

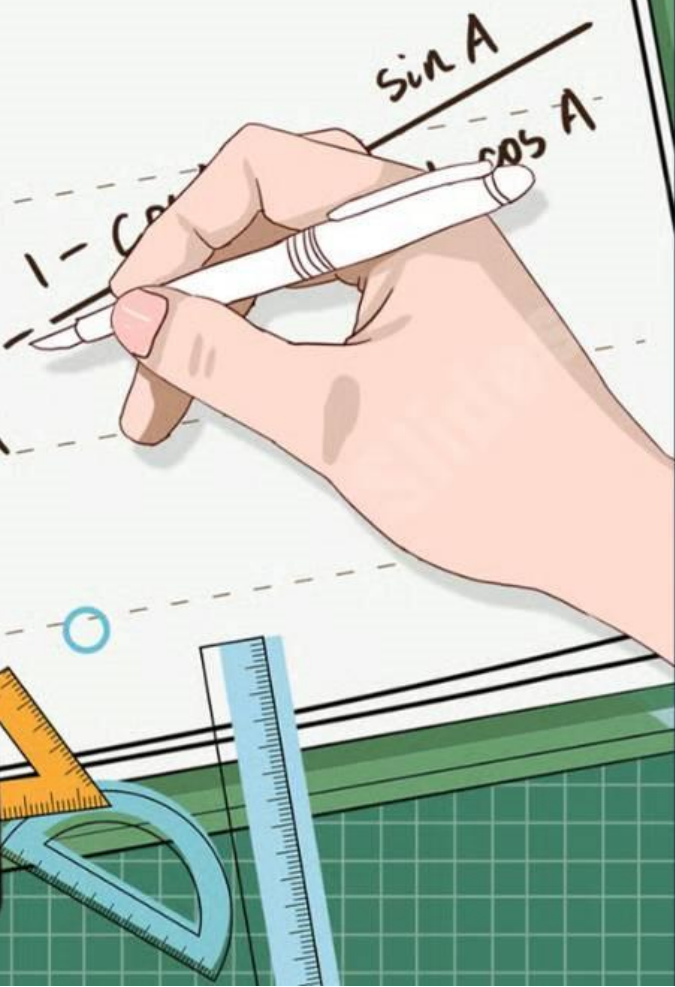


کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده

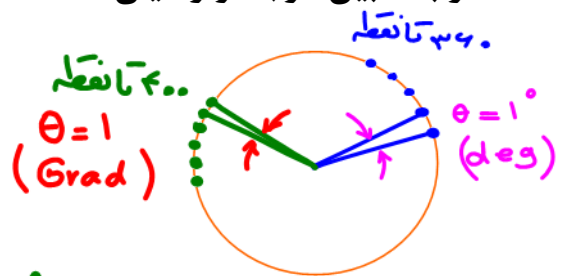
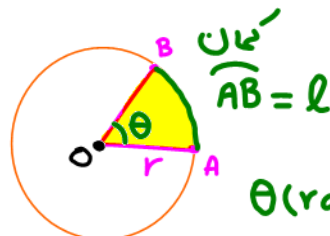


دایره کامل $\Rightarrow \theta = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ مثلثات
 $360^\circ \Rightarrow 2\pi \text{ (rad)} \xrightarrow{\div 2} \pi \text{ (rad)} \equiv 180^\circ$

رابطه بین درجه و رادیان :

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad , \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ Deg}$$

$$Deg \begin{array}{c} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{\lambda_0}} \\ \xleftarrow{\times \frac{\lambda_0}{\pi}} \end{array} rad$$



مثال : زوایای 30° و 45° معادل چند رادیان هستند؟ زاویه $\frac{\pi}{2}$ معادل چند درجه می شود؟

$$\mu.^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{18.}} \frac{\pi}{9} \text{ (rad)}$$

$$\frac{\pi}{r_0} \text{ (rad)} \cdot \frac{r_0}{\frac{180}{\pi}} = 9^\circ$$

$$\Delta \therefore \frac{(\Delta \lambda)}{\lambda} \rightarrow \frac{\Delta \pi}{\lambda} \text{ (rad)}$$

حدود تغییرات توابع مثلثاتی:

دعانه عوض نشه $()^2 \Rightarrow 4 < x^2 \leq 9$
 $2 < x \leq 3$

دعانه عوض نشه $()^2 \Rightarrow 9 \geq x^2 \geq 4$
 $-3 \leq x \leq -2$

دعانه عوض نشه $()^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 25$
 $-5 < x \leq +2$

سب min روی ۰ تنظیم می شود (با مساوی)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad , \quad \tan x \in \mathbb{R}$$

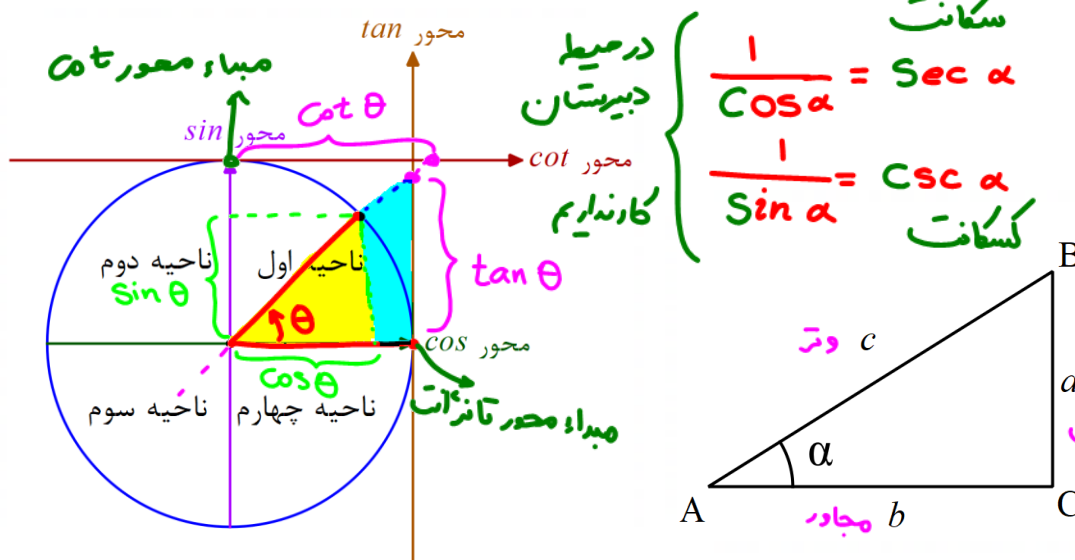
$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad \cot x \in \mathbb{R}$$

مثال: حدود تغییرات عبارت $y = 5 \sin^2 x + 2$ را بیابید.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{(\quad)^2}$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \quad \times \Delta$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{+r} r \leq y \leq v \longrightarrow R_f = [r, v]$$



نسبتهای مثلثاتی

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مقابل } \alpha}{\text{مقابل } 90^\circ}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{مجاور } \alpha}{\text{مُثلّی}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مقابل}}{\text{جانب}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{مجاور } \alpha}{\text{مقابل } \alpha}$$

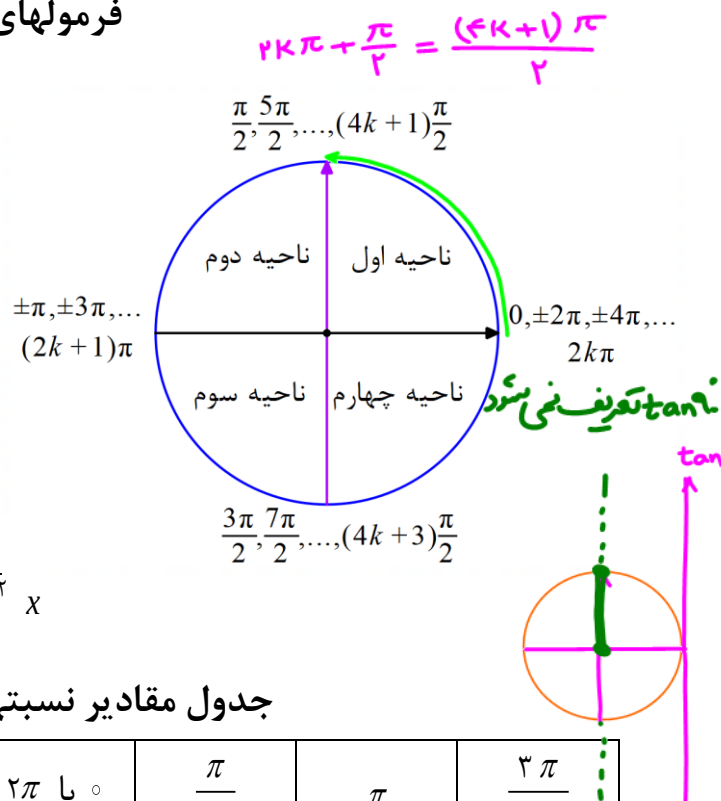
فرمولهای ابتدایی مثلثات

(I) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, (II) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(III) $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$

(IV) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$

(V) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (VI) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$



جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف

زاویه (رادیان)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	0 یا 2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
زاویه (درجه)	30°	60°	45°	0° یا 360°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1	0
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0

علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ناحیه دایره مثلثاتی

ناحیه مثلثاتی	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
محدوده زاویه	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

مثال: اگر $\sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha < 0$ باشد، α در کدام نواحی مثلثاتی قرار دارد؟

$$\sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha < 0 \quad \div (\sin^2 \alpha) \quad \sin \alpha \neq 0$$

$$\cot \alpha < 0$$


مثال: حاصل کدام یک از عبارات زیر منفی است؟

$$\textcircled{+} + \textcircled{+} = \textcircled{+} \quad \sin^{119^\circ} + \cos^{350^\circ} \quad (1)$$

$$\textcircled{-} + \textcircled{-} = \textcircled{-} \quad \sin^{190^\circ} + \tan^{170^\circ} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{+} - \textcircled{-} = \textcircled{+} \quad \tan^{200^\circ} - \cot^{300^\circ} \quad (3)$$

$$-\textcircled{-} + \textcircled{+} = \textcircled{+} \quad -\cos^{148^\circ} + \cot^{80^\circ} \quad (4)$$

یافتن نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های معروف مثلثاتی ($n > 2$)

دسته ۱	دسته ۲	دسته ۳	ناحیه مثلثاتی	فرمول مربوط به ناحیه $n > 2$
خانواده 30°	خانواده 45°	خانواده 60°		
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	ناحیه اول	$\theta = \frac{\pi}{n}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	ناحیه دوم	$\theta = \frac{(n-1)\pi}{n}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	ناحیه سوم	$\theta = \frac{(n+1)\pi}{n}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	ناحیه چهارم	$\theta = \frac{(2n-1)\pi}{n}$

نکته: به ازای زوایای هر دسته، مقادیر $|\sin \theta|$ ، $|\cos \theta|$ ، $|\tan \theta|$ و $|\cot \theta|$ برابرند و فقط تفاوت در علامت آنها می‌باشد که با توجه به علامت نسبت مورد نظر در ناحیه مثلثاتی، علامت آنها تعیین می‌گردد.

دسته ۱: $|\sin \theta| = \frac{1}{2}$ ، $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $|\tan \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $|\cot \theta| = \sqrt{3}$

دسته ۲: $|\sin \theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $|\tan \theta| = 1$ و $|\cot \theta| = 1$

دسته ۳: $|\sin \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $|\cos \theta| = \frac{1}{2}$ ، $|\tan \theta| = \sqrt{3}$ و $|\cot \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = +\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = +\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

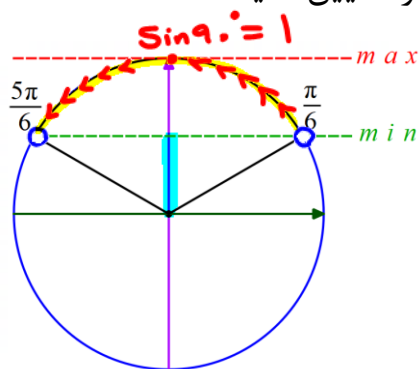
$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = +\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ باشد و $\sin x = \frac{1}{m-2}$ ، حدود متغیر m را تعیین کنید.



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \sin x &\leq 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{m-2} &\leq 1 \xrightarrow{\text{مکون}} \\ 2 > m-2 &\geq 1 \xrightarrow{+2} \\ 3 &\leq m < 4 \end{aligned}$$

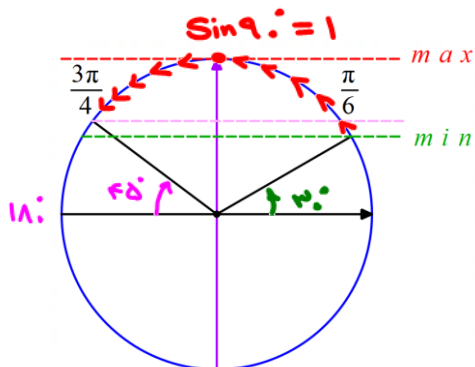
$$(1) m \geq 4$$

$$(2) m > 2$$

$$(3) 3 \leq m < 4 \quad \checkmark$$

$$(4) m \leq 1 \text{ یا } m \geq 3$$

مثال: اگر $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{3\pi}{4}$ باشد، حدود $\sin x$ را تعیین کنید.



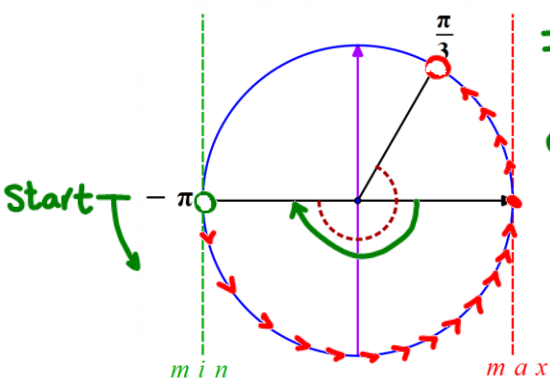
$$30^\circ < x < 135^\circ = (135^\circ - 45^\circ)$$

$$\sin 30^\circ < \sin x \leq \sin 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1$$

نکته: در سؤالاتی که حدود نسبت مثلثاتی خواسته می‌شود، به هیچ عنوان از طرفین رابطه نسبت مثلثاتی نمی‌گیریم بلکه با رسم دایره، حدود نسبت مثلثاتی را پیدا می‌کنیم.

مثال: اگر $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9}$ باشد و $\cos(3\alpha) = \frac{m-1}{2}$ ، حدود متغیر m را تعیین کنید.



$$-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\times 3} -\pi < 3\alpha < \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(-\pi) < \cos 3\alpha \leq \cos(0)$$

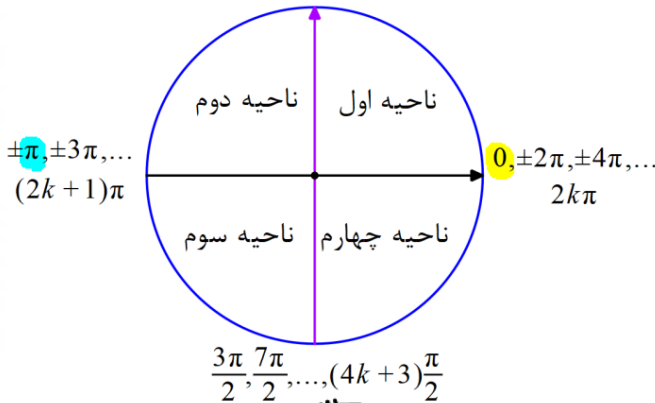
$$-1 < \cos 3\alpha \leq 1 \rightarrow -1 < \frac{m-1}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2}$$

$$-2 < m-1 \leq 2 \xrightarrow{+1} -1 < m \leq 3$$



نسبتهای مثلثاتی کمانهای مرکب $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha \right)$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, (4k+1)\frac{\pi}{2}$$



- مضارب زوج π حذف می شوند.

- مضارب فرد π به π تبدیل می شوند.

- مضارب زوج $\frac{\pi}{2}$ ، نقاط چپ و راست دایره مثلثاتی

- مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، نقاط بالا و پایین دایره مثلثاتی اند

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ را به عدد ۴ تقسیم می کنیم.

اگر باقیمانده ۱ شد، زاویه معادل $\frac{\pi}{4}$ است و اگر باقیمانده ۳ شد زاویه معادل $\frac{3\pi}{4}$ است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

کسینوس متقی خواست

روش یافتن نسبتهای مثلثاتی یک زاویه

۱- اگر زاویه داده شده منفی باشد، در مورد نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی حذف شده و در مورد سه

نسبت مثلثاتی دیگر، منفی زاویه، به پشت نسبت مثلثاتی انتقال پیدا می کند. $\sin 120^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{120^\circ}{180^\circ} \times \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

۲- اگر زاویه داده شده بر حسب درجه بوده و مقدار آن از 360° درجه بیشتر باشد، عدد بزرگ داده شده را

به 360° تقسیم می کنیم و به جای این عدد بزرگ، از باقیمانده تقسیم در محاسبات بهره می بریم. $\sin\left(\frac{27\pi}{4}\right)$

$$\sin\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳- اگر زاویه داده شده بر حسب رادیان بوده و مقدار آن از 2π بیشتر باشد، عدد 2π $\left(\frac{6\pi}{3}, \frac{8\pi}{4}, \frac{12\pi}{6}, \dots\right)$

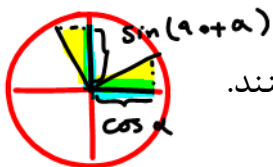
ضرب π در صورت کسر را بر دو برابر مخرج کسر تقسیم کرده و بجای مضرب π در صورت کسر، از

$$\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = +\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(180^\circ - 60^\circ) = +\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

باقیمانده تقسیم بهره می بریم.

۴- در این مرحله ابتدا علامت نسبت خواسته شده را در ناحیه مورد نظر تعیین می کنیم.



۵- $2k\pi$ و $(2k+1)\pi$ (نقاط راست و چپ دایره مثلثاتی) نسبت مثلثاتی را عوض نمی کنند.

$\frac{\pi}{2}(4k+1)$ و $\frac{\pi}{2}(4k+3)$ (نقاط بالا و پایین دایره مثلثاتی) نسبت مثلثاتی را عوض می کنند.

$$\begin{cases} \sin x \Rightarrow \cos x \\ \cos x \Rightarrow \sin x \end{cases}, \begin{cases} \tan x \Rightarrow \cot x \\ \cot x \Rightarrow \tan x \end{cases}$$

۶- زاویه α را جلوی نسبت مورد نظر می نویسیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

عوض $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$

عوض $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$

عوض نمی‌شود $\tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha$

عوض $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin \alpha$

$\sin\left(\frac{397\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = +\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(\frac{27\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

صفر $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha$

مثال: حاصل عبارات زیر را بر حسب کمان 20° بیابید.



$\sin 160^\circ =$

$\cos 200^\circ =$

$\cos 250^\circ =$

$\cot 340^\circ =$

نکته: اگر مقادیر $\tan \alpha$ یا $\cot \alpha$ در صورت سؤال داده شود و حاصل جمع و تفریق $\sin^n \alpha$ و $\cos^n \alpha$ در صورت و مخرج کسر خواسته شود، به دو طریق زیر عمل می‌کنیم.

۱- اگر $\tan \alpha$ را داده باشند، صورت و مخرج کسر را بر $\cos^n \alpha$ تقسیم می‌کنیم.

۲- اگر $\cot \alpha$ را داده باشند، صورت و مخرج کسر را بر $\sin^n \alpha$ تقسیم می‌کنیم.

مثال: اگر $\tan x = 2$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ چند است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲) ✓

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x} = \frac{\tan x + 1}{3 \tan x - 2} = \frac{2 + 1}{3(2) - 2} = \frac{3}{4}$$

$\div \cos^2 x$

مثال: اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل $\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$ را بیابید.

$$\frac{3 \tan^2 x + 1}{1} = 3 \tan^2 x + 1 = 3(2)^2 + 1 = 12 + 1 = 13$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cdot \cos x}$$

مثال: اگر $\tan x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x - \sin^2 x}{4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x}$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳) ✓

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{9}{8}$ (۱)

$$\frac{\tan x + 5 - \tan^2 x}{4 - 3 \tan^2 x} = \frac{\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{4}}{4 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{13}{4}} = \frac{21}{13} = \frac{7}{13}$$

مثال: اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{3}$

(۳) ۵

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{5}{2}$



مثال: اگر $\tan 35^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟

(۴) $2a - 2$

(۳) $2a$

(۲) $a - 1$

(۱) $a + 1$ ✓



$$\frac{\overset{+}{\sin}(180 - 35) - \overset{-}{\sin}(270 - 35)}{\cos(360 - 35)} = \frac{\overset{+}{\sin} 35 + \overset{+}{\cos} 35}{\cos 35} = \tan 35 + 1 = a + 1$$

مثال: حاصل $\sin 20^\circ + \sin 200^\circ + \sin 340^\circ + \sin 160^\circ$ کدام است؟

(۴) $\sin 40^\circ$

(۳) $2 \sin 20^\circ$

(۲) $\sin 20^\circ$

(۱) صفر



مثال: اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ باشد، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟

$\frac{31}{16}$ (۴)

$\frac{17}{8}$ (۳) ✓

$\frac{10}{8}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

$$\frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{1 + \tan 20^\circ}{1 - \tan 20^\circ} = \frac{1.36}{-0.64} = -\frac{136}{64} = -\frac{17}{8}$$

مثال: اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، حاصل $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)}$ کدام است؟

۳ (۴) ✓

۲ (۳)

۱/۲ (۲)

-۲ (۱)

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0.2 + 1}{2(0.2)} = \frac{1.2}{0.4} = 3$$

مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(3\pi + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)



نکته: زوایای منفی:

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}, \begin{cases} \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

کسینوس متغی خود

مثال: از تساوی $\frac{2 \sin(\alpha - 3\pi) - \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2$ مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{-2 \sin(\pi - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \frac{-2 \sin \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha} = +3 \tan \alpha = 2$$

$\tan \alpha = \frac{2}{3}$

مثال: حاصل $\cos\left(\frac{-211\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-211\pi}{6}\right)$ کدام است؟

(1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (3) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$



مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) + 2\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{10}\right) \cdot \tan\left(\frac{21\pi}{10}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ کدام است؟

(1) صفر (2) $\frac{4}{3}$ (3) -4 (4) -14



نکته: اگر α و β دو زاویه‌ی متمم باشند؛ یعنی: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

نکته: اگر α و β دو زاویه‌ی مکمل باشند؛ یعنی: $\alpha + \beta = \pi$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = -\tan \beta \\ \cot \alpha = -\cot \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{13\pi}{36}\right) + \cos^2\left(\frac{17\pi}{36}\right)$$

$\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

$\cos^2\left(\frac{5\pi}{36}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{36}\right) = 1$

$\frac{\pi}{36} + \frac{17\pi}{36} = \frac{\pi}{2}$ $\cos^2\left(\frac{\pi}{36}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{36}\right) = 1$

$1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

$\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$

مثال: حاصل عبارت $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$ کدام است؟

۲ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۲) ۱ (۱)



مثال: اگر $x = 10^\circ$ باشد، حاصل $\frac{\sin 2x \cdot \tan 4x}{\cot 5x \cdot \cos 7x}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$\frac{\sin 2x \cdot \tan 4x}{\cot 5x \cdot \cos 7x} = 1$$

مثال: حاصل عبارت $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \dots + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

صفر (۲) ✓

۱ (۱)

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$

مثال

$$\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = 0$$

مثال: اگر $x = 10^\circ$ باشد، حاصل $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos 17x$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)



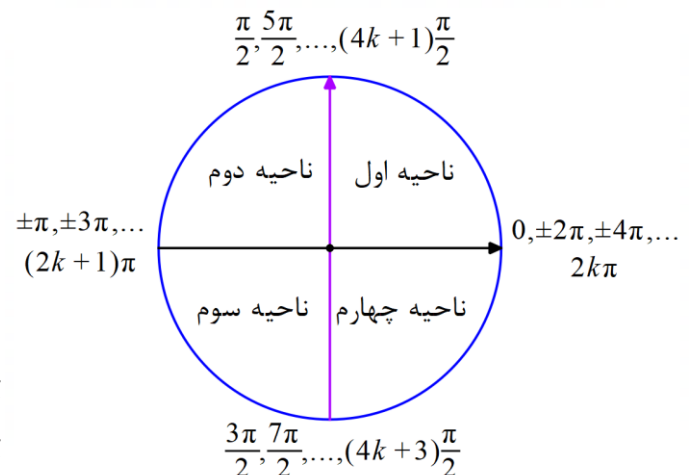
روابط بین نسبتهای مثلثاتی

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$



مثال: حاصل عبارت $\sin^2 x \cdot \cos^2 x (1 + \tan^2 x + \cot^2 x)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sin^2 x \cos^2 x \left(\frac{1 + \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1 + \cot^2 x}{\sin^2 x} \right) = (\cancel{\sin^2 x} \cancel{\cos^2 x}) \left(\frac{\cancel{\sin^2 x} + \cos^2 x}{\cos^2 x \cancel{\sin^2 x}} \right) \\ & = 1 \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$ کدام است؟

$$\tan \alpha \quad \cot \alpha \quad -1 \quad 1$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cancel{\sin^2 \alpha}}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \tan \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cancel{\sin^2 \alpha}}{\cos \alpha \cdot \cancel{\sin^2 \alpha}} = \tan \alpha$$



مثال: حاصل عبارت $(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\text{مزدج}})(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{\sin^2 x}$

(۴) $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)(\cos^2 x - \sin^2 x)\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \tan^2 x$$

$$1 - \cancel{\tan^2 x} + \cancel{\tan^2 x} = 1$$

$$x = 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4} \text{ rad} \rightarrow \textcircled{1} \quad \text{ج}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) صفر



مثال: اگر انتهای کمان مقابل زاویه α در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}}$ کدام است؟

(۱) $-\cot \alpha$

(۲) $-\cos \alpha$ ✓

(۳) $\cot \alpha$

(۴) $\cos \alpha$

$$\cos \alpha < 0$$

$$\sqrt{\frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\cancel{\sin^2 \alpha}}}{\frac{1}{\cancel{\sin^2 \alpha}}}} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = |\underbrace{\cos \alpha}_{-}| = -\cos \alpha$$



مثال: اگر $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan^3 x + \cot^3 x$ کدام است؟

$\frac{22}{5}$ (۴)

$\frac{622}{5}$ (۳)

۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \end{cases}$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1 - 3(\sin x \cos x)^2}{(\sin x \cos x)^3} = \frac{1 - 3\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = 110$$

مثال: اگر $\left(\sin x + \cos x\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟
 $\sin^2 x + \cos^2 x = a^2 + b^2 = 1$
 $\sin x = a, \cos x = b$

$\frac{17}{81}$ (۴)

$\frac{17}{27}$ (۳)

$\frac{13}{81}$ (۲)

$\frac{13}{27}$ (۱) ✓

$$a^3 + b^3 = (a+b) \left(a^2 + b^2 - ab \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{4}{9} \right) \right) = \frac{13}{27}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= \frac{1}{9} \\ 2ab &= -\frac{4}{9} \Rightarrow \\ ab &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$\div \cos^2 \theta$

مثال: اگر $\tan \theta = 2$ باشد، حاصل $\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta + \sin \theta}$ کدام است؟

$\frac{5}{18}$ (۴) ✓

$\frac{5}{9}$ (۳)

$\frac{2}{9}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\tan^3 \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{5}{18}$$

$\tan \theta (1 + \tan^2 \theta)$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $(\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



روابط مجموع و تفاضل دو کمان

فقط ریاضی

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ریاضی II} \\ \text{ریاضی I} \end{array}$$

مثال: اگر $\cot \alpha = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5}$ (۴)

-5 (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲✓)

$\tan \alpha = \frac{2}{3}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \tan 75^\circ = \cot 15^\circ$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$ را بیابید.

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3}) \times (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{9 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

مثال: اگر $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱) ✓}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 2$$



$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 2 \Rightarrow \boxed{\tan^2 x = 1}$$

مثال: اگر $\tan x = \frac{-1}{2}$ باشد و $\cos x < 0$ ، حاصل $\sin x$ کدام است؟

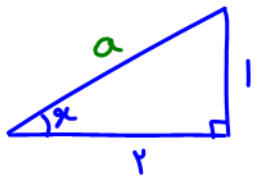
$$\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (۴) ✓}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (۳)}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

$\tan x < 0$
 $\sin x < 0$
 $\cos x < 0$



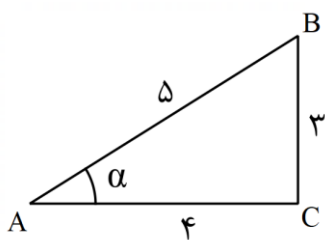
$$1^2 + 2^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{5}}$$

$$\sin x = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos x = \dots \checkmark$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \dots$$

اعداد فیثاغورسی معروف

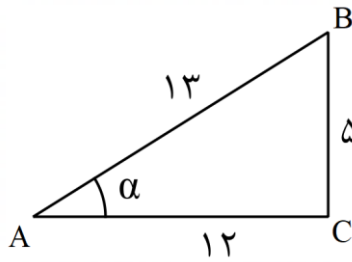


$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3}$$

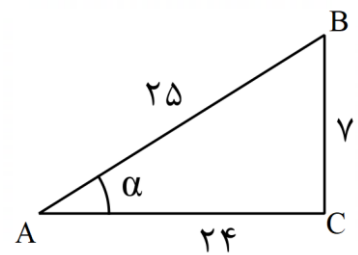


$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\cot \alpha = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\tan \alpha = \frac{7}{24}$$

$$\cot \alpha = \frac{24}{7}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

روابط کمان 2α

۱۲ تجربی / ۱۱ ریاضی

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

روابط کمان 2α از روی مقدار $\tan \alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

فرمولهای طلایی مثلثات: تبدیل کمان 2α به α

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \\ \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \end{cases}$$

روابط کمان 3α

$$\star \begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} \sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \\ \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \\ \cot 3\alpha = \cot \alpha \cdot \cot(60^\circ - \alpha) \cdot \cot(60^\circ + \alpha) \end{cases}$$

نکته:

$$\begin{cases} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha}$ کدام است؟

۱۶ $\sin^{-4} 2\alpha$ (۴) ✓

۱۶ $\cos^{-2} 2\alpha$ (۳)

۸ $\sin^{-2} 2\alpha$ (۲)

۸ $\cos^{-2} 2\alpha$ (۱)

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{(\sin \alpha \cos \alpha)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\alpha} = 16 \sin^{-4} 2\alpha$$

مثال: حاصل عبارت $\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$ کدام است؟

$\frac{1}{32}$ (۴)

$\frac{1}{16}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲) ✓

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\sin 20^\circ \times \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ \times \frac{1}{\sin 20^\circ}$

$\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

$\frac{1}{2} \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \times \frac{1}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 140^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2} \sin 80^\circ \rightarrow \frac{1}{2} \sin 160^\circ$

مثال: اگر $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x + \cos x$ باشد، حاصل $\tan x$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-2 (۲)

2 (۱)



مثال: اگر $\cos x + 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 0$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$-\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱) ✓

$$\cos x + 2 \sin x = 0 \xrightarrow{\div \cos x} 1 + 2 \tan x = 0 \Rightarrow \boxed{\tan x = -\frac{1}{2}}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}$$

مثال: حاصل عبارت $\sin 195^\circ \times \sin 105^\circ$ کدام است؟

-4 (۴)

4 (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲) ✓

$\frac{1}{4}$ (۱)



$$\sin(180+15) \sin(90+15) \quad \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$(-\sin 15)(+\cos 15) = -\frac{1}{4} \sin 30 = -\frac{1}{8}$$

$a = \sin \frac{\pi}{8}$
 $b = \cos \frac{\pi}{8}$

2 (۴)

-2 (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$-\sqrt{2}$ (۱) ✓



$$(a-b)^2 - (a+b)^2 = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} - 2ab - (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab) = -4ab$$

$$-4 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}$$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

$-\frac{24}{25}$ (۴)

$-\frac{16}{25}$ (۳) ✓
 $2 \sin x \cos x$
 ضرب

$-\frac{8}{25}$ (۲)

$-\frac{4}{25}$ (۱)

$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin 2x = \frac{9}{25} - 1 = -\frac{16}{25}$

$\cos(-\pi) = \cos \pi$

مثال: اگر $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan 4x$ کدام است؟

$2 \cos x$ (۴)

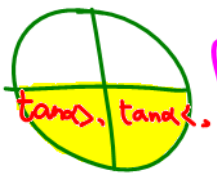
$-\frac{\sqrt{7}}{3}$ (۳)

$\pm \frac{3}{\sqrt{7}}$ (۲) ✓

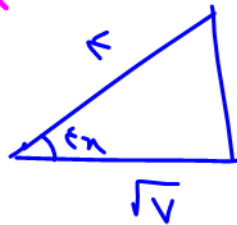
$\frac{\sqrt{7}}{3}$ (۱)

$(\sin 2x + \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_1 + \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\sin 4x} = \frac{1}{4}$



$\sin 4x = -\frac{3}{4}$



$\tan 4x = \pm \frac{3}{4}$

مثال: حاصل عبارت $\cos 2x + \frac{-1}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

-1 (۴)

$\sin^2 x$ (۳)

$\frac{1}{\cos^2 x}$ (۲)

$\cos^2 x$ (۱)

$\cancel{\cos^2 x} - \cancel{\sin^2 x} - \cancel{\cos^2 x} + 2 \sin^2 x = \sin^2 x$

$x = \pi \Rightarrow \cos \pi + \frac{-1}{1 + (\tan \pi)^2} + \frac{2}{1 + (\cot \pi)^2} \quad (\sin \pi)^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}$$

مثال: اگر $x = \frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

۱ (۴)

$-\sqrt{3}$ (۳✓)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)



$$\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = -\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\cos 2x + 3\cos x + 1}{3\sin x + \sin 2x}$ کدام است؟

$\cot 2x$ (۴)

$\frac{\cos 2x}{\sin x}$ (۳)

$\cot x$ (۲✓)

$\frac{1}{2} \cos x$ (۱)

$$\frac{2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 1}{3\sin x + 2\sin x \cos x} = \frac{\cos x (2\cos x + 3)}{\sin x (3 + 2\cos x)} = \cot x$$

$$\begin{cases} 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲✓)

$2\sqrt{2}$ (۱)



$$\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{2 \sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{2 \sin 20^\circ + \sin 40^\circ}$ کدام است؟

$\tan 20^\circ$ (۴)

$\tan^2 20^\circ$ (۳)

$\tan 10^\circ$ (۲)

$\tan^2 10^\circ$ (۱) ✓

$$\frac{2 \sin 20^\circ - 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ + 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ (1 - \cos 20^\circ)}{2 \sin 20^\circ (1 + \cos 20^\circ)} = \frac{2 \sin^2 10^\circ}{2 \cos^2 10^\circ} = \tan^2 10^\circ = \cot^2 80^\circ$$

مثال: اگر $x = \frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{\tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۱) ✓



$$\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$\frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x$

$x = \frac{\pi}{12}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

مثال: اگر $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$2/5$ (۴)

$2/4$ (۳) ✓

$1/8$ (۲)

$1/5$ (۱)

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan x = 1 + \tan x$$

$$\tan x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{2}{3} \right)}{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2/5$$

$\tan x = \frac{2}{3}$

مثال: اگر $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\tan x$ کدام است؟

- 4 (4)

- $\frac{4}{3}$ (3) ✓

- $\frac{3}{4}$ (2)

- 3 (1)



$$\frac{\cancel{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cancel{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \boxed{\tan \frac{x}{2} = 2}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2(2)}{1 - (2)^2} = \frac{4}{-3}$$

مثال: اگر $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2 \sin x$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (4)

$\frac{4}{3}$ (3)

- $\frac{3}{4}$ (2)

- $\frac{4}{3}$ (1) ✓

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2 \sin x \Rightarrow -\cos x = 2 \sin x \xrightarrow{\div \cos x} -1 = 2 \tan x \Rightarrow \boxed{\tan x = -\frac{1}{2}}$$

$\ominus (2, 4)$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

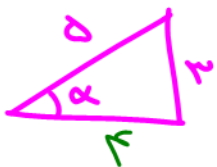
مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ بوده و زاویه α منفرجه باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (4)

- 2 (3)

- $\frac{7}{24}$ (2)

- $\frac{24}{7}$ (1) ✓



$$\tan \alpha = -\frac{3}{4}$$



$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{3}{4})}{1 - (-\frac{3}{4})^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}$$

مثال: اگر $\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\cot 2x$ کدام است؟

$\div \cos x$

$\frac{2}{4} (4 \checkmark)$

$\frac{4}{3} (3)$

$-\frac{3}{4} (2)$

$-\frac{4}{3} (1)$

$$\frac{2}{\tan x + 3} = \frac{2}{1} \Rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \cot 2x = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin \alpha} \\ \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ}$ کدام است؟

$-1 (4)$

$1 (3)$

$-\frac{1}{2} (2 \checkmark)$

$\frac{1}{2} (1)$

$$\frac{1}{-2 \cot (2 \times 22/5^\circ)} = \frac{1}{-2}$$

مثال: حاصل عبارت $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ کدام است؟

$4 (4 \checkmark)$

$3 (3)$

$2 (2)$

$1 (1)$

$$\frac{2}{\sin 2(15^\circ)} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\frac{\pi}{8} \equiv 22.5^\circ \Rightarrow 1 \in \in^\circ$$

مثال: حاصل عبارت $\left[\tan \frac{\pi}{5} \right] + \left[\tan \frac{4\pi}{5} \right]$ کدام است؟

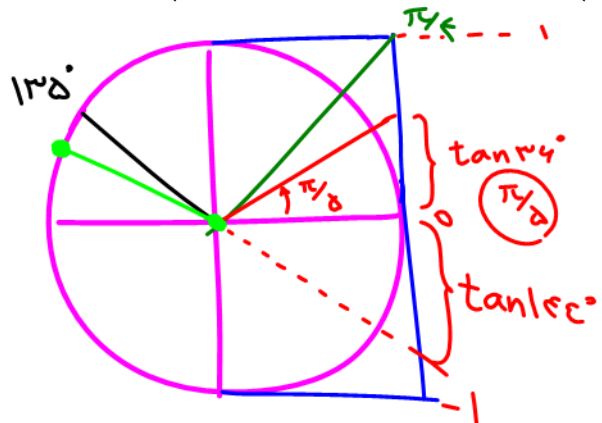
$-2 (4)$

$-1 (3)$

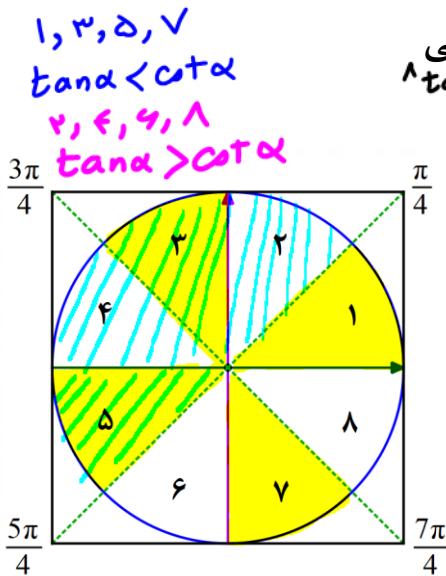
$1 (2)$

$0 (1)$ صفر

$$[0 < < 1] + [-1 < < 0] \\ 0 + (-1) = -1$$



مقایسه مقادیر نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



منطقه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
ناحیه مثلثاتی	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	
$\sin \alpha > \cos \alpha$								
$\sin \alpha < \cos \alpha$								
$\tan \alpha > \cot \alpha$								
$\tan \alpha < \cot \alpha$								

نکته: در تمامی نیمسازهای ۴ ناحیه دایره مثلثاتی $|\sin \theta|$ و $|\cos \theta|$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

نکته: در تمامی نیمسازهای ۴ ناحیه دایره مثلثاتی $|\tan \theta|$ و $|\cot \theta|$ برابر ۱ است.

$\sin x = -0.18$
 $\cos x = -0.98$

مثال: اگر $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ کدام است؟

۱) $2\cos x$ ۲) $-2\cos x$ ۳) $2\sin x$ ۴) $-2\sin x$ (✓)

$\tan x > \cot x$

$\cos x > \sin x$

~~$\cos x - \sin x - \sin x - \cos x =$~~

$= -2\sin x$

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

مثال: اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}}$ کدام است؟

۱) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ (✓) ۲) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ۳) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ۴) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\sqrt{\frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}} = \frac{|\sin x + \cos x|}{|\sin x - \cos x|} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

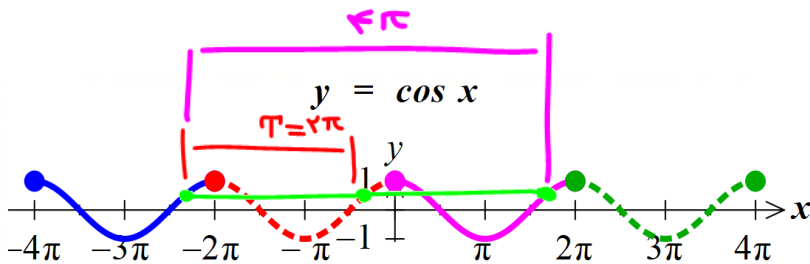


دوره تناوب

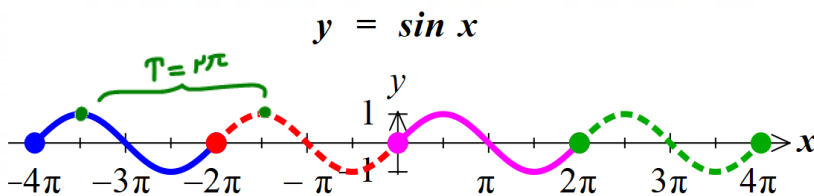
توابعی مانند $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را که دامنه آنها $\mathbb{R}$ و برد آنها $[-1, 1]$ است در نظر می‌گیریم. می‌دانیم اگر به x ، مضرب صحیحی از 2π (یعنی $2k\pi$ یا به عبارت دیگر $\dots, \pm 4\pi, \pm 2\pi, 0$) را اضافه کنیم، مقدار $\sin x$ با $\sin(2k\pi + x)$ و مقدار $\cos x$ با $\cos(2k\pi + x)$ برابرند؛ یعنی:

$$\begin{cases} \sin(2k\pi + x) = \sin x \\ \cos(2k\pi + x) = \cos x \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

نمودار این گونه توابع در بازه‌های 2π ، تکرار می‌شود. اگر در تابعی نمودار تابع در بازه‌هایی تکرار شود، آن تابع را متناوب می‌نامیم. کوچکترین عدد مثبتی که طول بازه تکرار است را دوره تناوب می‌نامیم و آن را با T نمایش می‌دهیم.



$$f(x \pm T) = f(x)$$



تابع متناوب: تابع $f(x)$ را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی مثبت T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ و $x \pm T \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

دوره تناوب: کوچکترین مقدار T که رابطه $f(x \pm T) = f(x)$ را برقرار کند، دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌نامیم.

دوره تناوب در توابع مثلثاتی

$$\begin{cases} y = a \sin(bx + k) + c \\ y = a \cos(bx + k) + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} y = a \tan(bx + k) + c \\ y = a \cot(bx + k) + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

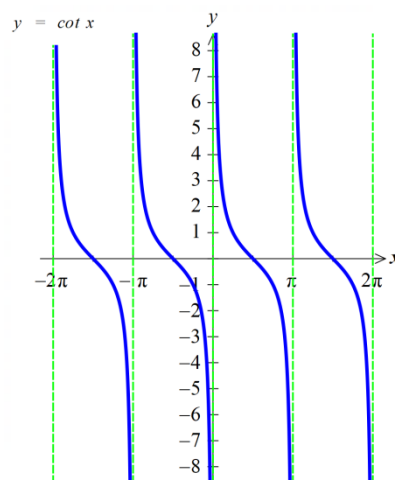
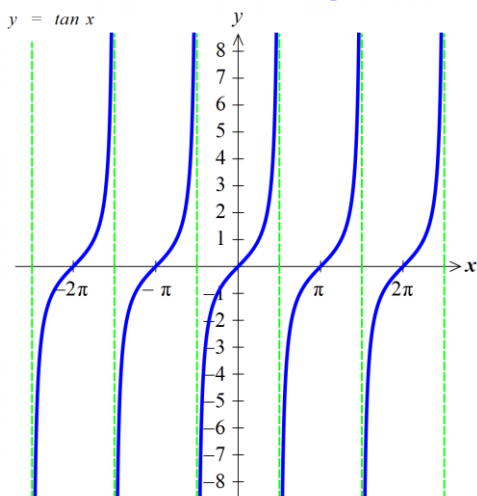
نکته: تنها عامل مؤثر در دوره تناوب توابع مثلثاتی، ضریب x موجود در کمان تابع مثلثاتی (b) است و اعداد a ، c و k روی دوره تناوب بی‌تأثیر هستند.

نکته: دامنه تابع متناوب الزاماً $\mathbb{R}$ نیست. مثلاً تابع $y = \tan x$, $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \pm (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

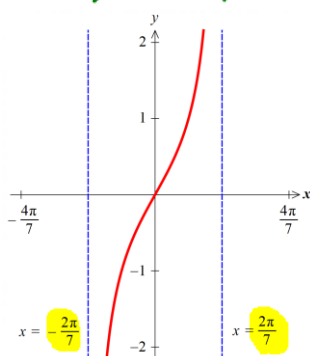
در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد،
اکیا صعودی است.

نمودار توابع $y = \cot x$ و $y = \tan x$ به صورت زیر هستند.



$$T = \frac{4\pi}{5}$$

مثال: قسمتی از شکل تابع $y = \tan ax$ به صورت زیر است. مقدار a را بیابید.



$$T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$a = \pm \frac{5}{4}$
 $a > 0$ → اکیا صعودی بین مجانب‌ها ✓
 $a < 0$ → اکیا نزولی بین مجانب‌ها ✗

$$a = \frac{5}{4}$$

نکته: دوره تناوب دو تابع باید هم جنس باشد؛ یعنی اگر دوره تناوب بخشی از تابع ضربی از π یا هر عدد گنگ دیگری مانند $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... باشد و دوره تناوب بخش دیگری از تابع، عددی گویا باشد، این تابع در کل نمی‌تواند متناوب باشد.

نکته: اگر T_f دوره تناوب تابع $f(x)$ و T_g دوره تناوب تابع $g(x)$ باشد، آنگاه ک.م.م T_f و T_g یک دوره تناوب برای $f+g$, $f-g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ خواهد بود ولی الزاماً کوچکترین دوره تناوب نیست.

در نکته فوق، شرط این که توابع $f+g$, $f-g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ متناوب باشند، این است که $\frac{T_f}{T_g}$ مقداری گویا باشد.

نکته: یک راه ساده برای پیدا کردن ک.م.م چند عبارت کسری این است که ک.م.م صورت کسرها را به ب.م.م مخرج کسرها تقسیم کنیم.

مثال: برای هر یک از توابع زیر، یک دوره تناوب (نه الزاماً کوچکترین دوره تناوب) را در صورت وجود بیابید.

☆ $f(T+x) = f(x)$ حس $T=\pi$

۱) $y = \sin x + \cos 2x + \tan 3x + \cot 4x$

$T = \left[\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right] = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = 2\pi$

حس $T=\pi$: $f(\pi+x) = \sin(\pi+x) + \cos(2\pi+2x) + \tan(\pi+3x) + \cot(\pi+4x)$

$T=2\pi$ - $\sin x + \cos 2x + \tan 3x + \cot 4x \neq f(x)$

۲) $y = \sin \sqrt{x} \cos 9x + 2$ $\pi+x$

$T = \left[\frac{2\pi}{\sqrt{x}}, \frac{2\pi}{9} \right] = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = 2\pi$

حس $T=\pi$: $f(\pi+x) = \sin(\sqrt{\pi+x}) \cos(9\pi+9x) + 2$

$f(\frac{2\pi}{\sqrt{x}}+x) = !!!$ (- $\sin \sqrt{x}$) (- $\cos 9x$) + 2 = $\sin \sqrt{x} \cos 9x + 2 = f(x)$

اصلي $T = \pi$

۳) $y = \sin 2x + \cos \sqrt{2}(x+1)$

$T_f = \frac{2\pi}{2}, T_g = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{\frac{2\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}+x) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos x + \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin x$

۴) $y = \cos \pi x + \tan x$

$T_f = \frac{2\pi}{\pi}, T_g = \frac{\pi}{1} \Rightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{2}{1} \notin \mathbb{Q}$

۵) $y = \pi \cot \pi x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{5} \right)$ $\pi+x$ $\pi+x$

$T = \left[\frac{\pi}{\pi} = 1, \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6 \right] = 6$

$f(\pi+x) = \pi \cot(\pi+\pi) + \sqrt{2} \cos(\pi+\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5})$

$\pi \cot(\pi) - \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}) \neq f(x) \Rightarrow T \neq \pi$

نکته: اگر x در کمان مثلثاتی، توانی جز عدد یک داشته باشد، تابع متناوب نیست.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را تعیین نمایید.

$f(x) = \sin(x^2 + 1)$ X

$g(x) = \cos(3x^2 - 7x)$ X

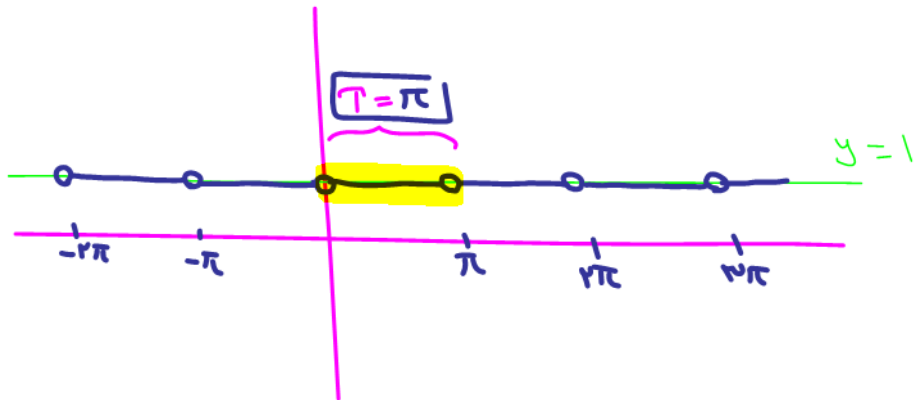
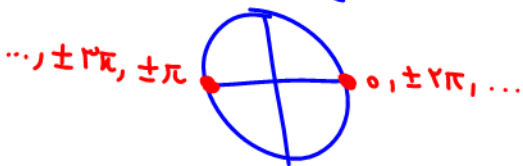
$h(x) = \tan(\pi x^2 - x)$ X

مثال: تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ از نظر متناوب بودن چگونه است؟

- ۱- متناوب است اما کوچکترین دوره تناوب ندارد.
- ۲- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.
- ۳- متناوب نیست
- ۴- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن π است.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$$

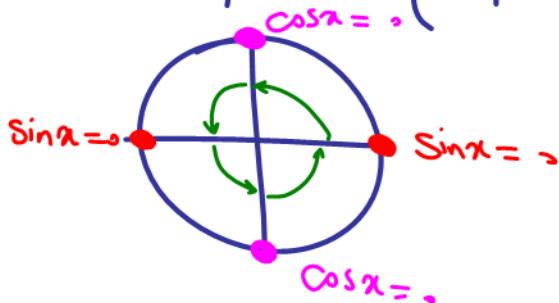


مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan x \cdot \cot x$ را بیابید.

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

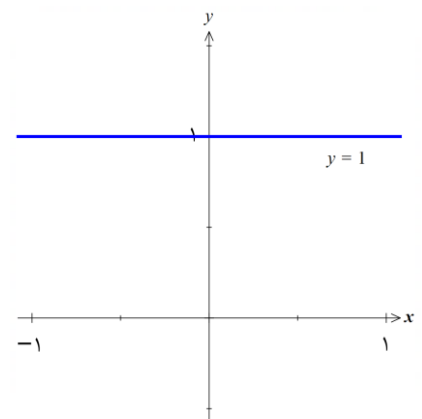


$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x \cdot \cos x = 0\}$$



$$T = \frac{\pi}{2}$$

نکته: توابع ثابت متناوب می باشند ولی دوره تناوب اصلی ندارند.

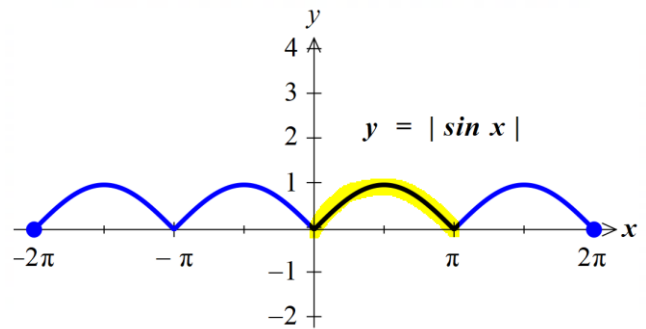
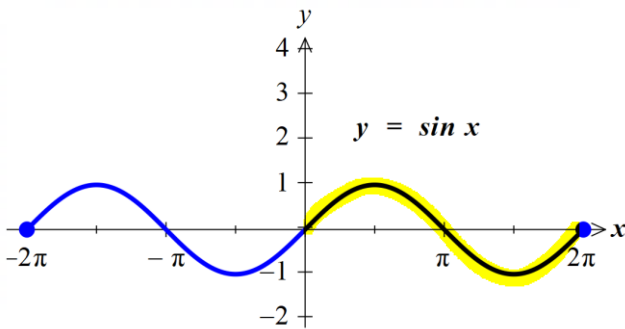


نکته: توان‌های فرد، دوره تناوب توابع $\sin x$ و $\cos x$ را تغییر نمی‌دهند.

$$\begin{cases} y = \sin x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} \\ y = \sin^r x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} \end{cases}$$

نکته: توان‌های زوج و قدرمطلق، دوره تناوب توابع $\sin x$ و $\cos x$ را نصف می‌کنند.

$$\begin{cases} y = \sin^{2n}(ax) \\ y = \cos^{2n}(ax) \\ y = |\sin(ax)| \\ y = |\cos(ax)| \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$



نکته: توابع $\tan x$ و $\cot x$ به هر توانی برسند (چه زوج، چه فرد) دوره تناوب آنها تغییر نمی‌کند و قدرمطلق نیز روی دوره تناوب آنها بی‌تأثیر است.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $y = |\cos 3x| + \left| \tan^2 \frac{x}{3} \right| + 3 \cos^3 x$ را بیابید.

$$T = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = \frac{3\pi}{1}, \frac{2\pi}{1} \right] = \frac{6\pi}{1} \Rightarrow T = 6\pi$$

بررسی
 $T = 3\pi$ ؟

$$f(3\pi + x) = f(x) \text{ برسی}$$

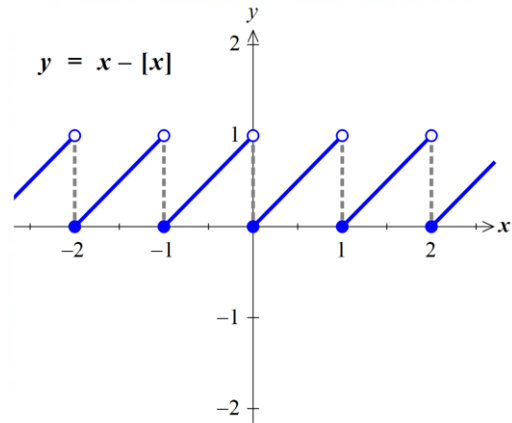
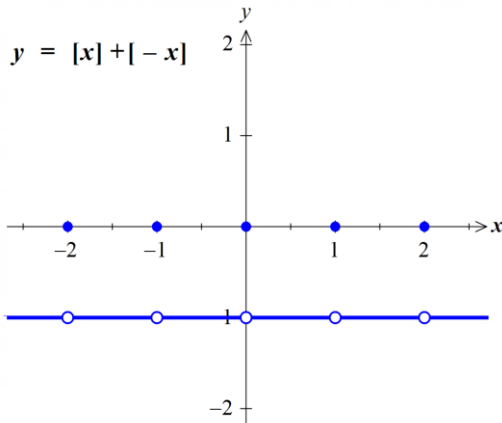
$$\begin{aligned} f(3\pi + x) &= |\cos 3(3\pi + x)| + \left| \tan^2 \left(\frac{3\pi + x}{3} \right) \right| + 3 \cos^3(3\pi + x) \\ &= |\cos(9\pi + 3x)| + \left| \tan^2 \left(\pi + \frac{x}{3} \right) \right| + 3 \cos^3 \left(\frac{3\pi}{3} + x \right) \\ &= |-\cos 3x| + \left| \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right| + 3(-\cos x)^3 \\ &= |\cos 3x| + \left| \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right| - 3 \cos^3 x \end{aligned}$$

$$f(3\pi + x) = |\cos 3x| + \left| \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right| - 3 \cos^3 x \neq f(x)$$

دوره تناوب توابع غیر مثلثاتی

$$\begin{cases} y = ax - [ax] \\ y = [ax] + [-ax] \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$y = (-1)^{[ax+b]} \Rightarrow T = \frac{2}{|a|}$$



یافتن دوره تناوب اصلی:

از آنجایی که برای توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ مقدار $[T_f, T_g]$ یک دوره تناوب بوده ولی لزوماً دوره تناوب اصلی نمی باشد، ابتدا یک دوره تناوب تابع را از فرمول های گفته شده یافته و سپس نصف این دوره تناوب را به روشی که در زیر توضیح داده می شود، بررسی می کنیم تا مشخص شود که اگر T دوره تناوب است، آیا $\frac{T}{2}$ هم دوره تناوب است یا خیر.

اگر $\frac{T}{2}$ دوره تناوب نبود، T را به عنوان دوره تناوب اصلی تابع معرفی می کنیم ولی اگر $\frac{T}{2}$ هم دوره تناوب تابع بود، باز هم تناوب را نصف می کنیم و $\frac{T}{4}$ را امتحان می کنیم و این کار (نصف کردن دوره تناوب) را تا جایی ادامه می دهیم که عدد نصف شده دوره تناوب تابع نباشد.

روش بررسی $\frac{T}{2}$ به عنوان دوره تناوب:

مقدار x را به $x + \frac{T}{2}$ تبدیل کرده و در تابع، جایگذاری می کنیم. اگر با عملیات جبری مشخص گردید که رابطه $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$ برقرار است، $\frac{T}{2}$ نیز دوره تناوب تابع $f(x)$ است و در غیر این صورت دوره تناوب را T در نظر می گیریم.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = ax - [ax] \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$f(x) = 3 \left[\frac{x}{3} \right] - x = -3 \left(\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3} \right] \right)$$

$$T = \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$$

$$g(x) = 6 \left[\frac{x}{6} \right] - 8 \left[\frac{x}{8} \right]$$

$$6 \left[\frac{x}{6} \right] - x + x - 8 \left[\frac{x}{8} \right]$$



$$h(x) = 15x - [9x] - [6x] = 9x - [9x] + 6x - [6x]$$

$$9x + 6x$$

$$T = \left[T = \frac{1}{9}, T = \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{3} \Rightarrow T = \frac{1}{3}$$

نکته (مطالعه آزاد): در یافتن دوره تناوب تابع $f \circ g(x)$ ، اگر $g(x)$ متناوب نباشد، $f \circ g(x)$ نیز

متناوب نخواهد بود و برای حدس اولیه T_g را انتخاب کرده و سپس $\frac{T_g}{2}$ و ... را بررسی می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = \cos(\sin ax)$$

$$T = \frac{2\pi}{a}$$

روند نصف کردن
چون $T = \frac{2\pi}{a}$

$$f(T+x) = f\left(\frac{\pi}{a} + x\right) =$$

$$\cos\left(\sin a\left(\frac{\pi}{a} + x\right)\right) = \cos\left(\sin(\pi + ax)\right)$$

$$= \cos(-\sin ax) = \cos(\sin ax) = f(x)$$



$$y = \sin(\cos ax)$$





$$y = \sin^n(ax)$$



$$y = \cos^{n+1}(ax)$$



$$y = \sin^n(ax) + \cos^n(ax)$$

نکته: برای تعیین دوره تناوب، ابتدا تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\cos x + 5\sin x} = \frac{2\tan x + 3}{3 + 5\tan x} = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow T = [\pi, \pi] = \pi$$

Handwritten notes on the diagram:

- For $2\sin x$, 2π is written above and $\frac{2\pi}{1}$ below.
- For $3\cos x$, 2π is written above and $\frac{2\pi}{1}$ below.
- For 3 , $\frac{\pi}{1}$ is written above.
- For $5\tan x$, $\frac{\pi}{1}$ is written below.

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2\cot 2\alpha$$

$$y = \cot(ax) - \tan ax$$

$$f(x) = +2\cot(2ax) \xrightarrow{\text{تناوب}} T = \frac{\pi}{|2a|}$$

آیا تناوب $T = \pi$ است؟



$a = \frac{1}{\pi}$

$y = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x$

$T = \left[T = \frac{2}{\frac{1}{\pi}} = 2\pi, T = \frac{2\pi}{\frac{1}{1}} = 2\pi \right] = 2\pi$

$f(\pi + x) =$

$(-1)^{\left[\frac{\pi+x}{\pi}\right]} \times \cos(\pi + x)$

$(-1)^{\left[1 + \frac{x}{\pi}\right]} \times \cos(\pi + x)$

$(-1)^{1 + \left[\frac{x}{\pi}\right]} \times \cos(\pi + x)$

$(-1) \times (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \times (-\cos x)$

$= (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cdot \cos x = f(x)$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$y = |\sin ax| + |\cos ax|$

حدس ما: $f(T + x) = f\left(\frac{\pi}{a} + x\right)$

$T = \frac{\pi}{|a|}$

$\left| \sin a\left(\frac{\pi}{a} + x\right) \right| + \left| \cos a\left(\frac{\pi}{a} + x\right) \right|$

$\left| \sin(\pi + ax) \right| + \left| \cos(\pi + ax) \right| = |\sin ax| + |\cos ax|$

$-\sin ax \quad -\cos ax$

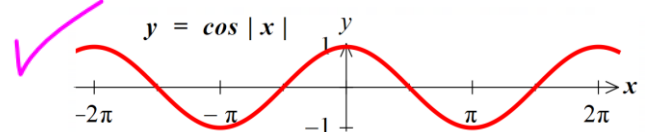
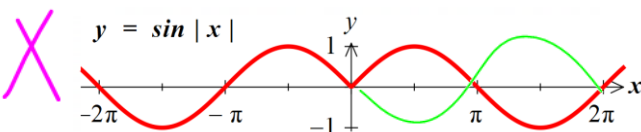
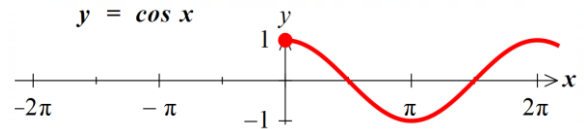
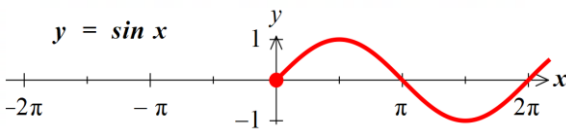
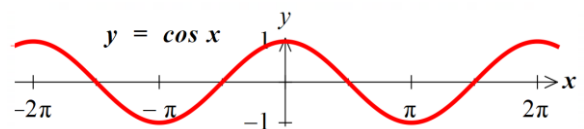
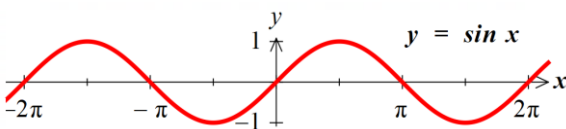
حدس ما

$T = \frac{\pi}{2a} = ?$

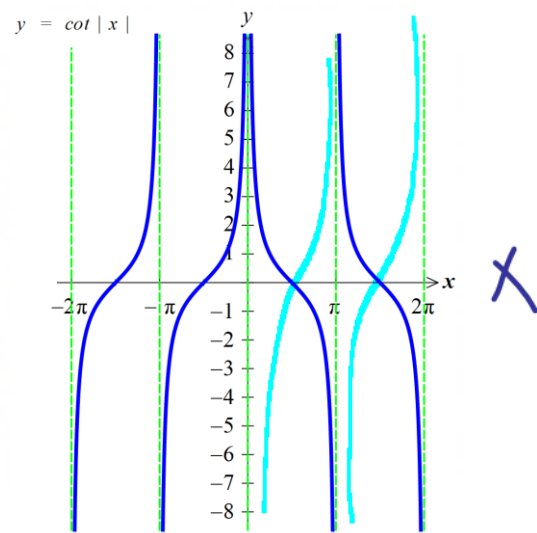
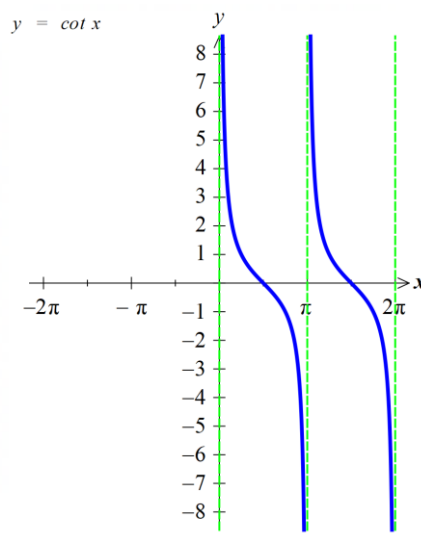
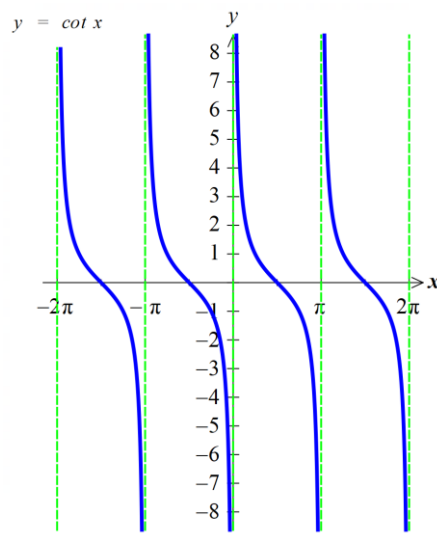
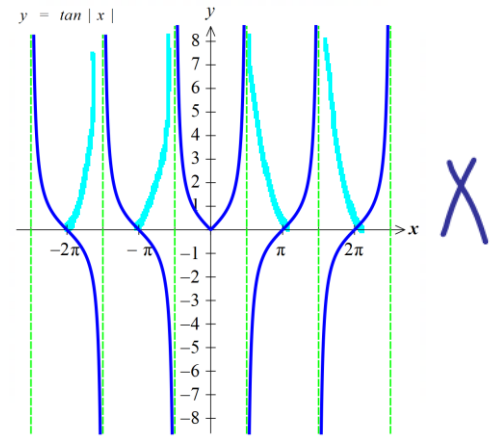
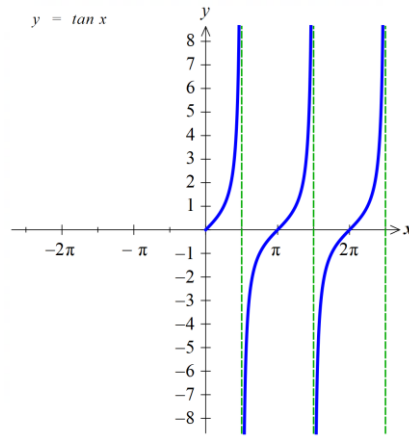
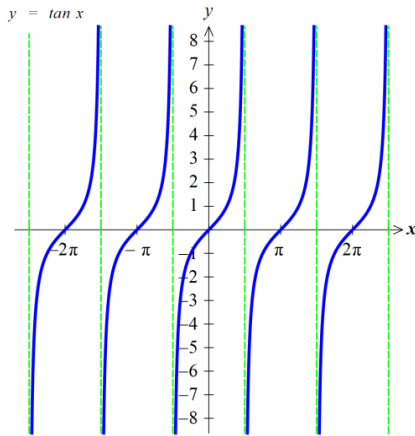
$f\left(\frac{\pi}{2a} + x\right) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + ax\right) \right| + \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + ax\right) \right|$

$|\cos ax| + |-\sin ax| = |\cos ax| + |\sin ax|$

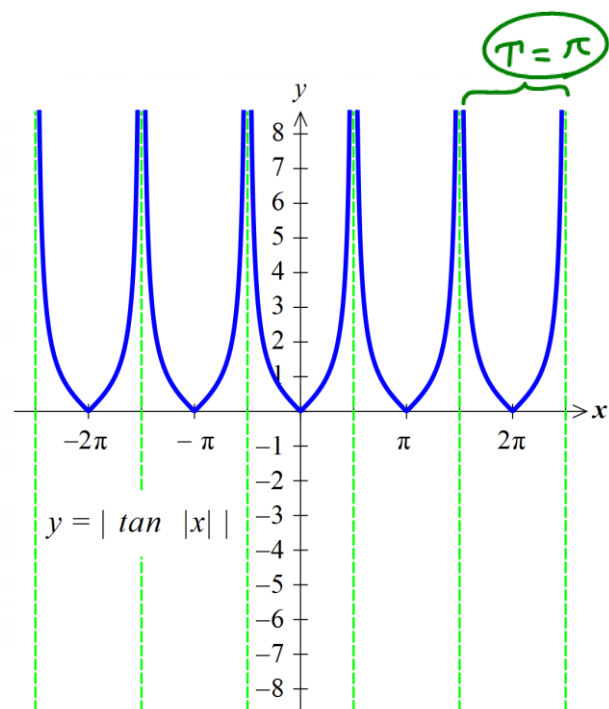
مثال: دوره تناوب توابع $y = \cos |x|$ و $y = \sin |x|$ را تعیین کنید.



مثال: دوره تناوب توابع $y = \tan |x|$ و $y = \cot |ax|$ را بیابید.



مثال: دوره تناوب توابع $y = |\tan |x||$ را بیابید.



مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x \rightarrow T_f = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan 3x - \cot 3x$ را بیابید.

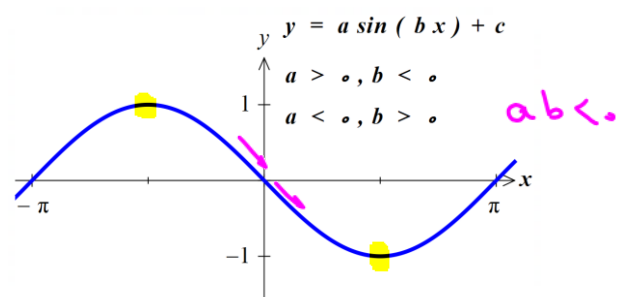
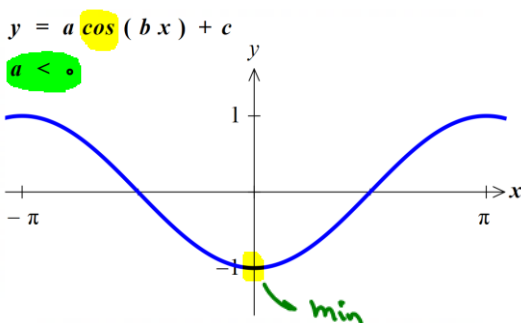
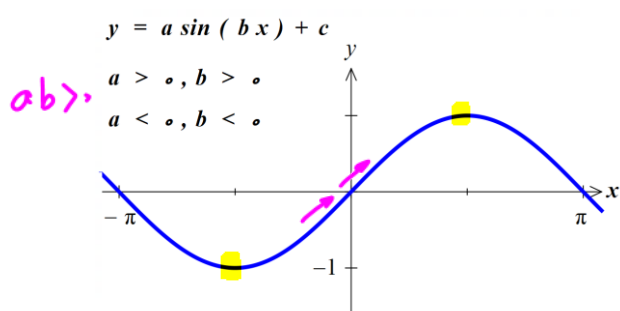
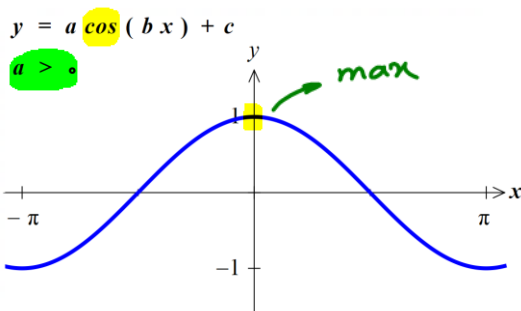
$$f(x) = -2 \cot 6x \rightarrow T_f = \frac{\pi}{6}$$

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 3x - [3x] + \cos^4 \pi x$ را بیابید.

$$T_f = \left[T_g = \frac{1}{3}, T_h = \frac{\pi}{\pi} = 1 \right] = 1$$

$$T_f = 1$$

یافتن ضابطه توابع مثلثاتی از روی نمودار آن



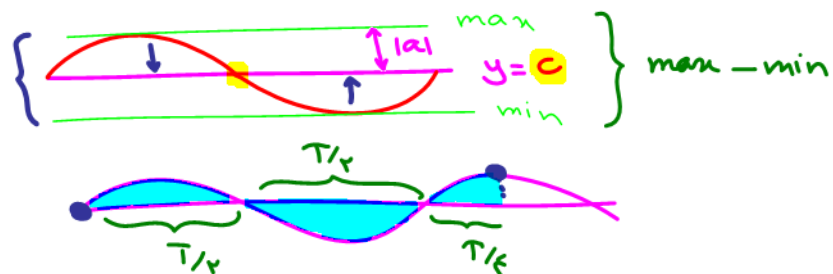
نکته: تابع $y = \cos x$ در $x = 0$ ماکزیمم یا مینیمم دارد در صورتی که تابع $y = \sin x$ در $x = 0$ ماکزیمم یا مینیمم ندارد.

از روی نمودار می‌توانیم مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع را تعیین کرده و از روی آن‌ها با توجه به فرمول‌های زیر، ضرایب a ، b و c را بدست آوریم.

$$|a| = \frac{\max - \min}{2}$$

$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$



نکته: برای یافتن مقادیر $\max$ و $\min$ از روی ضرایب a ، b و c ، از فرمول‌های زیر بهره می‌بریم.

$$\begin{cases} \max = c + |a| \\ \min = c - |a| \end{cases}$$

مثال: مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع $y = -2 \sin 3x - 7$ را بیابید.

$$y = -2 \sin 3x - 7$$

$$a = -2$$

$$c = -7$$

$$\max = c + |a| = -7 + |-2| = -5$$

$$\min = c - |a| = -7 - |-2| = -9$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$$

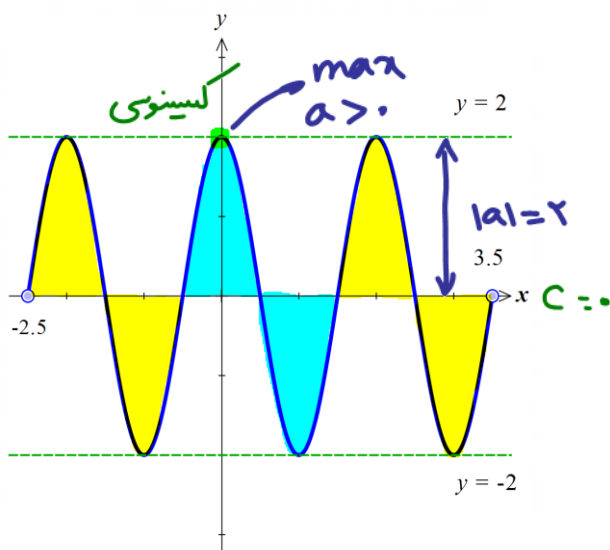
مثال: شکل مقابل مربوط به تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{1}{2} + bx\right)\pi$ است. $a \cdot b$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲✓)

۱ (۱)



$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$

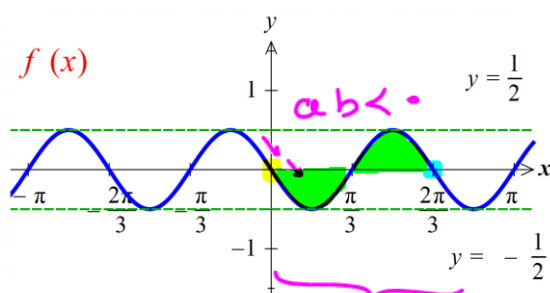
$$3T = 3,5 - (-2,5) = 6 \Rightarrow T = 2$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$|a| = 2 \rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

$$ab = 2$$

مثال: ضابطه توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ که نمودار آنها رسم شده است را بیابید.



$$y = a \sin(bx) + c$$

$$\begin{cases} c + |a| = \frac{1}{2} \\ c - |a| = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\oplus$

$$2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

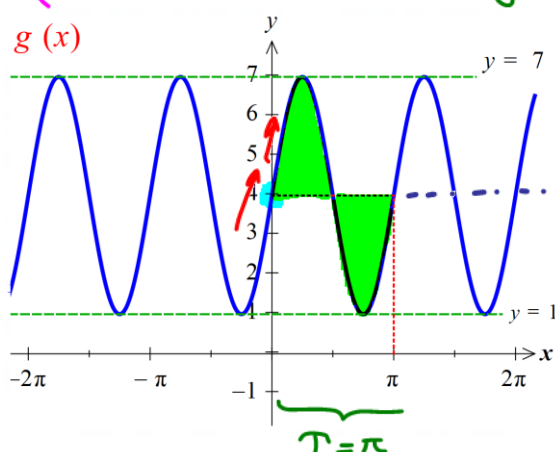
$$0 + |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}, b = -3, c = 0 \\ a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{4} \sin(-3x)$$

$$y = \frac{1}{4} \sin(3x) \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \sin(3x)$$



$$y = a \sin bx + c, a, b > 0$$

$$\begin{cases} a = -3, b = -2, c = 4 \\ a = 3, b = 2, c = 4 \end{cases}$$

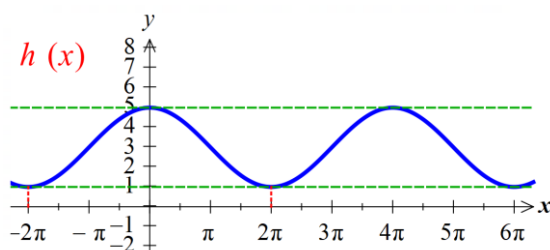
$$c = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$|a| = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

$$|b| = 2$$

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

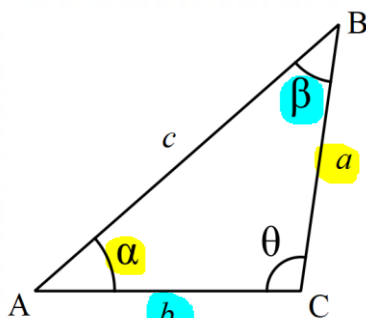


کاربردهایی از مثلثات

۱- قضیه سینوس ها

مقدار اندازه هر ضلع تقسیم بر سینوس زاویه مقابل آن، مقداری ثابت است.

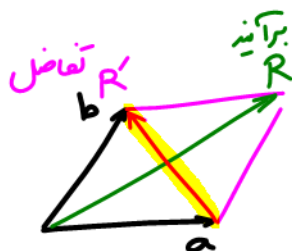
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta}$$



۲- قضیه کسینوس ها

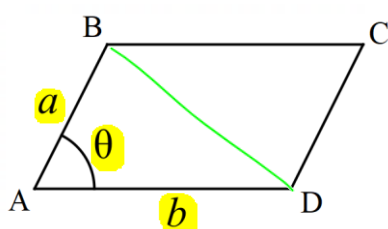
کاربرد: یافتن اندازه ضلع سوم مثلث

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{cases}$$

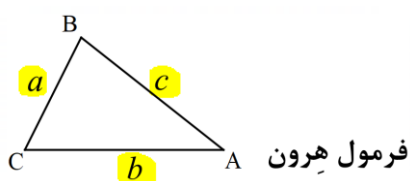


۳- مساحت مثلث و متوازی الاضلاع

مساحت متوازی الاضلاع مقابل برابر است با: $S = ab \sin \theta$



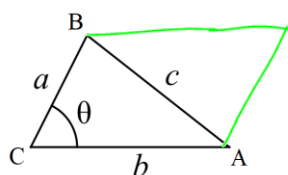
مساحت مثلث را در سه حالت می توانیم تعیین کنیم.



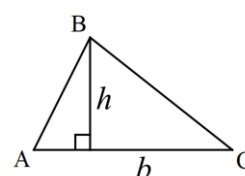
فرمول هرون

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

نصف محیط $P = \frac{a+b+c}{2}$



$$S = \frac{ab \sin \theta}{2}$$



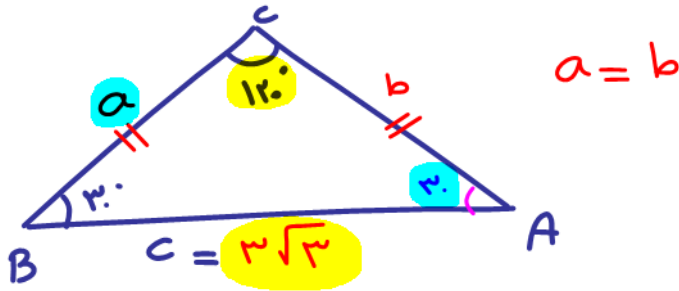
$$S = \frac{bh}{2}$$

مثال: مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد را بیابید.

$$P = \frac{7+9+12}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5}$$

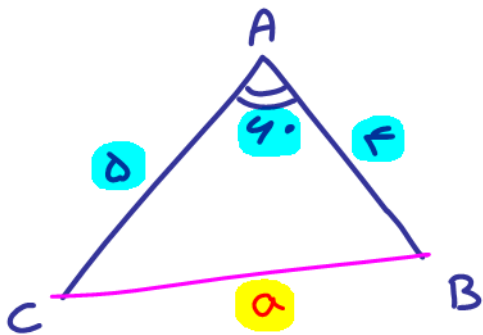
مثال: در مثلث ABC اگر $\hat{B} = 30^\circ$ و $\hat{C} = 120^\circ$ و اندازه ضلع AB برابر $3\sqrt{3}$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.



$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 3$$

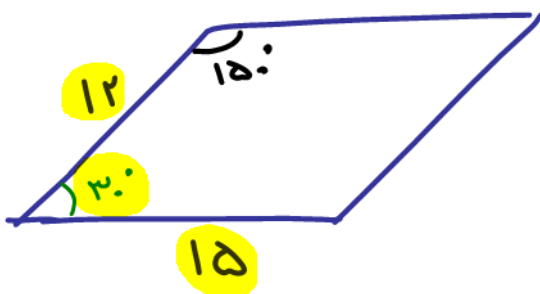
مثال: در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 60^\circ$ و اندازه اضلاع AB و AC به ترتیب 4 و 5 واحد باشد، اندازه ضلع BC را بیابید.



$$a^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4) \cos 60^\circ = 21$$

$$a^2 = 21 \Rightarrow a = \sqrt{21}$$

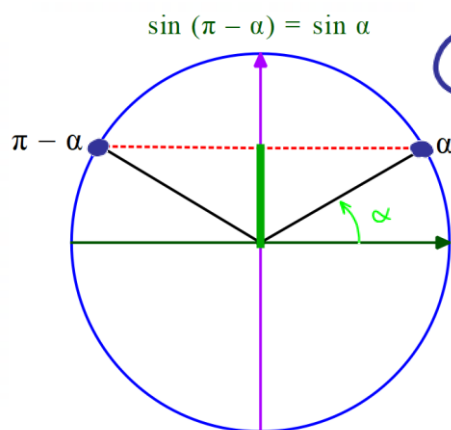
مثال: اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع 12 و 15 سانتی متر و اندازه یک زاویه آن 150° است. مساحت متوازی الاضلاع را بیابید.



$$S = 12 \times 15 \times \sin 30^\circ = 90$$

$$S = 90$$

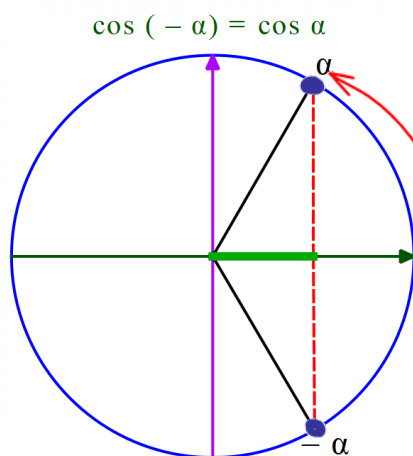
معادلات مثلثاتی



دینوس چه زاویه‌ای در ناحیه ۱، این عدد است؟ α

$$\sin x = \text{عدد}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

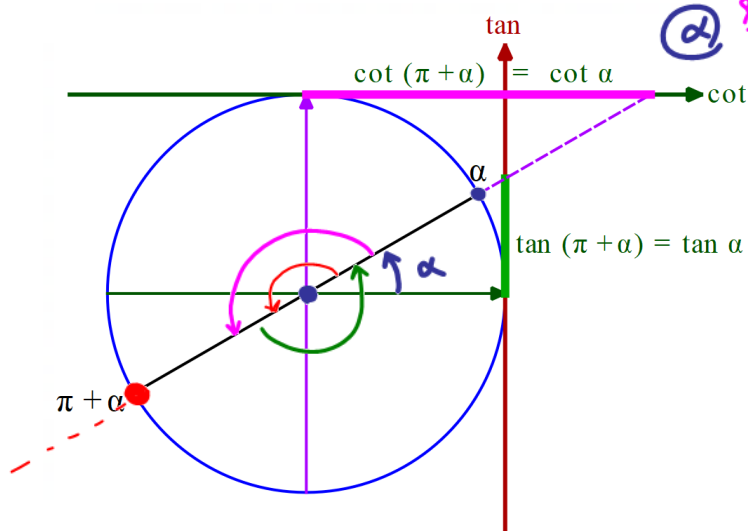


کسینوس چه زاویه‌ای در ناحیه ۱، این عدد است؟ α

$$\cos x = \text{عدد}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$



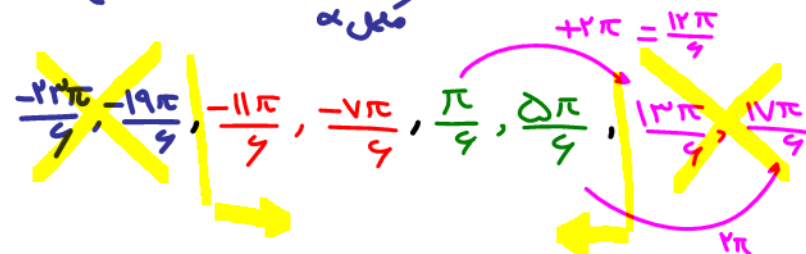
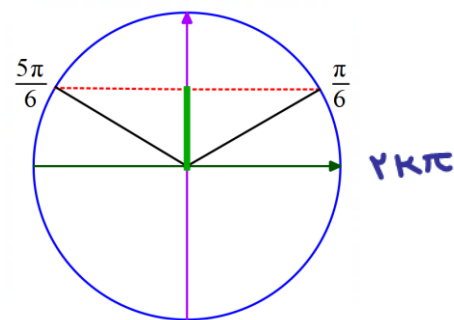
تانژانت چه زاویه‌ای در ناحیه ۱، برابر این عدد است؟ α

$$\tan x = \text{عدد}$$

$$\begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

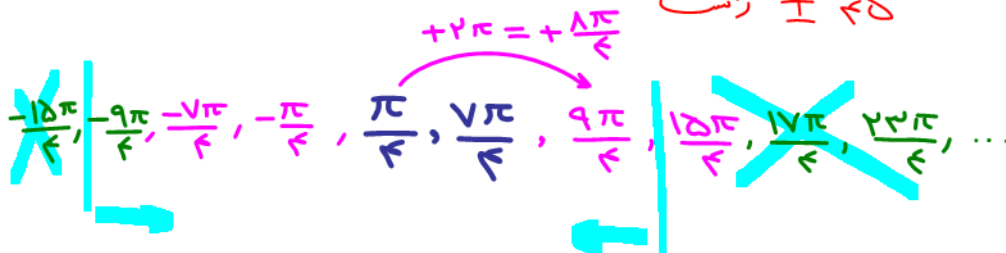
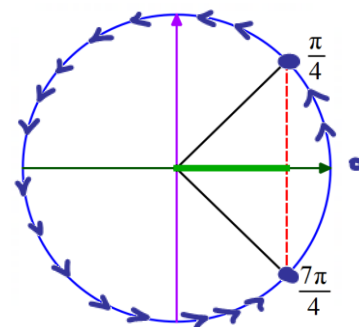
مثال: معادله مثلثاتی $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید. $\sin x = \sin(\frac{\pi}{6})$ $[-\frac{5\pi}{6}, 2\pi]$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



مثال: معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید. $\cos x = \cos(\frac{\pi}{4})$ $[-3\pi, 3\pi]$

$$x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$



مثال: کدام گزینه بخشی از جواب معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin x$ است؟

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{(2k+1)\pi}{4} \quad (3) \checkmark$$

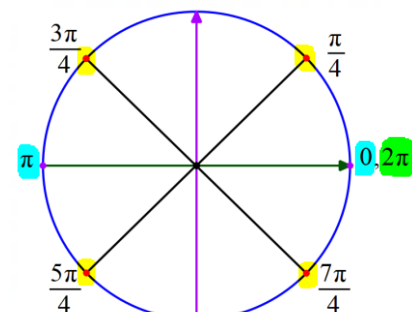
$$\frac{k\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi \rightarrow \text{چپ در راست} \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \rightarrow \text{نیسازها} \end{cases}$$

$[0, 2\pi]$
چندتا جواب
✓ تا جواب

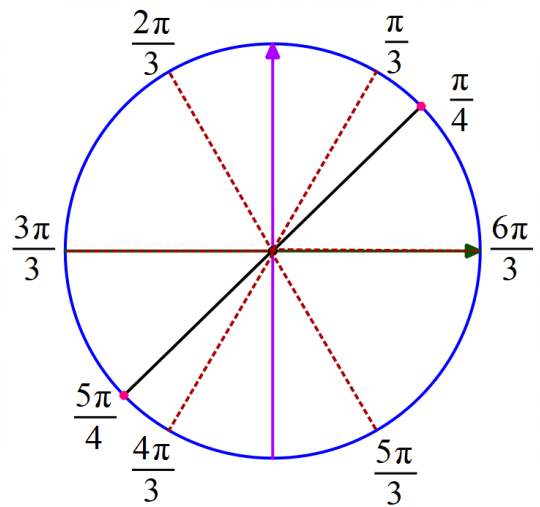


$k=0 \rightarrow$ گ ۴ ض
 $k=1 \rightarrow$ گ ۱ ض
 $k=2 \rightarrow$ گ ۲ ض

نکته: در معادلات مثلثاتی باید جنس تابع مثلثاتی طرفین تساوی با هم یکسان باشد.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha \end{cases}$$

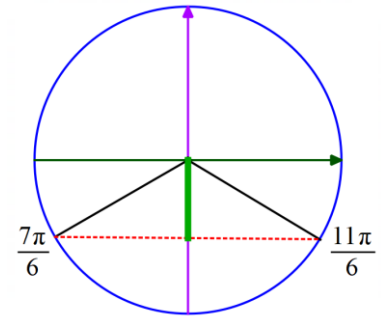
مثال: جوابهای معادله مثلثاتی $\sin 4x = \cos 2x$ را که در بازه $[0, 4\pi]$ می باشند بیابید.



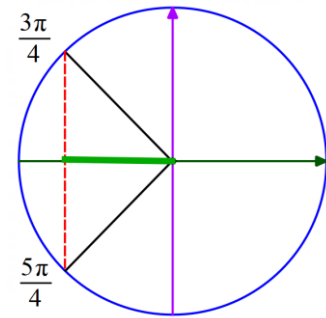
نکته: اگر در معادلات مثلثاتی، عددی که با نسبتهای مثلثاتی برابر است، منفی باشد، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} \sin x = a & \frac{\sin \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \tan x = a & \frac{\tan \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \cot x = a & \frac{\cot \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \cos x = a & \frac{\cos \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow \pi - \alpha \end{cases}$$

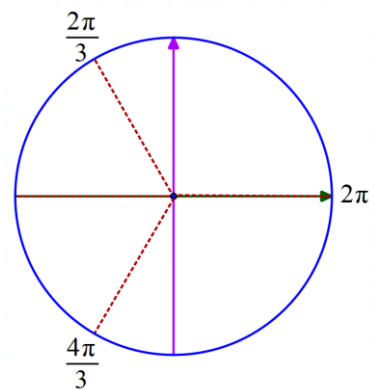
مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.



مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

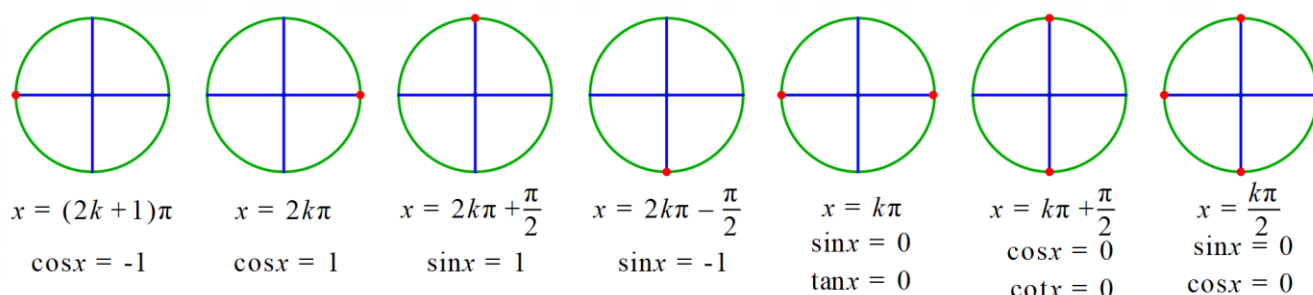
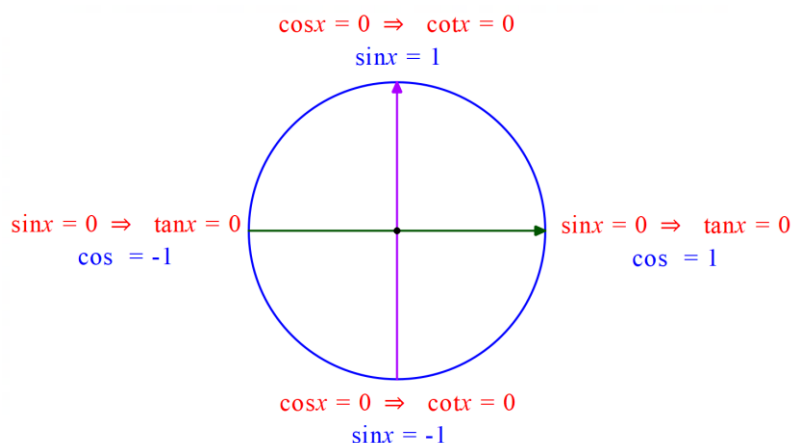


مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x = \frac{-1}{2}$ را حل کنید.

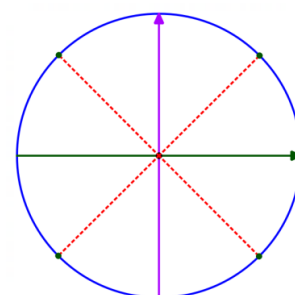


حالات خاص معادلات مثلثاتی

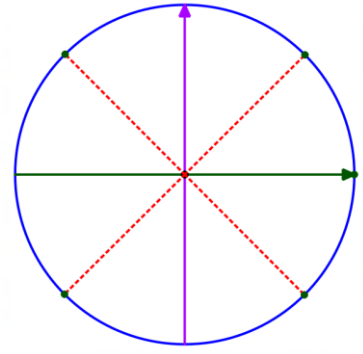
در معادلات مثلثاتی، حالاتی را که نسبت‌های $\sin x$ و $\cos x$ برابر با اعداد صفر، ۱ یا -۱ شوند و یا اینکه نسبت‌های توابع $\tan x$ و $\cot x$ برابر با عدد صفر شوند، حالات خاص می‌نامیم که در این حالت جواب‌های معادلات مثلثاتی، از بین نقاط مرزی چهار ناحیه دایره مثلثاتی خواهند بود. در نتیجه برای ۷ حالت خاص زیر می‌توانیم فرمول‌های زیر را تعریف کنیم.



مثال: معادله مثلثاتی $\cos 4x = 0$ را حل کنید.



مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = 2 \cos 2x$ چند جواب در فاصلهٔ $[-\pi, 3\pi]$ دارد؟



مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\tan 3x \cdot \tan 4x = 1$ را حل کنید.

مثال: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴)

$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)



مثال: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi$

(۲) $2k\pi + \pi$

(۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cot x + \tan x = 2$ را حل کنید.



مثال: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi$

(۲) $2k\pi + \pi$

(۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

(۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

مثال: معادله مثلثاتی $(3 \sin x - \sqrt{5})(2 \cos x - \sqrt{7}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

