)} \equiv 180^\circ$

رابطه بین درجه و رادیان :

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad , \quad 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ Deg}$$

$$\text{Deg} \xleftrightarrow[\times \frac{180}{\pi}]{\times \frac{\pi}{180}} \text{ rad}$$



مثال : زوایای 30° و 50° معادل چند رادیان هستند؟ زاویه $\frac{\pi}{2}$ معادل چند درجه می شود؟

$$30^\circ \xrightarrow[\times \frac{\pi}{180}]{\text{رادیان}} \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ (rad)} \xrightarrow[\times \frac{180}{\pi}]{\text{درجه}} 90^\circ$$

$$50^\circ \xrightarrow[\times \frac{\pi}{180}]{\text{رادیان}} \frac{5\pi}{18} \text{ (rad)}$$

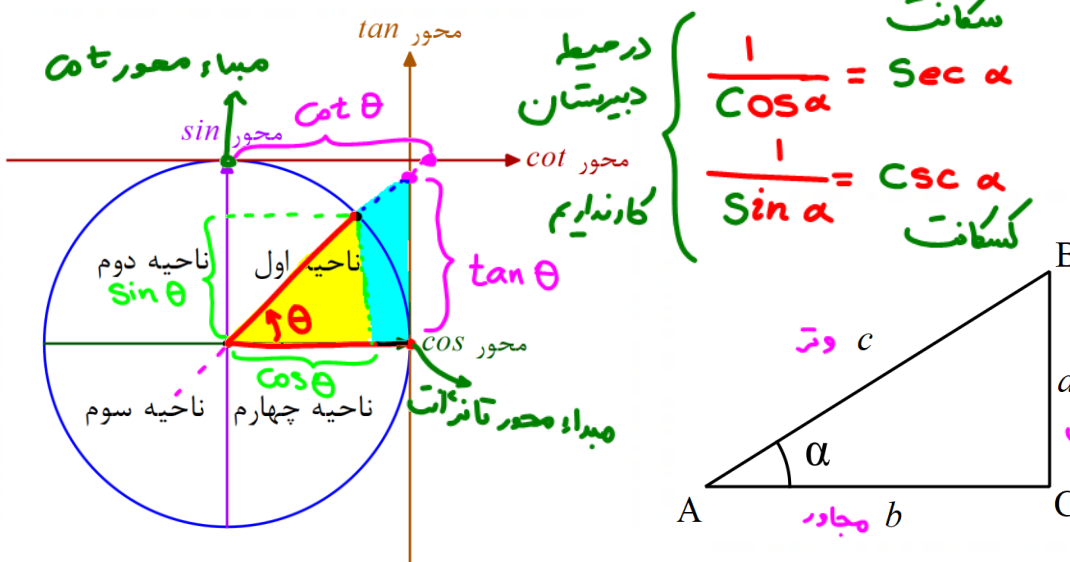
دسته عوض نشه $2 < x \leq 3 \Rightarrow 4 < x^2 \leq 9$
 دسته عوض نشه $-3 \leq x \leq -2 \Rightarrow 9 \geq x^2 \geq 4$
 دسته عوض نشه $-5 < x \leq +2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 25$
 سب min روی تنظیم می شه (باصادی)
 حدود تغییرات توابع مثلثاتی :

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad , \quad \tan x \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad \cot x \in \mathbb{R}$$

مثال: حدود تغییرات عبارت $y = 5 \sin^2 x + 2$ را بیابید.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{(\quad)^2} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 5} 0 \leq 5 \sin^2 x \leq 5 \xrightarrow{+2} 2 \leq y \leq 7 \rightarrow R_f = [2, 7] \end{aligned}$$



نسبتهای مثلثاتی

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \\ \cot \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \end{aligned}$$

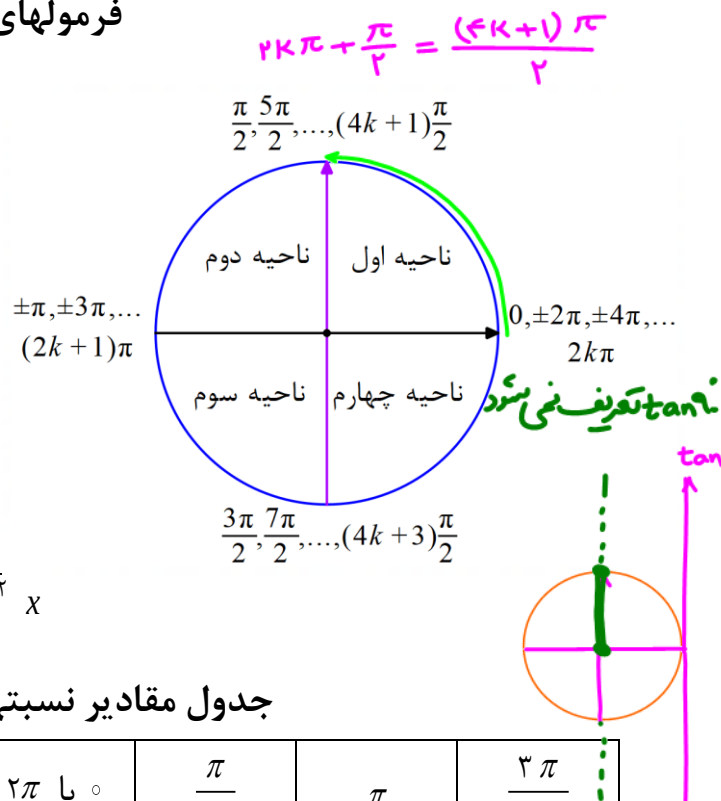
فرمولهای ابتدایی مثلثات

(I) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, (II) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(III) $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$

(IV) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$

(V) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (VI) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$



جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف

زاویه (رادیان)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	0 یا 2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
زاویه (درجه)	30°	60°	45°	0° یا 360°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1	0
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0

علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ناحیه دایره مثلثاتی

ناحیه مثلثاتی	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
محدوده زاویه	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

مثال: اگر $\sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha < 0$ باشد، α در کدام نواحی مثلثاتی قرار دارد؟

$$\sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha < 0 \quad \div (\sin^2 \alpha) \quad \sin \alpha \neq 0$$

$$\cot \alpha < 0$$


مثال: حاصل کدام یک از عبارات زیر منفی است؟

$$\textcircled{+} + \textcircled{+} = \textcircled{+} \quad \sin^{119^\circ} + \cos^{350^\circ} \quad (1)$$

$$\textcircled{-} + \textcircled{-} = \textcircled{-} \quad \sin^{190^\circ} + \tan^{170^\circ} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{+} - \textcircled{-} = \textcircled{+} \quad \tan^{200^\circ} - \cot^{300^\circ} \quad (3)$$

$$- \textcircled{-} + \textcircled{+} = \textcircled{+} \quad -\cos^{148^\circ} + \cot^{80^\circ} \quad (4)$$

یافتن نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های معروف مثلثاتی ($n > 2$)

دسته ۱	دسته ۲	دسته ۳	ناحیه مثلثاتی	فرمول مربوط به ناحیه $n > 2$
خانواده 30°	خانواده 45°	خانواده 60°		
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	ناحیه اول	$\theta = \frac{\pi}{n}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	ناحیه دوم	$\theta = \frac{(n-1)\pi}{n}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	ناحیه سوم	$\theta = \frac{(n+1)\pi}{n}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	ناحیه چهارم	$\theta = \frac{(2n-1)\pi}{n}$

نکته: به ازای زوایای هر دسته، مقادیر $|\sin \theta|$ ، $|\cos \theta|$ ، $|\tan \theta|$ و $|\cot \theta|$ برابرند و فقط تفاوت در علامت آنها می‌باشد که با توجه به علامت نسبت مورد نظر در ناحیه مثلثاتی، علامت آنها تعیین می‌گردد.

دسته ۱: $|\sin \theta| = \frac{1}{2}$ ، $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $|\tan \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $|\cot \theta| = \sqrt{3}$

دسته ۲: $|\sin \theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $|\tan \theta| = 1$ و $|\cot \theta| = 1$

دسته ۳: $|\sin \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $|\cos \theta| = \frac{1}{2}$ ، $|\tan \theta| = \sqrt{3}$ و $|\cot \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = +\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = +\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

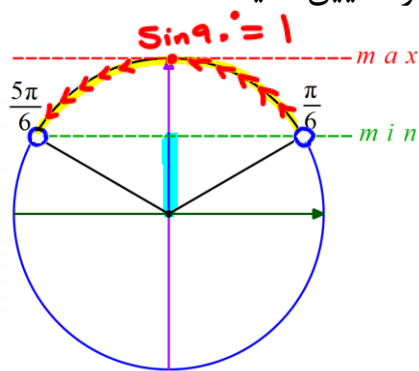
$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = +\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ باشد و $\sin x = \frac{1}{m-2}$ ، حدود متغیر m را تعیین کنید.



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \sin x &\leq 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{m-2} &\leq 1 \xrightarrow{\text{مکون}} \\ 2 > m-2 &\geq 1 \xrightarrow{+2} \\ 3 &\leq m < 4 \end{aligned}$$

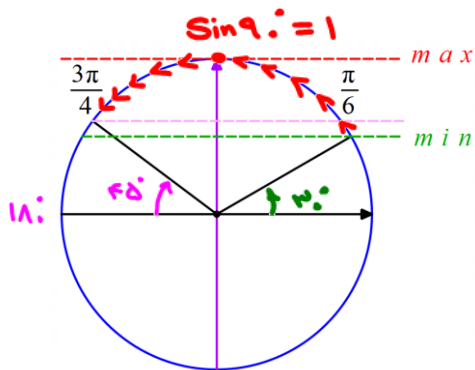
$$(1) m \geq 4$$

$$(2) m > 2$$

$$(3) 3 \leq m < 4 \quad \checkmark$$

$$(4) m \leq 1 \text{ یا } m \geq 3$$

مثال: اگر $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{3\pi}{4}$ باشد، حدود $\sin x$ را تعیین کنید.



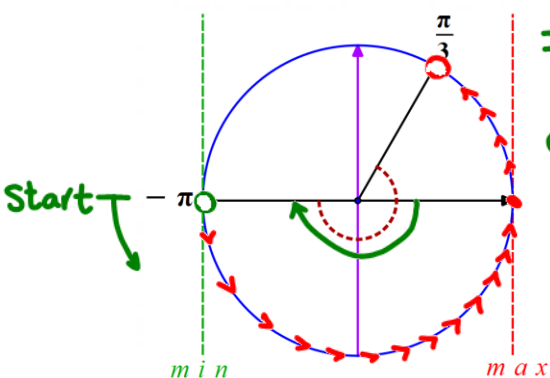
$$30^\circ < x < 135^\circ = (18^\circ - 45^\circ)$$

$$\sin 30^\circ < \sin x \leq \sin 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1$$

نکته: در سؤالاتی که حدود نسبت مثلثاتی خواسته می‌شود، به هیچ عنوان از طرفین رابطه نسبت مثلثاتی نمی‌گیریم بلکه با رسم دایره، حدود نسبت مثلثاتی را پیدا می‌کنیم.

مثال: اگر $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9}$ باشد و $\cos(3\alpha) = \frac{m-1}{2}$ ، حدود متغیر m را تعیین کنید.



$$-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\times 3} -\pi < 3\alpha < \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(-\pi) < \cos 3\alpha \leq \cos(0)$$

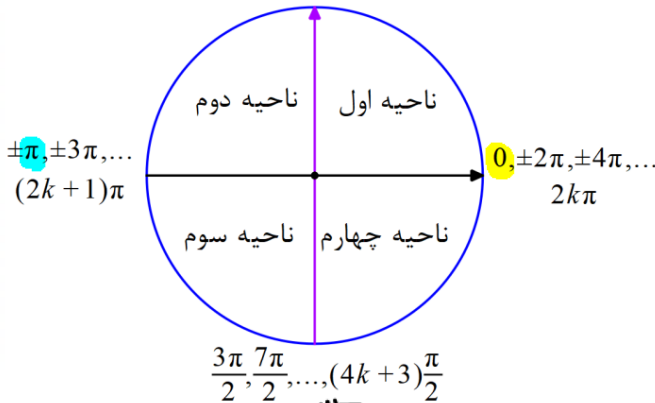
$$-1 < \cos 3\alpha \leq 1 \rightarrow -1 < \frac{m-1}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2}$$

$$-2 < m-1 \leq 2 \xrightarrow{+1} -1 < m \leq 3$$



نسبتهای مثلثاتی کمانهای مرکب $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha \right)$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, (4k+1)\frac{\pi}{2}$$



- مضارب زوج π حذف می شوند.

- مضارب فرد π به π تبدیل می شوند.

- مضارب زوج $\frac{\pi}{2}$ ، نقاط چپ و راست دایره مثلثاتی

- مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، نقاط بالا و پایین دایره مثلثاتی اند

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ را به عدد ۴ تقسیم می کنیم.

اگر باقیمانده ۱ شد، زاویه معادل $\frac{\pi}{4}$ است و اگر باقیمانده ۳ شد زاویه معادل $\frac{3\pi}{4}$ است.

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

کسینوس منفی خواست

روش یافتن نسبتهای مثلثاتی یک زاویه

۱- اگر زاویه داده شده منفی باشد، در مورد نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی حذف شده و در مورد سه

نسبت مثلثاتی دیگر، منفی زاویه، به پشت نسبت مثلثاتی انتقال پیدا می کند.

$$\sin 120^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲- اگر زاویه داده شده بر حسب درجه بوده و مقدار آن از 360° درجه بیشتر باشد، عدد بزرگ داده شده را

به 360° تقسیم می کنیم و به جای این عدد بزرگ، از باقیمانده تقسیم در محاسبات بهره می بریم.

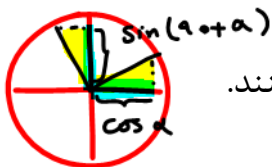
$$\sin\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳- اگر زاویه داده شده بر حسب رادیان بوده و مقدار آن از 2π بیشتر باشد، عدد

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin(90^\circ + 30^\circ) = +\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 120^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) = +\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

باقیمانده تقسیم بهره می بریم.

۴- در این مرحله ابتدا علامت نسبت خواسته شده را در ناحیه مورد نظر تعیین می کنیم.



۵- $2k\pi$ و $(2k+1)\pi$ (نقاط راست و چپ دایره مثلثاتی) نسبت مثلثاتی را عوض نمی کنند.

$\frac{\pi}{2}(4k+1)$ و $\frac{\pi}{2}(4k+3)$ (نقاط بالا و پایین دایره مثلثاتی) نسبت مثلثاتی را عوض می کنند.

$$\begin{cases} \sin x \Rightarrow \cos x \\ \cos x \Rightarrow \sin x \end{cases}, \begin{cases} \tan x \Rightarrow \cot x \\ \cot x \Rightarrow \tan x \end{cases}$$

۶- زاویه α را جلوی نسبت مورد نظر می نویسیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

عوض $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos\alpha$

عوض $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

عوض نمی‌شود $\tan(\pi + \alpha) = +\tan\alpha$

عوض $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{397\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = +\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(\frac{27\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

صفر $\sin(\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = +\tan\alpha$

مثال: حاصل عبارات زیر را بر حسب کمان 20° بیابید.

$\sin 160^\circ =$

$\cos 200^\circ =$

$\cos 250^\circ =$

$\cot 340^\circ =$

نکته: اگر مقادیر $\tan\alpha$ یا $\cot\alpha$ در صورت سؤال داده شود و حاصل جمع و تفریق $\sin^n\alpha$ و $\cos^n\alpha$ در صورت و مخرج کسر خواسته شود، به دو طریق زیر عمل می‌کنیم.

۱- اگر $\tan\alpha$ را داده باشند، صورت و مخرج کسر را بر $\cos^n\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

۲- اگر $\cot\alpha$ را داده باشند، صورت و مخرج کسر را بر $\sin^n\alpha$ تقسیم می‌کنیم.



مثال: اگر $\tan x = 2$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ چند است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲) ✓

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x} = \frac{\tan x + 1}{3 \tan x - 2} = \frac{2 + 1}{3(2) - 2} = \frac{3}{4}$$

$\div \cos^2 x$

مثال: اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل $\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$ را بیابید.

$$\frac{3 \tan^2 x + 1}{1} = 3 \tan^2 x + 1 = 3(2)^2 + 1 = 12 + 1 = 13$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos x}$$

مثال: اگر $\tan x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x - \sin^2 x}{4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x}$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳) ✓

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{9}{8}$ (۱)

$$\frac{\tan x + 5 - \tan^2 x}{4 - 3 \tan^2 x} = \frac{\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{4}}{4 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{13}{4}} = \frac{21}{13} = \frac{7}{13}$$

مثال: اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{3}$

(۳) ۵

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{5}{2}$



مثال: اگر $\tan 35^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟

(۴) $2a - 2$

(۳) $2a$

(۲) $a - 1$

(۱) $a + 1$ ✓

$$\frac{\overset{+}{\sin}(180 - 35) - \overset{-}{\sin}(270 - 35)}{\cos(360 - 35)} = \frac{\overset{+}{\sin} 35 + \overset{+}{\cos} 35}{\cos 35} = \tan 35 + 1 = a + 1$$



مثال: حاصل $\sin 20^\circ + \sin 200^\circ + \sin 340^\circ + \sin 160^\circ$ کدام است؟

(۴) $\sin 40^\circ$

(۳) $2 \sin 20^\circ$

(۲) $\sin 20^\circ$

(۱) صفر



مثال: اگر $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟

$\frac{31}{16}$ (۴)

$\frac{17}{8}$ (۳) ✓

$\frac{10}{8}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

$$\frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{1 + \tan 20^\circ}{1 - \tan 20^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1.33}{0.66} = \frac{133}{66} = \frac{17}{8}$$

مثال: اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)}$ کدام است؟

۳ (۴) ✓

۲ (۳)

۱/۲ (۲)

-۲ (۱)

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0.5 + 1}{2(0.5)} = \frac{1.5}{1} = 3$$

مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(3\pi + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)



نکته: زوایای منفی:

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}, \begin{cases} \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

کسینوس متغی خود

$\sin(-(\pi - \alpha)) = -\sin(\pi - \alpha)$

$\cos(-(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$2 \sin(\alpha - 3\pi) - \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$

مثال: از تساوی $\frac{2 \sin(\alpha - 3\pi) - \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2$ مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۱)

$$\frac{-2 \sin^{\oplus}(\pi - \alpha) - \cos^{\oplus}(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \frac{-2 \sin \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha} = +3 \tan \alpha = 2$$

$\tan \alpha = \frac{2}{3}$

مثال: حاصل $\cos\left(\frac{-211\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-211\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (۴) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (۱)



مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{10}\right) \cdot \tan\left(\frac{21\pi}{10}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ کدام است؟

-14 (۴) -4 (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) ۱) صفر



نکته: اگر α و β دو زاویه‌ی متمم باشند؛ یعنی: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

نکته: اگر α و β دو زاویه‌ی مکمل باشند؛ یعنی: $\alpha + \beta = \pi$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = -\tan \beta \\ \cot \alpha = -\cot \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{13\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{17\pi}{36}\right)$$

(۱) $\frac{2}{5}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{5}{2}$

(۴) $\frac{7}{2}$

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{36}\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{36} + \frac{17\pi}{36} = \frac{\pi}{2} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{36}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{36}\right) = 1$$

$$\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$$

$$1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

مثال: حاصل عبارت $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) صفر

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۲



مثال: اگر $x = 10^\circ$ باشد، حاصل $\frac{\sin 2x \cdot \tan 4x}{\cot 5x \cdot \cos 7x}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$\frac{\sin 2x \cdot \tan 4x}{\cot 5x \cdot \cos 7x} = 1$$

مثال: حاصل عبارت $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \dots + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

صفر (۲) ✓

۱ (۱)

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$

مثال

$$\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = 0$$

مثال: اگر $x = 10^\circ$ باشد، حاصل $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos 17x$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)



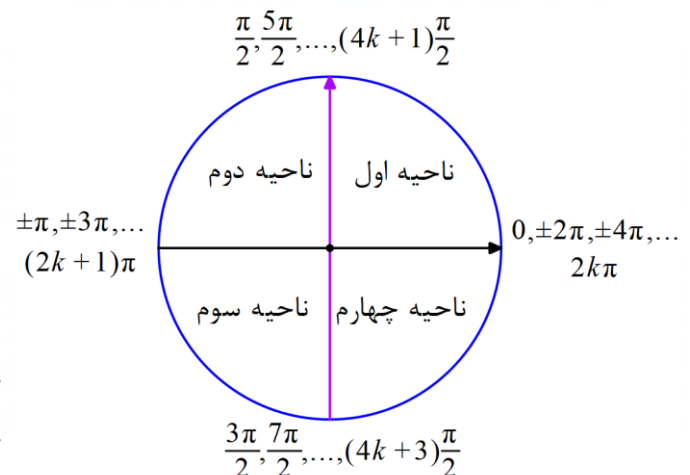
روابط بین نسبتهای مثلثاتی

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$



مثال: حاصل عبارت $\sin^2 x \cdot \cos^2 x (1 + \tan^2 x + \cot^2 x)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sin^2 x \cos^2 x (1 + \tan^2 x + \cot^2 x) = (\sin^2 x \cos^2 x) \left(\frac{1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \right) \\ & = 1 \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$ کدام است؟

$$\tan \alpha \quad \cot \alpha \quad -1 \quad 1$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \tan \alpha$$



مثال: حاصل عبارت $(\cos^4 x - \sin^4 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{\sin^2 x}$

(۴) $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) + \tan^2 x$$

$$1 - \cancel{\tan^2 x} + \cancel{\tan^2 x} = 1$$

$$x = 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4} \text{ rad} \rightarrow \textcircled{1} \text{ ۱}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) صفر



مثال: اگر انتهای کمان مقابل زاویه α در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}}$ کدام است؟

(۱) $-\cot \alpha$

(۲) $-\cos \alpha$ ✓

(۳) $\cot \alpha$

(۴) $\cos \alpha$

$$\cos \alpha < 0$$



$$\sqrt{\frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\cancel{\sin^2 \alpha}}}{\frac{1}{\cancel{\sin^2 \alpha}}}} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = |\cos \alpha| = -\cos \alpha$$

مثال: اگر $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan^3 x + \cot^3 x$ کدام است؟

$\frac{22}{5}$ (۴)

$\frac{622}{5}$ (۳)

۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \end{cases}$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1 - 3(\sin x \cos x)^2}{(\sin x \cos x)^3} = \frac{1 - 3\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = 110$$

مثال: اگر $\left(\sin x + \cos x\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟
 $\sin^2 x + \cos^2 x = a^2 + b^2 = 1$
 $\sin x = a, \cos x = b$

$\frac{17}{81}$ (۴)

$\frac{17}{27}$ (۳)

$\frac{13}{81}$ (۲)

$\frac{13}{27}$ (۱) ✓

$$a^3 + b^3 = (a+b) \left(a^2 + b^2 - ab \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{4}{9} \right) \right) = \frac{13}{27}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= \frac{1}{9} \\ 2ab &= -\frac{4}{9} \Rightarrow \\ ab &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$\div \cos^2 \theta$

مثال: اگر $\tan \theta = 2$ باشد، حاصل $\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta + \sin \theta}$ کدام است؟

$\frac{5}{18}$ (۴) ✓

$\frac{5}{9}$ (۳)

$\frac{2}{9}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\tan^3 \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{5}{18}$$

$1 + \tan^2 \theta$
 $\tan \theta (1 + \tan^2 \theta)$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $(\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



روابط مجموع و تفاضل دو کمان

فقط ریاضی

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) &= \frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ریاضی II} \\ \text{ریاضی I} \end{array}$$

مثال: اگر $\cot \alpha = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5}$ (۴)

-5 (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲✓)

$\tan \alpha = \frac{2}{3}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \tan 75^\circ = \cot 15^\circ$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$ را بیابید.

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3}) \times (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

مثال: اگر $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱) ✓}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 2$$



$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 2 \Rightarrow \boxed{\tan^2 x = 1}$$

مثال: اگر $\tan x = \frac{-1}{2}$ باشد و $\cos x < 0$ ، حاصل $\sin x$ کدام است؟

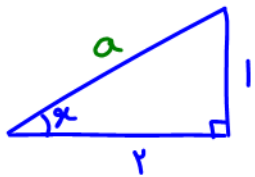
$$\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (۴) ✓}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

$\tan x < 0$
 $\sin x < 0$
 $\cos x < 0$



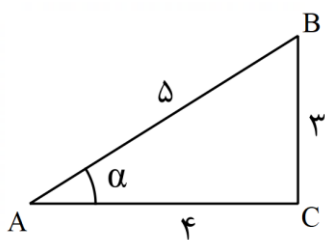
$$1^2 + 2^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{5}}$$

$$\sin x = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = +\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos x = \dots \checkmark$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \dots$$

اعداد فیثاغورسی معروف

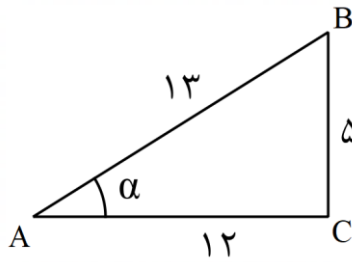


$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3}$$

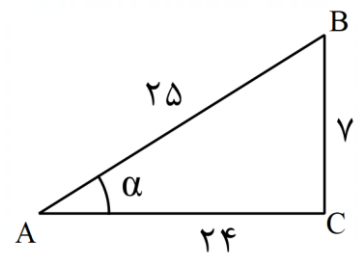


$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\cot \alpha = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\tan \alpha = \frac{7}{24}$$

$$\cot \alpha = \frac{24}{7}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

روابط کمان 2α

۱۲ تجربی / ۱۱ ریاضی

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

روابط کمان 2α از روی مقدار $\tan \alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

فرمولهای طلایی مثلثات: تبدیل کمان 2α به α

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \\ \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \end{cases}$$

روابط کمان 3α

$$\star \begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} \sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \\ \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \\ \cot 3\alpha = \cot \alpha \cdot \cot(60^\circ - \alpha) \cdot \cot(60^\circ + \alpha) \end{cases}$$

نکته:

$$\begin{cases} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha}$ کدام است؟

۱۶ $\sin^{-4} 2\alpha$ (۴) ✓

۱۶ $\cos^{-2} 2\alpha$ (۳)

۸ $\sin^{-2} 2\alpha$ (۲)

۸ $\cos^{-2} 2\alpha$ (۱)

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{(\sin \alpha \cos \alpha)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\alpha} = 16 \sin^{-4} 2\alpha$$

مثال: حاصل عبارت $\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$ کدام است؟

$\frac{1}{32}$ (۴)

$\frac{1}{16}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲) ✓

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\sin 20^\circ \times \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ \times \frac{1}{\sin 20^\circ}$

$\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

$$\frac{1}{2} \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \times \frac{1}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 140^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$$

$\frac{1}{2} \sin 80^\circ \rightarrow \frac{1}{2} \sin 160^\circ$

مثال: اگر $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x + \cos x$ باشد، حاصل $\tan x$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-2 (۲)

2 (۱)



مثال: اگر $\cos x + 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 0$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$-\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱) ✓

$$\cos x + 2 \sin x = 0 \xrightarrow{\div \cos x} 1 + 2 \tan x = 0 \Rightarrow \boxed{\tan x = -\frac{1}{2}}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}$$

مثال: حاصل عبارت $\sin 195^\circ \times \sin 105^\circ$ کدام است؟

-4 (۴)

4 (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲) ✓

$\frac{1}{4}$ (۱)



$$\sin(180+15) \sin(90+15) \quad \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$(-\sin 15)(+\cos 15) = -\frac{1}{4} \sin 30 = -\frac{1}{8}$$

$a = \sin \frac{\pi}{8}$
 $b = \cos \frac{\pi}{8}$

2 (۴)

-2 (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$-\sqrt{2}$ (۱) ✓

مثال: حاصل عبارت $\left(\sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \right)^2$ کدام است؟

$$(a-b)^2 - (a+b)^2 = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} - 2ab - (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab) = -4ab$$



$$-4 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}$$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -\frac{24}{25} & (4) & -\frac{16}{25} & (3) \text{ ضرب } 2\sin x \cos x \\ & & -\frac{8}{25} & (2) \\ & & -\frac{4}{25} & (1) \end{array}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin 2x = \frac{9}{25} - 1 = -\frac{16}{25}$$

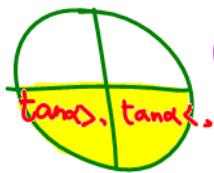
$$\cos(-\pi) = \cos \pi$$

مثال: اگر $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan 4x$ کدام است؟

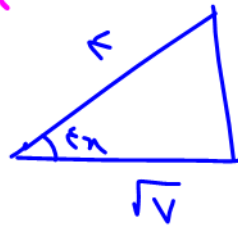
$$\begin{array}{llll} 2\cos x & (4) & -\frac{\sqrt{7}}{3} & (3) \\ & & \pm \frac{3}{\sqrt{7}} & (2) \text{ ✓} \\ & & \frac{\sqrt{7}}{3} & (1) \end{array}$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_1 + \underbrace{2\sin 2x \cos 2x}_{\sin 4x} = \frac{1}{4}$$



$$\boxed{\sin 4x = -\frac{3}{4}}$$



$$\tan 4x = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}$$

مثال: حاصل عبارت $\cos 2x + \frac{-1}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -1 & (4) & \sin^2 x & (3) \\ & & \frac{1}{\cos^2 x} & (2) \\ & & \frac{1}{\sin^2 x} & (1) \end{array} \cos^2 x$$

$$\cancel{\cos^2 x} - \cancel{\sin^2 x} - \cancel{\cos^2 x} + 2\sin^2 x = \sin^2 x$$

$$x = \pi \Rightarrow \cos \pi + \frac{-1}{1 + (\tan \pi)^2} + \frac{2}{1 + (\cot \pi)^2} \quad (\sin \pi)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}$$

مثال: اگر $x = \frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

۱ (۴)

$-\sqrt{3}$ (۳✓)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)



$$\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = -\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\cos 2x + 3\cos x + 1}{3\sin x + \sin 2x}$ کدام است؟

$\cot 2x$ (۴)

$\frac{\cos 2x}{\sin x}$ (۳)

$\cot x$ (۲✓)

$\frac{1}{2} \cos x$ (۱)

$$\frac{2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 1}{3\sin x + 2\sin x \cos x} = \frac{\cos x (2\cos x + 3)}{\sin x (3 + 2\cos x)} = \cot x$$

$$\begin{cases} 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲✓)

$2\sqrt{2}$ (۱)



$$\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{2 \sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{2 \sin 20^\circ + \sin 40^\circ}$ کدام است؟

$\tan 20^\circ$ (۴)

$\tan^2 20^\circ$ (۳)

$\tan 10^\circ$ (۲)

$\tan^2 10^\circ$ (۱) ✓

$$\frac{2 \sin 20^\circ - 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ + 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ (1 - \cos 20^\circ)}{2 \sin 20^\circ (1 + \cos 20^\circ)} = \frac{2 \sin^2 10^\circ}{2 \cos^2 10^\circ} = \tan^2 10^\circ = \cot^2 80^\circ$$

مثال: اگر $x = \frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{\tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۱) ✓



$$\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$\frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

مثال: اگر $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$2/5$ (۴)

$2/4$ (۳) ✓

$1/8$ (۲)

$1/5$ (۱)

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan x = 1 + \tan x$$

$$\tan x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{2}{3} \right)}{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2/5$$

$\tan x = \frac{2}{3}$

مثال: اگر $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\tan x$ کدام است؟

- 4 (4)

- $\frac{4}{3}$ (3) ✓

- $\frac{3}{4}$ (2)

- 3 (1)



$$\frac{\cancel{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cancel{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \boxed{\tan \frac{x}{2} = 2}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2(2)}{1 - (2)^2} = \frac{4}{-3}$$

مثال: اگر $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2 \sin x$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (4)

$\frac{4}{3}$ (3)

- $\frac{3}{4}$ (2)

- $\frac{4}{3}$ (1) ✓

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2 \sin x \Rightarrow -\cos x = 2 \sin x \xrightarrow{\div \cos x} -1 = 2 \tan x \Rightarrow \boxed{\tan x = -\frac{1}{2}}$$

$\ominus (2, 4)$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

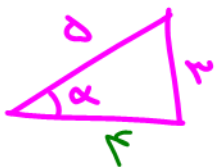
مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ بوده و زاویه α منفرجه باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (4)

- 2 (3)

- $\frac{7}{24}$ (2)

- $\frac{24}{7}$ (1) ✓



$$\tan \alpha = -\frac{3}{4}$$



$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{3}{4})}{1 - (-\frac{3}{4})^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}$$

مثال: اگر $\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\cot 2x$ کدام است؟

$\div \cos x$

$\frac{2}{4} (4 \checkmark)$

$\frac{4}{3} (3)$

$-\frac{3}{4} (2)$

$-\frac{4}{3} (1)$

$$\frac{2}{\tan x + 3} = \frac{2}{1} \Rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \cot 2x = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin \alpha} \\ \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ}$ کدام است؟

$-1 (4)$

$1 (3)$

$-\frac{1}{2} (2 \checkmark)$

$\frac{1}{2} (1)$

$$\frac{1}{-2 \cot (2 \times 22/5^\circ)} = \frac{1}{-2}$$

مثال: حاصل عبارت $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ کدام است؟

$4 (4 \checkmark)$

$3 (3)$

$2 (2)$

$1 (1)$

$$\frac{2}{\sin 2(15^\circ)} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\frac{\pi}{8} \equiv 22.5^\circ \Rightarrow 1 \leq 22.5^\circ$$

مثال: حاصل عبارت $\left[\tan \frac{\pi}{5} \right] + \left[\tan \frac{4\pi}{5} \right]$ کدام است؟

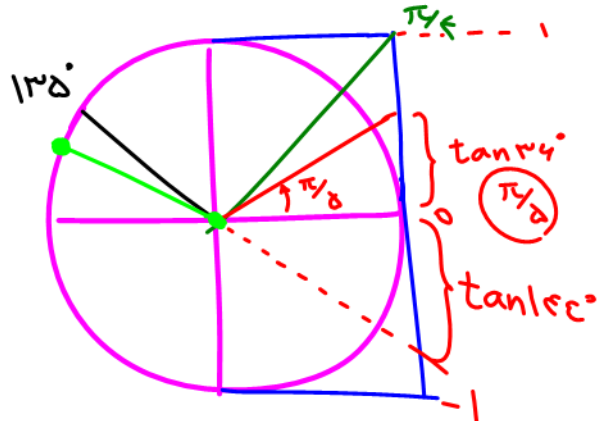
$-2 (4)$

$-1 (3)$

$1 (2)$

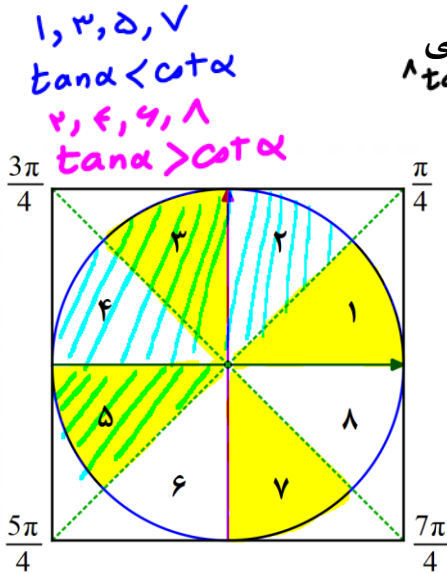
$0 (1)$ صفر

$$[0 < 1] + [-1 < 0] \\ 0 + (-1) = -1$$



مقایسه مقادیر نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

$\tan$



منطقه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
ناحیه مثلثاتی	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	
$\sin \alpha > \cos \alpha$		⊗	⊗	⊗	⊗			
$\sin \alpha < \cos \alpha$	⊗					⊗	⊗	⊗
$\tan \alpha > \cot \alpha$		⊗		⊗		⊗		⊗
$\tan \alpha < \cot \alpha$	⊗		⊗		⊗		⊗	

نکته: در تمامی نیمسازهای ۴ ناحیه دایره مثلثاتی $|\sin \theta|$ و $|\cos \theta|$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

نکته: در تمامی نیمسازهای ۴ ناحیه دایره مثلثاتی $|\tan \theta|$ و $|\cot \theta|$ برابر ۱ است.

$\sin x = -0.18$
 $\cos x = -0.98$

مثال: اگر $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ کدام است؟

$-2\sin x$ (۴ ✓) $2\sin x$ (۳) $-2\cos x$ (۲) $2\cos x$ (۱)

$\tan x > \cot x$

$\cos x > \sin x$

~~$\cos x - \sin x - \sin x - \cos x =$~~

$= -2\sin x$

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

مثال: اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}}$ کدام است؟

$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (۳) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (۲) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ (۱ ✓)

$\sqrt{\frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}} = \frac{|\sin x + \cos x|}{|\sin x - \cos x|} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

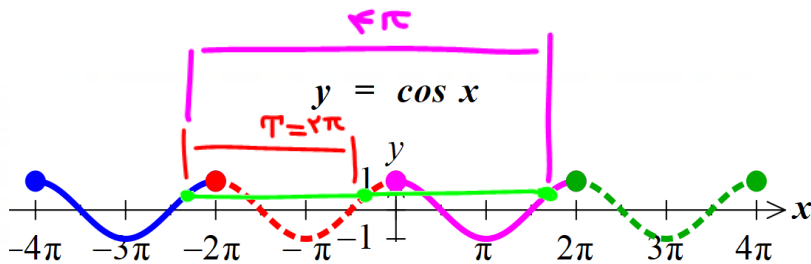


دوره تناوب

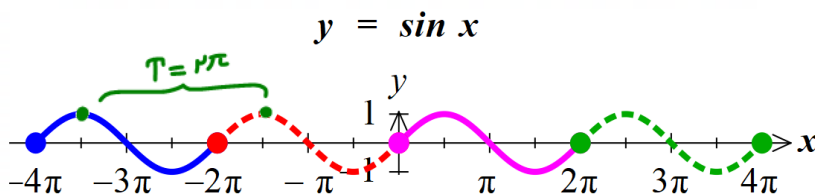
توابعی مانند $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را که دامنه آنها $\mathbb{R}$ و برد آنها $[-1, 1]$ است در نظر می‌گیریم. می‌دانیم اگر به x ، مضرب صحیحی از 2π (یعنی $2k\pi$ یا به عبارت دیگر $\dots, \pm 4\pi, \pm 2\pi, 0$) را اضافه کنیم، مقدار $\sin x$ با $\sin(2k\pi + x)$ و مقدار $\cos x$ با $\cos(2k\pi + x)$ برابرند؛ یعنی:

$$\begin{cases} \sin(2k\pi + x) = \sin x \\ \cos(2k\pi + x) = \cos x \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

نمودار این گونه توابع در بازه‌های 2π ، تکرار می‌شود. اگر در تابعی نمودار تابع در بازه‌هایی تکرار شود، آن تابع را متناوب می‌نامیم. کوچکترین عدد مثبتی که طول بازه تکرار است را دوره تناوب می‌نامیم و آن را با T نمایش می‌دهیم.



$$f(x \pm T) = f(x)$$



تابع متناوب: تابع $f(x)$ را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی مثبت T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ و $x \pm T \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

دوره تناوب: کوچکترین مقدار T که رابطه $f(x \pm T) = f(x)$ را برقرار کند، دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌نامیم.

دوره تناوب در توابع مثلثاتی

$$\begin{cases} y = a \sin(bx + k) + c \\ y = a \cos(bx + k) + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} y = a \tan(bx + k) + c \\ y = a \cot(bx + k) + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

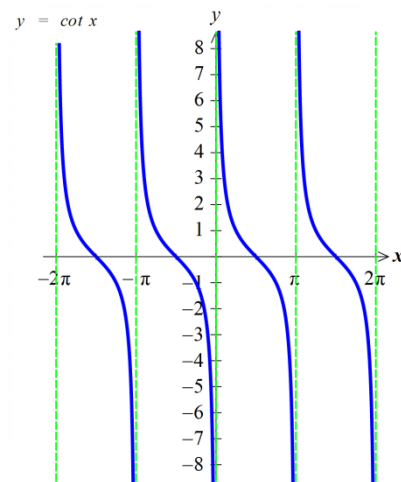
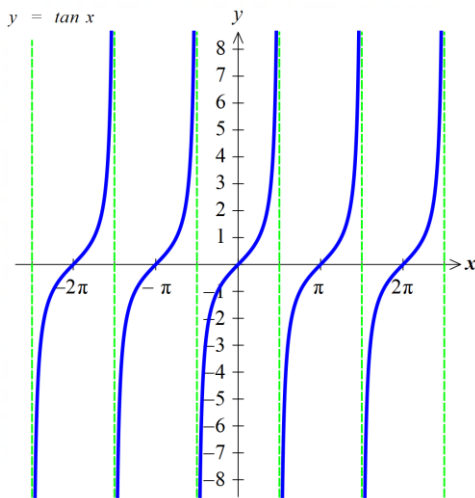
نکته: تنها عامل مؤثر در دوره تناوب توابع مثلثاتی، ضریب x موجود در کمان تابع مثلثاتی (b) است و اعداد a ، c و k روی دوره تناوب بی‌تأثیر هستند.

نکته: دامنه تابع متناوب الزاماً $\mathbb{R}$ نیست. مثلاً تابع $y = \tan x$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \pm (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

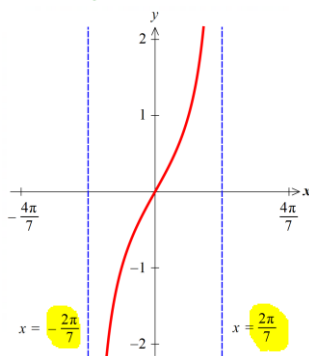
در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد،
اکیا صعودی است.

نمودار توابع $y = \cot x$ و $y = \tan x$ به صورت زیر هستند.



$$T = \frac{4\pi}{5}$$

مثال: قسمتی از شکل تابع $y = \tan ax$ به صورت زیر است. مقدار a را بیابید.



$$T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$a = \pm \frac{5}{4}$
 $a > 0$ → اکیا صعودی بین مجانب‌ها ✓
 $a < 0$ → اکیا نزولی بین مجانب‌ها ✗

$$a = \frac{5}{4}$$

نکته: دوره تناوب دو تابع باید هم جنس باشد؛ یعنی اگر دوره تناوب بخشی از تابع ضربی از π یا هر عدد گنگ دیگری مانند $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... باشد و دوره تناوب بخش دیگری از تابع، عددی گویا باشد، این تابع در کل نمی‌تواند متناوب باشد.

نکته: اگر T_f دوره تناوب تابع $f(x)$ و T_g دوره تناوب تابع $g(x)$ باشد، آنگاه ک.م.م T_f و T_g یک دوره تناوب برای $f+g$, $f-g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ خواهد بود ولی الزاماً کوچکترین دوره تناوب نیست.

در نکته فوق، شرط این که توابع $f+g$, $f-g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ متناوب باشند، این است که $\frac{T_f}{T_g}$ مقداری گویا باشد.

نکته: یک راه ساده برای پیدا کردن ک.م.م چند عبارت کسری این است که ک.م.م صورت کسرها را به ب.م.م مخرج کسرها تقسیم کنیم.

مثال: برای هر یک از توابع زیر، یک دوره تناوب (نه الزاماً کوچکترین دوره تناوب) را در صورت وجود بیابید.

☆ $f(T+x) = f(x)$ حس $T=\pi$

۱) $y = \sin x + \cos 2x + \tan 3x + \cot 4x$

$T = \left[\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right] = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = 2\pi$

حس $T=\pi$: $f(\pi+x) = \sin(\pi+x) + \cos(2\pi+2x) + \tan(\pi+3x) + \cot(\pi+4x)$

$T=2\pi$ - $\sin x + \cos 2x + \tan 3x + \cot 4x \neq f(x)$

۲) $y = \sin \sqrt{x} \cos 9x + 2$ $\pi+x$

$T = \left[\frac{2\pi}{\sqrt{x}}, \frac{2\pi}{9} \right] = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = 2\pi$

حس $T=\pi$: $f(\pi+x) = \sin(\sqrt{\pi+x}) \cos(9\pi+9x) + 2$

$f(\frac{2\pi}{\sqrt{x}}+x) = !!!$ (- $\sin \sqrt{x}$) (- $\cos 9x$) + 2 = $\sin \sqrt{x} \cos 9x + 2 = f(x)$

اصلي $T = \pi$

✗ ۳) $y = \sin 2x + \cos \sqrt{2}(x+1)$

$T_f = \frac{2\pi}{2}, T_g = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad \frac{T_f}{T_g} = \frac{\frac{2\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}+x) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos x + \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin x$

✗ ۴) $y = \cos \pi x + \tan x$

$T_f = \frac{2\pi}{\pi}, T_g = \frac{\pi}{1} \quad \frac{T_f}{T_g} = \frac{2}{1} \notin \mathbb{Q}$

۵) $y = \pi \cot \pi x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{5} \right)$ $\pi+x$ $\pi+x$

$T = \left[\frac{\pi}{\pi} = 1, \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{\pi}{3}} = 6 \right] = 6$

$f(\pi+x) = \pi \cot(\pi+\pi) + \sqrt{2} \cos(\pi+\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5})$ بررسی حس $T=3=?$

$\pi \cot(\pi) - \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}) \neq f(x) \quad T \neq 3$

نکته: اگر x در کمان مثلثاتی، توانی جز عدد یک داشته باشد، تابع متناوب نیست.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را تعیین نمایید.

$f(x) = \sin(x^2 + 1)$ ✗

$g(x) = \cos(3x^2 - 7x)$ ✗

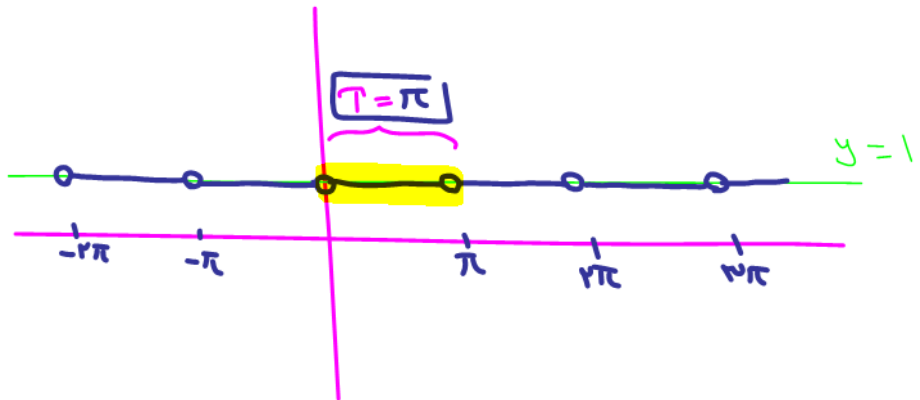
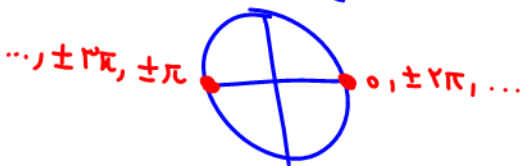
$h(x) = \tan(\pi x^2 - x)$ ✗

مثال: تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ از نظر متناوب بودن چگونه است؟

- ۱- متناوب است اما کوچکترین دوره تناوب ندارد.
- ۲- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.
- ۳- متناوب نیست
- ۴- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن π است.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$$

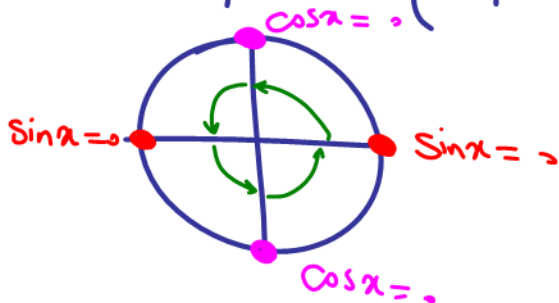


مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan x \cdot \cot x$ را بیابید.

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

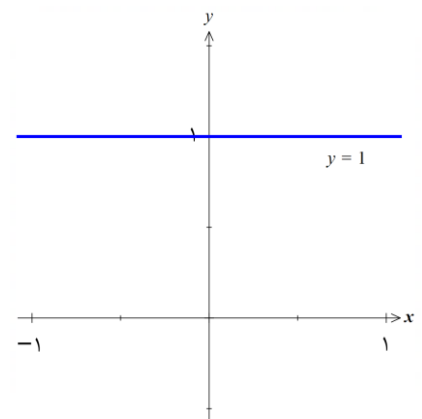


$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x \cdot \cos x = 0\}$$



$$T = \frac{\pi}{2}$$

نکته: توابع ثابت متناوب می باشند ولی دوره تناوب اصلی ندارند.

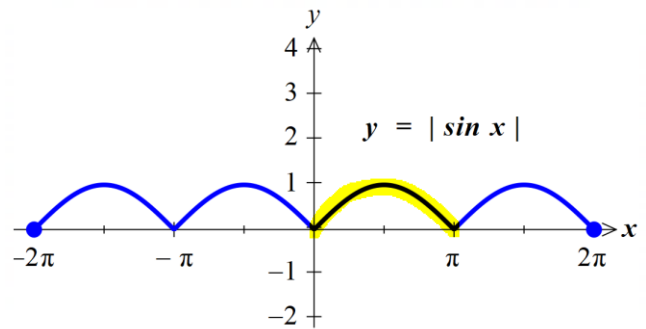
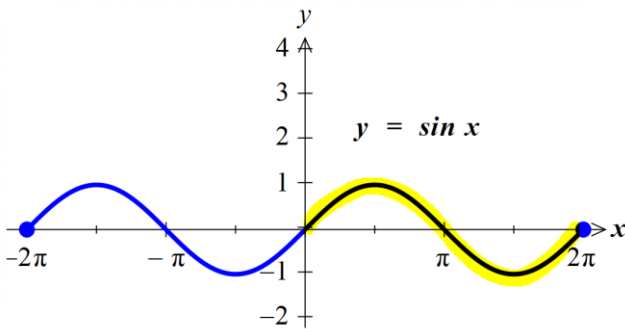


نکته: توان‌های فرد، دوره تناوب توابع $\sin x$ و $\cos x$ را تغییر نمی‌دهند.

$$\begin{cases} y = \sin x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} \\ y = \sin^3 x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} \end{cases}$$

نکته: توان‌های زوج و قدرمطلق، دوره تناوب توابع $\sin x$ و $\cos x$ را نصف می‌کنند.

$$\begin{cases} y = \sin^{2n}(ax) \\ y = \cos^{2n}(ax) \\ y = |\sin(ax)| \\ y = |\cos(ax)| \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$



نکته: توابع $\tan x$ و $\cot x$ به هر توانی برسند (چه زوج، چه فرد) دوره تناوب آنها تغییر نمی‌کند و قدرمطلق نیز روی دوره تناوب آنها بی‌تأثیر است.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $y = |\cos 3x| + \left| \tan^2 \frac{x}{3} \right| + 3 \cos^3 x$ را بیابید.

$$T = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = \frac{3\pi}{1}, \frac{2\pi}{1} \right] = \frac{6\pi}{1} \Rightarrow T = 6\pi$$

بررسی
 $T = 3\pi$ ؟

$$f(3\pi + x) = f(x) \text{ برسی}$$

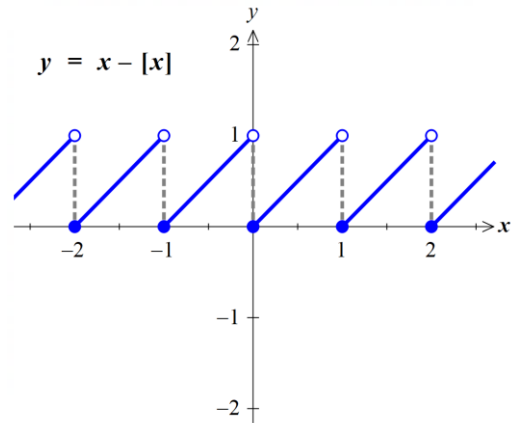
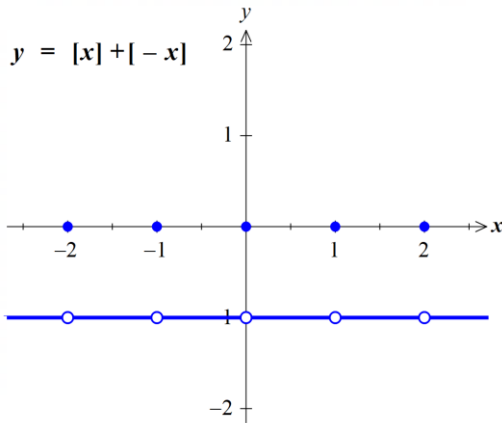
$$\begin{aligned} f(3\pi + x) &= |\cos 3(3\pi + x)| + \left| \tan^2 \left(\frac{3\pi + x}{3} \right) \right| + 3 \cos^3(3\pi + x) \\ &= |\cos(9\pi + 3x)| + \left| \tan^2 \left(\pi + \frac{x}{3} \right) \right| + 3 \cos^3 \left(\frac{3\pi}{3} + x \right) \\ &= |-\cos 3x| + \left| \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right| + 3(-\cos x)^3 \\ &= |\cos 3x| + \left| \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right| - 3 \cos^3 x \end{aligned}$$

$$f(3\pi + x) = |\cos 3x| + \left| \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right| - 3 \cos^3 x \neq f(x)$$

دوره تناوب توابع غیر مثلثاتی

$$\begin{cases} y = ax - [ax] \\ y = [ax] + [-ax] \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$y = (-1)^{[ax+b]} \Rightarrow T = \frac{2}{|a|}$$



یافتن دوره تناوب اصلی:

از آنجایی که برای توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ مقدار $[T_f, T_g]$ یک دوره تناوب بوده ولی لزوماً دوره تناوب اصلی نمی باشد، ابتدا یک دوره تناوب تابع را از فرمول های گفته شده یافته و سپس نصف این دوره تناوب را به روشی که در زیر توضیح داده می شود، بررسی می کنیم تا مشخص شود که اگر T دوره تناوب است، آیا $\frac{T}{2}$ هم دوره تناوب است یا خیر.

اگر $\frac{T}{2}$ دوره تناوب نبود، T را به عنوان دوره تناوب اصلی تابع معرفی می کنیم ولی اگر $\frac{T}{2}$ هم دوره تناوب تابع بود، باز هم تناوب را نصف می کنیم و $\frac{T}{4}$ را امتحان می کنیم و این کار (نصف کردن دوره تناوب) را تا جایی ادامه می دهیم که عدد نصف شده دوره تناوب تابع نباشد.

روش بررسی $\frac{T}{2}$ به عنوان دوره تناوب:

مقدار x را به $x + \frac{T}{2}$ تبدیل کرده و در تابع، جایگذاری می کنیم. اگر با عملیات جبری مشخص گردید که رابطه $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$ برقرار است، $\frac{T}{2}$ نیز دوره تناوب تابع $f(x)$ است و در غیر این صورت دوره تناوب را T در نظر می گیریم.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = ax - [ax] \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$f(x) = 3 \left[\frac{x}{3} \right] - x = -3 \left(\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3} \right] \right)$$

$$T = \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$$

$$g(x) = 6 \left[\frac{x}{6} \right] - 8 \left[\frac{x}{8} \right]$$

$$6 \left[\frac{x}{6} \right] - x + x - 8 \left[\frac{x}{8} \right]$$



$$h(x) = 15x - [9x] - [6x] = 9x - [9x] + 6x - [6x]$$

$$9x + 6x$$

$$T = \left[T = \frac{1}{9}, T = \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{3} \Rightarrow T = \frac{1}{3}$$

نکته (مطالعه آزاد): در یافتن دوره تناوب تابع $f \circ g(x)$ ، اگر $g(x)$ متناوب نباشد، $f \circ g(x)$ نیز

متناوب نخواهد بود و برای حدس اولیه T_g را انتخاب کرده و سپس $\frac{T_g}{2}$ و ... را بررسی می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = \cos(\sin ax)$$

$$T = \frac{2\pi}{a}$$

روند نصف کردن
در حدس
 $T = \frac{\pi}{a}$

$$f(T+x) = f\left(\frac{\pi}{a} + x\right) =$$

$$\cos\left(\sin a\left(\frac{\pi}{a} + x\right)\right) = \cos\left(\sin(\pi + ax)\right)$$

$$= \cos(-\sin ax) = \cos(\sin ax) = f(x)$$



$$y = \sin(\cos ax)$$





$$y = \sin^n(ax)$$



$$y = \cos^{n+1}(ax)$$



$$y = \sin^n(ax) + \cos^n(ax)$$

نکته: برای تعیین دوره تناوب، ابتدا تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\cos x + 5\sin x} = \frac{2\tan x + 3}{3 + 5\tan x} = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow T = [\pi, \pi] = \pi$$

Handwritten notes on the diagram: $\frac{2\pi}{1}$ and $\frac{2\pi}{1}$ above the numerator terms, and $\frac{3\pi}{1}$ and $\frac{5\pi}{1}$ below the denominator terms. An arrow points from the denominator term $5\tan x$ to $\frac{\pi}{1}$.

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2\cot \alpha$$

$$y = \cot(ax) - \tan ax$$

$$f(x) = +2\cot(2ax) \xrightarrow{\text{تناوب}} T = \frac{\pi}{|2a|}$$

آیا تناوب $T = \pi$ است؟



$$y = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x$$

$a = \frac{1}{\pi}$

$$T = \left[T = \frac{2}{\frac{1}{\pi}} = 2\pi, T = \frac{2\pi}{\frac{1}{1}} = 2\pi \right] = 2\pi$$

$$f(\pi + x) = (-1)^{\left[\frac{\pi+x}{\pi}\right]} \cos(\pi+x)$$

$$(-1)^{\left[1+\frac{x}{\pi}\right]} \cos(\pi+x)$$

$$(-1)^{1+\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos(\pi+x)$$

$$(-1) \times (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \times (-\cos x)$$

$$= (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x = f(x)$$



حدس ما: $f(T+x) = f\left(\frac{\pi}{a} + x\right)$

$T = \frac{\pi}{|a|}$

$$\left| \sin a\left(\frac{\pi}{a} + x\right) \right| + \left| \cos a\left(\frac{\pi}{a} + x\right) \right|$$

$$\left| \sin(\pi + ax) \right| + \left| \cos(\pi + ax) \right| = \left| \sin ax \right| + \left| \cos ax \right|$$

$-\sin ax$ $-\cos ax$

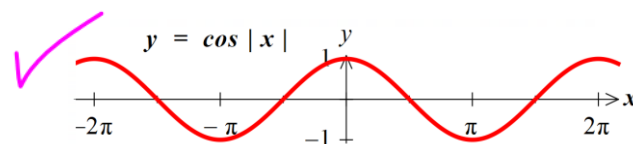
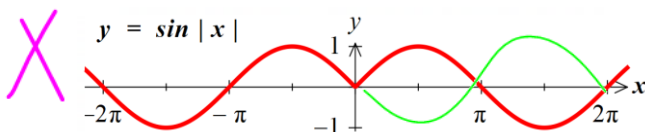
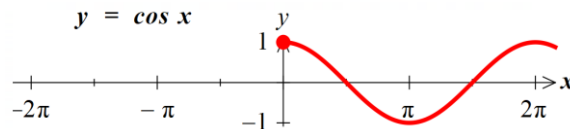
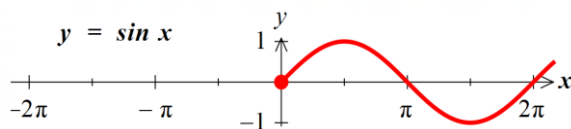
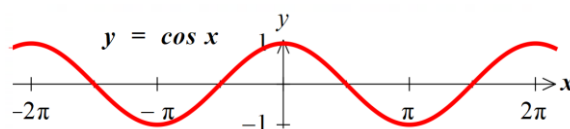
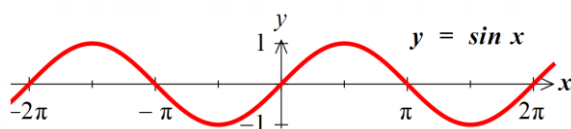
حدس ما

$T = \frac{\pi}{2a} = ?$

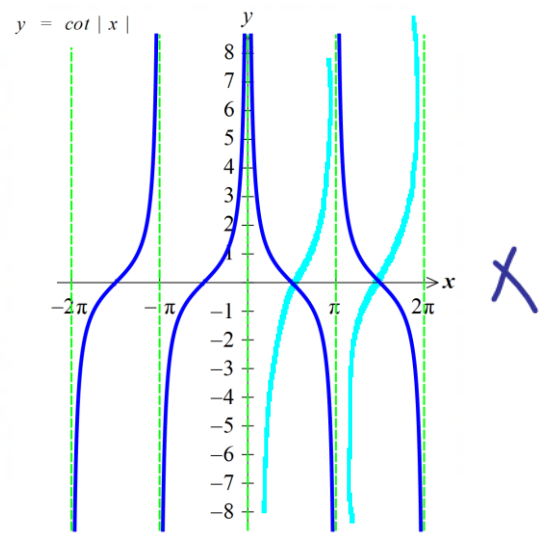
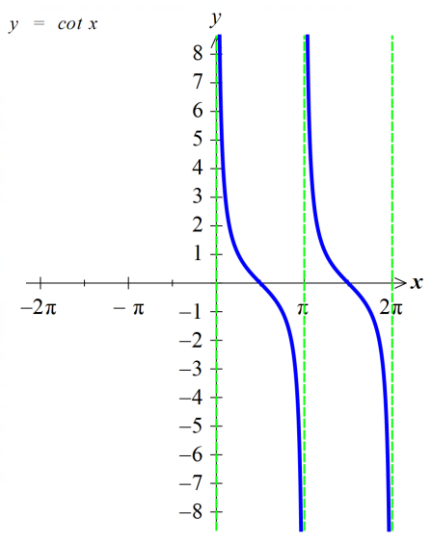
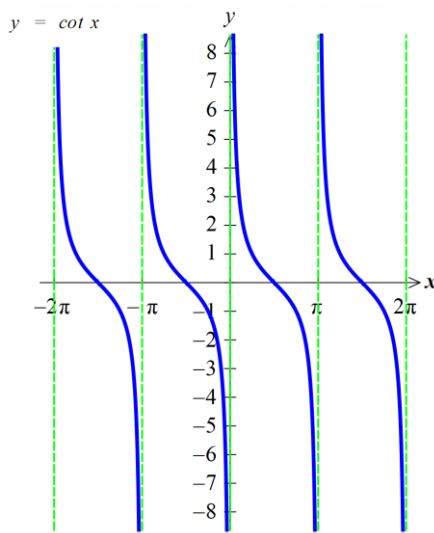
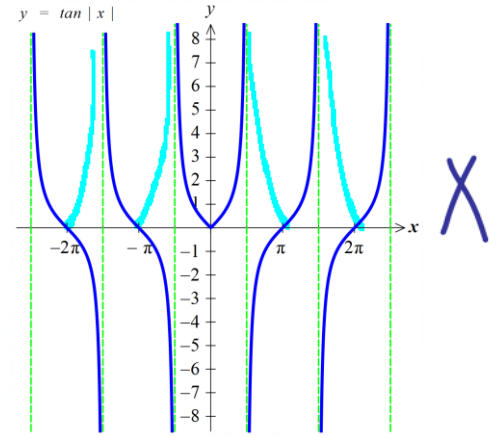
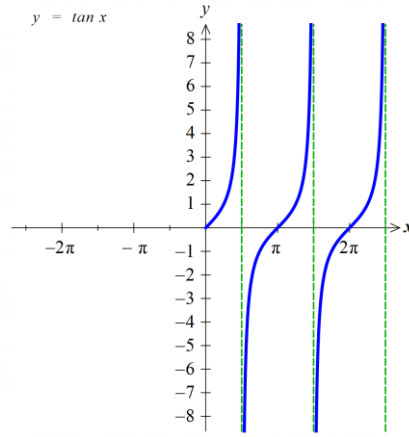
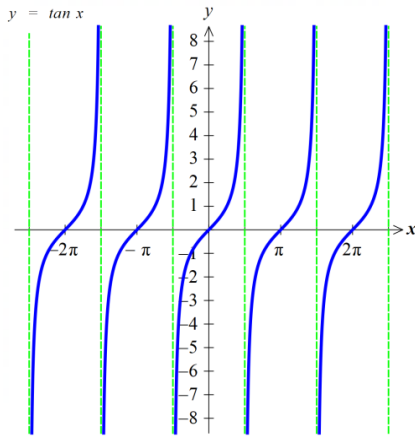
$$f\left(\frac{\pi}{2a} + x\right) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + ax\right) \right| + \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + ax\right) \right|$$

$$\left| \cos ax \right| + \left| -\sin ax \right| = \left| \cos ax \right| + \left| \sin ax \right|$$

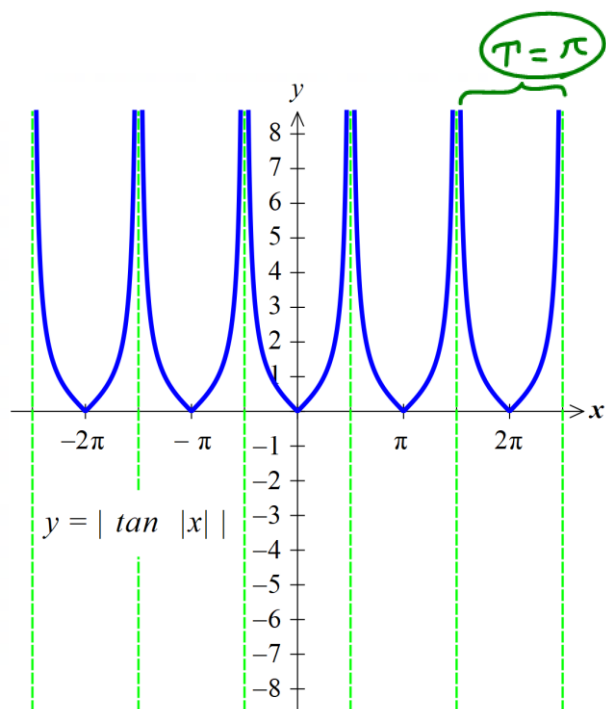
مثال: دوره تناوب توابع $y = \cos |x|$ و $y = \sin |x|$ را تعیین کنید.



مثال: دوره تناوب توابع $y = \tan |x|$ و $y = \cot |ax|$ را بیابید.



مثال: دوره تناوب توابع $y = |\tan |x||$ را بیابید.



مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x \rightarrow T_f = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan 3x - \cot 3x$ را بیابید.

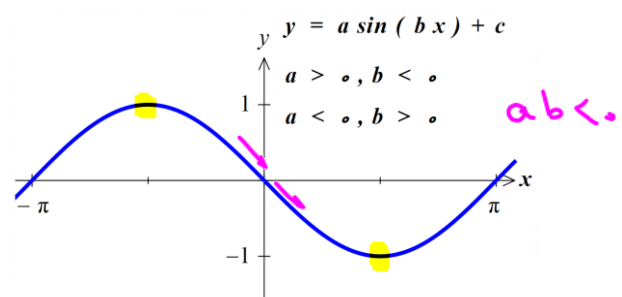
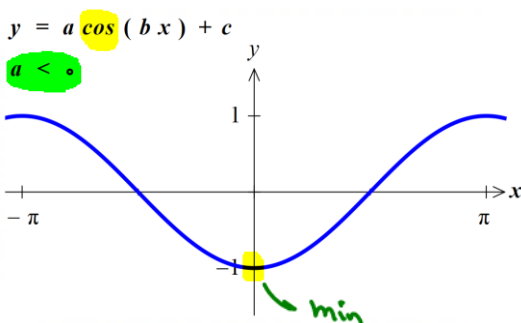
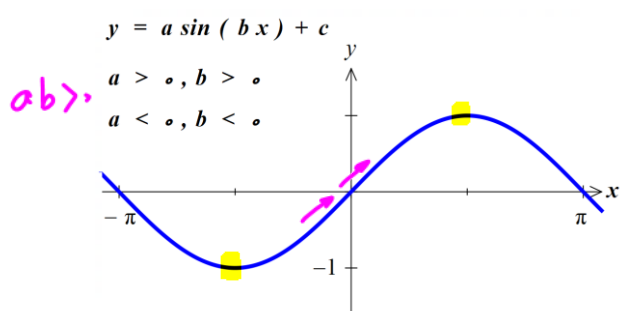
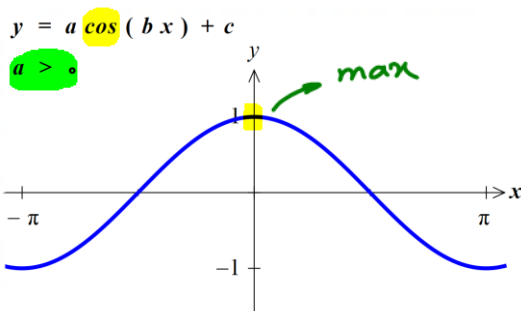
$$f(x) = -2 \cot 6x \rightarrow T_f = \frac{\pi}{6}$$

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 3x - [3x] + \cos^4 \pi x$ را بیابید.

$$T_f = \left[T_g = \frac{1}{3}, T_h = \frac{\pi}{\pi} = 1 \right] = 1$$

$$T_f = 1$$

یافتن ضابطه توابع مثلثاتی از روی نمودار آن



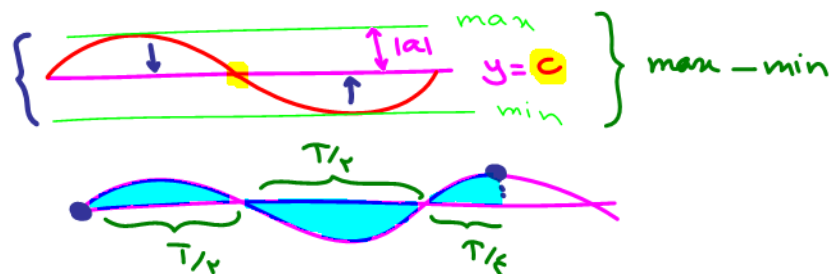
نکته: تابع $y = \cos x$ در $x = 0$ ماکزیمم یا مینیمم دارد در صورتی که تابع $y = \sin x$ در $x = 0$ ماکزیمم یا مینیمم ندارد.

از روی نمودار می‌توانیم مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع را تعیین کرده و از روی آن‌ها با توجه به فرمول‌های زیر، ضرایب a ، b و c را بدست آوریم.

$$|a| = \frac{\max - \min}{2}$$

$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$



نکته: برای یافتن مقادیر $\max$ و $\min$ از روی ضرایب a ، b و c ، از فرمول‌های زیر بهره می‌بریم.

$$\begin{cases} \max = c + |a| \\ \min = c - |a| \end{cases}$$

مثال: مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع $y = -2 \sin 3x - 7$ را بیابید.

$$y = -2 \sin 3x - 7$$

$$a = -2$$

$$c = -7$$

$$\max = c + |a| = -7 + |-2| = -5$$

$$\min = c - |a| = -7 - |-2| = -9$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$$

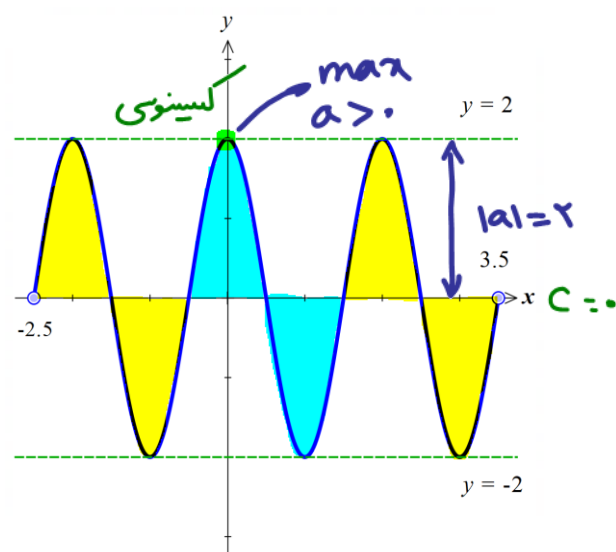
مثال: شکل مقابل مربوط به تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{1}{2} + bx\right)\pi$ است. $a \cdot b$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲✓)

۱ (۱)



$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$

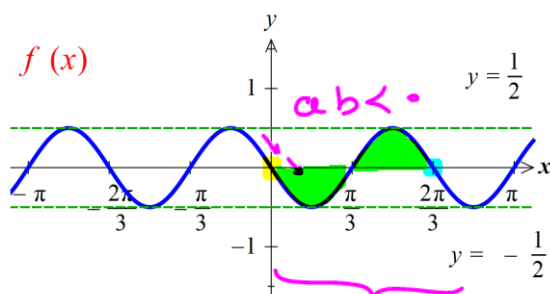
$$3T = 3,5 - (-2,5) = 6 \Rightarrow T = 2$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$|a| = 2 \rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

$$ab = 2$$

مثال: ضابطه توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ که نمودار آنها رسم شده است را بیابید.



$$y = a \sin(bx) + c$$

$$\begin{cases} c + |a| = \frac{1}{2} \\ c - |a| = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\oplus$

$$2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

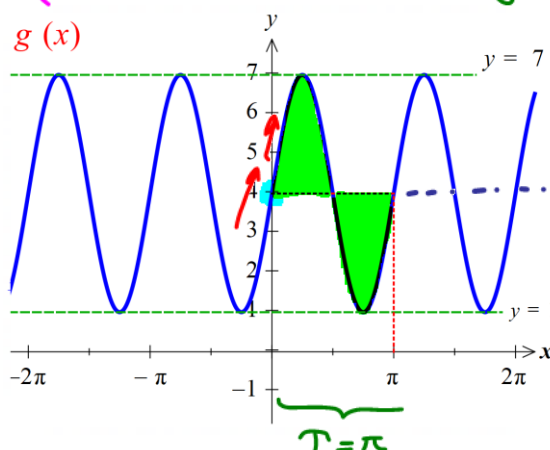
$$0 + |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}, b = -3, c = 0 \\ a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{4} \sin(-3x)$$

$$y = \frac{1}{4} \sin(3x) \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \sin(3x)$$



$$y = a \sin bx + c, a, b > 0$$

$$\begin{cases} a = -3, b = -2, c = 4 \\ a = 3, b = 2, c = 4 \end{cases}$$

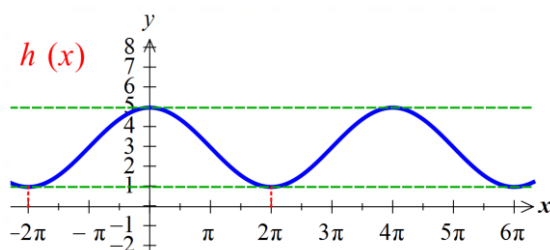
$$c = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$|a| = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

$$|b| = 2$$

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

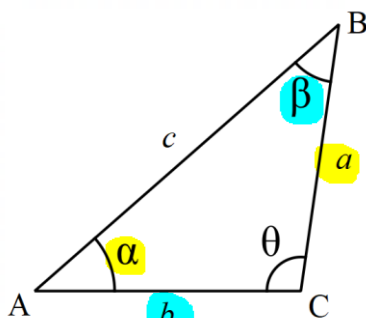


کاربردهایی از مثلثات

۱- قضیه سینوس ها

مقدار اندازه هر ضلع تقسیم بر سینوس زاویه مقابل آن، مقداری ثابت است.

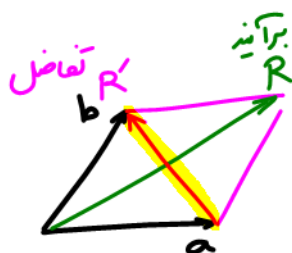
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta}$$



۲- قضیه کسینوس ها

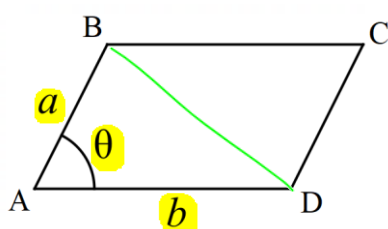
کاربرد: یافتن اندازه ضلع سوم مثلث

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{cases}$$

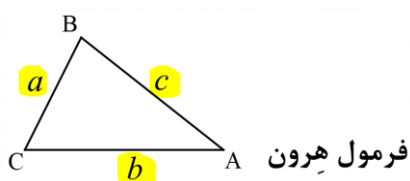


۳- مساحت مثلث و متوازی الاضلاع

مساحت موازی الاضلاع مقابل برابر است با: $S = ab \sin \theta$



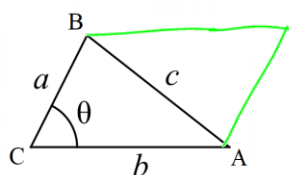
مساحت مثلث را در سه حالت می توانیم تعیین کنیم.



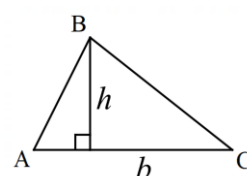
فرمول هرون

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

نصف محیط $P = \frac{a+b+c}{2}$



$$S = \frac{ab \sin \theta}{2}$$



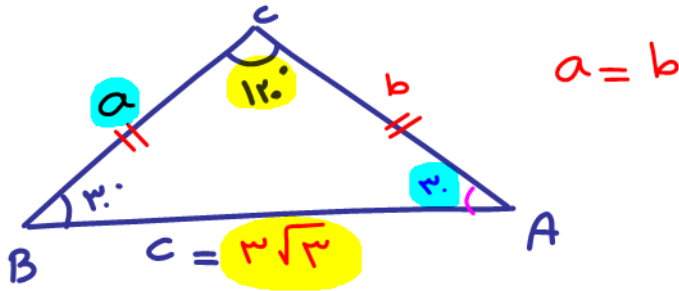
$$S = \frac{bh}{2}$$

مثال: مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد را بیابید.

$$P = \frac{7+9+12}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5}$$

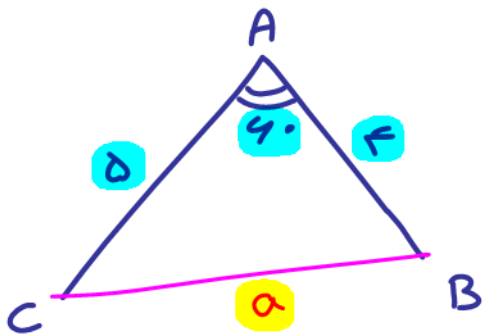
مثال: در مثلث ABC اگر $\hat{B} = 30^\circ$ و $\hat{C} = 120^\circ$ و اندازه ضلع AB برابر $3\sqrt{3}$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.



$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 3$$

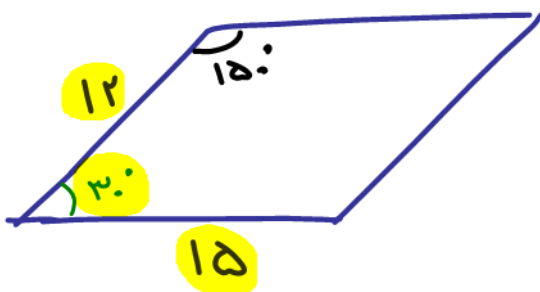
مثال: در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 60^\circ$ و اندازه اضلاع AB و AC به ترتیب 4 و 5 واحد باشد، اندازه ضلع BC را بیابید.



$$a^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4) \cos 60^\circ = 21$$

$$a^2 = 21 \Rightarrow a = \sqrt{21}$$

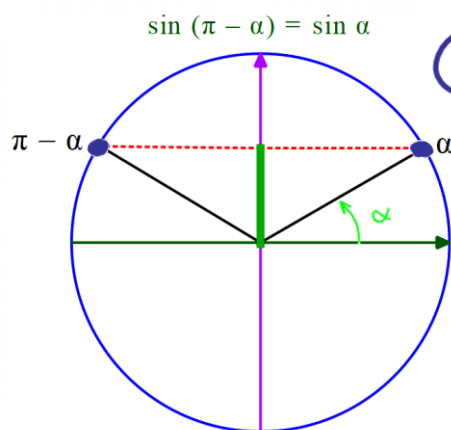
مثال: اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع 12 و 15 سانتی متر و اندازه یک زاویه آن 150° است. مساحت متوازی الاضلاع را بیابید.



$$S = 12 \times 15 \times \sin 30^\circ = 90$$

$$S = 90$$

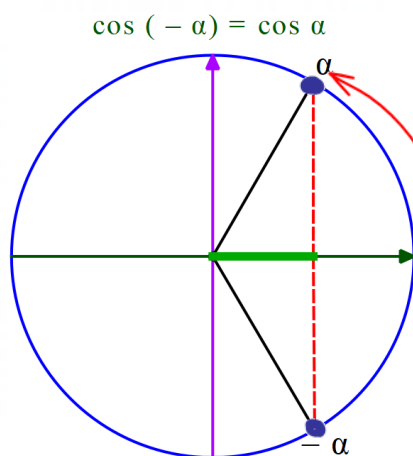
معادلات مثلثاتی



دینوس چه زاویه‌ای در ناحیه ۱، این عدد است؟ α

$$\sin x = \text{عدد}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

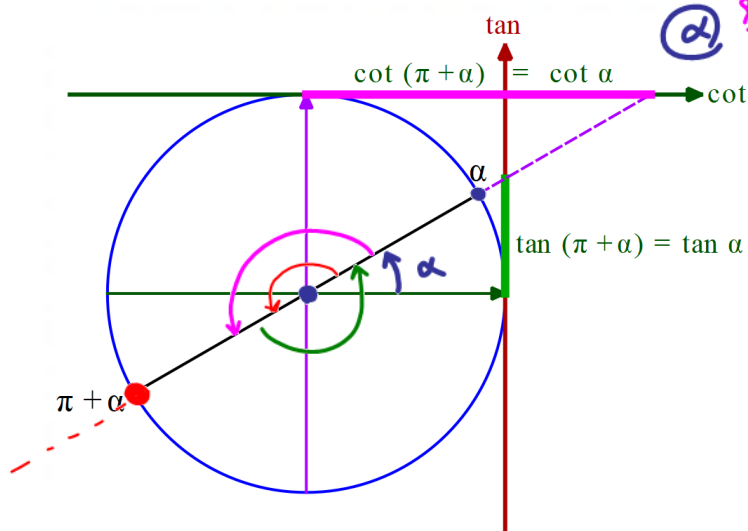


کسینوس چه زاویه‌ای در ناحیه ۱، این عدد است؟ α

$$\cos x = \text{عدد}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$



تانژانت چه زاویه‌ای در ناحیه ۱، برابر این عدد است؟ α

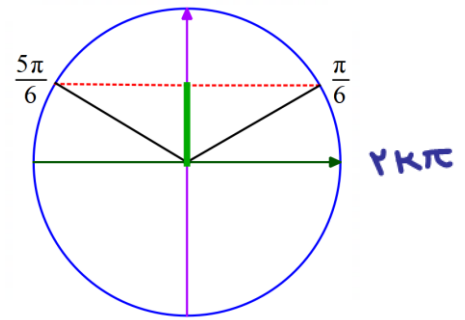
$$\tan x = \text{عدد}$$

$$\begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید. $\sin x = \sin(\frac{\pi}{6})$ $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ $2 \times 30^\circ = 60^\circ$

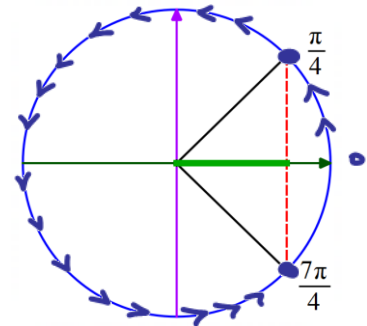


~~$-\frac{21\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$~~

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید. $\cos x = \cos(\frac{\pi}{4})$ $[-\pi, \pi]$

$$x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\pm 45^\circ$



~~$-\frac{15\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}, \dots$~~

مثال: کدام گزینه بخشی از جواب معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin x$ است؟

$\frac{(2k+1)\pi}{2}$ (۴)

$\frac{(2k+1)\pi}{4}$ (۳) ✓

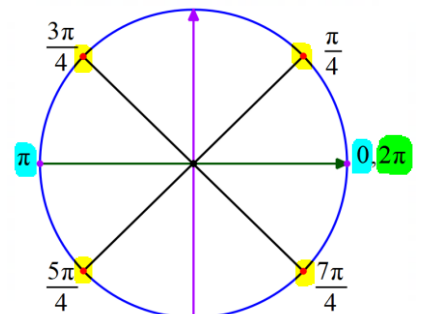
$\frac{k\pi}{4}$ (۲)

$\frac{k\pi}{2}$ (۱)

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi \rightarrow \text{چپ در راست} \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \rightarrow \text{نیمازها} \end{cases}$$

$[0, 2\pi]$
چندتا جواب؟
✓ تا جواب



$k=0 \rightarrow$ ۴ ضلع
 $k=1 \rightarrow$ ۲ ضلع
 $k=2 \rightarrow$ ۲ ضلع

نکته: در معادلات مثلثاتی باید جنس تابع مثلثاتی طرفین تساوی با هم یکسان باشد.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha \end{cases}$$

مثال: جوابهای معادله مثلثاتی $\sin 4x = \cos 2x$ را که در بازه $[0, 4\pi]$ می باشند بیابید.

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$$

$$2x = 2K\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Rightarrow$$

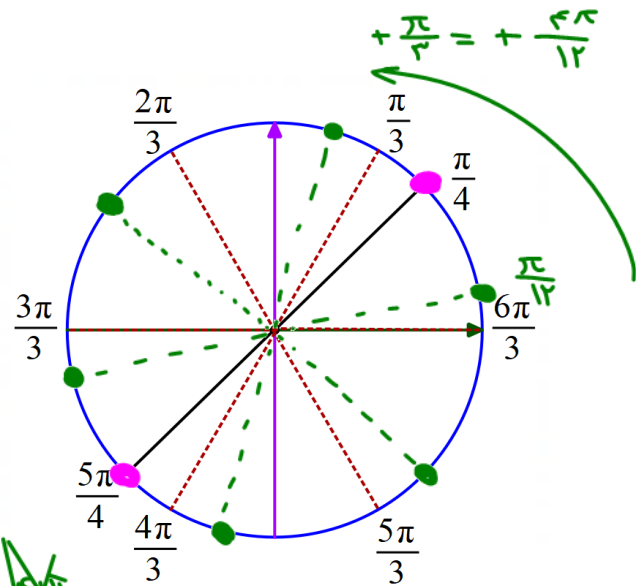
$$\begin{cases} 9x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{K\pi}{9} + \frac{\pi}{18} \\ -2x = 2K\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -K\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$K \equiv -K$

$$x = K\pi + \frac{\pi}{4}$$

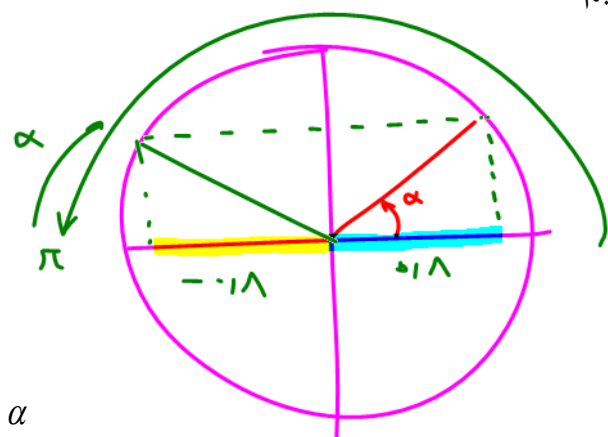
$$\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}, \dots, \frac{25\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$$



نکته: اگر در معادلات مثلثاتی، عددی که با نسبتهای مثلثاتی برابر است، منفی باشد، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} \sin x = a & \frac{\sin \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \tan x = a & \frac{\tan \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \cot x = a & \frac{\cot \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \cos x = a & \frac{\cos \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow \pi - \alpha \end{cases}$$



$$\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$\alpha = -\pi/4$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

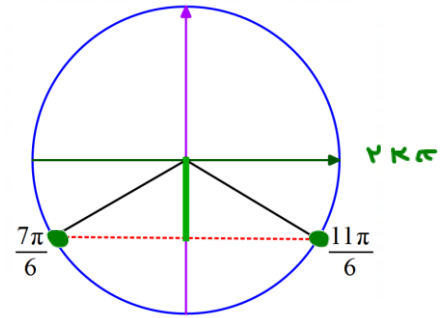
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$\pi - (-\pi/4)$

$+2\pi = \frac{12\pi}{4}$ $7 \times \frac{\pi}{4} = 7 \times 3 = 21$

$\dots, \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \right), \left(\frac{19\pi}{4}, \frac{23\pi}{4} \right), \dots$

$+2\pi$



$$\cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

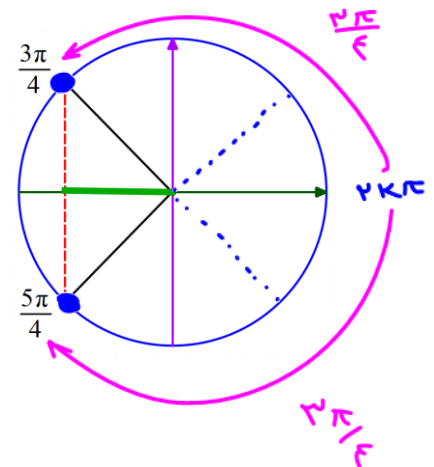
$\alpha = \frac{3\pi}{4}$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

راست



$$\cos 3x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} \equiv 120^\circ$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

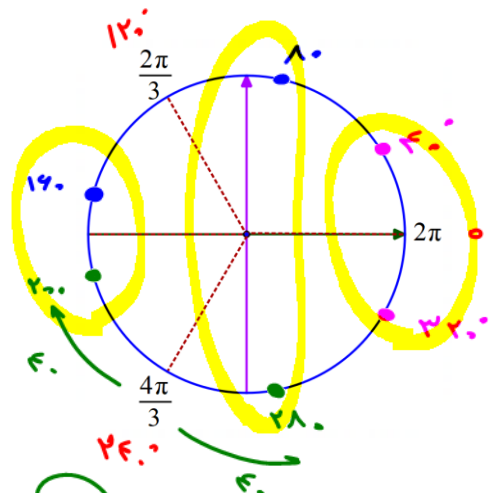
$$3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \div 3$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \pm \left(\frac{2\pi}{9} \right)$$

120°

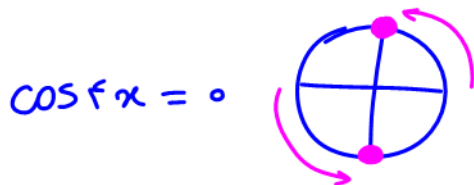
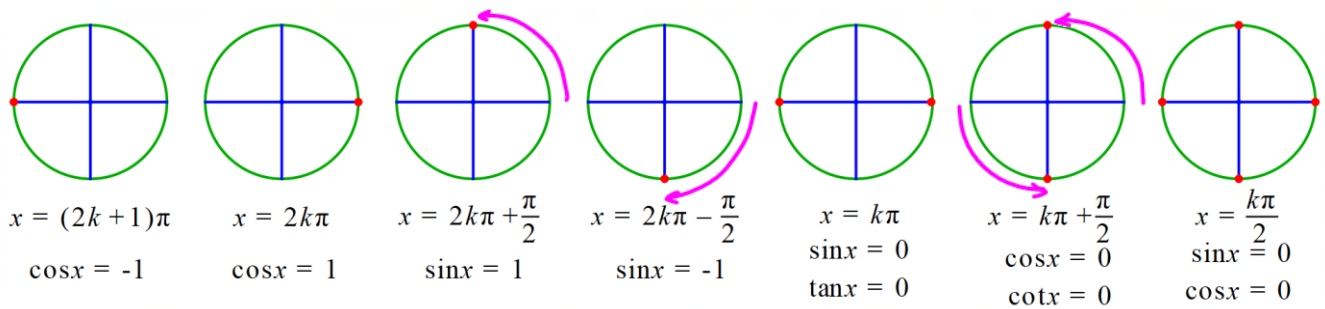
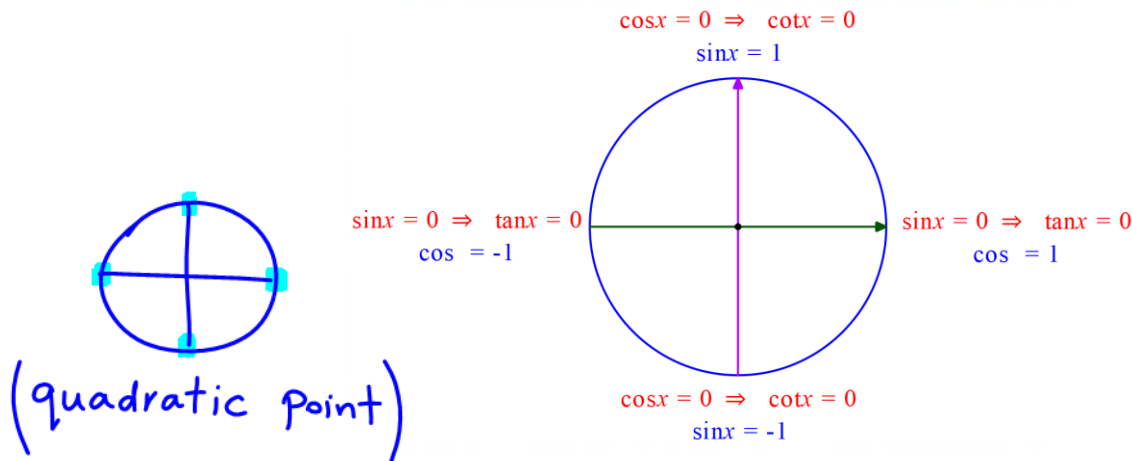
$k \times \frac{2\pi}{3}$
مضارب 120°

مجموع جوابها $= 3 \times 360^\circ = 3 \times 2\pi = 6\pi$
 $[0, 2\pi]$



حالات خاص معادلات مثلثاتی

در معادلات مثلثاتی، حالاتی را که نسبت‌های $\sin x$ و $\cos x$ برابر با اعداد صفر، ۱ یا -۱ شوند و یا اینکه نسبت‌های توابع $\tan x$ و $\cot x$ برابر با عدد صفر شوند، حالات خاص می‌نامیم که در این حالت جواب‌های معادلات مثلثاتی، از بین نقاط مرزی چهار ناحیه دایره مثلثاتی خواهند بود. در نتیجه برای ۷ حالت خاص زیر می‌توانیم فرمول‌های زیر را تعریف کنیم.



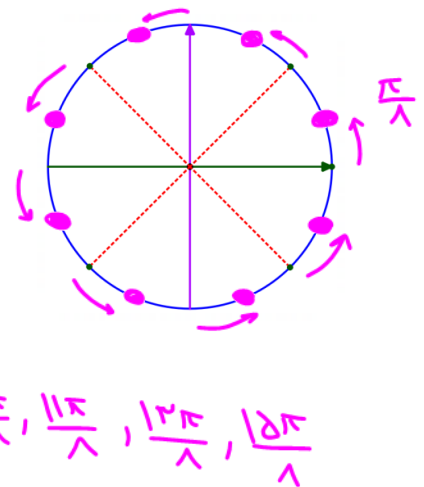
$$4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow \div 4$$

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

مضارب ۴۵°

۲۲,۵°

مثال: معادله مثلثاتی $\cos 4x = 0$ را حل کنید.



$$+\frac{\pi}{4} = +\frac{2\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos 2x = 2\cos x$ چند جواب در فاصله $[-\pi, \pi]$ دارد؟

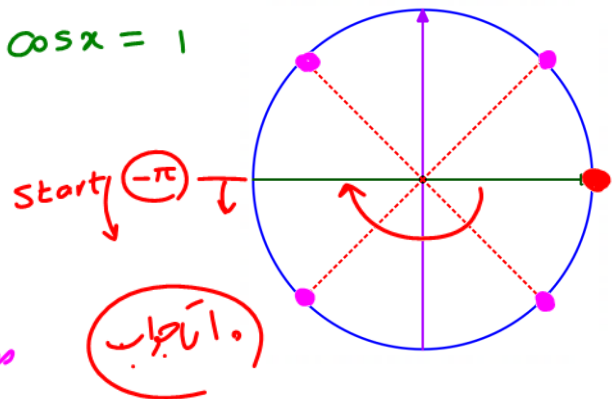
$$2\cos 2x \cos x - 2\cos 2x = 0$$

با شرط اینیم $\cos x = 1$
 $\cos 2x = 0$
 حل شود.

$$(2\cos 2x)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \cos x = 1$$

بالا و پایین دایره
راست دایره



$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

مقدار بنویسید

مثال: معادله مثلثاتی $\tan 4x \cdot \tan 3x = 1$ را حل کنید.

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} - 3x$$

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{4k\pi + \pi}{16} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{16}$$

$$\tan 4x = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x$$

$$\tan 4x = \cot 3x$$

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$$

این

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4 \checkmark)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$-\cos 2x$

$$-\cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times (-1)} \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$\frac{2\pi}{3}$

$$2x = 2k\pi \pm \left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$



مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ به کدام صورت است؟

$k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴)

$2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۳)

$2k\pi + \pi$ (۲) ✓

$k\pi$ (۱)

$\cos x = A$

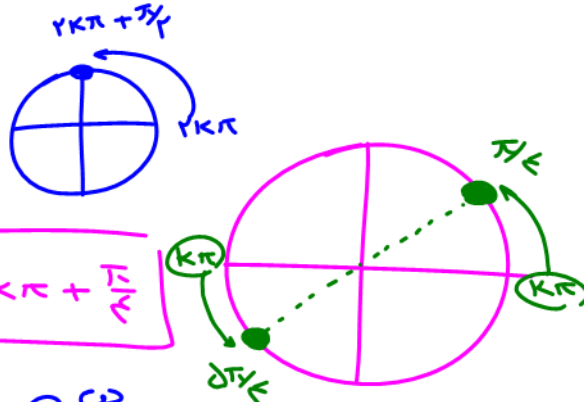
$2A^2 - A - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = (2k+1)\pi \\ A = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} > 1 \end{cases}$
جواب ندارد $\cos x = -\frac{3}{2} \times$

مثال: معادله مثلثاتی $\cot x + \tan x = 2$ را حل کنید.

$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$

$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{1} \Rightarrow \sin 2x = 1$

$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{4}$



مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ به کدام صورت است؟

صورت است؟

$k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴)

$2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) ✓

$2k\pi + \pi$ (۲)

$k\pi$ (۱)

$(-\sin x)(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0$

$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$

$(\sin x - 1)^2 = 0 \rightarrow$

$\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

$k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴)

$k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۲) ✓

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۱)

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} \alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2k\pi + \pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

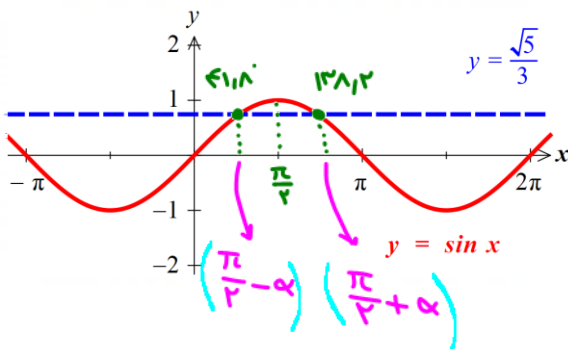
مثال: معادله مثلثاتی $(2 \cos x - \sqrt{7})(3 \sin x - \sqrt{5}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$(3 \sin x - \sqrt{5})(2 \cos x - \sqrt{7}) = 0$$

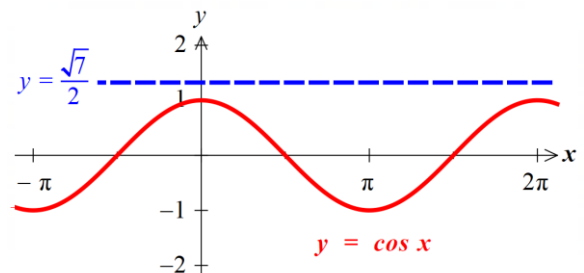
$$3 \sin x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$2 \cos x - \sqrt{7} = 0 \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx \frac{2.6}{2} = 1.3 > 1$$

جواب ندارد



$$\alpha \approx 41.2^\circ$$



کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده



حد و پیوستگی

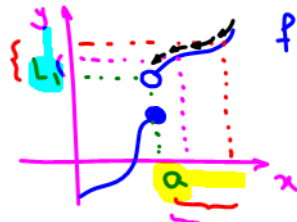
حد

تابع حقیقی $f(x)$ را در بازه‌ی I که شامل a باشد، در نظر می‌گیریم. تابع $f(x)$ می‌تواند در خود a تعریف شده نباشد.

تعریف حد راست: هر گاه بتوانیم هر چقدر که بخواهیم تابع $f(x)$ را به عدد حقیقی L_1 نزدیک کنیم، به شرط آن که متغیر x به اندازه‌ی کافی از سمت راست به عدد a نزدیک شود، می‌گوییم تابع $f(x)$ در

a دارای حد راست L_1 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$



تعریف حد چپ: هر گاه بتوانیم هر چقدر که بخواهیم تابع $f(x)$ را به عدد حقیقی L_2 نزدیک کنیم، به شرط آن که متغیر x به اندازه‌ی کافی از سمت چپ به عدد a نزدیک شود، می‌گوییم تابع $f(x)$ در

a دارای حد چپ L_2 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$



تذکر: وقتی تابع $f(x)$ به صورت بی‌کران بزرگ یا کوچک شود ($+\infty$ یا $-\infty$)، حدهای راست و چپ موجود نمی‌باشند.

تعریف حد: اگر نقاط اطراف a جزو دامنه‌ی تابع باشد و بتوانیم هر چقدر که می‌خواهیم به نقطه‌ی a نزدیک شویم و در این صورت تابع $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شود، می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a دارای حد L است و می‌گوییم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

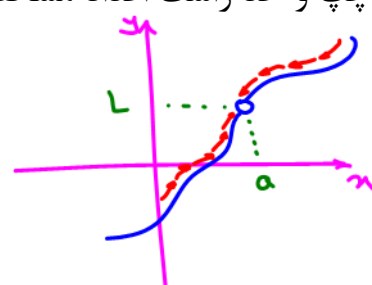
تذکر (نقطه‌ی میانی): اگر نقطه‌ی a جزو نقاط میانی دامنه باشد، یعنی در هر دو سمت نقطه‌ی a مسیرهایی برای نزدیک شدن به نقطه‌ی a وجود داشته باشد، در این صورت: حد در صورتی موجود است که حد چپ و حد راست اعداد مشخص و معینی شده و با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

$$\xrightarrow{L_1 = L_2} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

نقطه‌ی احادی

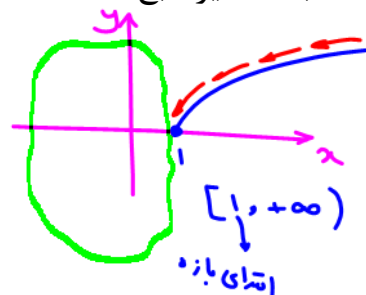


تذکر (نقطه‌ی ابتدایی): اگر نقطه‌ی a یک نقطه‌ی ابتدایی از دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد (فقط در سمت راست نقطه‌ی a مسیری برای نزدیک شدن به نقطه‌ی a وجود داشته باشد)، در صورتی که حد راست تابع وجود داشته باشد نیز تابع فاقد حد است زیرا تابع حد چپ ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{1^+-1} = \sqrt{0^+} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} = \sqrt{1^--1} = \sqrt{0^-} \notin \mathbb{R}; \quad 1^- \notin D_f$$

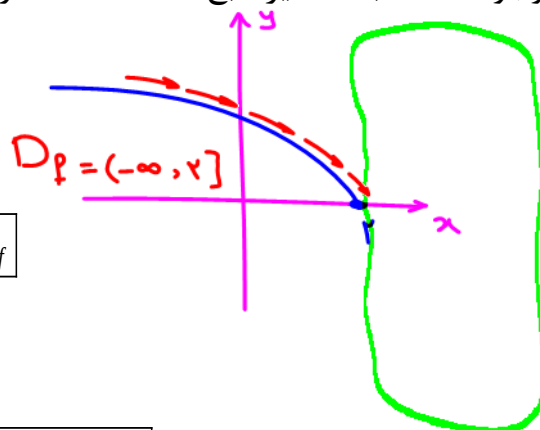


تذکر (نقطه‌ی انتهایی): اگر نقطه‌ی a یک نقطه‌ی انتهایی از دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد (فقط در سمت چپ نقطه‌ی a مسیری برای نزدیک شدن به نقطه‌ی a وجود داشته باشد)، در صورتی که حد چپ تابع وجود داشته باشد نیز تابع فاقد حد است زیرا تابع حد راست ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = \sqrt{2-2^-} = \sqrt{0^+} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x} = \sqrt{2-2^+} = \sqrt{0^-} \notin \mathbb{R}; \quad 2^+ \notin D_f$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{[3^-]-3} = \frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{[3^+]-3} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}; \quad 3^+ \notin D_f$$

$$f(x) = \frac{1}{[x]-3} \quad [x]=3 \rightarrow 3 \leq x < 4 \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{[4^-]-3} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0}$$

نکته: در تعاریف حد، با دو مقدار ε (اپسیلن) و δ (دلتا) مواجه می‌شویم که منظور از آن‌ها مقادیر بسیار کوچک (نزدیک به صفر) و مثبت می‌باشد.

$$0 < \delta, \quad \varepsilon \ll 1$$

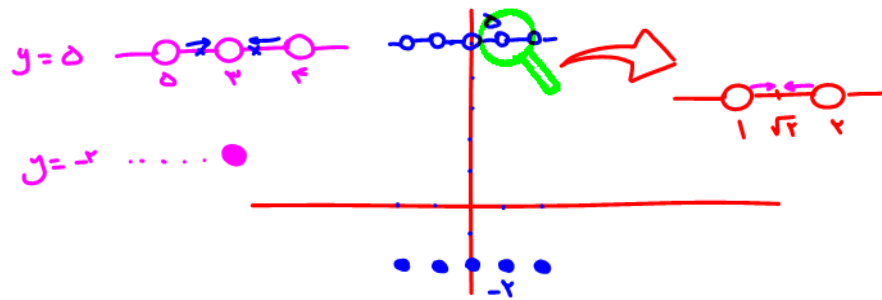
مفهوم میل کردن: وقتی می‌گوییم متغیر x به عدد a میل کرده است و با نماد $x \rightarrow a$ نمایش می‌دهیم، منظور این است که از دو سمت (مقادیر بیشتر از a از سمت راست و مقادیر کمتر از a از سمت چپ) متغیر x به عدد a نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه به عدد a نمی‌رسد.

$$x \rightarrow a \Rightarrow x \in (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 5 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \text{صفر}$$

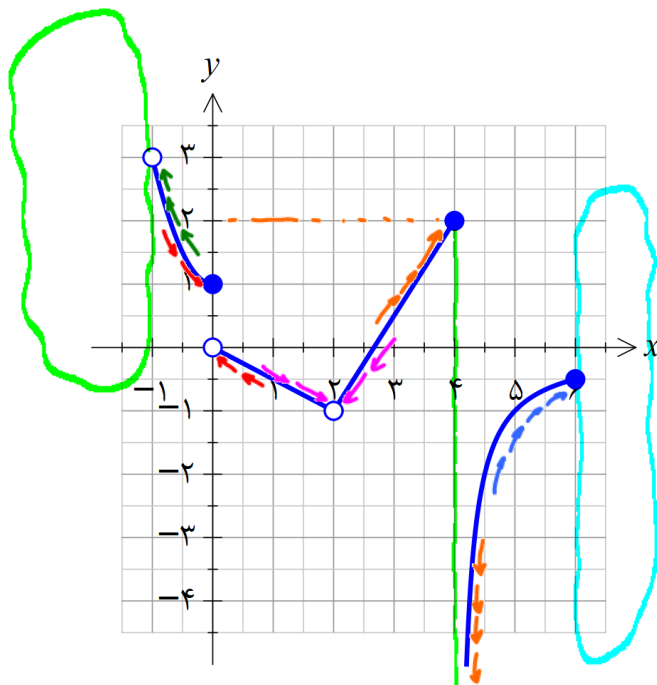


محاسبه‌ی حد از روی نمودار:

برای محاسبه‌ی حد راست، از مسیر سمت راست تابع (در صورت وجود) به سمت نقطه‌ی حدی نزدیک می‌شویم و زمانی که به نقطه‌ی مورد نظر رسیدیم، مقدار y نقطه‌ی مورد نظر را به عنوان حد راست معرفی می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی حد چپ، از مسیر سمت چپ تابع (در صورت وجود) به سمت نقطه‌ی حدی نزدیک می‌شویم و زمانی که به نقطه‌ی مورد نظر رسیدیم، مقدار y نقطه‌ی مورد نظر را به عنوان حد چپ معرفی می‌کنیم.

مثال: حد تابع $f(x)$ که نمودار آن در شکل مقابل ترسیم گردیده است را در نقاط با طول‌های $x = -1, 0, 2, 4, 6$ بیابید.



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

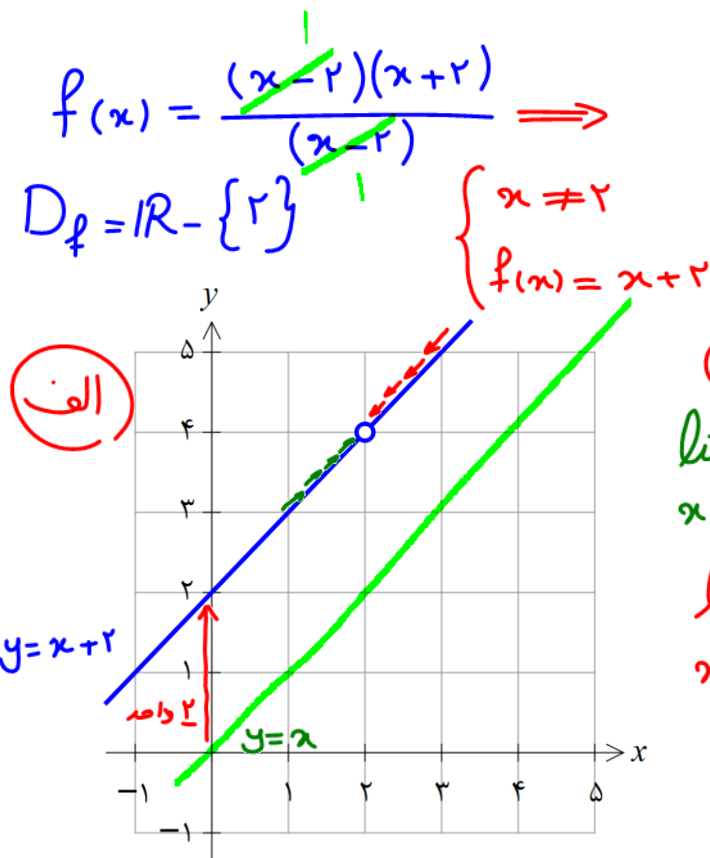
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مثال: تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را در نظر بگیرید.

الف) تابع مورد نظر را رسم نمایید.

ب) آیا تابع مورد نظر در نقطه‌ی $x = 2$ حد دارد؟



ب

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

مثال: با توجه به شکل مقابل، موارد خواسته شده را بنویسید.

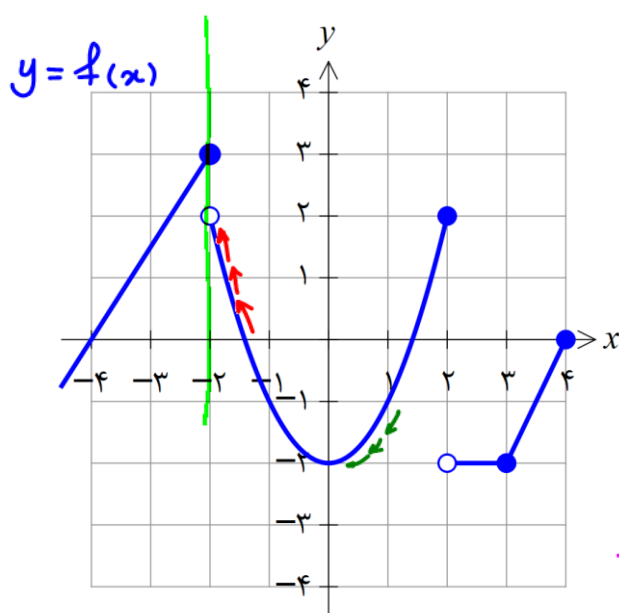
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x) = f(-1.9) = f(-2^+) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 2$

$x \rightarrow 2^-$
 $x = 1.9$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(-x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x+2)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2)$



ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$

$x \rightarrow (-2)^+$
 $x = -1.99$
 $x = -1.99 + 2 = 0.01$
 0^+

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 2$

$x \rightarrow 0^-$
 $x = 0.01$
 $x = 0.01 - 2 = -1.99$
 -1.99

مواردی که باید حدود چپ و راست به طور جداگانه محاسبه شوند

۱- حد در نقاط ابتدا یا انتهای بازه:

در نقاط ابتدا یا انتهای بازه، از آنجایی که از یک طرف نمی توان حد را مورد محاسبه قرار داد، مقدار حد تابع حتی در صورتی که حد یک طرفه ی آن (سمتی که جزو دامنه ی تابع می باشد) موجود باشد، ناموجود است.

تذکر: حدود یک طرفه معمولاً در دو مورد تولید می شوند:

الف) توابع رادیکالی فرجه ی زوج که در عدد حدی، عبارت زیر رادیکال صفر شود.

ب) توابع به فرم جزء صحیح که مخرج در عدد حدی، صفر مطلق شود.

مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه ی $x=2$ دارای حد است؟

$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_f = (-\infty, 2]$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x} &= \text{وجود ندارد} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: آیا تابع $f(x) = \frac{1}{[x]-3}$ در نقطه ی $x=3$ دارای حد است؟

$$[x]-3=0 \Rightarrow$$

$$[x]=3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

مخرج را صفری کنه.

$$D_f = \mathbb{R} - [3, 4)$$

$$D_f = (-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x]-3} &= \frac{1}{[3]-3} = \frac{1}{3-3} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{[x]-3} &= \frac{1}{[4]-3} = \frac{1}{4-3} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

۲- حد توابع کسری اگر نقطه ی حدی ریشه ی ساده ی مخرج باشد:

اگر نقطه ی حدی داده شده، فقط مخرج کسر را صفر کند و این ریشه از نوع ریشه ی ساده باشد، باید حد

راست و چپ به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند. $\frac{3}{0^+} = \frac{3}{0.000...1} = \frac{3}{1.000...0} = \frac{3}{1.000...0} = 3.000...0 = +\infty$ (تأصغر ۱.۰۰ تا صفر ۱.۰۰)

مثال: حد تابع $f(x) = 3^{x-2}$ را وقتی که $x \rightarrow 2$ بیابید.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} 3^{\frac{3}{x-2}} &= 3^{\frac{3}{2^- - 2}} = 3^{\frac{3}{0^-}} = 3^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 3^{\frac{3}{x-2}} &= 3^{\frac{3}{2^+ - 2}} = 3^{\frac{3}{0^+}} = 3^{+\infty} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: آیا تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ در نقطه‌ی $x = 1$ دارای حد است؟



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(\underbrace{1^- - 1}_{0^-})^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(\underbrace{1^+ - 1}_{0^+})^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۳- توابع شامل قدرمطلق:

اگر عدد حدی ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدرمطلق باشد (عدد حدی عبارت داخل قدرمطلق را صفر کند) باید حدود چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

نکته: در موارد فوق باید عبارت داخل قدرمطلق را در طرفین عدد حدی (a^- و a^+) تعیین علامت کنیم.

مثال: آیا تابع $f(x) = 2 + \frac{x-3}{|x-3|}$ در نقطه‌ی $x = 3$ حد دارد؟

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \frac{x-3}{|x-3|} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \frac{\cancel{x-3}}{-\cancel{(x-3)}} = 2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 + \frac{x-3}{|x-3|} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 + \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}} = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} 2 + \frac{x-3}{|x-3|} \text{ وجود ندارد}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ را وقتی $x \rightarrow 2$ بیابید.

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{(x-2)^2}} \Rightarrow$$



$$\left(f(x) = \frac{2(x-1)^2}{|x-2|} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)^2}{\underbrace{|x-2|}_{0^+}} = \frac{+2}{0^+} = +\infty \text{ وجود ندارد}$$

نیاز نیست چپ و راستی را بررسی کنیم. $x=2$ ریشه مضاعف منخرج است.

۴- توابع چند ضابطه‌ای:

اگر نقطه‌ی حدی همان نقطه‌ی تغییر ضابطه‌ی تابع باشد، از آنجایی که ضابطه‌ی تابع در طرفین نقطه‌ی حدی عوض شده است، باید حدود چپ و راست جداگانه محاسبه شوند.

مثال: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ 3x - 3 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ دارای حد است؟

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 3) &= 3(1) - 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x) &= (1)^2 - 2(1) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & x \geq 2 \\ ax + b & x < 2 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $3a - 2b$ را طوری بیابید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ مفروض است. این تابع در کدامیک از نقاط زیر حد دارد؟

د) $x = \frac{\pi}{6}$

ج) $x = \frac{2\pi}{3}$

ب) $x = \frac{\pi}{2}$

الف) $x = 0$

۵- حد توابع جزء صحیح:

معرفی جزء صحیح: اگر هر عدد حقیقی a را به صورت $a = n + p$ بنویسیم که در آن n قسمت صحیح عدد بوده و p قسمت اعشاری مثبت عدد باشد، آن گاه جزء صحیح عدد a که با نماد $[a]$ معرفی می گردد برابر است با:

$$a = n + p \xrightarrow{p \geq 0} [a] = n$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$x \notin \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n < x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow [x+n] = [x] + n$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \leq nx - [nx] < 1$$

$$x-1 < [x] \leq x$$

در مواردی که عدد حدی عبارت داخل جزء صحیح را عددی صحیح نکند، نیازی به محاسبه‌ی حدود چپ و راست نداریم ولی اگر عدد حدی، حاصل عبارت داخل جزء صحیح را عددی صحیح کند، باید حدود چپ و راست جداگانه بررسی شوند.

مثال: حد توابع زیر را در نقاط خواسته شده بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} [x-2] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{[-x+1]-2} =$$

تذکر: در مواردی که با اختصاص عددی تقریبی (در نزدیکی عدد حدی) به متغیر x نتوانیم حدود مقدار عبارت داخل جزء صحیح را تعیین نماییم، به روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

۱- در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ اگر حد عبارت داخل جزء صحیح به سمت عدد صحیح L برود، مقدار

$f(x) - L$ را به‌دست آورده و آن را در اطراف $x = a$ تعیین علامت می‌نماییم.

اگر $f(x) - L < 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) < L$ بوده و $f(x) \rightarrow L^-$ می‌رود.

اگر $f(x) - L > 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) > L$ بوده و $f(x) \rightarrow L^+$ می‌رود.

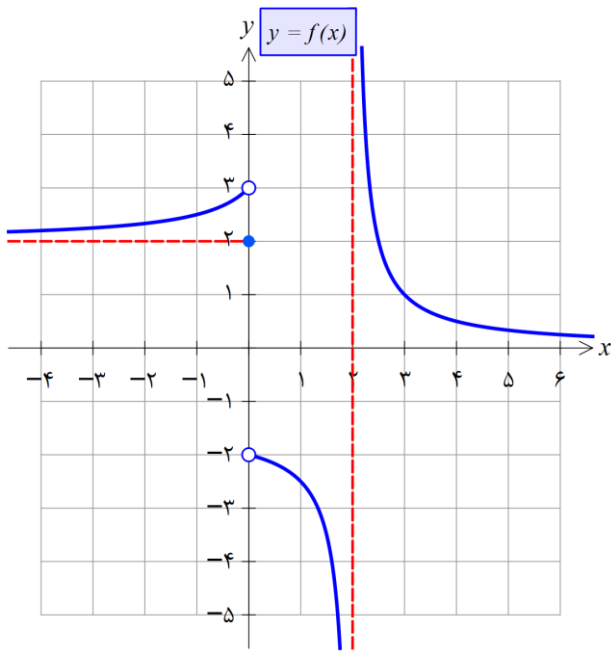
۲- در موارد کسری از آنجایی که نمی‌توانیم بگوییم تأثیر عبارت صورت بیشتر بوده یا مخرج، سعی می‌کنیم که مضربی از مخرج را در عبارت صورت ایجاد کنیم و پس از تفکیک کسر به‌دست آمده، قسمت صحیح را از داخل جزء صحیح خارج کرده و قسمت باقیمانده را تعیین مقدار نماییم.

مثال: حدود خواسته شده‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2x + 7}{x + 2} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} [x^2 + 4x - 3] =$$

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت شکل مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 5}{2[f(x)] + 3}$ را بیابید.



مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x + 2) \left[\frac{1}{x + 3} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - [3x]}{2|x| + [2x]} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 2[x]}{\sin^2 \pi x} =$$

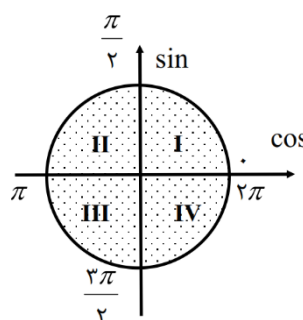
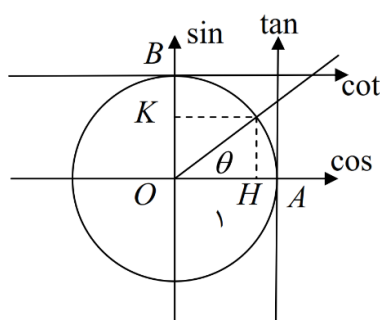
مثال: به ازای چه مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (-3 - [x])([2x] - a)$ در $x = 0$ دارای حد است؟

نکته: از آنجایی که تابع جزء صحیح در نقاط صحیح دارای حد نمی‌باشد، اگر بخواهیم تابعی به صورت $f(x) = g(x)[x]$ در نقاط صحیح دارای حد باشد، الزاماً باید در نقاط صحیح مورد نظر مقدار تابع $g(x) = 0$ برابر صفر باشد.

مثال: تابع $f(x) = (3x^2 + 7x - 10)[x]$ در چه نقاطی با طول صحیح دارای حد است؟

حد توابع مثلثاتی:

توابع سینوس و کسینوس ساده می‌باشند و حدود آن‌ها فقط با جایگذاری قابل حصول است. در سوی مقابل توابع تانژانت و کتانژانت، از آنجایی که یک تابع کسری می‌باشند، حتماً باید ابتدا به فرم کسری نوشته شوند و در صورتی که نقطه‌ی حدی ریشه‌ی ساده‌ی مخرج باشد، با توجه به مسیر نزدیک شدن به نقطه‌ی حدی، ابتدا باید ربع مثلثاتی مورد نظر را تعیین کرده و سپس با توجه به اعداد و علامت‌های به دست آمده در صورت و مخرج کسر، به محاسبه‌ی مقدار عددی حد تابع داده شده بپردازیم.



بعنوان مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

نکته: در نقاط راست و چپ دایره‌ی مثلثاتی (زوایای صفر و ۱۸۰ درجه)، مقدار کتانژانت ∞ می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} \cot(\pi)^+ = +\infty \\ \cot(\pi)^- = -\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \cot(0)^+ = +\infty \\ \cot(0)^- = -\infty \end{cases}$$

نکته: در نقاط بالا و پایین دایره‌ی مثلثاتی (زوایای ۹۰ و ۲۷۰ درجه)، مقدار تانژانت ∞ می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^+ = -\infty \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)^- = +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = -\infty \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = +\infty \end{cases}$$

نکته: در نقاط چپ و راست، مقدار تانژانت و در نقاط بالا و پایین مقدار کتانژانت صفر می‌شوند و فقط زمانی که تابع مورد نظر در جزء صحیح یا قدر مطلق مطرح شود، علامت صفر مورد نظر (0^+ یا 0^-) اهمیت پیدا می‌کند.

همچنین در مورد مقادیر سینوس یا کسینوس، اگر تابع در جزء صحیح مطرح شود، باید به طریق ترسیمی علامت عبارت مثلثاتی مورد نظر، در ربع مورد نظر تعیین شود و سپس با توجه به علامت‌ها و اعداد موجود، پاسخ حد محاسبه گردد.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x] =$$

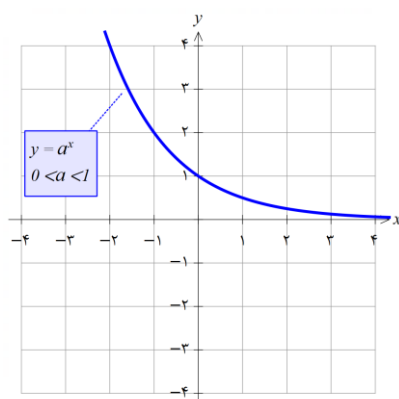
$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{\sin x} \right] =$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x =$$

حد توابع نمایی:

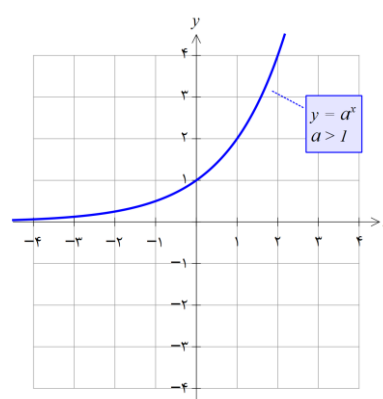
با توجه به نمودار توابع نمایی در دو حالت مختلف برای پایه‌ی تابع نمایی، داریم:



$$\text{if } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$



$$\text{if } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x =$$

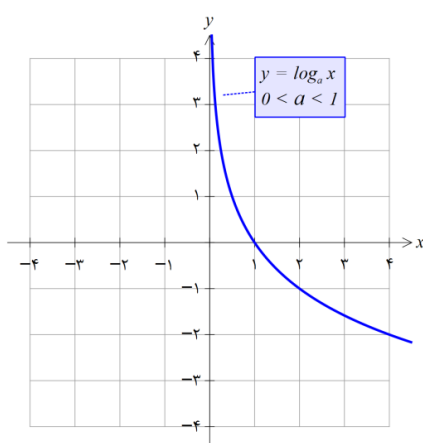
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2} \right)^x =$$

حد توابع لگاریتمی:

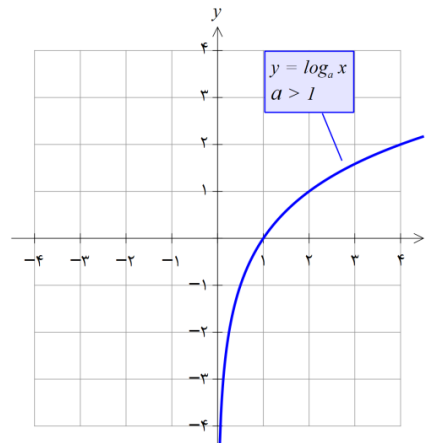
با توجه به نمودار توابع لگاریتمی در دو حالت مختلف برای پایه‌ی تابع لگاریتمی، داریم:



$$\text{if } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$



$$\text{if } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3 x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_3 (x - 1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{2}{3}} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{2\sqrt{2}}{3}} (3x - 2) =$$

قضیه فشردگی:

اگر برای توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ در بازه I که شامل نقطه a باشد، به ازای هر x از بازه I مگر احتمالاً در خود نقطه a ، داشته باشیم: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

نکته: شرط $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فقط کافی است در همسایگی نقطه‌ی a برقرار باشد و نیازی نیست در کل دامنه لزوماً رابطه‌ی فوق برقرار باشد.

نکته‌ی قضیه‌ی فشردگی در توابع کران‌دار: اگر تابع $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی $x = a$ کران‌دار باشد و حد تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر صفر باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \times f(x)) = 0$$

تذکر: توابعی از جنس $\sin u$ ، $\cos u$ ، $u - [u]$ و $[u] + [-u]$ توابع کراندار هستند.

$$[u] + [-u] = \begin{cases} -1 & u \notin \mathbb{Z} \\ 0 & u \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \leq u - [u] < 1$$

$$u - 1 < [u] \leq u$$

$$-1 \leq \sin u < 1$$

$$-1 \leq \cos u < 1$$

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] \right) =$$

مثال: اگر برای تابع $f(x)$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ ، آن گاه حد تابع $(f(x) - 2) \sin \left(\frac{\pi}{x^2} \right)$

را وقتی که $x \rightarrow 0$ بیابید.



حد بینهایت:

تابع $f(x)$ را در بازه‌ی I که شامل نقطه‌ی a باشد در نظر می‌گیریم.

حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، $+\infty$ است، در صورتی که وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، $f(x)$ از هر مقدار بسیار بزرگ مثبتی، بزرگ‌تر شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، $-\infty$ است، در صورتی که وقتی x به قدر کافی به a نزدیک شود، $f(x)$ از هر مقدار بسیار کوچک منفی، کوچک‌تر شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{0^\pm} = \pm\infty$

$$\frac{L > 0}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{L > 0}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{L < 0}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{L < 0}{0^+} = -\infty$$

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ آن‌گاه:

برای محاسبه‌ی حدود توابع $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$ ، عدد M هیچ تأثیری بر روی مقدار بسیار بزرگ $+\infty$ یا بسیار کوچک $-\infty$ ندارد.

$$(L) + (+\infty) = +\infty$$

$$(L) + (-\infty) = -\infty$$

برای محاسبه‌ی حدود توابع $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$ ، حاصل حد از جنس حد بینهایت می‌شود و برای

تعیین علامت بینهایت، علامت بینهایت تابع $f(x)$ را در علامت عدد M ضرب می‌کنیم.

$$(L > 0) \times (+\infty) = +\infty$$

$$(L > 0) \times (-\infty) = -\infty$$

$$(L < 0) \times (-\infty) = +\infty$$

$$(L < 0) \times (+\infty) = -\infty$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 4}{x^2 - 9} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} =$$



انواع صفر

۱- صفر مطلق: صفر مطلق در واقع خودِ عددِ صفر می‌باشد که معمولاً در توابع جزء صحیح یا توابعی به فرم $|x|$ یا $x \pm$ رخ می‌دهد.

۲- صفر حدی: یک عدد بسیار نزدیک به عدد صفر است که به دو صورت 0^+ یا 0^- می‌باشد.
نکته: در مورد صفرهای مطلق و حدی به نکات زیر توجه می‌کنیم:

$$\frac{0}{0^\pm} = 0$$

$$\frac{0^\pm}{0^\pm} =$$

$$\frac{0^\pm}{0} \notin \mathbb{R}$$

$$\frac{0}{0} \notin \mathbb{R}$$

نکته‌ی بسیار مهم: در توابعی که شامل قدرمطلق، جزء صحیح یا تابع علامت باشند:

در مورد تابع قدرمطلق، در حوالی نقطه‌ی حدی، ابتدا علامت تابع قدرمطلق را مشخص می‌کنیم.

در مورد تابع جزء صحیح، در حوالی نقطه‌ی حدی، ابتدا عددِ تابع جزء صحیح را مشخص می‌کنیم.

در مورد تابع علامت، در حوالی نقطه‌ی حدی، ابتدا $+1$ یا -1 بودنِ تابع علامت را مشخص می‌کنیم.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - [x]}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x - |x|}{[x] - 2x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{[x]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{[\sin x]} =$$

حد در بینهایت:

حد تابع وقتی $x \rightarrow +\infty$: وقتی x به $+\infty$ میل می کند، حد تابع $f(x)$ حد حقیقی L است اگر x از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی بزرگ تر باشد، $f(x)$ به عدد حقیقی L میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$: وقتی x به $-\infty$ میل می کند، حد تابع $f(x)$ حد حقیقی L است اگر x از هر عدد بسیار کوچک منفی کوچک تر باشد، $f(x)$ به عدد حقیقی L میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

تذکر: در محاسبه ی حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، جواب حد می تواند عدد حقیقی L نشده و $\pm\infty$ شود.

نکته ی عملیات دو بینهایت:

$+\infty + \infty = +\infty$	$(+\infty)(+\infty) = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$	$(-\infty)(-\infty) = +\infty$
$-\infty + \infty = \text{م}$	$(-\infty)(+\infty) = -\infty$
$+\infty - \infty = \text{م}$	$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

حد توابع چندجمله‌ای در بینهایت: به طور کلی وقتی $x \rightarrow \pm \infty$ ، در محاسبه‌ی حد توابع چندجمله‌ای، فقط جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه را در محاسبه مدنظر قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a x^n + b x^{n-1} + \dots + c) \simeq \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a x^n$$

نکته: در بررسی حد توابع گویا با توجه به نکته‌ی فوق، در صورت و مخرج کسر بالاترین درجه‌ی چندجمله‌ای‌ها را انتخاب کرده و در سه حالت به وجود آمده، به محاسبه‌ی حد می‌پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(a x^n + b x^{n-1} + \dots + c)}{(a' x^m + b' x^{m-1} + \dots + c')} \simeq \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a x^n}{a' x^m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x^3 + 5}{4 - x^3} =$$

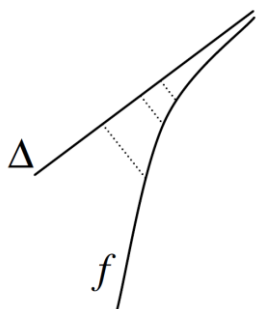
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 3x^2\sqrt{x^4} - \sqrt{5}x}{4x + 6x^2\sqrt[3]{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - [3x^3]}{4 + 6x^3} =$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x^3 - bx^2 - \sqrt{8}}{(a+3)x^2 + x - 3} = -2$ ، مقدار $2a - b$ را بیابید.

مجانب‌ها

مجانب‌ها خطوط مستقیمی هستند که رفتار تابع در دور دست‌ها را مشخص می‌کنند. در واقع فاصله‌ی نقاط نمودار تابع از خط مجانب مانند شکل مقابل در دوردست کم و کمتر می‌شود و به صفر میل می‌کند. مجانب‌ها سه نوعند.



۱- مجانب افقی

۲- مجانب قائم

۳- مجانب مایل

مجانب افقی

خط $y = b$ را مجانب افقی تابع f گوئیم، هرگاه حداقل یکی از دو حالت زیر رخ دهد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

لذا برای به دست آوردن مجانب افقی تابع f در صورتی که دامنه‌ی آن نامحدود باشد، کافی است، حد در بینهایت را به دست آوریم. در صورتی که حاصل حد، عدد حقیقی مانند b باشد، آن‌گاه گوئیم خط $y = b$ مجانب افقی تابع f است.

نکته: توابعی که دامنه‌ی آن‌ها محدود باشد، مجانب افقی ندارند.

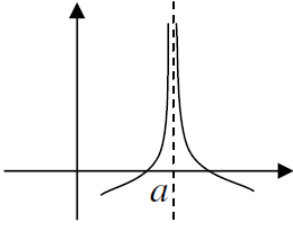
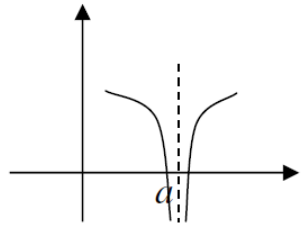
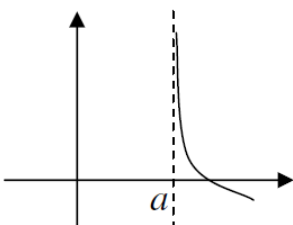
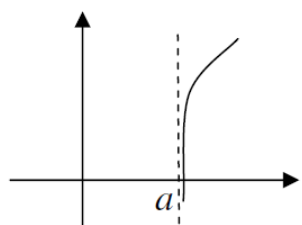
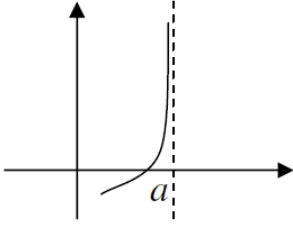
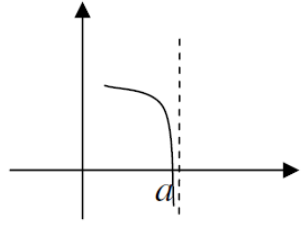
مثال: تابع $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ چند مجانب افقی دارد؟

مثال: مجانب‌های افقی تابع $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ را بیابید.



مجانِب قائم

فرض کنید که a یک عدد حقیقی باشد، آن گاه خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌گوییم، هر گاه یکی از حالات زیر برقرار باشد.

۱) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ 	۲) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 
۳) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ 	۴) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ 
۵) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ 	۶) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ 

توجه: شرط اینکه خط $x = a$ مجانب قائم تابع f باشد، آن است که تابع در $x = a$ تعریف نشده بوده و وقتی که f از دو طرف و یا فقط از طرف راست و یا فقط از طرف چپ به $x = a$ میل می‌کند، $f(x)$ بی‌کران افزایش یا کاهش یابد (حالت حدی عدد تقسیم بر بینهایت). لذا مجانب قائم معمولاً در توابع کسری و یا در توابع لگاریتمی وجود دارد.

برای محاسبه‌ی مجانب قائم در توابع کسری، مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مخرج را می‌یابیم.

ریشه‌های مخرج کسر، به شرطی مجانب قائم تابع $f(x)$ هستند که صورت کسر را صفر نکنند. نکته: اگر ریشه‌های مخرج کسر، صورت کسر را صفر کنند ولی باز هم حد تابع در ریشه‌ی مخرج $+\infty$ و یا $-\infty$ شود، خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم.

نکته: اگر برد تابع محدود باشد، تابع دارای مجانب قائم نمی‌باشد؛ مانند: توابع سینوسی و کسینوسی.

تذکر: در تعیین مجانب قائم، باید توجه داشته باشیم که $x = a$ در همسایگی دامنه‌ی تعریف تابع باشد.

از $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ حداقل یکی در دامنه‌ی تعریف تابع باشد (

مثال: تابع $y = \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

نتیجه: می‌توان گفت در توابع کسری که شامل عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج باشد، ریشه‌هایی از مخرج را مجانب قائم به حساب می‌آوریم که عبارت زیر رادیکال فرجه‌ی زوج را منفی نکند.

نکته: اگر ریشه‌های مخرج کسر، صورت کسر را صفر کنند ولی باز هم حد تابع در ریشه‌ی مخرج $+\infty$ و $-\infty$ شود، خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم. یعنی می‌توانیم تابع کسری را ابتدا ساده کرده و در تابع ساده شده، اگر عددی ریشه‌ی مخرج باشد، آن عدد را بعنوان مجانب قائم نمودار در نظر می‌گیریم.

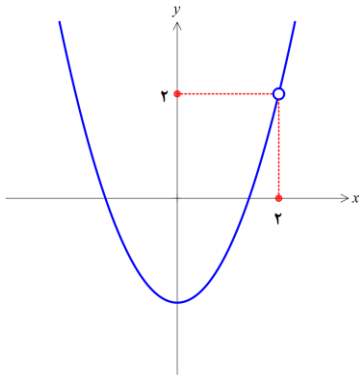
مثال: تابع $y = \frac{x^2 + x}{x^4 - x^2}$ چند خط مجانب دارد؟

نقطه‌ی حدی (حفره): نقطه‌ای که تابع در آن تعریف نشود ولی در آن نقطه حد تابع وجود داشته باشد که این نقاط هم ریشه‌ی صورت کسر هستند و هم ریشه‌ی مخرج کسر. این نقاط در نمودار تابع به صورت نقطه‌ی توخالی (حفره) رسم می‌شوند.

مثلاً در مثال قبل عدد $x = -1$ نقطه‌ی حدی تابع می‌باشد.

مثال: تابع $y = \frac{x^3 + x}{x^2 - x}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x + a}{x + b}$ است. مقادیر a و b را بیابید.



نکته: برای بررسی رفتار تابع در همسایگی مجانب قائم، حد چپ و راست تابع را در طرفین مجانب قائم بررسی می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{x^2 + 1}{x|x| + x}$ در اطراف مجانب قائمش به کدام صورت است؟

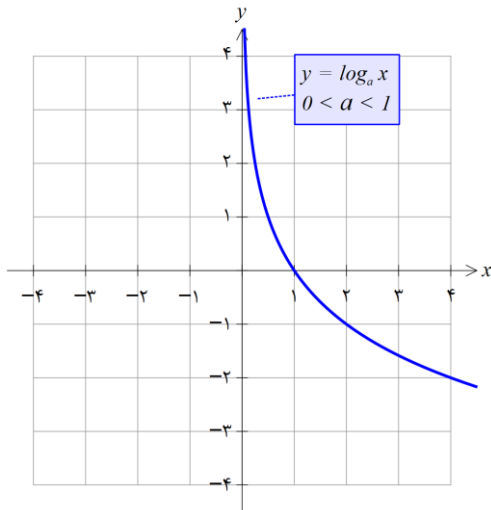


مثال: منحنی $y = \frac{\tan x + 2}{\cos x + 1}$ روی بازه $(0, 2\pi)$ چند مجانب قائم دارد؟



مثال: منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

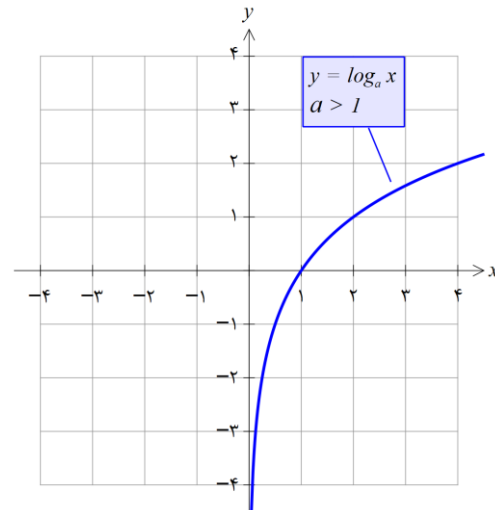
یادآوری نمودار تابع لگاریتمی:



if $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$



if $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

نکته: در توابع به فرم $y = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ ریشه‌های معادله‌های $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ به شرط آن‌که در همسایگی دامنه‌ی تابع باشند، مجانب‌های قائم تابع می‌باشند.

مثال: منحنی $y = \log x + \frac{1}{x^2 - x - 2}$ چند خط مجانب دارد؟

مثال: تابع $y = \log \frac{x-2}{x+1}$ چند مجانب دارد؟



صورت‌های مبهم در محاسبه‌ی حد و رفع ابهام

در محاسبه‌ی حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

گاهی اوقات به یکی از حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{0}$ ، $\frac{0}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times \infty$ ، 1^∞ ، 0^∞ و ∞^0 برخورد می‌کنیم. به این حالات،

صورت‌های مبهم گویند و پس از رفع مشکل ابهام در محاسبه‌ی حد، به پاسخ حد می‌رسیم.

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\frac{0}{0}$:

۱- حدود گویا: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ موجود باشد و $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x

باشند، ابتدا صورت و مخرج را تجزیه کرده تا عامل صفرکننده‌ی $x - a$ در صورت و مخرج ظاهر شود، سپس با حذف عامل‌های صفرکننده‌ی صورت و مخرج، با قرار دادن عدد حدی در عبارت باقی‌مانده، جواب حد را می‌یابیم. (اگر تجزیه‌ی عبارت کار مشکلی باشد، می‌توانیم عبارت مورد نظر را بر $x - a$ تقسیم کنیم)

مثال: حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^4 + x^3 - x^2}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9} =$$



۲- **حدود اصم (رادیکالی):** اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ موجود باشد و یکی از دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ و

یا هر دوی آنها رادیکالی باشند، ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی که رادیکال‌های موجود را از بین ببرد (مزدوج برای فرجه‌ی ۲ و چاق و لاغر برای فرجه‌ی ۳) ضرب کرده تا عامل ابهام (صفرکننده) ظاهر شود. سپس با حذف عامل‌های صفرکننده در صورت و مخرج با جایگذاری عدد حدی در عبارت باقی‌مانده، پاسخ حد را جستجو می‌کنیم.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 81} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{3x^2 - 8} - 2} =$$

۳- **قاعده‌ی هوپیتال:** هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ و $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی

محذوف a مشتق‌پذیر باشند و $g'(a) \neq \infty$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ، آن‌گاه حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

قواعد مشتق گیری

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع بر حسب متغیر x باشند، فرمول های مهم مشتق گیری به صورت زیر می باشند.

ردیف	تابع	مشتق تابع
۱	$y = c \quad (c \in \mathbb{R})$	$y' = 0$
۲	$y = a f(x)$	$y' = a f'(x)$
۳	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
۴	$y = u \times v$	$y' = u'v + v'u$
۵	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
۶	$y = u^n$	$y' = n u^{n-1} \times u'$
۷	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
۸	$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{n u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$
۹	$y = \frac{1}{u}$	$y' = \frac{-1}{u^2}$
۱۰	$y = u $	$y' = \frac{u u'}{ u }$
۱۱	$y = f(u)$	$y' = f'(u) \times u'$
۱۲	$y = \sin u$	$y' = \cos u \times u'$
۱۳	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \times u'$
۱۴	$y = \tan u$	$y' = (1 + \tan^2 u) \times u'$
۱۵	$y = \cot u$	$y' = -(1 + \cot^2 u) \times u'$
۱۶	$y = \frac{au + b}{cu + d}$	$y' = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2}$

مثال: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = (x^5 - 5x^2 + 3)^4$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ را در $x = 9$ بیابید.

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt[5]{(2x+3)^3}$ را در $x = -1$ بیابید.

تذکر: اگر پس از یک بار استفاده از قضیه‌ی هوپیتال، مجدداً به حالت مبهم برخورد کردیم و باز هم شرایط قضیه‌ی هوپیتال برقرار بود، می‌توانیم مجدداً از این قضیه بهره ببریم.
تذکر: قضیه‌ی هوپیتال برای محاسبه‌ی حدود $\frac{\infty}{\infty}$ نیز مناسب است.
مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{3x^3 - 3x^2} =$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + 3a}{2 - \sqrt{2x+10}} = 3$ ، مقدار a را بیابید.

۴- روش هم‌ارزی: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \vee \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \vee \infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی $x = a$ معادل یا هم‌ارز می‌باشند و داریم: $f(x) \approx g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. جدول هم‌ارزی‌های مهم عبارتند از:

ردیف	نقطه	تابع	هم‌ارز
۱	$x \rightarrow 0$	$ax + bx^2 + cx^3 + \dots$	ax
۲	$x \rightarrow \infty$	$ax^n + bx^{n-1} + \dots$	ax^n
۳	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan^n u$ و $\sin^n u$	u^n
۴	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\sin u$	$u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots$
۵	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan u$	$u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \dots$
۶	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\cos u$	$1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots$
۷	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$u - \sin u$	$\frac{u^3}{6}$
۸	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan u - u$	$\frac{u^3}{3}$
۹	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\tan u - \sin u$	$\frac{u^3}{2}$
۱۰	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$1 - \cos u$	$\frac{u^2}{2}$
۱۱	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$1 - \cos^m u$	$\frac{m u^2}{2}$
۱۲	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$(1+u)^n$	$1 + nu$
۱۳	$x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0$	$\sqrt[n]{1+u}$	$1 + \frac{u}{n}$
۱۴	$a > 0$ و n زوج و $x \rightarrow \infty$	$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots}$	$\sqrt[n]{a} \left x + \frac{b}{na} \right $
۱۵	n فرد و $x \rightarrow \infty$	$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots}$	$\sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right)$
۱۶	$x \rightarrow \infty$	$[u]$	u
۱۷	$x \rightarrow +\infty$ ($a > b$)	$a^x + b^x$	a^x
۱۸	$x \rightarrow -\infty$ ($a > b$)	$a^x + b^x$	b^x
۱۹	$f \rightarrow 1$, $g \rightarrow \infty$	f^g	$e^{(f-1)g}$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{\sin nx} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(\tan x - \sin x)}}{\tan x \sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin 2x) \sqrt{1 - \cos x}}{2x^2 + 3x^3 + \dots + 9x^9} =$$

مثال: اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = 2$ ، مقدار $2a - 3b$ را بیابید.

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$:

۱- اگر صورت و مخرج کسر بصورت چندجمله‌ای باشد، جمله‌ی با بالاترین توان صورت و مخرج را نگه داشته و از بقیه‌ی جملات که درجه‌ی کمتری دارند، صرف‌نظر می‌کنیم.

۲- اگر صورت و مخرج کسر به‌صورت تابع نمایی باشد:

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت با بزرگ‌ترین پایه را در صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

اگر $x \rightarrow -\infty$ ، عبارت با کوچک‌ترین پایه را در صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

۳- اگر صورت و مخرج به‌صورت مثلثاتی باشد، عکس عبارت صورت را در مخرج نوشته و عکس عبارت مخرج را در صورت می‌نویسیم. در این صورت حالت مبهم تبدیل به حالت صفرصفرم می‌شود.

تذکر: معمولاً به جای $\tan x$ عبارت $\frac{1}{\cot x}$ و به جای $\cot x$ عبارت $\frac{1}{\tan x}$ را می‌نویسیم.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{5^x + 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot 5x}{\cot 10x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x^3} - \sqrt[5]{x}}{5x\sqrt{x} - 7} =$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5x + 3}{(a-2)x^4 + bx^3 - 4} = 6$ باشد، مقدار $2a + 3b$ را بیابید.

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 11} - 3}{ax^{n-1} + 12}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ را بیابید.

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $\infty - \infty$:

۱- در توابع رادیکالی، از هم‌ارزی رادیکالی که در جدول صفحه‌ی ۱۹ در ردیف ۱۴ و ۱۵ مطرح گردید، استفاده می‌کنیم.

۲- در توابع غیررادیکالی، دو تابعی را که حدشان بینهایت شده است، با مواردی نظیر مخرج مشترک‌گیری، ضرب در عبارت مزدوج و ... تبدیل به یک تابع می‌کنیم و در این حالت حد تبدیل به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شود.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x+4} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \left(\cot 3x - \cot 4x \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^4 + x + 1} - \sqrt{x^4 + x + 5} \right) =$$

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم $0 \times \infty$: (مطالعه آزاد)

برای رفع ابهام حالت مبهم $0 \times \infty$ ، یکی از توابع را معکوس می‌کنیم و در مخرج کسر دیگر می‌نویسیم. با این کار حالت مبهم $\infty - \infty$ به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل خواهد شد که در هر دو حالت با استفاده از قاعده‌ی هسپیتال به رفع ابهام حد مورد نظر می‌پردازیم.

معمولاً به جای $\tan x$ عبارت $\frac{1}{\cot x}$ و به جای $\cot x$ عبارت $\frac{1}{\tan x}$ را می‌نویسیم تا حالت مبهم به $0 \times \infty$ تغییر کند.

در توابع رادیکالی نیز می‌توانیم با ضرب یا تقسیم کردن بر عبارت مزدوج، حالت مبهم را به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ بیاوریم.

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 3x) \tan \left(\frac{3\pi}{2x} \right) =$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{\sqrt{x+4}} - 1 \right) =$$

محاسبه‌ی حد تابع در حالت مبهم 1^∞ : (مطالعه آزاد)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

در حدود مبهم این دسته، از هم‌ارزی عدد نپر (e) استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

اگر عبارت f^g به شکل مبهم 1^∞ درآید، برای رفع ابهام آن می‌توان از هم‌ارزی زیر استفاده کرد.

$$f^g = e^{(f-1)g}$$

مثال: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+2} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3n+2}\right)^{3n-1} =$$

پیوستگی

پیوستگی تابع در یک نقطه

اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی I که شامل نقطه‌ی a است، تعریف شده باشد. می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a پیوسته است اگر دو شرط زیر همزمان برقرار باشد:

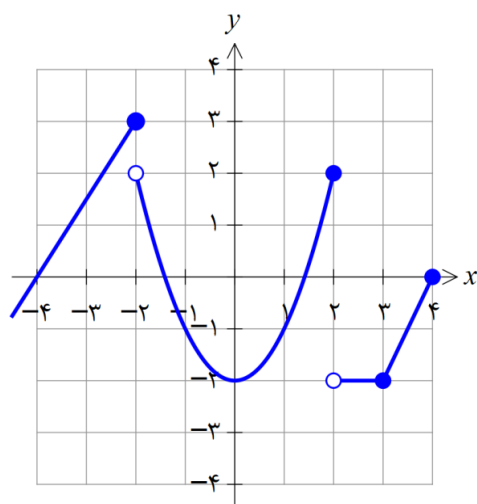
$$1- \text{تابع در } x = a \text{ حد داشته باشد؛ یعنی: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

$$2- \text{حد تابع در نقطه‌ی } x = a \text{ با مقدار تابع در نقطه‌ی } a \text{ برابر باشد؛ یعنی: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

پیوستگی راست: اگر حد راست تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، گوییم تابع در آن نقطه پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: اگر حد چپ تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، گوییم تابع در آن نقطه پیوستگی چپ دارد.

مثال: با توجه به شکل زیر، پیوستگی تابع رسم شده در نقاط صحیح را بررسی نمایید.



مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{4 \tan \frac{x}{2}} & x < 0 \\ 2a + b & x = 0 \\ [-2x] + 3b & x > 0 \end{cases}$$

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & x \geq 3 \\ 2x - 7 & x < 3 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 3$ بررسی نمایید.



مثال: مقدار $f(2)$ را چه عددی انتخاب کنیم تا تابع $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد؟

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = [3 \sin x]$ را در نقاط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ بررسی نمایید.

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4a & x > 2 \\ 2 & x = 2 \\ bx - 2 & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار $-4a + 3b$ را بیابید.

مثال: به ازای کدام مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{|3x|}{x} & x \neq 0 \\ 2a - 7 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوستگی چپ دارد؟



مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{|x^2 - 1|}{x-1} & x < 1 \\ 3a - [5x] & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a را بیابید.

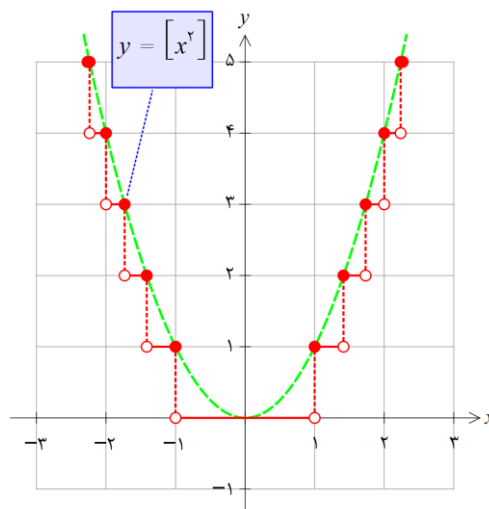
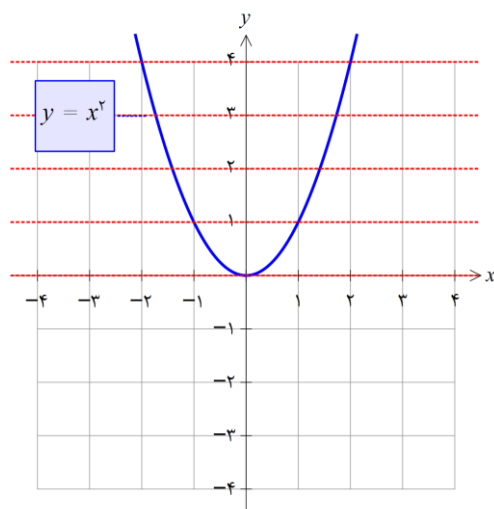
مثال: پیوستگی تابع $f(x) = \cos \left(\pi \left[\frac{x}{3} \right] \right)$ را در $x = 3$ بررسی نمایید.

بررسی تابع جزء صحیح از نظر وجود حد و پیوستگی:

رسم تابع جزء صحیح:

برای رسم تابع $f(x) = [g(x)]$ در دستگاه مختصات، ابتدا تابع $g(x)$ را رسم کرده و سپس خطوط افقی را که در آن‌ها عرض نقاط اعداد صحیح هستند رسم می‌کنیم (خطوطی را رسم می‌کنیم که تابع رسم شده را قطع کنند).

هر یک از نقاط تقاطع را ابتدا توپر کرده و سپس روی خط پایینی تصویر کرده و تصویر آن را توخالی در نظر می‌گیریم.



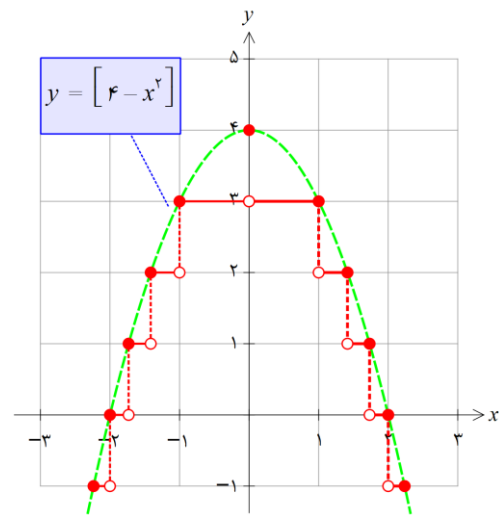
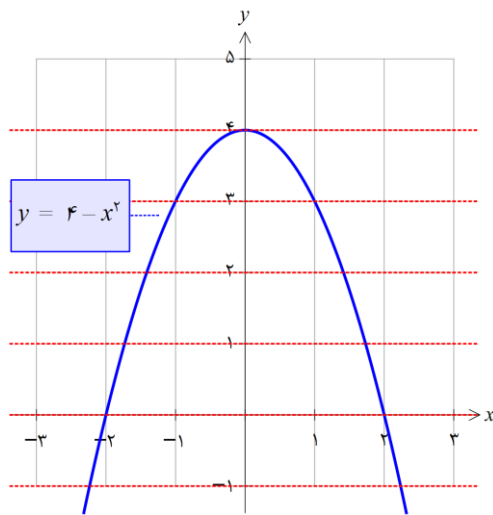
نکته ۱: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ مقدار $g(a)$ یک عدد غیر صحیح باشد، تابع در آن نقطه حد داشته و همچنین پیوسته می‌باشد.

نکته ۲: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ اکیداً صعودی بوده و در نقطه‌ی $x = a$ مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه فاقد حد و ناپیوسته بوده ولی پیوستگی راست دارد.

نکته ۳: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ اکیداً نزولی بوده و در نقطه‌ی $x = a$ مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه فاقد حد و ناپیوسته بوده ولی پیوستگی چپ دارد.

نکته ۴: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ مینیم بوده و مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه حد داد و همچنین پیوسته می‌باشد.

نکته ۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [g(x)]$ ، هر گاه تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ ماکزیم بوده و مقدار $g(a)$ یک عدد صحیح باشد، تابع در آن نقطه حد دارد ولی ناپیوسته می‌باشد.



تذکر: تابع $f(x) = g(x) [x]$ در نقاطی که $g(x) = 0$ شود، پیوسته می‌باشد. (حتی در صورتی که داخل براکت عدد صحیح شود)

مثال: نمودار تابع $f(x) = [\sin x]$ را در بازه‌ی یک دوره‌ی تناوب آن از مبدأ مختصات با شرط $x > 0$ رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آن را بیابید.

مثال: تابع $f(x) = (x^2 + ax + b) [-x]$ در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ پیوسته می‌باشد. مقادیر a و b را بیابید.

مثال: تابع $f(x) = (x^3 - x)[x]$ در چند نقطه با طول صحیح پیوسته است؟



مثال: تابع $f(x) = [x^2 - 4x + 3]$ در چه نقطه‌ای با طول صحیح، پیوسته است؟

پیوستگی روی بازه

تابع $f(x)$ روی بازه‌ی (a, b) پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد.

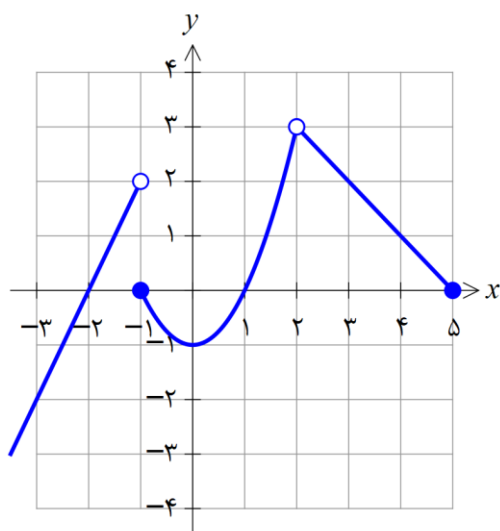
تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد و در نقطه‌ی a پیوستگی راست و در نقطه‌ی b پیوستگی چپ داشته باشد.

تابع $f(x)$ روی بازه‌ی (a, b) پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد و در نقطه‌ی a پیوستگی راست داشته باشد.

تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است هر گاه، در هر نقطه‌ی درونی این بازه پیوسته باشد و در نقطه‌ی b پیوستگی چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و $f(x)$ در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، گوییم $f(x)$ روی بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)$ به شکل زیر مفروض است. پیوستگی آن را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $[2, 5]$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.



در مورد تابع فوق، کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) f روی بازه‌ی $(-\infty, -1]$ پیوسته است.

ب) f روی بازه‌ی $(-\infty, -1)$ پیوسته است.

پ) f روی بازه‌ی $[2, 5]$ پیوسته است.

ت) f روی بازه‌ی $(-2, 0)$ پیوسته است.

ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

