



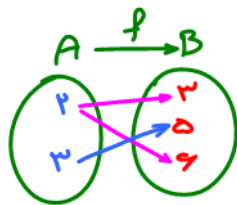
کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده





تابع

تعریف رابطه

مجموعه‌ای از تعدادی زوج مرتب را رابطه می‌نامند.

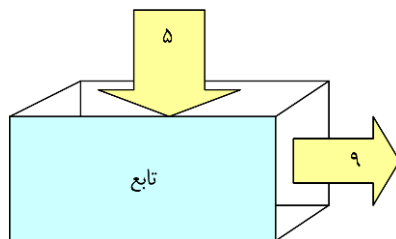
$$R = \{ (2, 3), (3, 5), (2, 6) \}$$

تابع نیست

تعریف تابع

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نظیر می‌شود (نه بیشتر و نه کمتر)

مثال: دستگاه زیر هر عضو مجموعه $A = \{ 3, 5, 6, 7, 1 \}$ را ابتدا دو برابر کرده و سپس یک واحد از حاصل به دست آمده کم می‌کند.

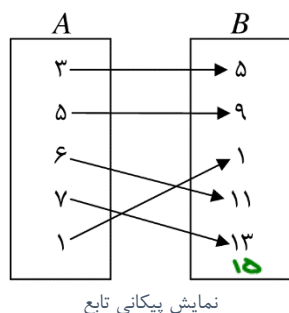


مجموعه خروجی‌های دستگاه عبارت است از:

$$B = \{ 5, 9, 11, 13, 1 \}$$

چون این رابطه هر عضو A را فقط به یک عضو از مجموعه B نسبت می‌دهد، پس این رابطه، یک تابع است. این تابع را به شکل‌های مختلفی نمایش می‌دهند.

الف: نمایش تابع به شکل پیکانی



نمایش پیکانی تابع

ب: نمایش تابع به شکل زوج‌های مرتب

$$\{ (3, 5), (5, 9), (6, 11), (7, 13), (1, 1) \}$$

ج: نمایش تابع به شکل جدول

x	3	5	6	7	1
y	5	9	11	13	1

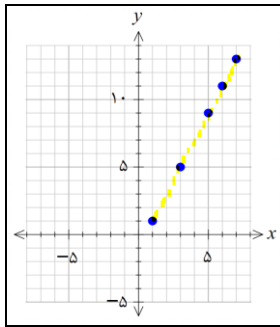
د: نمایش تابع به شکل ضابطه

چون مقدار y برابر $2x - 1$ است، پس داریم: $y = 2x - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2x - 1 \end{array} \right.$$

هم دانه
هم دانه
برد زیر مجموعه
هم دامنه است

ه: نمایش تابع به شکل مختصات دکارتی



$$y = 3x - 1$$

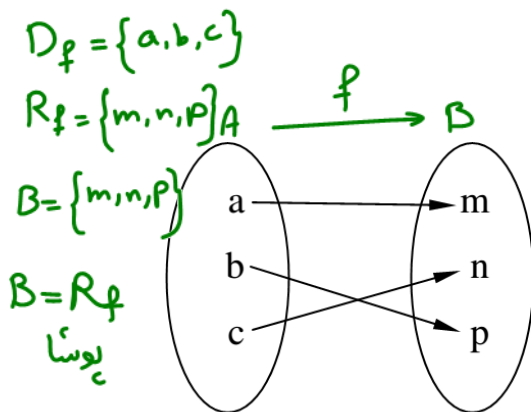
نمایش دکارتی تابع

تعریف تابع (نمودار ون): یک رابطه به صورت نمودار ون زمانی تابع می‌باشد که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

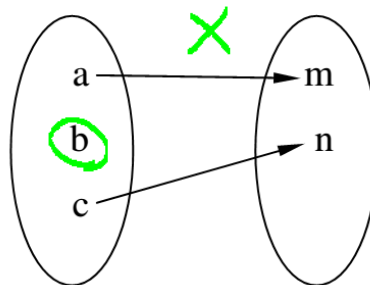
نکته: نیاز نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو از مجموعه B اصلاً پیکانی وارد نشده، یک پیکان وارد شود و یا اینکه بیش از یک پیکان وارد شود. مجموعه A را دامنه و B را هم‌دامنه (مقصد) تابع می‌نامیم. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه آن است و مجموعه‌ی اعضای را شامل می‌شود که به آن‌ها پیکان وارد شده باشد.

نکته: در حالت کلی برد تابع همواره زیرمجموعه هم‌دامنه آن است. یعنی $R_f \subseteq B$ و در حالتی که $R_f = B$ باشد، گویند تابع پوشا می‌باشند.

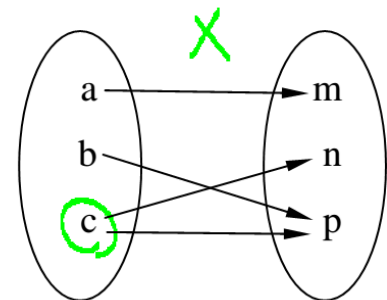
تمرین: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟



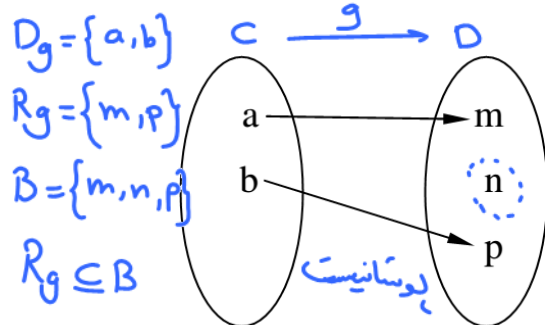
(۱)



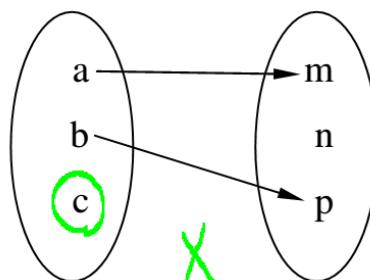
(۲)



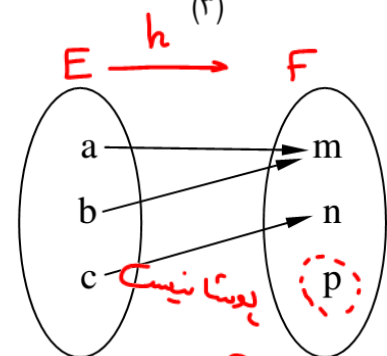
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

$D_h = \{a, b, c\}$
 $B = \{m, n, p\}$
 $R_h = \{m, n\}$

تعریف زوج مرتبی تابع:

رابطه‌ای را که مؤلفه‌های اول تکراری نداشته باشد، یعنی به ازای هر x فقط یک y داشته باشد، را تابع می‌گویند و یا اینکه اگر مؤلفه‌های اول تکراری دارد، الزاماً مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

مثال: اگر رابطه $f = \{(-1, m^2 - 3), (-1, 1), (2m, 3), (4, 6)\}$ تابع باشد، مقدار m را بیابید.

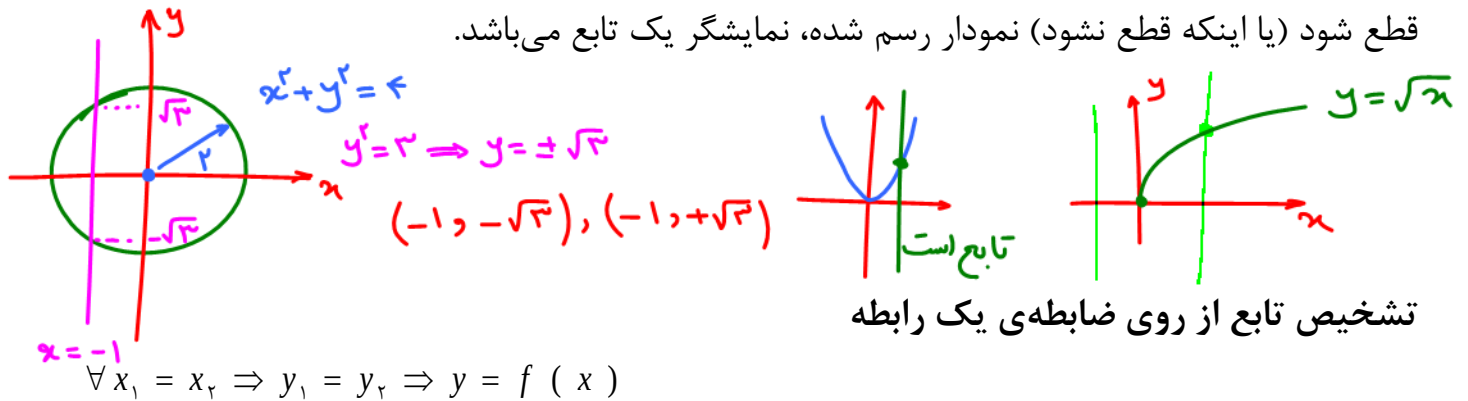
$$m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$\times m = 2 \Rightarrow (2m, 3) = (4, 3) \neq (4, 6)$$

$$\boxed{m = -2} \Rightarrow (2m, 3) = (-4, 3)$$

تعریف تابع از روی نمودار: اگر به ازای هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع f حداکثر در یک نقطه

قطع شود (یا اینکه قطع نشود) نمودار رسم شده، نمایشگر یک تابع می‌باشد.



توجه: در تابع به ازای هر ورودی (x)، فقط یک خروجی (y) داریم.

نکته: در برخی از موارد می‌توان با مثال نقض، تشخیص داد که یک رابطه تابع نیست.

مثال: کدام یک از روابط زیر نمایش دهنده یک تابع می‌باشد؟

$$[y] = x \xrightarrow{x=2} [y]=2 \Rightarrow 2 \leq y < 3 \text{ تابع نیست}$$

$$\sin y = \sqrt{x} \xrightarrow{x=0} \sin y = 0 \Rightarrow \{y = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ تابع نیست}$$

$$y^4 = x^3 \xrightarrow{x=1} \sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{1} \rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad (1, -1), (1, +1) \text{ تابع نیست}$$

$$|y| = x^4 \xrightarrow{x=2} |y| = 16 \rightarrow y = \pm 16 \quad (2, -16), (2, +16) \text{ تابع نیست}$$

$$y^3 - y = x^2 \xrightarrow{x=0} y(y^2 - 1) = 0 \rightarrow (y)(y+1)(y-1) = 0 \text{ تابع نیست}$$

$y=0 \quad y=-1 \quad y=+1$

نکته: هر رابطه به صورت $f(x) = a_1 y^1 + a_2 y^2 + a_5 y^5$ با ضرایب مثبت ($a_i > 0$) تابع است.

$$y^5 = \sqrt{x}$$

$$y^5 + 3y = \sin x$$

$$y^3 + y = x$$

نکته: اگر y درون قدرمطلق باشد، تابع نیست مگر آن که عبارت ساده شده و قدرمطلق از بین برود.

مثال: کدام عبارت زیر تابع است؟

$$|y+1| = x \xrightarrow{x=1} |y+1|=1 \Rightarrow y+1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y+1=1 \\ y+1=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad (1,0), (1,-2)$$

$$|y+1| = \sin \pi[x] \xrightarrow[\substack{x \in \mathbb{R} \\ [x] \in \mathbb{Z}}]{\text{صفر}} |y+1|=0 \rightarrow y+1=0 \rightarrow y=-1, x \in \mathbb{R}$$

$\pm 8\pi, \pm 2\pi, \pm \pi$

مقدار تابع: اگر $(a, b) \in f(x)$ باشد، در این صورت $f(a) = b$ بوده و گوییم مقدار تابع $f(x)$ در نقطه‌ی

$x = a$ برابر با b است.

مثال: اگر $-f\left(\frac{x-1}{2}\right) + x = f(2)$ باشد، حاصل $f(3)$ را بیابید.

$$-f\left(\frac{x-1}{2}\right) + x = f(2)$$

$$f(2) \text{ یابی: } \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x=5$$

$$\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5$$

$$-f(2) + 5 = f(2)$$

$$f(2) = \frac{5}{2}$$

$$5 - \frac{5}{2} = f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}$$

$$f(2) = ? \quad x=2$$

$$f(2) + 2f(2) = (2)^2 + 5 \Rightarrow 3f(2) = 9 \Rightarrow f(2) = 3$$

$$f(x) + x f(x) = x^2 + 5$$

$$x=1 \rightarrow f(1) + 1 = 1 + 5 \rightarrow f(1) = 5$$

مثال: اگر $f(x) + x f(2) = x^2 + 5$ باشد، حاصل $f(1)$ را بیابید.

مثال: اگر رابطه زیر یک تابع باشد، مقدار $f(2)$ چند است؟

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + a & x \geq 1 \\ x + 4 & x \leq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} f(1) &= 4(1)^2 + a = a + 4 \\ f(1) &= 1 + 4 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 4 = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{1\}$$

$$f(2) = 4(2)^2 + 1 = 17 \Rightarrow f(2) = 17$$

مثال: اگر $f(x) + \underbrace{[f(x)]}_{\in \mathbb{Z}} = 2 \underbrace{\left[x^2 + \frac{1}{2} \right]}_{\in \mathbb{Z}}$ رابطه زیر یک تابع باشد، مقدار $f(1)$ چند است؟

الزاماً $\Rightarrow f(x) \in \mathbb{Z}$

$[f(x)] = f(x)$

$f(x) + f(x) = 2 \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow$

$\boxed{x=1}: 2f(1) = 2(1) \rightarrow \boxed{f(1)=1}$

مثال: اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آن گاه $f(8)$ کدام است؟

(تقریبی ۱۶)

۸ (۴)

۷ (۳) ✓

۳ (۲)

۵ (۱)

$f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + 4 = 7$

مثال: ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a ،

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

$f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است؟

۱ (۴)

۲ (۳) ✓

۳ (۲)

۴ (۱)

$\boxed{a \neq 0}$:

$1 - |a| < 1 \xrightarrow{\text{بنا}} f(1 - |a|) = 2(1 - |a|) - 1 = 1 - 2|a|$

$2 + |a| > 1 \xrightarrow{\text{تایید}} f(2 + |a|) = (2 + |a|)^2 - (2 + |a|) - 7$

$4 + |a|^2 + 4|a| - 2 - |a| - 7 = 1 - 2|a| \Rightarrow$

$|a|^2 + 3|a| - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ |a| = -6 \end{cases} \rightarrow \boxed{a = \pm 1}$

$a = 0 \Rightarrow$

$f(1) \neq f(2) \Rightarrow -7 \neq -5$

نابرابرند

نکته: اگر بزرگ‌ترین توان y زوج باشد، عبارت مورد نظر تابع نیست.

نکته: برد توابع درجه فرد $\mathbb{R}$ است.

$y = -x^3 + 5x - 7$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow -(+\infty)^3 = -\infty$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow -(-\infty)^3 = +\infty$



$R_f = [\min, +\infty)$

دامنه تابع:

حدود تعییرات متغیر x را دامنه تابع می‌نامیم.

دامنه تابع بصورت زوج مرتب:

مجموعه مؤلفه‌های اول یک تابع زوج مرتبی را دامنه می‌نامیم.

$f = \{ (3, 5), (5, 9), (6, 11), (7, 13), (1, 1) \} \Rightarrow D_f = \{ 1, 3, 5, 6, 7 \}$

دامنه توابع دکارتی:

اگر یک تابع در دستگاه مختصات دکارتی ترسیم شده باشد، تصویر نمودار بر روی محور x ها را دامنه تابع می نامیم.

$$D_f = [-5, 0] \cup (2, +\infty)$$

$$R_f = \{-3\} \cup [-2, +\infty)$$

تعیین دامنه تابع از روی ضابطه:

الف) دامنه توابع چندجمله ای:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x - 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

ب) دامنه توابع گویا:

اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله ای باشند $g(x) = 4x^5 - 3x^2 + 4x - 5 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, +2\} = \mathbb{R} - \{\pm 2, 0\}$$

$$x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow (x^2)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x)^2(x-2)(x+2) = 0$$

$x=0$ مضاعف $x=2$ ساده $x=-2$ ساده

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{8}\}$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1^3 \Rightarrow x = 1$$

$$f(x) = \frac{5}{[x] + 2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-2, -1) = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$$

$$[x] + 2 = 0 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

مخرج نامعنی نشد



$$f(x) = \frac{3x + 6}{|x - 1| - 2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

$$|x - 1| - 2 = 0 \Rightarrow |x - 1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{2}{x^2 + x + m + 1}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود m را بیابید.
 $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه معرج}\}$
 کسی

$$x^2 + x + m + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (1)^2 - 4(1)(m+1) < 0 \Rightarrow 1 - 4m - 4 < 0 \Rightarrow -3 < 4m \Rightarrow m > -\frac{3}{4}$$

$$m > -\frac{3}{4}$$

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{6}{2x^2 + mx + n}$ برابر $\mathbb{R} - \{3\}$ باشد، مقادیر m و n را بیابید.

مخرج $\Rightarrow 2(x-3)^2 = 2x^2 - 12x + 18$
 $x=3$
 تنهاریه معرج

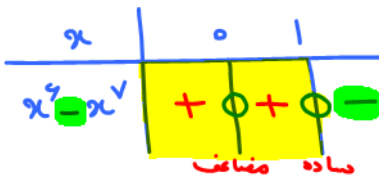


$D_f = \mathbb{R} - \{3, 5\} \Rightarrow$ معرج $= 2(x-2)(x-5) = 2x^2 - 14x + 20 \Rightarrow \begin{cases} m = -14 \\ n = 20 \end{cases}$
 آتری گف

پ) دامنه توابع رادیکالی: رادیکال فرجه زوج بر دامنه تابع بی تأثیر است و می توانیم آن را در نظر نگیریم
 ولی در مورد رادیکال فرجه زوج باید به این نکته توجه کنیم که عبارت زیر رادیکال فرجه زوج نباید منفی باشد.

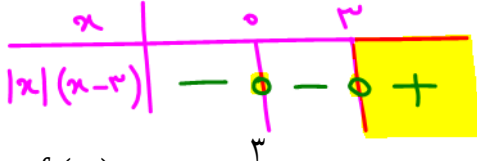
مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{x^6 - x^4} \Rightarrow x^4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(1-x^2) \geq 0$$



$$D_f = (-\infty, 1]$$

$$f(x) = \sqrt{|x|(x-3)} \Rightarrow |x|(x-3) \geq 0 \Rightarrow D_f = [3, +\infty) \cup \{0\}$$



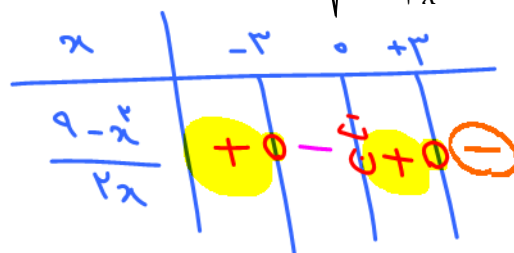
$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1} - 1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} - 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

$$D_f = [1, 2) \cup (2, +\infty)$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{2x}}$ را بیابید.

$$\frac{9-x^2}{2x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(3-x)(3+x)}{2x} \geq 0$$



$$D_f = (-\infty, -3] \cup (0, 3]$$

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x - m}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود m را بیابید.

$$x^2 - x - m \geq 0$$

بسی $a > 0 \rightarrow 1 > 0$

$(\Delta = 0) \cup (\Delta < 0) = \Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(-m) \leq 0 \Rightarrow 4m \leq -1 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{4}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{\cos \pi x - 1}$ رابطه زیر یک تابع باشد، مقدار $f\left(\frac{3}{2} - f(x)\right)$ چند است؟

$$\cos \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos \pi x \geq 1 \Rightarrow \cos \pi x = 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

بنده یا مساوی

$$f\left(\frac{3}{2} - f(x)\right) = \sqrt{\cos \pi \left(\frac{3}{2} - f(x)\right) - 1} = \sqrt{-\sin \pi \left(\frac{3}{2} - f(x)\right) - 1} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

ت) دامنه توابع لگاریتمی:

$$f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-1)} |x|$ را بیابید.

- ① $|x| > 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
- ② $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
- ③ $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

حذف $(1, +\infty)$

$$D_f = (1, +\infty) - \{2\} = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

دامنه توابع مثلثاتی:

توابع سینوسی و کسینوسی همانند فرجه فرد بر دامنه تابع تأثیری ندارند و برای تعیین دامنه توابع به صورت تانژانت و کتانژانت، عبارت را به صورت کسری می نویسیم.

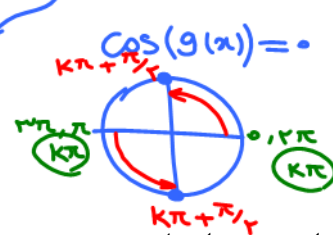
$$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow D_f = \left\{x \mid g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f(x) = \cot(g(x)) \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) \neq k\pi\}$$

$$\tan(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{\cos(g(x))}$$



مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{[x]}\right) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

مخرج را منفی نشاند

$$f(x) = \tan(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{x = \frac{(2k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

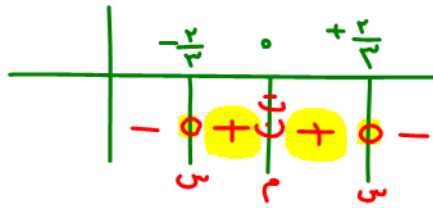
$$\cos(\pi x) \neq 0 \Rightarrow \pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{(2k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z} \dots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ کدام است؟

(تقریبی خارج ۹۶)

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0$$

مضاعف



(۱) $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ X

(۲) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ X

(۳) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, 2]$ X

(۴) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$ ✓

$x=1 \Rightarrow 2 - \frac{9}{2} \geq 0$ ✗

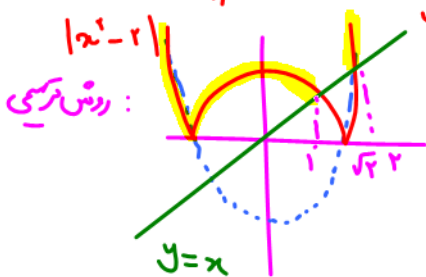
مثال: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_2(|x^2 - 2| - x)$ کدام است؟

(تقریبی خارج ۱۴۰۰)

$$|x^2 - 2| - x > 0$$

$x=0 \Rightarrow 2 > 0$ ✓

$x=1.5 \Rightarrow 0.25 - 1.5 > 0$ ✗



(۱) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$ X

(۲) $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ X

(۳) $[-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ X

(۴) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ ✓



مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ کدام است؟

(ریاضی ۹۵)

$x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x-3) > 0$ $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

(۱) $[-2, 0) \cup (3, 5]$ ✓

(۲) $[-2, 0] \cup (3, 5)$ X

(۳) $[-2, 3)$ X

(۴) $(0, 5]$ X

$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1$

$x=0 \rightarrow 0 > 0$ ✗

$\log(x^2 - 3x) \leq \log 1$

$x=2 \rightarrow -2 > 0$ ✗

بزرگتر از ۱ نیست
دعایه کدش نمی

$x^2 - 3x \leq 1 \rightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0$

$(x-5)(x+2) \leq 0$ $[-2, 5]$



مثال: دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_6 \left(\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} \right)$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

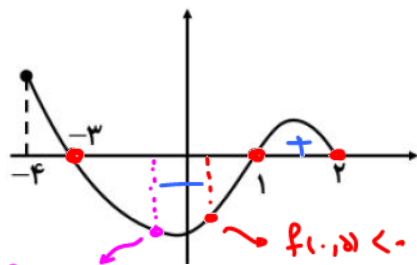
(۱) $(-9, 9)$ ✓ (۲) $(-4, 9)$ ✗ (۳) $(4, 9)$ ✗ (۴) $(-4, 4)$ ✗



$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{6} > 0 \quad \checkmark \quad x=5 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{5}} > 0$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} > 0 \quad x=-5 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{5}} > 0$$

مثال: اگر شکل روبه‌رو نمودار $y = f(x)$ باشد، دامنه $\sqrt{x} f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



$f(x) < 0$ for $x \in (-3, 1)$
 $f(x) \geq 0$ for $x \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$
 $x=0$ is a point where $f(x) < 0$.

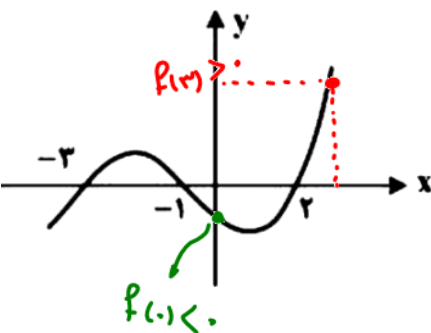
x	-4	-3	0	1	2
$1/x$	-	-	+	+	+
$f(x)$	+	+	-	-	+
$x f(x)$	-	+	-	+	+

- (۱) $[-3, 2]$ ✗
 (۲) $[0, 2]$ ✗
 (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$ ✗
 (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$ ✓✓

$x=-1$ + ✓
 $x=-1.5$ - ✗

مثال: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)} f(x)$ ، کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۷)



$x=0 \Rightarrow \sqrt{1 \times f(0)} = \sqrt{-} \notin \mathbb{R}$
 $x=3 \Rightarrow \sqrt{4 \times f(3)} = \sqrt{+} \text{ OK}$

- (۱) $[-3, 2]$ ✗
 (۲) $[-1, +\infty)$ ✗
 (۳) $(-\infty, -1]$ ✗
 (۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$ ✓



توابع چندجمله‌ای:

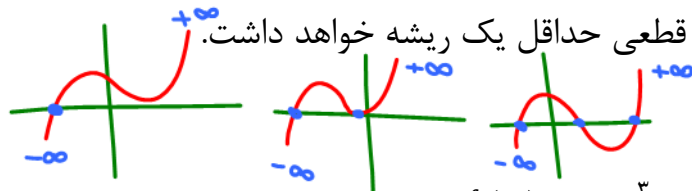
هر تابع به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$ را که در آن ضرایب اعداد حقیقی بوده و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

به بزرگترین توان مطرح شده در متغیر مستقل (x) تابع چندجمله‌ای، درجه چندجمله‌ای می‌گوییم. x^{24} x^{18} x^{12} x^6 x^2 x

مثلاً تابع $f(x) = x^5 + 6x^4 + 12x + 4$ از درجه ۵ می‌باشد.

$f(x) = (x^2 - 8x)^{12} (5x^3 + 2x^2)^6$

نکته: توابع درجه زوج می‌توانند ریشه نداشته باشند یعنی نمودار این توابع امکان دارد محور افقی را قطع نکند اما هر تابع چندجمله‌ای که از درجه فرد باشد، بطور قطعی حداقل یک ریشه خواهد داشت.



تابع درجه ۳:

تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در این تابع چون درجه فرد است، الزاماً یک ریشه دارد یعنی نمودار آن محور افقی را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع کل مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. ابتدا نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸

$y = ax^3 + \dots$

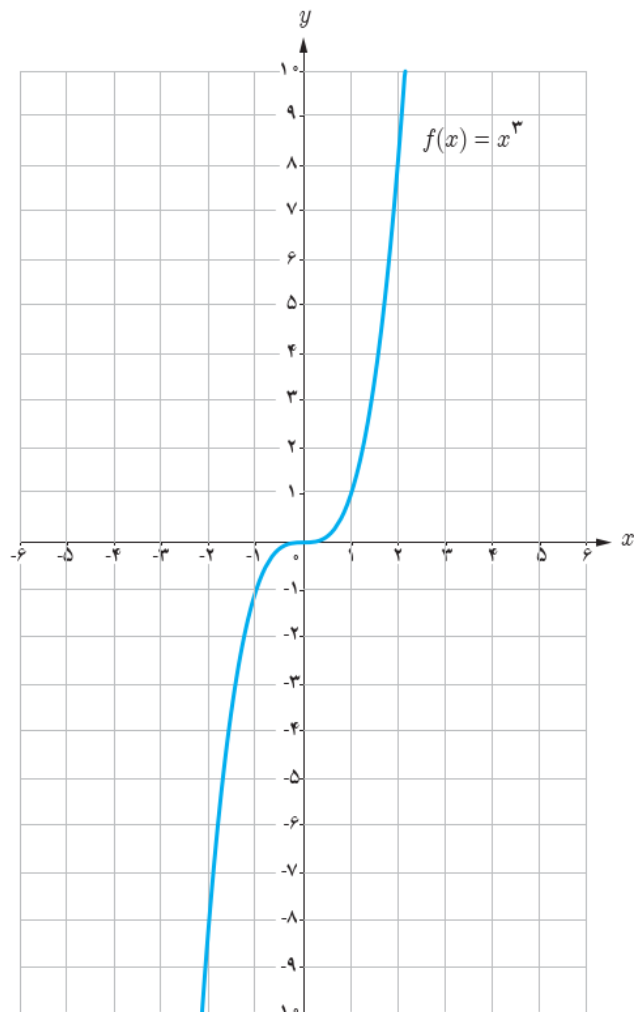
$2(2)^3 = +16$

$y = 2x^3 + \dots$

$(2, 16)$

$(1, 1)$

$2 \times 1 = 2$



$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

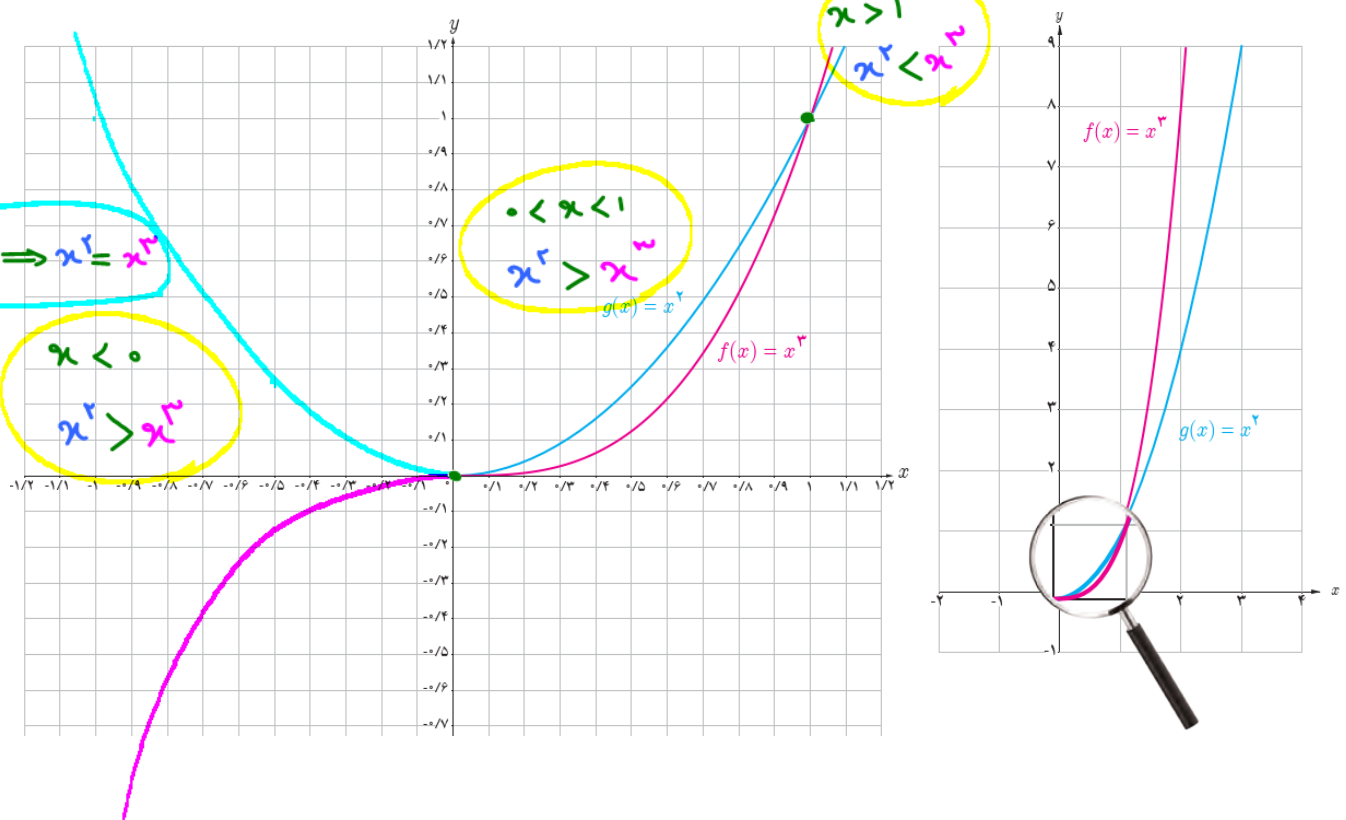
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

مثال: با رسم توابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ بیان کنید در چه بازه‌هایی نمودار تابع درجه ۳ پایین‌تر از

نمودار تابع سهمی قرار می‌گیرد؟



رسم تابع به کمک تبدیلات:

اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، در این صورت:

- ۱- برای رسم نمودار تابع $f(x) + k$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
- ۲- برای رسم نمودار تابع $f(x) - k$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
- ۳- برای رسم نمودار تابع $af(x)$ ($a > 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور y ها، با ضریب a کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)
- ۴- برای رسم نمودار تابع $af(x)$ ($0 < a < 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور y ها، با ضریب a فشرده می‌شود. (انقباض عمودی)
- ۵- برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
- ۶- برای رسم نمودار تابع $f(x-k)$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

۷- برای رسم نمودار تابع $f(ax)$ ($a > 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور x ها، با ضریب $\frac{1}{a}$ فشرده می‌شود. (انقباض افقی)

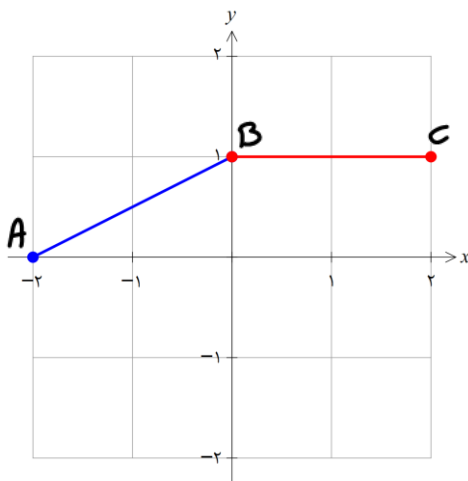
۸- برای رسم نمودار تابع $f(ax)$ ($0 < a < 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور x ها، با ضریب $\frac{1}{a}$ کشیده می‌شود. (انبساط افقی)

۹- برای رسم نمودار تابع $-f(x)$ ، نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x ها، قرینه می‌شود.

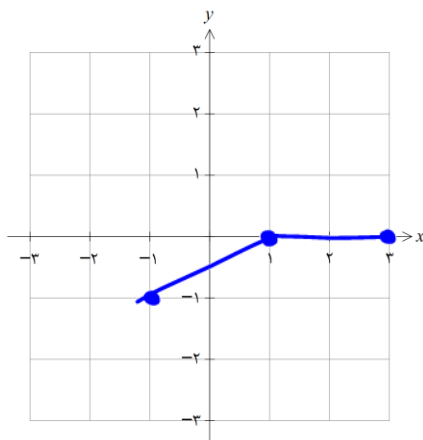
۱۰- برای رسم نمودار تابع $f(-x)$ ، نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها، قرینه می‌شود.

۱۱- برای رسم نمودار تابع $-f(-x)$ ، نمودار تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، مطلوبست دامنه و برد و رسم توابع زیر: $f(ax+b)+d$



پ) $y = f(x-1) - 1$



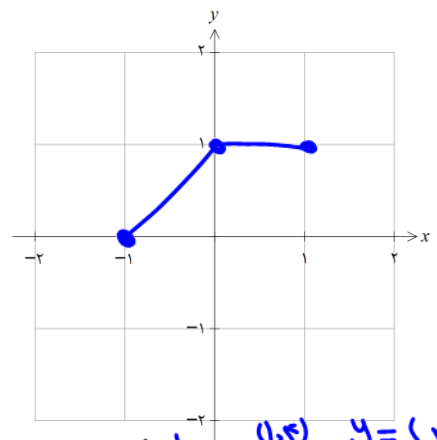
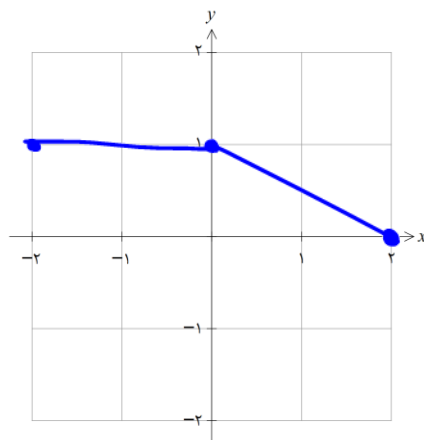
الف) $A|-2 \quad B|0 \quad C|2$
 $A'|-1 \quad B'|0 \quad C'|1$
 ب) $A'|-1 \quad B'|0 \quad C'|2$
 ج) $A'|-1 \quad B'|0 \quad C'|3$

الف) $y = f(2x)$

ب) $y = f(-x)$

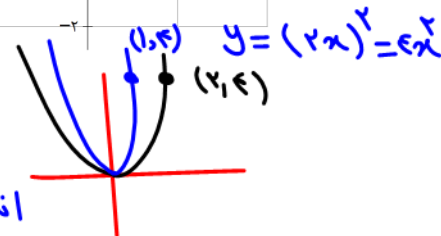
ج) $y = f(x-1) - 1$

د) $y = f(x+1) + 1$

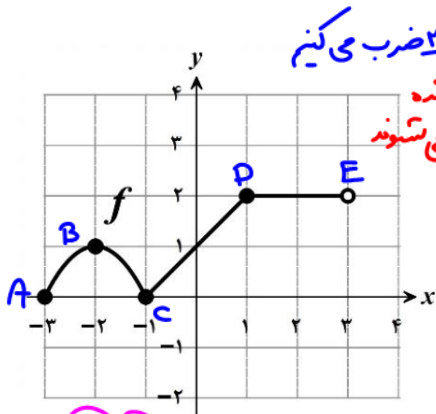


$f(x) = x^2 \rightarrow f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$ (انقباض افقی)

$f(x) = 4x^2$ (انبساط عمودی)



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $g(x) = 3\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ باشد، آن گاه:



یها را در 3 ضرب می کنیم

یها اول 3 برابر شده
د بعد به اندازه 1 می کشند

الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید.

ب) اگر $A(-2, 1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد،

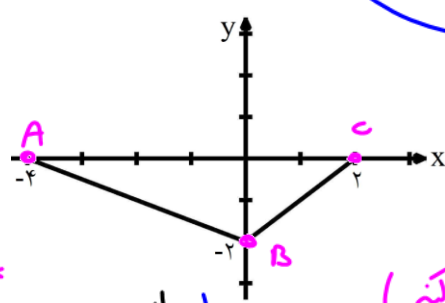
آن گاه نقطه متناظر A روی نمودار تابع g را بنویسید.

$A|-3 \rightarrow A'|-6$
 $B|-2 \rightarrow B'|-4$
 $C|-1 \rightarrow C'|-2$
 $D|1 \rightarrow D'|2$
 $E|3 \rightarrow E'|6$

الف) $D_g = [-6, 6)$ $R_g = [1, 7]$

مثال: فرض کنید نمودار تابع $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ به صورت زیر باشد. نمودار تابع $y = 3f(-2x)$ را رسم

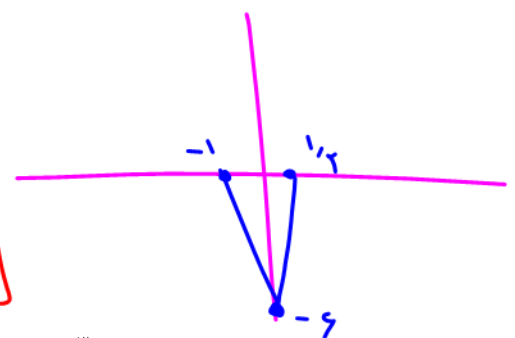
کرده و دامنه و برد آن را مشخص نمایید.



$f\left(-\frac{1}{2}x\right) \rightarrow 3f(-2x)$
 (ما هم یها را در 3 ضرب می کنیم)

$A|-4 \rightarrow A'|-1$
 $B|-2 \rightarrow B'|0$
 $C|2 \rightarrow C'|1/2$

$\Rightarrow D_f = [-1, 1/2]$ $R_f = [-6, 0]$

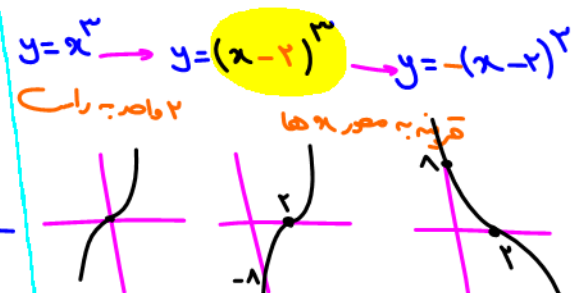
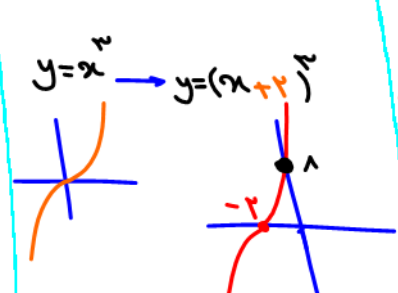
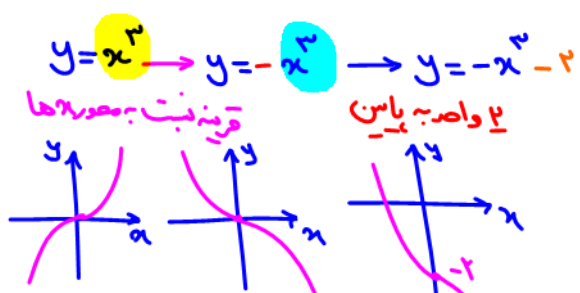


مثال: با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

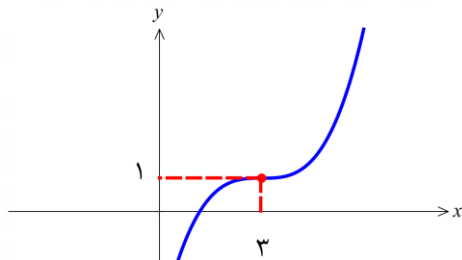
پ) $y = -x^3 - 2$

ب) $y = (x+2)^3$

الف) $y = -(x-2)^3$



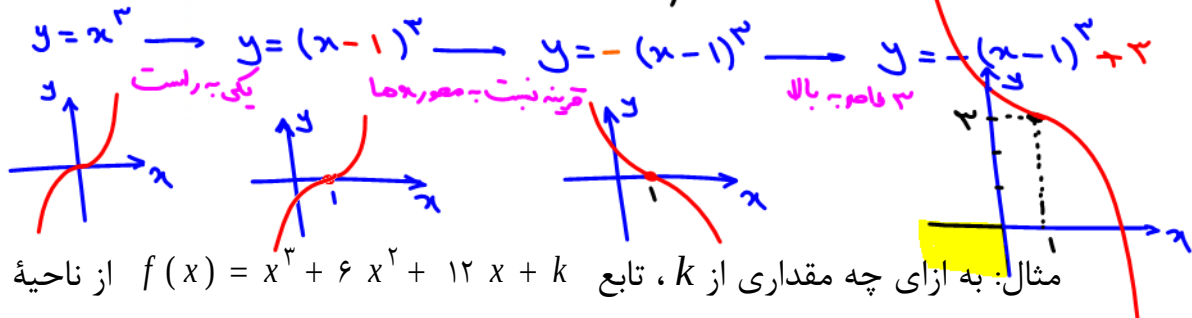
مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = (x - m)^3 + h$ به صورت شکل زیر باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x) = -(x - h)^3 + m$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



$$y = x^3 \xrightarrow[\text{پای بالا}]{\text{راست، 3}} f(x) = (x - 3)^3 + 1$$

$$h = 1, m = 3$$

$$g(x) = -(x - 1)^3 + 3$$



مثال: به ازای چه مقداری از k ، تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + k$ از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

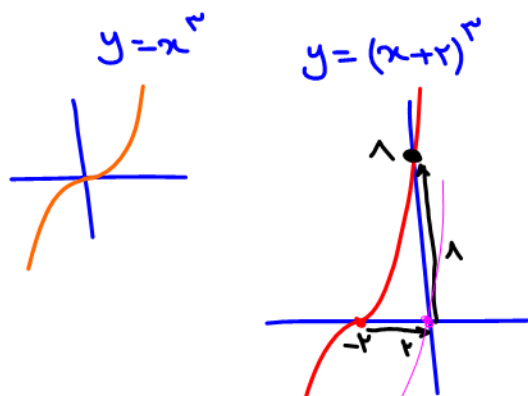
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + k = (x+2)^3 + k - 8$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

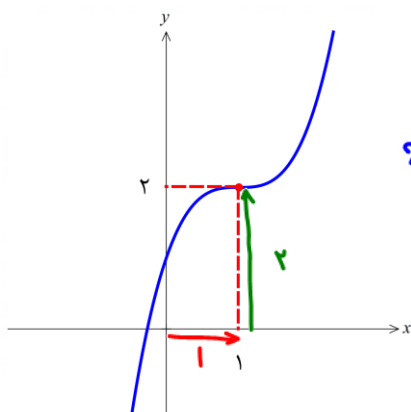
$$f(x) = (x+2)^3 + k - 8$$

$$k - 8 \leq -8$$

$$k \leq 0$$



مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = (x + a)(x^2 + bx + c)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $a.b + c$ را بیابید.



$$f(x) = (x - 1)^3 + 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac$$

$$ab + c = 3$$



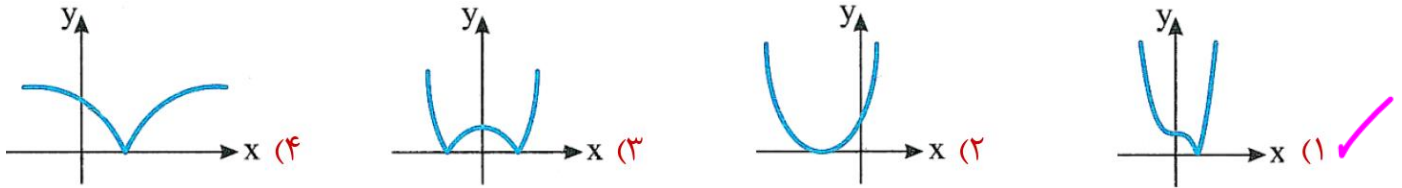
مثال: اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به صورت $D_f = [-1, 2]$ و $R_f = (-3, 1]$ باشد، دامنه و برد تابع

$y = 2f(2x - 1)$ را بیابید.

$f(x) \xrightarrow{\text{بهرتر}} f(x-1) \xrightarrow{\text{بدرتر}} f(2x-1)$ $[-1, 2] \rightarrow [0, 3] \rightarrow [0, \frac{3}{2}]$ (دامنه)
 $f(x) \xrightarrow{\text{بدرتر}} f(2x) \xrightarrow{\text{بهرتر}} f(2(x-\frac{1}{2}))$ $[-1, 2] \rightarrow [-\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, \frac{3}{2}]$
 برد: $(-3, 1] \xrightarrow{\times 2} (-6, 2]$

(موج آزمون نشر الگو)

مثال: نمودار تابع $f(x) = |x^3 - 1|$ کدام است؟

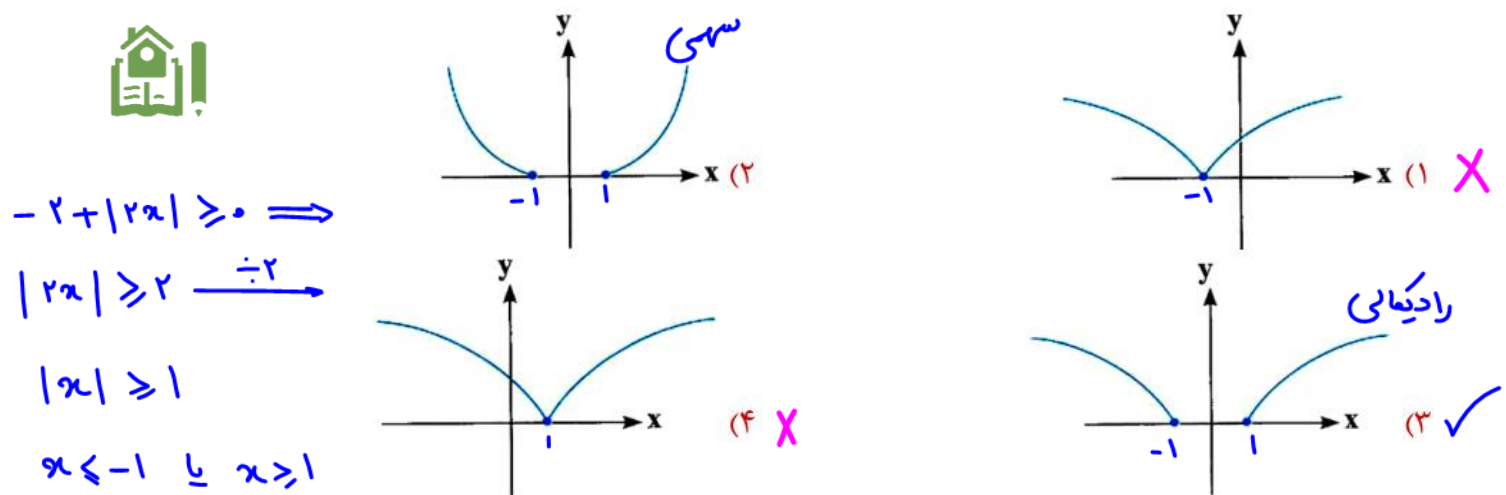


$y = x^3 \rightarrow y = x^3 - 1 \rightarrow y = |x^3 - 1|$

(IQ کج)



مثال: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-2 + |2x|}$ کدام است؟



$y = \sqrt{-2 + |2x|} \xrightarrow{x \geq 1} y = \sqrt{2x - 2}$

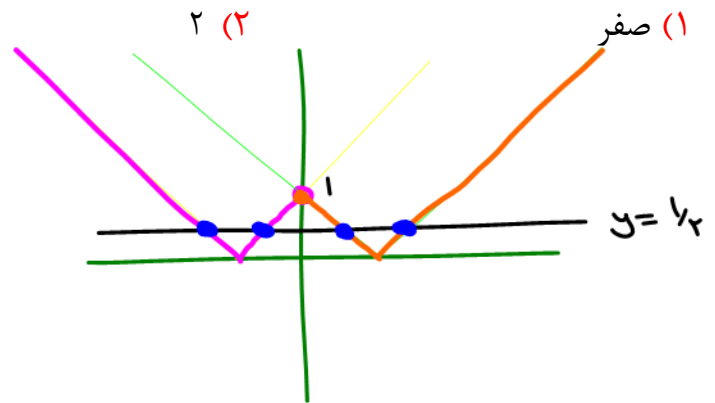
مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$ و خط $y = \frac{1}{2}$ در چند نقطه متقاطع اند؟

(1Q✓ج)

۴ (۴✓)

$$y = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1} = \begin{cases} |x-1| & x \geq 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

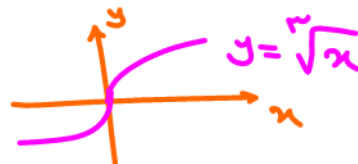
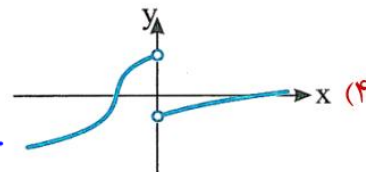
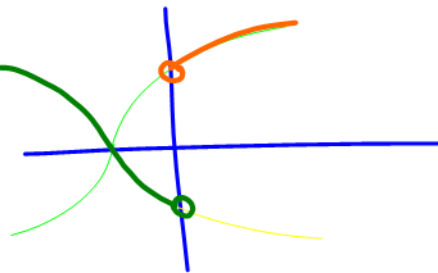
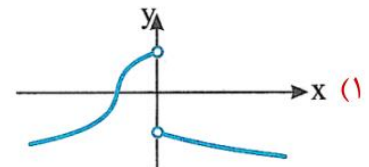
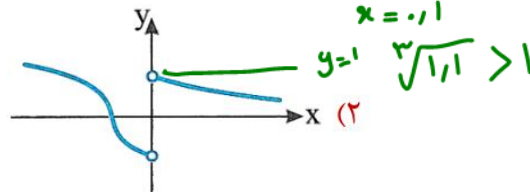
$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2}$



مثال: نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|} \sqrt[3]{x+1}$ کدام است؟

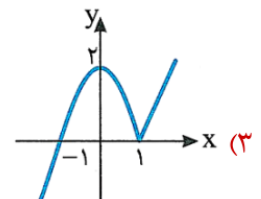
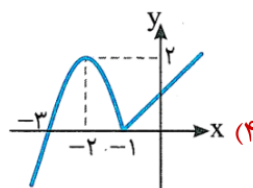
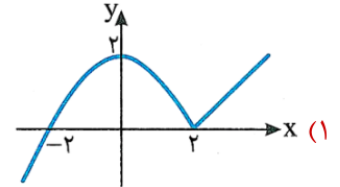
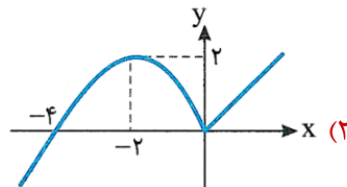
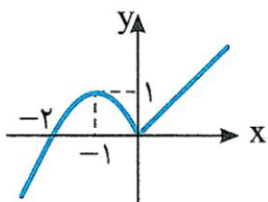
(موج آزمون نشر الگو)

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases}$$



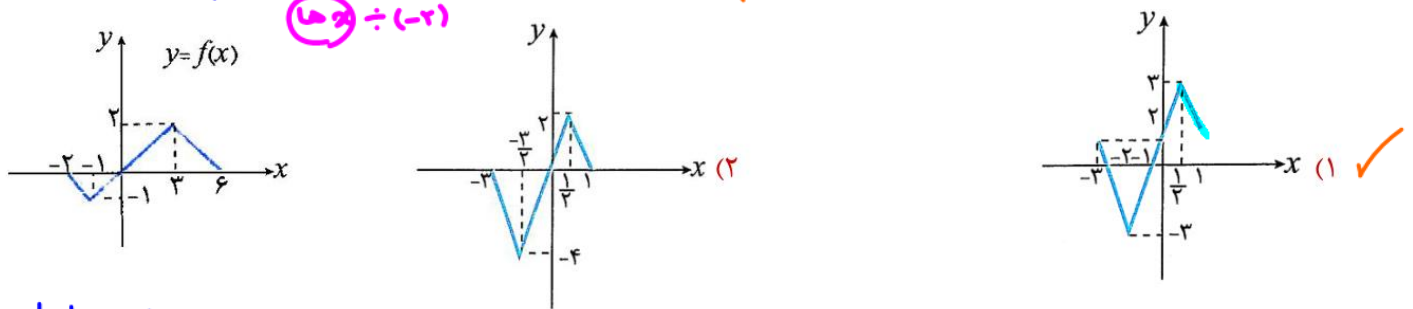
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ کدام است؟

(موج آزمون نشر الگو)



مثال: شکل مقابل، نمایش نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = 1 - 2f(-2x)$

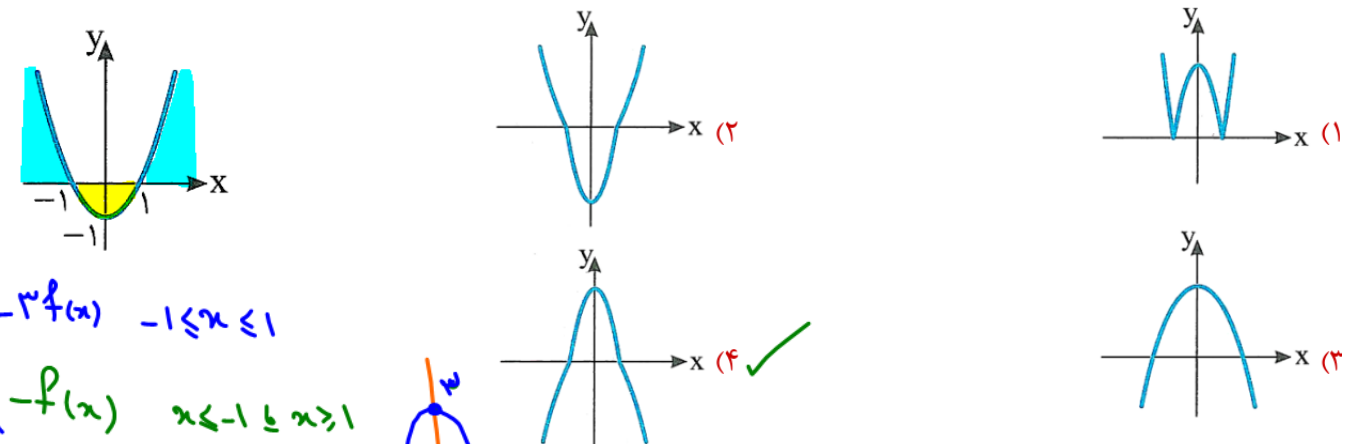
کدام است؟ $f(x) \rightarrow -2f(-2x) + 1$ (فوشوان)



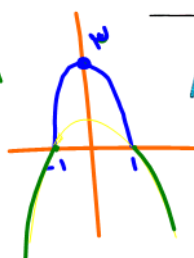
A/2 B/-1 C/3 D/4
A'/1 B'/1/2 C'/-3/4 D'/-2

مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -2f(x) + |f(x)|$

کدام است؟ (موج آزمون نشر الگو)



$$y = \begin{cases} -2f(x) & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x) & x < -1 \text{ or } x > 1 \end{cases}$$



مثال: اگر نقطه $A(3, -1)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر با A روی نمودار تابع

$y = 3f(2x + 1) + 5$ کدام است؟ (IQ)

(1, -8) (4) (1, 2) (3) (7, 2) (2) (3, 2) (1)

$$y = f(x) \rightarrow y = 3f(2x + 1) + 5$$

$$(3, -1) \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{\div 2} 1$$

$$(3, -1) \xrightarrow{\times 3} -3 \xrightarrow{+5} 2$$

مثال: نمودار تابع $y = x^3$ را به کمک انتقال به نمودار $y = x^3 - 6x^2 + 12x$ منطبق می‌کنیم.
در این صورت نقطه‌ای به طول $x = 1$ در نمودار اولیه به کدام نقطه در نمودار ثانویه تبدیل می‌شود؟

(1) $(-3, 9)$ (2) $(-3, -9)$ (3) $(3, -9)$ (4) $(3, 9)$ ✓

$y = x^3 \xrightarrow{x=1, y=1} y = x^3 - 6x^2 + 12x - 1 + 1$
 $y = x^3 - \frac{(6x^2 + 12x + 1)}{(6x^2 + 12x + 1)} \rightarrow y = (x-2)^3 + 8$
 $A|_1 \rightarrow A'|_9$

مثال: اگر نقطه $(4, 0)$ روی نمودار تابع $y = 2f(3x - 4) + 6$ باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع

$y = \frac{1}{3}f(-1 - 3x) + 1$ است؟

(1) $(-3, 0)$ ✓ (2) $(3, 0)$ (3) $(3, 3)$ (4) $(-3, 3)$

$A|_4 \in 2f(3x-4)+6 \rightarrow A'|_0 \in f(x) \rightarrow A''|_{-3} \in \frac{1}{3}f(-3x-1)+1$
 $3x-4 \xrightarrow{\div 3} x-4 \xrightarrow{+4} x$
 $0 \xrightarrow{-6} -6 \xrightarrow{\div 2} -3$
 $-3 \xrightarrow{\div 3} -1 \xrightarrow{+1} 0$

$(3x-4) \xrightarrow{\div 3} (x-4) \xrightarrow{+4} x$
 $2y+6 \xrightarrow{-6} 2y \xrightarrow{\div 2} y$

مثال: طول نقاط روی نمودار تابع $y = f(x)$ را نصف می‌کنیم و عرض آن‌ها را سه برابر می‌کنیم. سپس نمودار را دو واحد به سمت چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

(1) $y = 3f(4 - 2x)$ ✓ (2) $y = 3f(2 - 2x)$
(3) $y = -3f(2x + 2)$ (4) $y = -3f(2x + 4)$

$f(x) \rightarrow 3f(2x) \rightarrow 3f(2(x+2)) \xrightarrow{\text{قرینه شوند}} 3f(2x+4) \xrightarrow{x \rightarrow -x} 3f(4-2x)$

مثال: نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف های منفی، سپس ۹ واحد به طرف y های منفی

انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه زیر محور x ها است؟

- (۱) $(-5, 2)$ ✓ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

$$y = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3 \rightarrow y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} - 9$$

$\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{ضرب } x} \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{منف}} \frac{1}{4}$

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < 0 \rightarrow$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4} \rightarrow -\frac{7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2} \xrightarrow{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{-5 < x < 2}$$

مثال: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی

حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی،

کدام است؟

- (۱) ۰, ۲ (۲) ۱, ۱ (۳) ۱, ۲ (۴) ۱, ۲



مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال

می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{10}$



تساوی دو تابع: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با شرایط زیر با هم مساوی هستند.

$$\left. \begin{array}{l} 1) D_f = D_g \\ 2) \forall x \in D : f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f = g$$

مثال: برابر دو تابع زیر را بررسی نمایید.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x| \\ g(x) = \sin 2x \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \neq g(x) \\ \mathbb{R} = D_f = D_g \end{array} \right\} \Rightarrow f \neq g$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \log x(x-2) \\ g(x) = \log x + \log(x-2) \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ضابطه‌ها برابرند} \\ D_f \neq D_g \end{array} \right\} \Rightarrow f \neq g$$

$D_f: x(x-2) > 0$ 

$D_g: x > 0, x-2 > 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 $x > 0 \cap x > 2 = (2, +\infty)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x(x-1)} \\ g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1} \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ D_f \neq D_g \end{array} \right\} \rightarrow f \neq g$$

$D_f: x(x-1) \geq 0$ 

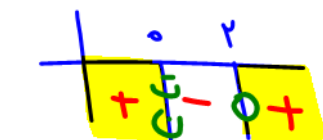
$D_g: x \geq 0, x \geq 1 \rightarrow D_g = [1, +\infty)$

(تجربی خارج ۹۷)

مثال: کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$$y = \log \frac{x-2}{x}$$

$$\frac{x-2}{x} > 0$$

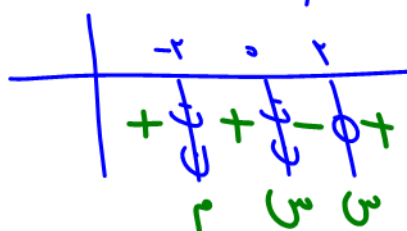


$$D_f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$\log \frac{x^2-4}{x^2+2x} \quad (2) \quad \log \frac{(x-2)^2}{x} \quad (1) \quad 2 \log(x-2) - \log x \quad (3) \quad X$$

$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \quad (4) \quad \bigcirc$$

$$2 \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} > 0$$



$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \quad (3) \quad X$$

$$\left(\frac{x-2}{x} \right)^2 > 0$$

$\mathbb{R} - \{2, 0\}$



اعمال جبری روی توابع و دامنه‌ی آنها

$\frac{f}{g} \neq \emptyset$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \\ (f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad (g(x) \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{f+g} = D_f \cap D_g \\ D_{f-g} = D_f \cap D_g \\ D_{f \times g} = D_f \cap D_g \\ D_{f \div g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \{(2, -1), (0, 0), (1, 4), (3, 2)\}$ و $g(x) = \{(2, 1), (0, 4), (5, 3), (1, 2)\}$ باشد،

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$1) f - g = \left\{ (2, -2), (0, -4), (1, 2) \right\}$$

$$2) f + 2 = \left\{ (2, 1), (0, 2), (1, 6), (3, 4) \right\}$$

$$3) \frac{-1}{f} \oplus 2g = \left\{ (2, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{4}) \right\}$$

$$\frac{-1}{f} = \left\{ (2, -\frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{0}), (1, -\frac{1}{4}), (3, -\frac{1}{2}) \right\}$$

$$2g = \left\{ (2, 2), (0, 8), (5, 6), (1, 4) \right\}$$

مثال: اگر $f(x) = \log x$ و $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید.

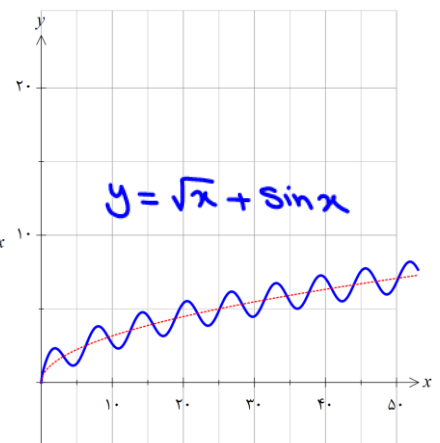
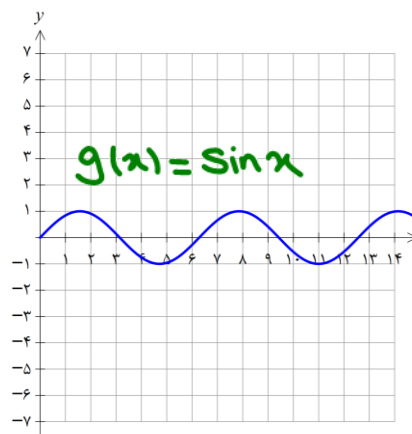
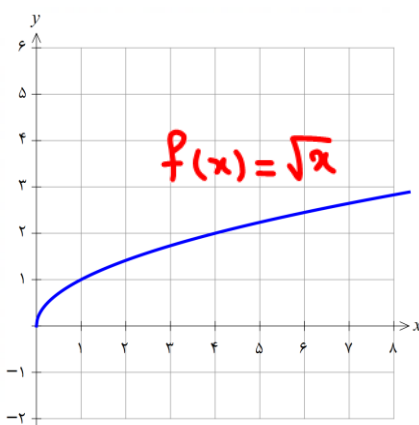
$$D_g: 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \leq 3 \Rightarrow D_g = [-3, 3]$$

$$D_f: x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه}} \sqrt{9-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

$$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (0, 3) - \{-3, 3\} = (0, 3)$$

مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{x} + \sin x$ را رسم کنید.



مثال: دامنه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{x-1}}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{\frac{x}{2-x}}}_{h(x)}$$

$$x-1 \geq 0$$

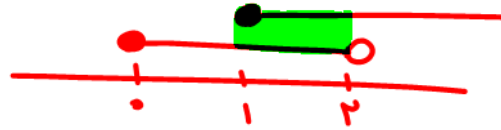
$$\boxed{x \geq 1}$$

$$\frac{x}{2-x} \geq 0$$

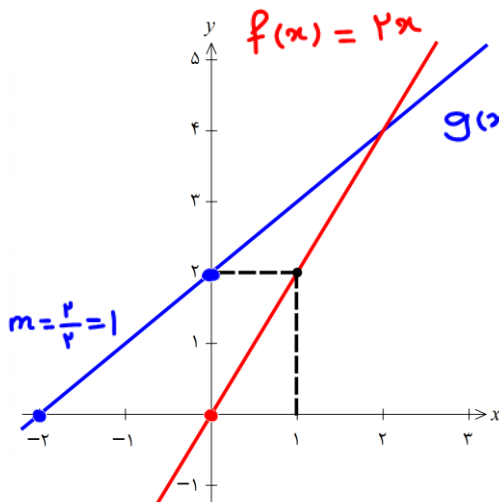
تعیین علامت



$$D_f = [1, 2)$$



مثال: در شکل مقابل نمودار توابع f و g رسم شده اند مقدار $(f+g)\left(\frac{3}{2}\right)$ را بیابید.



$$f(x) = 2x$$

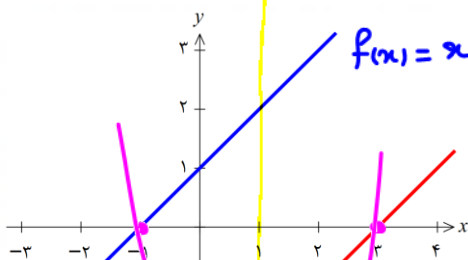
$$g(x) = x + 2$$

$$(f+g)(x) = 3x + 2$$

$$(f+g)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$(f+g)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

مثال: در شکل مقابل نمودار توابع f و g رسم شده اند. نمودار تابع $(f \cdot g)(x)$ را رسم کنید.



$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = (x+1)(x-3)$$

$x=1$
محور تقارن

۳ برابر ۲ است

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (-1, 5)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, -1), (5, 2), (4, 6)\}$ (موج آزمون نشر الگو)

$$(f + g)(a) = 2(f - g)(a) \text{ مقدار } a \text{ کدام است؟}$$

- ۱ (۱) ۳ (۲X) ۴ (۳X) ۵ (۴)

$$f(a) + g(a) = 2f(a) - 2g(a) \Rightarrow 3g(a) = f(a) \rightarrow a = 5$$

مثال: نمودارهای دو تابع f و $f - g$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $g(3) + g(-3)$ کدام است؟ (مهر و ماه)

$$f - (f - g) = g$$

$$g(3) = f(3) - (f - g)(3) = 12 - (-4) = 16$$

$$g(-3) = f(-3) - (f - g)(-3) = 0 - (-4) = 4$$

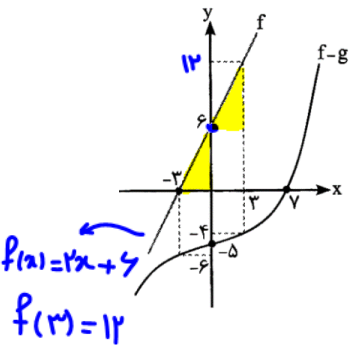
$$g(3) + g(-3) = 20$$

۱۰ (۱)

۱۶ (۲)

۲۲ (۳✓)

۶ (۴)

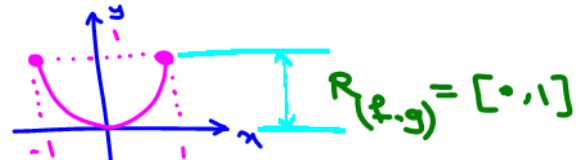


مثال: اگر $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ برد تابع $f \circ g$ کدام است؟ (نردبان فیلی سبز)

- ۱ (۱) $\mathbb{R}$ {1} (۲) $[0, 1]$ (۳✓) $[0, +\infty)$ (۴)

$$\left. \begin{matrix} f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2} \\ g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f \circ g)(x) = (1 + \sqrt{1-x^2})(1 - \sqrt{1-x^2}) = 1 - (1-x^2) = x^2$$

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = [-1, 1]$$



مثال: اگر $f(x) = 2 - |x+1|$ و $g(x) = x + |x|$ آن گاه برد تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام

است؟ (ریاضی خارج ۹۷) $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = (0, +\infty) - (-\infty, 0] = (0, +\infty)$

- ۱ (۱) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳✓) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۴) $(0, +\infty)$

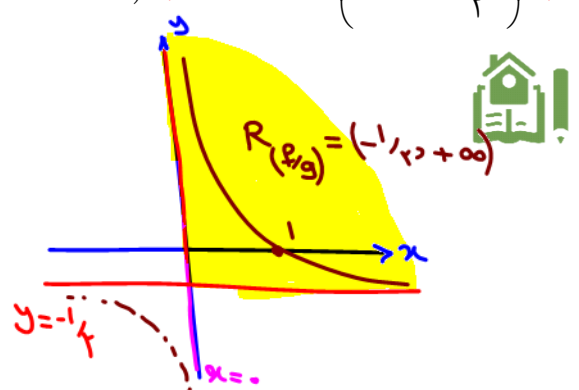
$$g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

همگرانب

$$x > 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x+1}{2x}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \geq -1 \\ x+3 & x < -1 \end{cases}$$

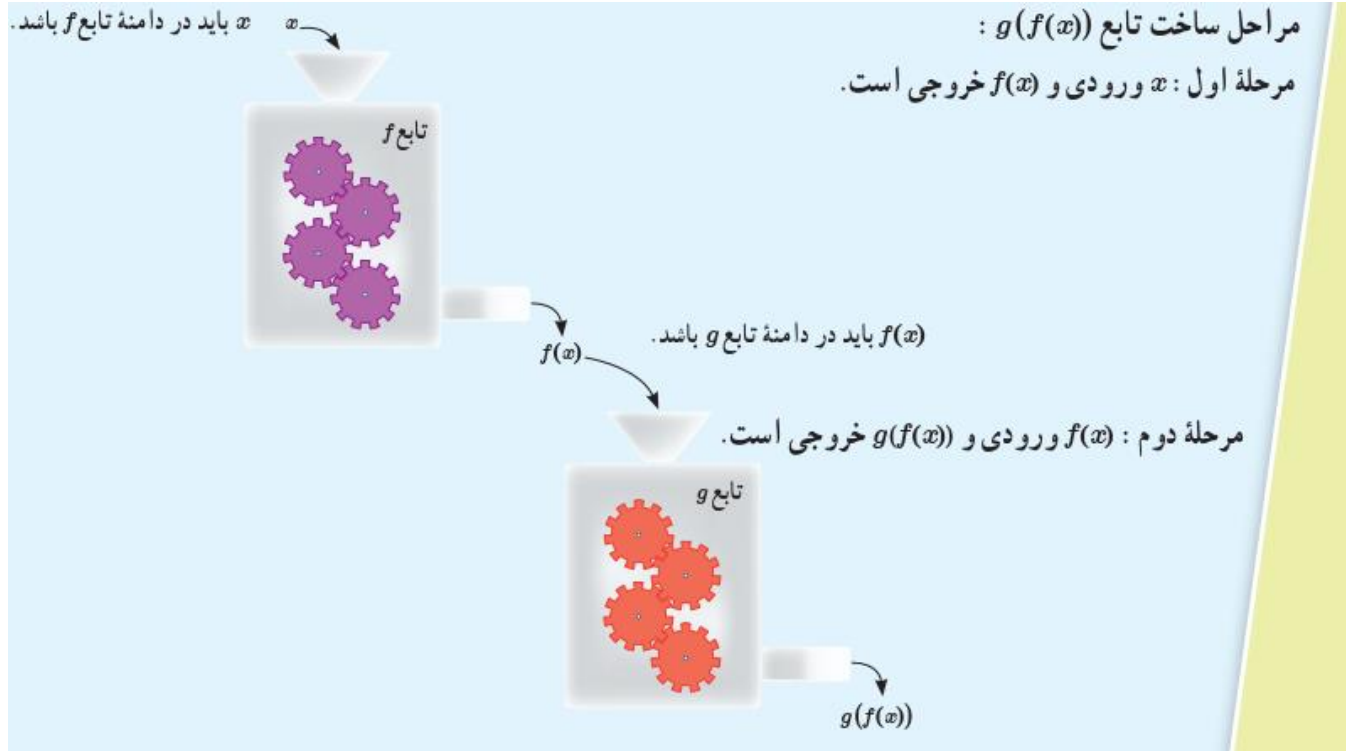
مجاانب قائم: $2x=0 \rightarrow x=0$
مجاانب افقی: $y=-\frac{1}{2}$



ترکیب دو تابع

$$x \rightarrow \boxed{g(x)} \rightarrow g(x) \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$$x \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g(x)} \rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$



دامنه تابع مرکب:



$$D_{f \circ g} = D_{f(g(x))} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

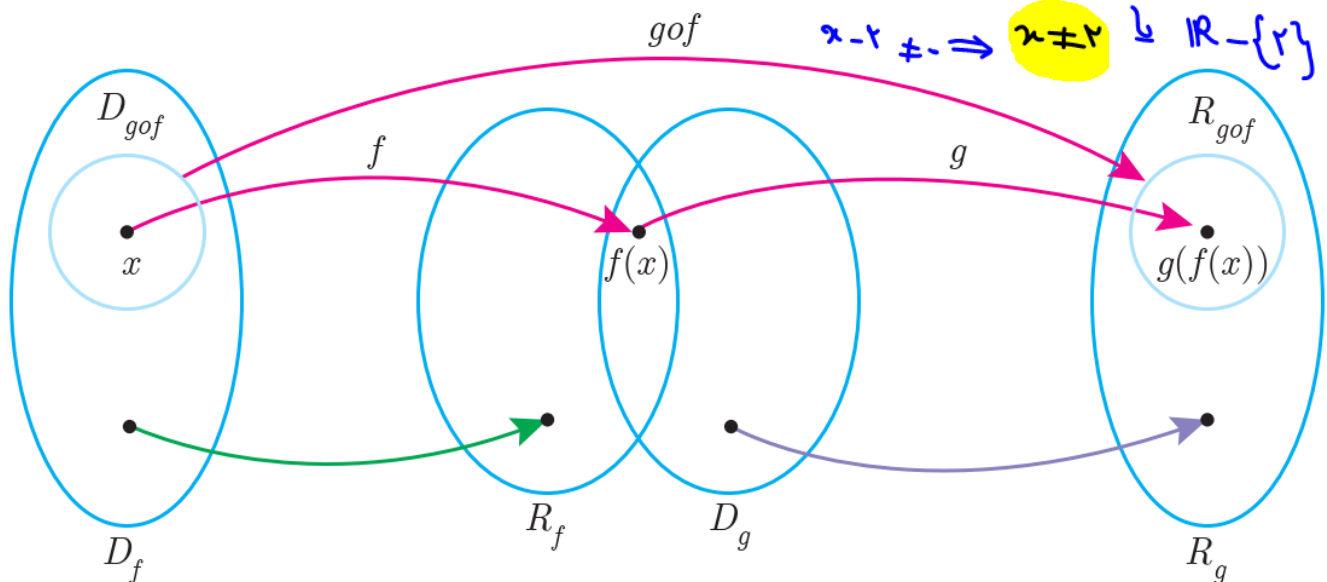
$$D_{g \circ f} = D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } [1, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ یا } \mathbb{R} - \{2\}$$



مثال: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x + 2$ باشد، معادله زیر را حل کنید.

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$$

$$f(g(x)) + g(f(x)) = g(g(x))$$

$$(x+2)^2 + 1 + (x^2 + 1) + 2 = (x+2) + 2$$

$$2x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(4) < 0 \text{ جواب ندارد}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ را بیابید.

$$(f \circ f)(x) : f(f(x)) = \sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$D_{(f \circ f)(x)} = D_{f(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$D_f : 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ f} = [-1, 1]$$

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\sqrt{1-x^2} \leq 1 \xrightarrow{(\)^2} 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} -1 \leq x \leq 1$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $(f \circ g)(x) = x$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g) = \frac{g+1}{g} = \frac{x}{1} \Rightarrow$$

$$gx = g+1 \Rightarrow gx - g = 1 \Rightarrow$$

$$g \cdot (x-1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$$

درمونی: $g \rightarrow f$

$$f(g) = \frac{f \circ g}{\text{سوال داد}}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{x+1}{2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{A}{1} \Rightarrow Ax + A = 1 - x \Rightarrow Ax + x = 1 - A \Rightarrow$$

$$x(A+1) = 1-A \Rightarrow x = \frac{1-A}{1+A}$$

$$g(A) = \frac{\frac{1-A}{1+A} + 1}{\frac{1-A}{1+A}} = \frac{\frac{1-A+1+A}{1+A}}{\frac{1-A}{1+A}} = \frac{2}{1-A} = \frac{1}{\frac{1-A}{2}}$$

$$g(A) = \frac{1}{A+1} \xrightarrow{A=2} g(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

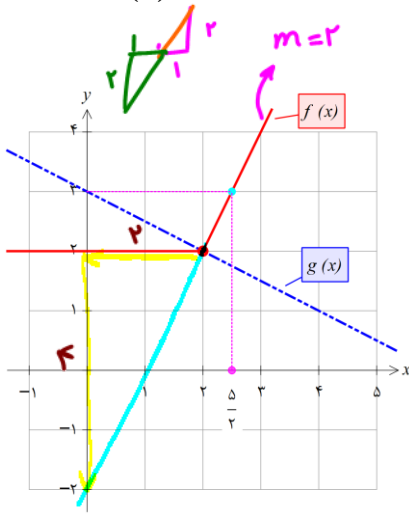
$$g(f(x)) = \frac{x+1}{2}$$

مجهول = بیرونی

تابع داخلی = A

معادله را بر حسب A مرتب کنیم

مثال: نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ در شکل زیر ترسیم شده‌اند. مقادیر $(f \circ g)(1)$ و $(g \circ f)\left(\frac{5}{2}\right)$ را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3 & x \geq 2.5 \\ 2 & x < 2.5 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

$$(g \circ f)\left(\frac{5}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = g(2) = \frac{3}{2}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 2$ باشد، دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} D_g: x \geq 0 \\ D_f: x \leq 1 \end{cases}$$

$$D_{g \circ f} = D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \leq 1, \sqrt{1-x} \geq 0$$

$$\boxed{x \leq 1} \cap \boxed{x \leq 1} = (-\infty, 1]$$

$$D_{g \circ f} = (-\infty, 1]$$

مثال: اگر $f = \{(-3, 7), (-1, 2), (2, 4), (0, 5), (6, -2)\}$ و $g(x) = \sqrt{2x+3} - x$ مقدار

(گزینه دو ۱۴۰۰)

$(f \circ g)(3)$ کدام است؟

$$g(3) = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

(۲) ۷

(۱) صفر

$$f(g(3)) = f(0) = 5$$

مثال: اگر $f(x) = x - 3$ و $g = \{(-2, 4), (3, 0), (-5, 7)\}$ باشند، حاصل عبارت

(گزینه دو ۹۹)

$(f \circ g)(3) + (g \circ f)(-2)$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

$$f(g(3)) + g(f(-2)) = f(0) + g(7) = 0 + 4 = 4$$

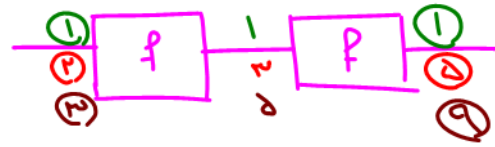


مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1) \mid x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟
(تجربی ۱۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

$$f(f(x)) = f \circ f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$



(تجربی ۱۶)

مثال: اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۴ - (۲) ۳ - (۳) ۲ - (۴) ۱ -

$$f(g(\sqrt{2})) = f(-2-\sqrt{2}) = \left[\underbrace{-2-\sqrt{2}}_{=-3.4} \right] = -4$$

$$g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{-1} = -2-\sqrt{2}$$



(تجربی خارج ۱۸)

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ ، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده ✓ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

$$-x^2 - x + 2 \geq 0 \xrightarrow{(-1)}$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$

$$D_f = [-2, +1]$$

$$f(-1) = \sqrt{2}$$

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \text{تعریف نشده}$$

$$\sqrt{2} \notin D_f$$

$$\sqrt{-\sqrt{2}} \notin \mathbb{R}$$



مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$

(تجربی ۹۰)

کدام است؟

- (۱) ۹ ✓ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۶

$$f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$$



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < -1 \\ \frac{-5}{x} + 1 & -1 \leq x < 1 - \{0\} \\ \sqrt{x^2 + x + 6} & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f\left(f\left(\frac{-5}{4}\right)\right)$ کدام است؟

پاسخ: $f\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-5}{\frac{3}{2}} = -\frac{10}{3} = -\frac{5}{\frac{3}{2}}$

(فوشوان)

گزینه‌ها: (۱) ۵- (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) $\frac{7}{6}$

محاسبه: $f\left(f\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{5}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-5}{-\frac{5}{\frac{3}{2}}} + 1 = 3 + 1 = 4$

(ریاضی ۱۴۰۱)

مثال: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $(f \circ f \circ f)(\sqrt{2})$ کدام است؟

گزینه‌ها: (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

محاسبه: $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3 - 2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

پس $(f \circ f \circ f)(\sqrt{2}) = f(f(f(\sqrt{2}))) = f(f(\frac{1}{\sqrt{2}})) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(IQ کج)

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ مقدار $f \circ f \circ \dots \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

گزینه‌ها: (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $2(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $2(\sqrt{2} - 1)$



مثال: اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، مقدار $(g \circ f)\left(\frac{-5}{3}\right)$

(تجربی ۱۴۰۲)

کدام است؟

(۱) ۴

(۳) ۳ ✓

(۴) ۶

$$\begin{aligned} & -4 + \frac{5}{3} \\ & -2, \frac{1}{3} \\ & 2\left[\frac{-5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

$$g\left(f\left(\frac{-5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{5}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{5}{3} + f\left(-\frac{5}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[\frac{5}{3} - \frac{11}{3}\right]\right) = f(-2) = -6$$

$$f\left(\frac{-5}{3}\right) = 2\left[\frac{-5}{3}\right] - \left(\frac{-5}{3}\right) = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\left[-1, \frac{2}{3}\right] = -1$$

$$\left[\frac{-11}{3}\right] - [-2] = -6$$

مثال: اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، مقدار $(f \circ g)\left(\frac{-1}{3}\right)$ کدام

(تجربی فارغ ۱۴۰۲)

است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۴



مثال: اگر $f(x) = 2x + a$ ، $g(x) = 6 - 2x$ و $(f \circ g)(2) - (g \circ f)(a) = 3$ ، مقدار a کدام

(موج آزمون نشر الکو)

است؟

(۱) $\frac{5}{3}$

(۲) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{7}{5}$

(۴) $\frac{5}{7}$ ✓

$$\begin{aligned} g(2) &= 2 \\ g(2a) &= 6 - 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a) &= 2a \\ f(2) &= 4 + a \end{aligned}$$

$$f(g(2)) - g(f(a)) = 3$$

$$f(2) - g(2a) = 3$$

$$4 + a - (6 - 2a) = 3$$

$$4 + a - 6 + 2a = 3$$

$$3a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{3}$$



$$\frac{(f \circ g)(1) + (g \circ f)(-4)}{(f \circ f)(-3)}$$

مثال: شکل مقابل نمودار توابع f و g را نمایش می‌دهد. حاصل

کدام است؟

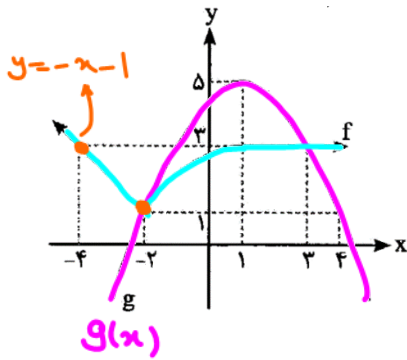
۳ (۱)

-۳ (۲)

۲ (۳) ✓

(۴) قابل محاسبه نیست.

(مهر و ماه)

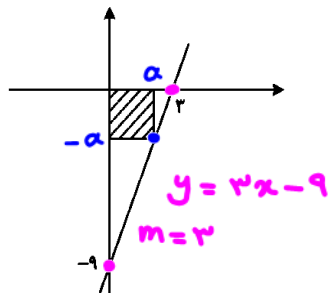


$$\frac{f(g(1)) + g(f(-4))}{f(f(-3))} =$$

$$\frac{f(5) + g(2)}{f(2)} = \frac{3 + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

مثال: در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟

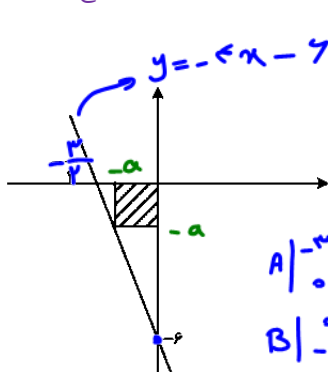


$$A|_{-a} \rightarrow -a = 3a - 9 \Rightarrow 4a = 9 \rightarrow a = \frac{9}{4}$$

$$S = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$$

(ریاضی خرداد ۱۴۰۳)

مثال: در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟



$$y = -4x - 6 \xrightarrow{(-a, -a)} -a = -4a - 6 \rightarrow$$

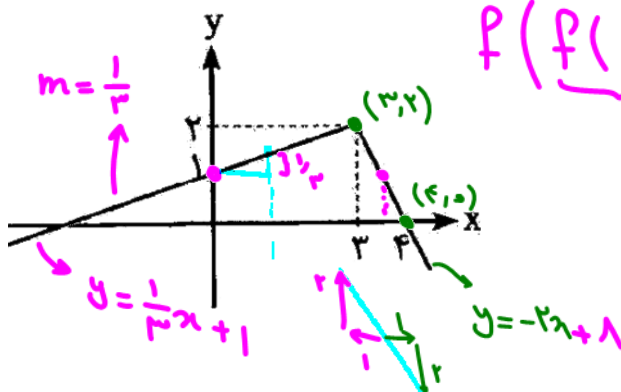
$$3a = -6 \rightarrow a = -2$$

$$A|_{-2} \rightarrow -2 = -4(-2) - 6 \Rightarrow 2 = 8 - 6 \Rightarrow 2 = 2$$

$$S = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$$

(مهر و ماه)

مثال: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $(f \circ f)\left(\frac{7}{2}\right)$ کدام است؟



$$f\left(f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = f(1) = \frac{4}{3}$$

۱ (۱)

1/3 (۲)

صفر (۳)

4/3 (۴) ✓

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

(تجربی ۹۶)

$x+1$ (۴)

$-x-1$ (۳)

$-x$ (۲)

x (۱)

$x=1 \Rightarrow f(1)=5$

$g(5) = \frac{1-15}{5} = -2$

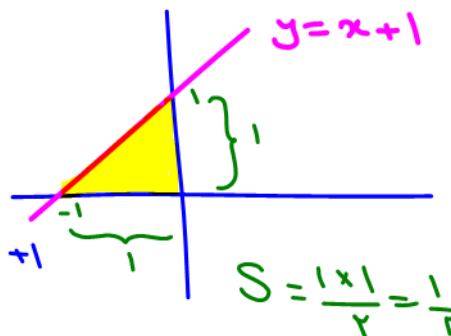


مثال: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ و $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = f \circ g(x)$ و محورهای مختصات کدام است؟

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1$

$g(x) = (x+1)^3 - 1$

$f(g(x)) = \sqrt[3]{(x+1)^3 - 1 + 1} = x+1$



۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

مثال: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y=3$ کدام است؟

(تجربی ۹۵)

۶ (۴)

$4/5$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند، دامنه تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(تقریبی خارج ۹۴)

- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$



$$x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$D_{g(f(x))} = x \in D_f, f(x) \in D_g \Rightarrow$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشد، دامنه تعریف $g \circ f$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

$$D_g: x-x^2 \geq 0, D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{g(f(x))}$$

$$x=0 \rightarrow g(f(0)) = g(1) = 0$$

$$x=-1 \rightarrow g(f(-1)) = g(-1) = 0$$

$$x=2 \rightarrow g(f(2)) = g(-\frac{3}{5}) = \sqrt{-} \quad \times$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشد، دامنه تعریف تابع $f \circ g$

(ریاضی ۹۴)

کدام است؟

$$f(g(x))$$

$$[-4, 2] \quad (1) \times$$

$$[-2, 0] \quad (2) \times$$

$$[-4, -1] \cup (1, 2] \quad (3) \checkmark$$

$$[-4, -2] \cup (0, 2] \quad (4) \times$$

$$x=0 \rightarrow g(0) \times$$

$$x=-2 \rightarrow f(g(-2)) = \log_2(0) \times$$



کدام است؟

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشد، دامنه تعریف تابع $f \circ g$

(ریاضی فارغ ۹۵)

$$D_{f(g(x))}$$

$$x = -1 \Rightarrow \log 16 = g(-1)$$

$$\sqrt{2 - \log 16} = \sqrt{+}$$

$$x = 20$$

$$\log(100) = 2$$

$$f(2) = 0 \checkmark$$

$$(0, 5) \cup [20, 25) \quad (1) \times$$

$$[-5, 0) \cup (15, 20] \quad (2) \checkmark$$

$$(15, 20] \quad (3) \times$$

$$[-5, 0) \quad (4) \times$$

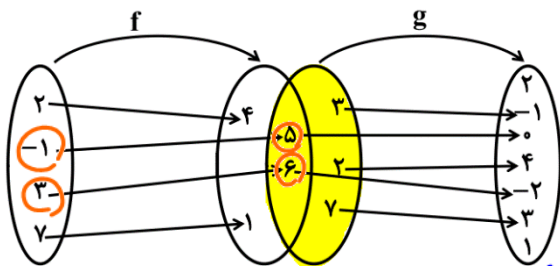
مثال: با توجه به شکل زیر، دامنه $g \circ f$ چند عضو دارد؟

(1)

(2) $\checkmark$

(3)

(4)



$$D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{-1, 3\}$$

مثال: نمودار توابع f و g به شکل مقابل است. دامنه تعریف تابع $g \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح

(مهر و ماه)

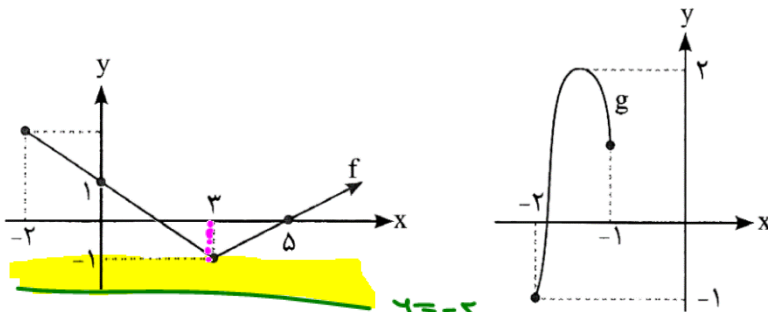
است؟

(1) صفر

(2) $\checkmark$

(3)

(4)



$$D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \in [-2, 5], -2 \leq f(x) \leq 1$$

(تبریزی ۱۶)

مثال: اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

(4)

(3) $\checkmark$

(2) $\frac{7}{2}$

(1) $\frac{11}{9}$

$$\text{ورودی} \Rightarrow 2x - 2 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \text{خروجی}$$

$$2x - 2 = 4$$

$$x = 3$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3}$$

$$x = 3$$

مثال: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد،

عدد a کدام است؟

(تجربی ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: توابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$

مفروضاند، اگر $(4,2) \in f \circ g$ و $(4,1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

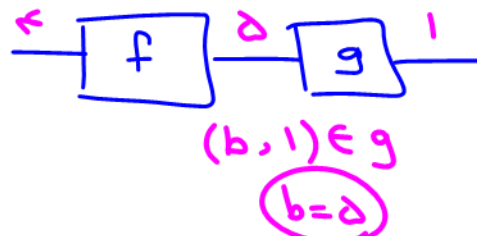
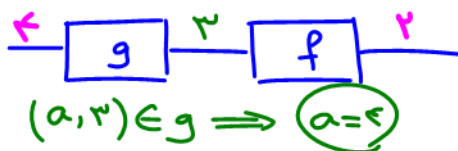
(ریاضی ۹۰)

(۵, ۴) (۴)

(۴, ۵) (۳✓)

(۴, ۳) (۲)

(۳, ۴) (۱)



مثال: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت زیر باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، مقدار $f(5)$ کدام

(تجربی خارج ۹۱)

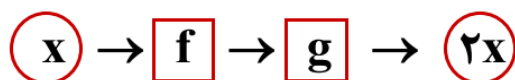
است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(تجربی ۱۴)

مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x+1}{x-1}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f\left(a f\left(\sqrt{5}\right)\right) = 2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟
(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $-\frac{1}{3}$ ✓

(۳) $\frac{1}{5}$

(۴) $-\frac{1}{5}$

$$f(a f(\sqrt{5})) = f(3a) = 2 \rightarrow (3a)^2 - [3a] = 2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟
(ریاضی ۱۹)

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$

(۲) $\frac{2x}{x^2-1}$

(۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$

(۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{1} = \frac{x^2 - 2x(x-1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{-(2x+1)}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

(۵) $x=2$

(تقریبی ۹۷)

مثال: اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $x^2 - x + 3$

(۲) $x^2 - 2x - 1$

(۳) $x^2 - 2x + 1$

(۴) $x^2 - x + 1$



(نزدیک فیل سبز)

مثال: اگر $f(\cot x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ ، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{x^3+1}{x^2}$

(۲) $\frac{x^2+1}{x^3}$

(۳) $\frac{x^3-1}{x^2}$

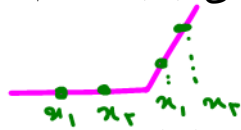
(۴) $\frac{x^2-1}{x^3}$



تابع صعودی و نزولی:

تابع $f(x)$ را صعودی گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$



تابع $f(x)$ را نزولی گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$



تابع $f(x)$ را صعودی اکید گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

تابع $f(x)$ را نزولی اکید گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

تابع $f(x)$ را ثابت گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

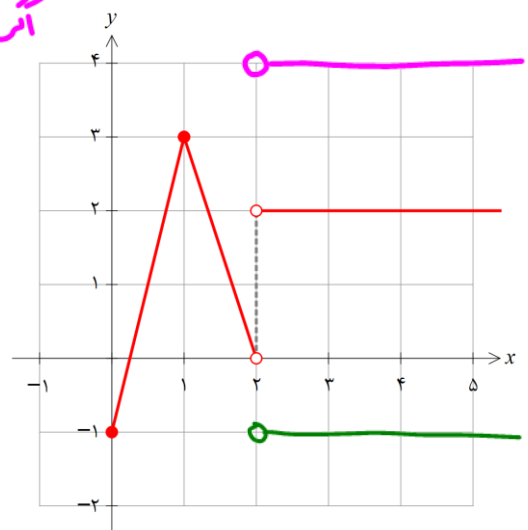
هم صعودی هم نزولی

نکته: تابعی که صعودی یا نزولی باشد را یکنوا نامیده و تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد را اکیداً یکنوا می‌نامیم.

نکته: تابعی که در بازه‌ای اکیداً صعودی و در بازه‌ای دیگر اکیداً نزولی باشد را غیر یکنوا می‌نامیم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & 0 \leq x < 1 \\ -3x+6 & 1 \leq x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$ را رسم کرده و بازه‌های یکنوایی آن را تعیین نمایید.

۲ اگر ۰ بود
۳ اگر ۰ نبود



صعودی: $x \in [0, 1) \cup (2, +\infty)$

اکیداً صعودی: $x \in [0, 1)$

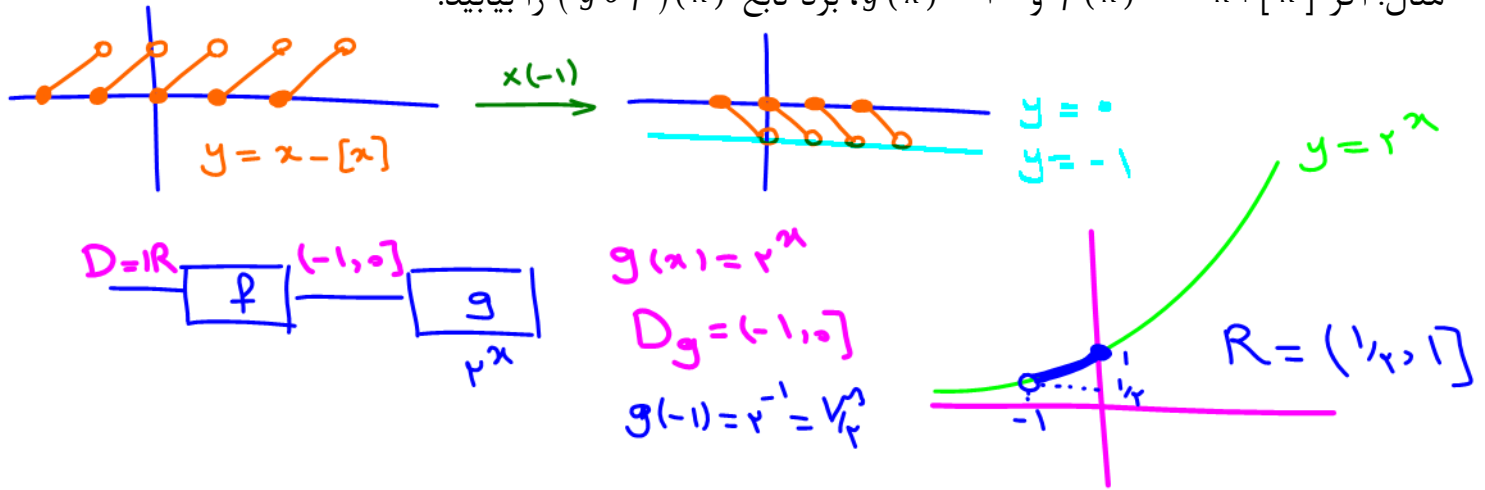
نزولی: $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

اکیداً نزولی: $[1, 2)$



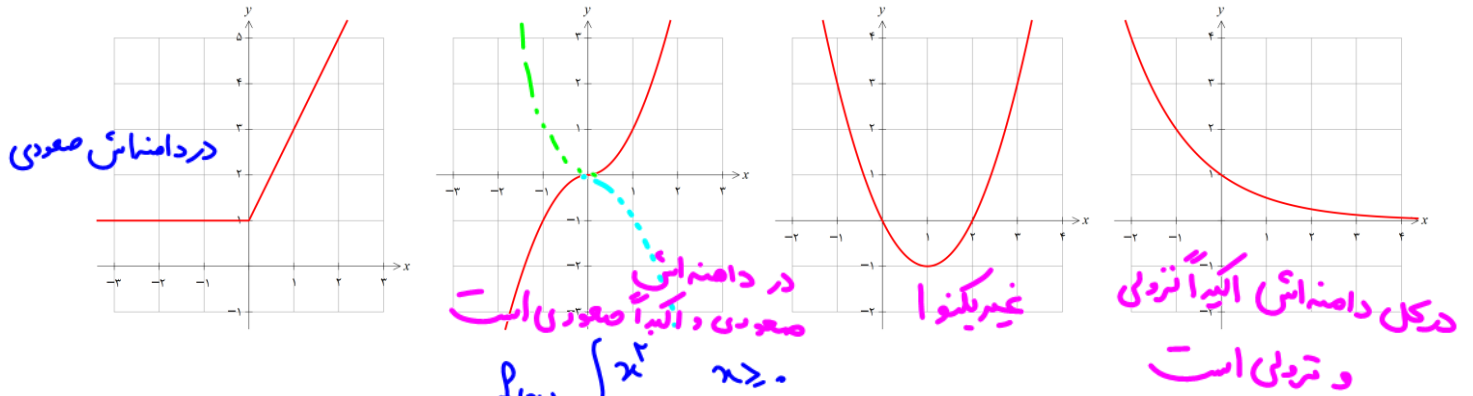
(هم صعودی هم نزولی): $(2, +\infty)$: ثابت

مثال: اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ برد تابع $(g \circ f)(x)$ را بیابید.



مثال: صعودی و نزولی بودن توابع زیر را بررسی نمایید.

(۴) $f(x) = x + |x| + 1$ (۳) $f(x) = x|x|$ (۲) $f(x) = x^2 - 2x$ (۱) $f(x) = 2^{-x}$

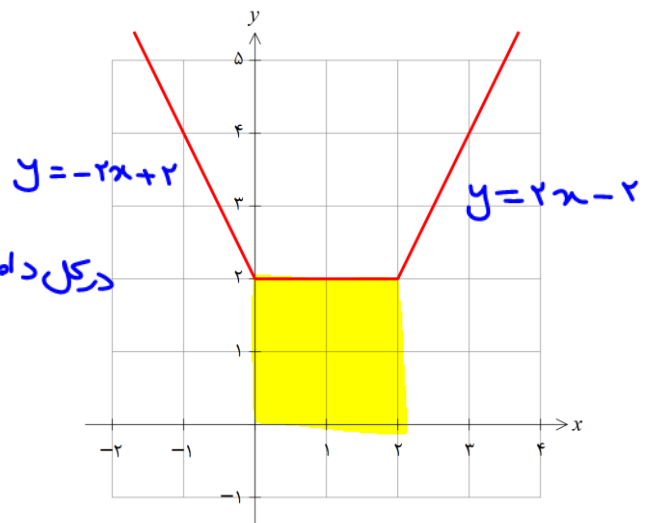


$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$y = |x| + |x-2|$
 $x=0 \quad x=2$

$x \in [0, +\infty)$ صعودی
 $x \in (-\infty, 2]$ نزولی
 $x \in [0, 2]$ ثابت
 $x \in [2, +\infty)$ آلیه صعودی
 $x \in (-\infty, 0]$ آلیه نزولی

مثال: یکنوایی تابع $y = |x| + |x-2|$ را بررسی نمایید.

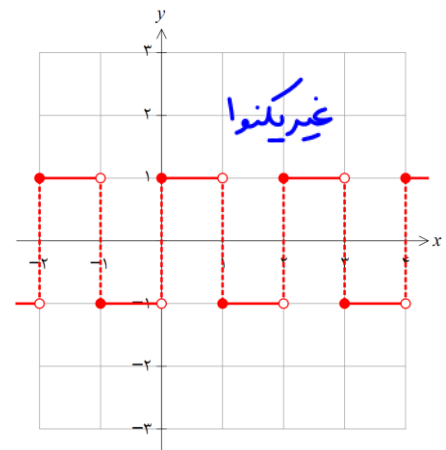


مثال: نمودار تابع $f(x) = (-1)^{[x]}$ را در بازه $f(x) = [-1, 2)$ رسم و سپس یکنوایی آن را بررسی نمایید.

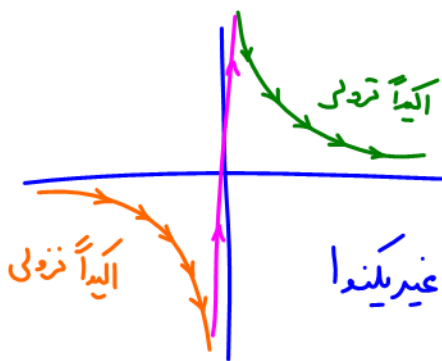
$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = (-1)^{-1} = -1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = (-1)^0 = +1$$

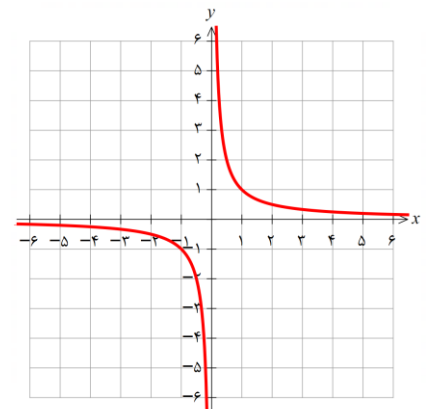
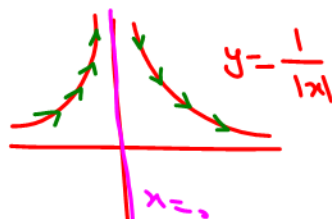
$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = (-1)^1 = -1$$



مثال: یکنوایی تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در دامنه آن بررسی نمایید.



هر تابعی که مجانب قائم دارد، در هر بازه شکل مجانب قائم غیر یکنوا است.



مثال: تابعی مثال بنزید که صعودی باشد ولی اکیداً صعودی نباشد.

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



مثال: تابعی مثال بنزید که نزولی باشد ولی اکیداً نزولی نباشد.



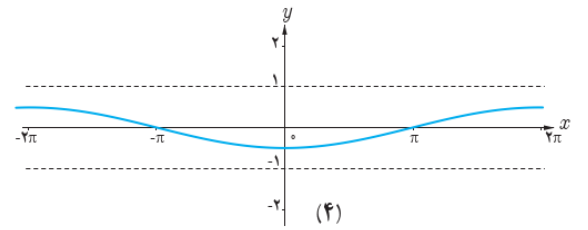
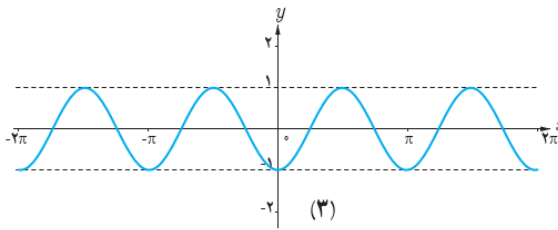
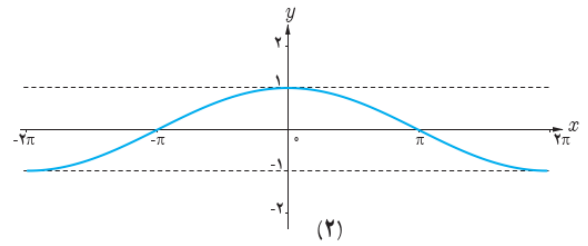
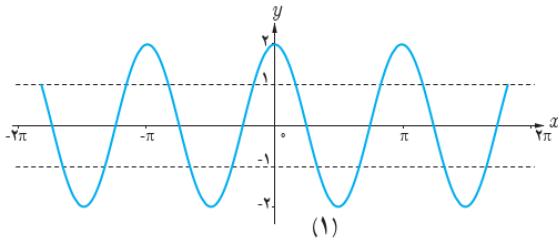
مثال: با استفاده از نمودار تابع $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است. ضابطه هر نمودار را مشخص نمایید.

الف) $y = -\frac{1}{3} \cos(-\frac{1}{3}x)$ (۴)

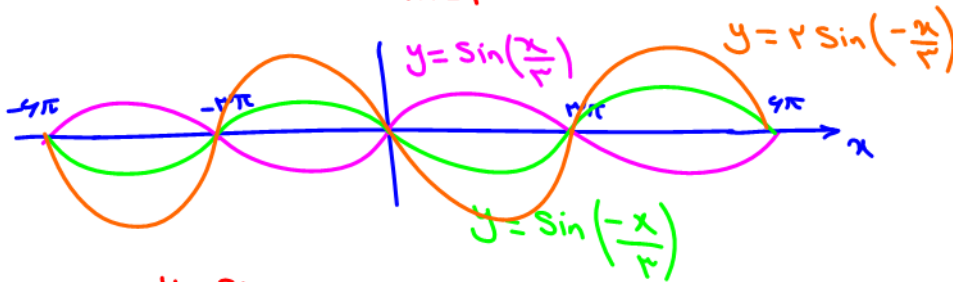
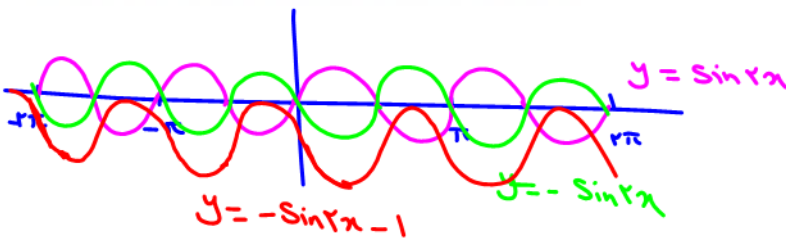
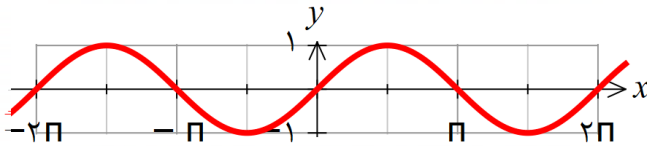
ب) $y = 2 \cos 2x$ (۱)

پ) $y = \cos(\frac{1}{3}x)$ (۲)

ت) $y = -\cos 2x$ (۳)



مثال: نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



$y = \sin x, -\pi \leq x \leq \pi$

$y = 2 \sin(-\frac{x}{3}), -\pi \leq x \leq \pi$

مثال: تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $f(x^2 - 1) < f(2x + 2)$ ، حدود x کدام است؟ (مبتکران ۹۹)

(۱) $(-2, 4)$

(۲) $(-1, 3)$ ✓

(۳) $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

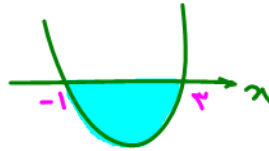
(۴) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x^2 - 1 < 2x + 2$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

$(x - 3)(x + 1) < 0$



$-1 < x < 3$

مثال: تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر

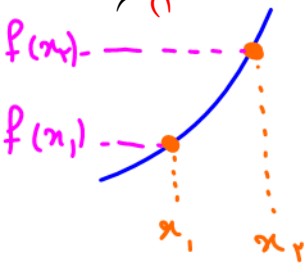
$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟ (ریاضی فارغ ۱۴۰۲)

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۲

(۱) ۱ ✓



$2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4$

$m^2 - 5m - 6 < 0$

$(m - 6)(m + 1) < 0$

$-1 < m < 6$

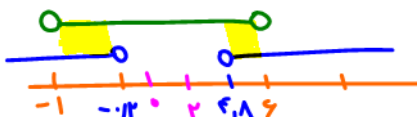
$2m^2 - 9m - 2 > 0$

$\frac{9 \pm \sqrt{97}}{4} \approx 4.8$

$m^2 - 4m + 4 > 0$

$(m - 2)^2 > 0$

$m \neq 2$



مثال: در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع

(تجربی ۹۷)

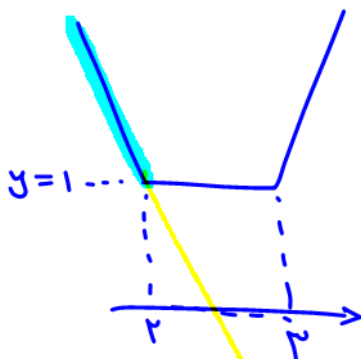
$g(x) = 2x^2 - x - 10$ ، در چند نقطه مشترک هستند؟

(۴) فاقد نقطه مشترک

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱ ✓



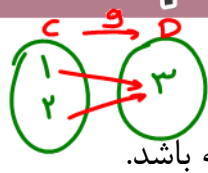
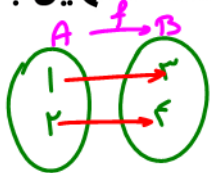
$x \leq 2 \Rightarrow y = 2 - x + 3 - x = -2x + 5$

$2x^2 - x - 10 = -2x + 5$

$2x^2 + x - 15 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-15) = 121$

$\frac{-1 \pm 11}{4} \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = -5$



تابع یک به یک:

تابعی یک به یک است که به ازای متغیر (y) فقط یک (x) داشته باشد.

$$\forall y_1 = y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow y = f(x) \quad \text{یک به یک است (دارون پذیر)}$$

بررسی تابع یک به یک از روی زوج مرتبها: تابعی یک به یک است که مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد و اگر مؤلفه‌های دوم زوج مرتبها برابر بودند، مؤلفه‌های اول نیز برابر باشند.

مثال: رابطه‌ی زیر نمایشگر یک تابع یک به یک می‌باشد. مقدار متغیر m را بیابید.

$$f = \{ (1, a+1), (1, 5-a), (2m, a-1), (5, a-3) \}$$

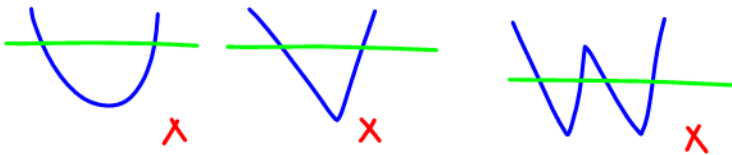
$$a+1 = 5-a \Rightarrow a=2$$

$$f = \{ (1, 3), (2m, 1), (5, -1) \}$$

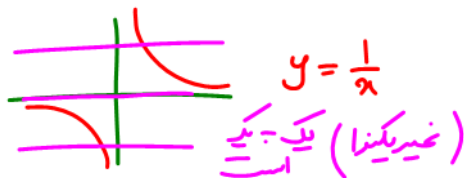
$$m \in \mathbb{R} - \{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \}$$

$$2m \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \quad 2m \neq 5 \Rightarrow m \neq \frac{5}{2}$$

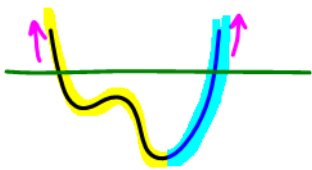
بررسی تابع یک به یک از روی نمودار: تابعی یک به یک است که هر خط افقی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



روش‌های تشخیص تابع یک به یک:



۱- عددگذاری: برای بیان مثال نقض و رد گزینه استفاده می‌شود.



۲- توابع درجه‌ی زوج هیچ‌گاه یک به یک نیستند، مگر این که محدودیت دامنه ایجاد شود.

۳- تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ با شرط آن که $x \geq \frac{-b}{2a}$ یا $x \leq \frac{-b}{2a}$ یک به یک است.

الیه صعودی (یک به یک)

صعودی (یک به یک)

$$x + |x| = y$$

۴- تابع $y = |ax + b|$ یک به یک نیست.

۵- توابع یکنوای اکید (صعودی اکید یا نزولی اکید) یک به یک هستند.

۶- توابع به فرم $y = ax + b + k|cx + d|$ ممکن است یک به یک باشد و ممکن است یک به یک نباشد و بهترین راه برای تشخیص آن، رسم تابع است.

علامت سیما (برابر) ← یک به یک ✓
علامت دو برابر ← نابرابر ← یک به یک ✗

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟

$$y = [x] \xrightarrow{y=1} [x]=1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \quad \times$$

$$y = \sin x \xrightarrow{y=0} \begin{array}{c} \pi \\ 0, 2\pi \\ 3\pi \end{array} \quad x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

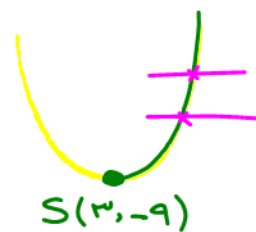

$$y = x^4 + x^3 \xrightarrow{y=0} x^4 + x^3 = 0 \rightarrow x^3(x+1) = 0 \quad \times$$

$x=0$ $x=-1$

$$y = x^4 - 5 \xrightarrow{y=-4} -4 = x^4 - 5 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = -1, x = +1$$

$\times$

$$y = x^2 - 6x, \quad x \geq 3$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$


$S(3, -9)$

$$y = x^3 + x \quad \checkmark$$

$$y' = 3x^2 + 1 > 0 \rightarrow \text{یک به یک}$$

آلایه صعودی

$$y = x^3 - x$$

$$y=0 \Rightarrow (x^3 - x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-1) = 0$$

(0) (-1) (1)

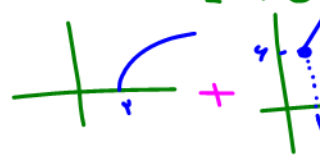
$$y = \sqrt{x-2} + |x+4|$$

آلایه صعودی = آلایه صعودی + آلایه صعودی

آلایه نزولی = آلایه نزولی + آلایه نزولی

آلایه صعودی = آلایه صعودی $\rightarrow$ یک به یک

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$



$$y = x + |2x - 2|$$

$$y = \begin{cases} 3x - 2 & x \geq 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$$


$$y = 2x + |x - 1|$$

$$y = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

آلایه صعودی $\rightarrow$ یک به یک



تابع معکوس:

تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد و برای یافتن تابع معکوس به روش های زیر عمل می کنیم.

۱- توابع زوج مرتبی: جای مؤلفه های اول و دوم را عوض می کنیم.

مثال: معکوس تابع زیر را بیابید.

$$f = \{(1, 4), (4, 3)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(4, 1), (3, 4)\}$$

دو تابع $f = \{(1, 4), (2, 3)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 4)\}$ را در نظر می گیریم. رابطه معکوس این دو تابع به صورت زیر می باشد.

$$f = \{(1, 4), (2, 3)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2)\} \quad \text{تابع وارون } f \quad \checkmark$$

$$g = \{(1, 4), (2, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (4, 2)\} \quad \text{وارون تابع } g \quad \times$$

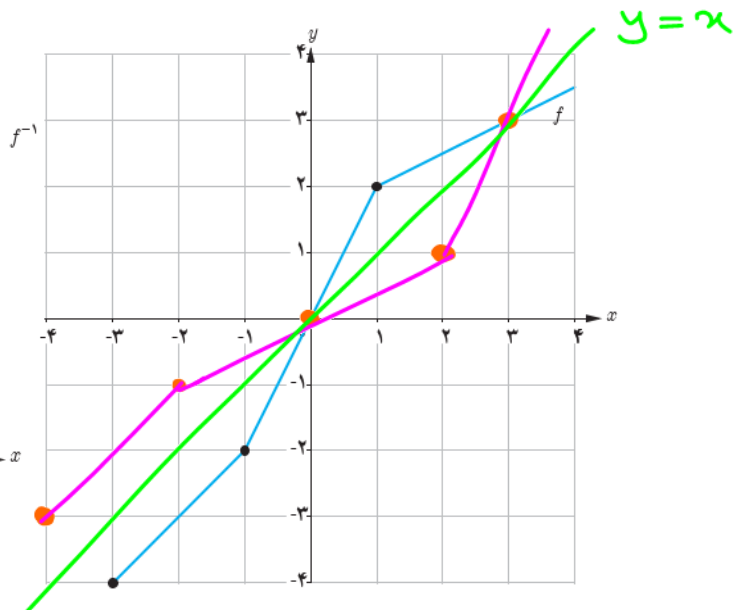
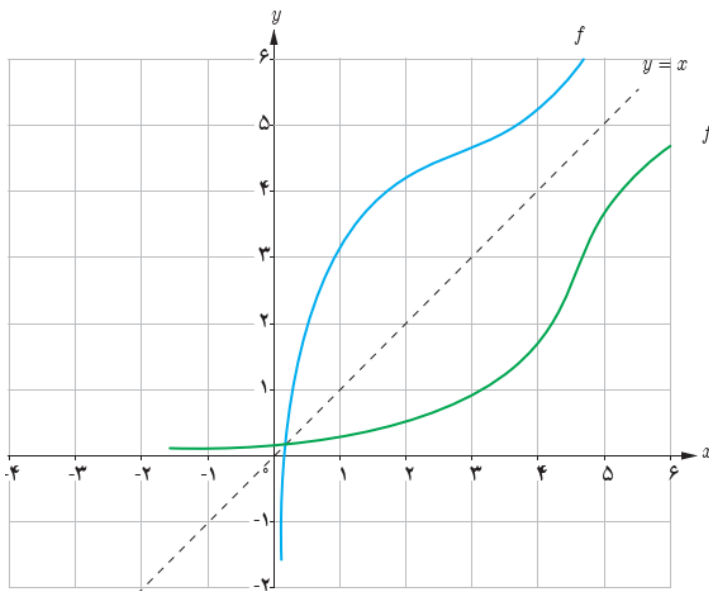
یک به یک نیست

تابع f را که رابطه معکوس آن، تابع می باشد، معکوس پذیر (وارون پذیر) می گوئیم.

تابع g را که رابطه معکوس آن، تابع نمی باشد، معکوس ناپذیر (وارون ناپذیر) می گوئیم.

اصطلاحاً f^{-1} را تابع معکوس تابع f می نامیم ولی در مورد تابع g ، رابطه g^{-1} صرفاً رابطه معکوس تابع g می باشد و از آنجایی که g^{-1} تابع نیست، نمی توان به آن تابع معکوس تابع g گفت.

۲- یافتن معکوس از روی نمودار: قرینه تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) را رسم می کنیم.



۳- یافتن تابع معکوس در توابعی که ضابطه آن‌ها داده شود: ابتدا یک به یک بودن بررسی شده و سپس متغیر x را بر حسب متغیر y یافته و در نهایت جای متغیرهای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال: معکوس توابع زیر را بیابید.

یافتن وارون:

$$\begin{aligned} y+9 &= (x-3)^2 \xrightarrow{x < 3} \\ \sqrt{y+9} &= |x-3| \xrightarrow{-3} \\ \sqrt{y+9} &= 3-x \xrightarrow{\times (-1)} \\ \sqrt{y+9} - 3 &= -x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \\ x &= 3 - \sqrt{y+9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= 3 - \sqrt{x+9} \\ D_{f^{-1}} &= (-9, +\infty) = R_f \\ R_{f^{-1}} &= (-\infty, 3) = D_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3, -9) \\ D_f &= (-\infty, 3) \\ R_f &= (-9, +\infty) \end{aligned}$$

$$y = x^2 - 6x, \quad x < 3$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 9 - 9 \Rightarrow \\ y &= (x-3)^2 - 9 \end{aligned}$$

بررسی وارون پذیری:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \Rightarrow (x_1-3)^2 - 9 = (x_2-3)^2 - 9 \xrightarrow{+9} \\ (x_1-3)^2 &= (x_2-3)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x_1-3| = |x_2-3| \Rightarrow \\ 3-x_1 &= 3-x_2 \xrightarrow{-3} -x_1 = -x_2 \xrightarrow{\times (-1)} x_1 = x_2 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

$$f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x-1} + 1 \xrightarrow{-1} \\ y-1 &= \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{(\quad)^3} \\ (y-1)^3 &= x-1 \xrightarrow{+1} \\ (y-1)^3 + 1 &= x \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 1 \end{aligned}$$

$$y = \log_2 2x$$

$$\log_2 2x = y \Rightarrow 2x = 2^y \xrightarrow{\div 2} x = 2^{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{x-1}$$

$$\begin{aligned} y &= \log_2 2x \\ y-1 &= \log_2 x \\ x &= 2^{y-1} \end{aligned}$$

یافتن وارون: $\frac{y}{1} = \frac{x-4}{x+1} \rightarrow$

$$yx + y = x - 4 \rightarrow$$

$$4 + y = x - yx \rightarrow$$

$$(4+y) = x(1-y) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{4+y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4+x}{1-x} \end{aligned}$$

بررسی وارون پذیری: $y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1-4}{x_1+1} = \frac{x_2-4}{x_2+1} \Rightarrow$

$$x_1x_2 + x_1 - 4x_2 - 4 = x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 4$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \xrightarrow{\div \Delta} x_1 = x_2$$

وارون پذیری است $x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ y &= \frac{dx-b}{-cx+a} \end{aligned}$$

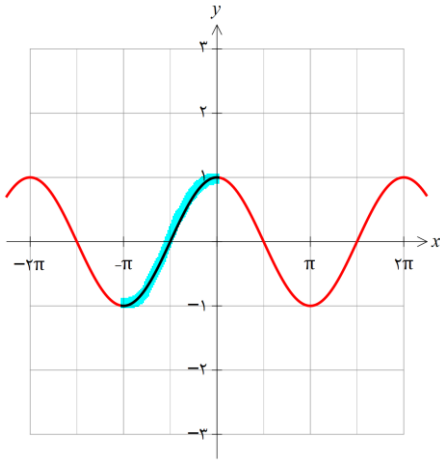
مثال: معکوس تابع $y = \cos x$ روی کدام بازه‌ی زیر یک تابع است؟

(۱) $[-\pi, 0]$

(۲) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(۳) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

(۴) $[0, 2\pi]$



مثال: اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x - 1$ ، ضابطه‌ی تابع $f \circ g^{-1}$ را بیابید.

$$g(x) = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = x + 1}$$

$$f(g^{-1}(x)) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

مثال: اگر تابع $f(x) = x^3 + 3x + 10$ و $f(a) = 24$ ، آنگاه مقدار $f^{-1}(-4)$ را بر حسب a بیابید.

$$a^3 + 3a + 10 = 24 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\boxed{f^{-1}(-4) = b} \xrightarrow{f}$$

$$f(f^{-1}(-4)) = f(b)$$

$$\boxed{-4 = f(b)}$$

$$-4 = x^3 + 3x + 10$$

$$-14 = x^3 + 3x$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$\boxed{x = -a}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f^{-1}(\sin x)$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \text{مشتق}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{x'}{1+x^2} \rightarrow x'y + y' = x' \Rightarrow$$

$$y' = x' - x'y \rightarrow x'(1-y^2) = y' \Rightarrow$$

$$x' = \frac{y'}{1-y^2} \rightarrow \boxed{|x| = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{|\cos x|} \rightarrow \begin{cases} \tan x \\ -\tan x \end{cases}$$

۴۱

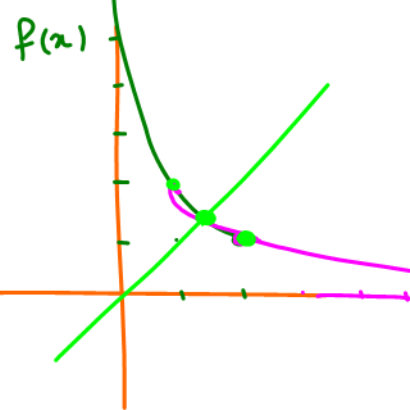
مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه

و برد تابع f و وارون آن را بنویسید و سپس این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم نمایید. $x_5 = \frac{-b}{2a} = 2$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1, \quad x \leq 2$$

$$D_f = (-\infty, 2], \quad R_f = [1, +\infty)$$

یافتن f^{-1} : $y-1 = (x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$



$$|x-2| = \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \leq 2} 2-x = \sqrt{y-1} \rightarrow x = 2 - \sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$$

نکته: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن گاه داریم:

$$(f \circ g)(x) = x, \quad (g \circ f)(x) = x$$

مثال: در هر مورد از قسمت‌های زیر، نشان دهید که f و g وارون یکدیگر هستند.

الف) $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$

$$g(f(x)) = \frac{2(\frac{-7}{2}x - 3) + 6}{-7} = \frac{-7x - 6 + 6}{-7} = \frac{-7x}{-7} = x$$

$$f(g(x)) = \frac{-7}{2} \left(\frac{2x+6}{-7} \right) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$
تابع f و g وارون یکدیگرند

ب) $g(x) = 8 + x^2; x \leq 0$ و $f(x) = -\sqrt{x-8}$



نکاتی در مورد تابع وارون

۱- اگر توابع f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند، آن گاه: $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$.

۲- اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی تابع f^{-1} قرار دارد.

۳- اگر توابع f و f^{-1} متقاطع باشند، نقطه برخورد آن‌ها روی نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$) قرار می‌گیرد.

۴- در توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، در این صورت $f(x) = f^{-1}(x)$ می‌باشد.

$$5) \forall x \in D_f ; (f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$6) \forall x \in D_f ; (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

مثال: برد تابع معکوس تابع $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ را بیابید.

$$R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

مثال: اگر نقطه $(k, 2)$ روی تابع معکوس تابع $y^5 + y = x$ قرار داشته باشد، مقدار متغیر k را بیابید.

$$\left| \begin{matrix} k \\ 2 \end{matrix} \right| \in f^{-1} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix} \right| \in f \quad k^5 + k = 2 \rightarrow k=1$$

مثال: نقطه برخورد تابع $y = x^3 + x - 8$ با معکوس خودش را بیابید.

$$x^3 + x - 8 = y \xrightarrow{y=x}$$

$$x^3 + x - 8 = x$$

$$x^3 = 8 \rightarrow x=2 \rightarrow y=2$$

مثال: ضابطه تابع معکوس $f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$ را بیابید.

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(44) = 4$$

$$f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3 \xrightarrow{f^{-1}(5)=?} 5 = \frac{x}{\lambda} - 3 \Rightarrow 8 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 44$$

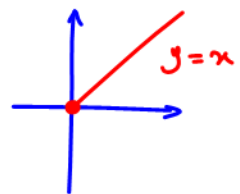
$$(f^{-1} \circ f^{-1})(6) = f^{-1}(f^{-1}(6)) = f^{-1}(72) = 60$$

$$f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3 \Rightarrow 9 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 72 \quad f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3 \Rightarrow 75 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 60$$

$$(f \circ g)^{-1}(5) = (g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = 4$$

مورد اول همین سؤال

مثال: توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.



$$y = |x| \Rightarrow y = x \quad x \geq 0$$

$$R_f = [0, +\infty)$$

$$y = x \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1}(x) = x$$

$$D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$f(x) = |x| \quad (\text{الف})$$



$$y = -x^2 \quad D_f = [-\infty, 0] \quad R_f = (-\infty, 0]$$

$$x^2 = -y \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{x^2} = \sqrt{-y} \xrightarrow{x \geq 0} |x| = \sqrt{-y}$$

$$x = \sqrt{-y} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt{-x}$$

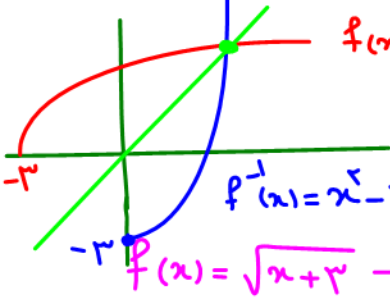
$$f^{-1}(x) = \sqrt{-x} \quad D_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \quad R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$g(x) = -x^2 \quad (\text{ب})$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید.

$$f(x) = \sqrt{x+3}, \quad D_f = [-3, +\infty), \quad R_f = [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3, \quad D_{f^{-1}} = [0, +\infty), \quad R_{f^{-1}} = [-3, +\infty)$$



$$f(x) = \sqrt{x+3} \xrightarrow{y = \sqrt{x+3}} y^2 = x+3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = y^2 - 3 \xrightarrow{\text{نهاد}} y = x^2 - 3 \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

مثال: رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند، به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

$y = \frac{9}{5}x + 32$
 $y - 32 = \frac{9}{5}x \xrightarrow{\times \frac{5}{9}} x = \frac{5}{9}(y - 32)$
 $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

(تجربی ۱۴۰۱)

مثال: وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند؟

$(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8})$ (۴) $(1, 2)$ (۳) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ (۲) $(-1, -2)$ (۱)

$(a, b) \in f^{-1} \Rightarrow (b, a) \in f$

$(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \in f \checkmark$
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} \checkmark$

$(-1, -2) \notin f$
 $-1 \notin f$

مثال: اگر نقطه $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a کدام

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

است؟

$3/5$ (۴) 3 (۳) 5 (۲) $\frac{5}{27}$ (۱)



مثال: به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

$10y - x = -10$ را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند؟

5 (۴) 9 (۳) 12 (۲) ✓ 15 (۱)

$10y - x = -10 \xrightarrow{y=1} x = 20$
 $20 \in f^{-1} \Rightarrow 1 \in f$
 $1 + a = 20 \rightarrow a = 19$

مثال: وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض 10 قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۲)

۱ (۴) ✓

۲ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$y = 12 - x \rightarrow x = 2$$

$$10 \in f^{-1} \Rightarrow 10 \in f$$

$$f(m+4) = f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{1(5)-1}$$

$$f(5) = 1$$

$$\sqrt{10-2} \sqrt{10m-1} = 10 \Rightarrow$$

$$10-2\sqrt{10m-1} = 10 \div 2$$

$$5 - \sqrt{10m-1} = 2 \rightarrow 3 = \sqrt{10m-1} \rightarrow$$

$$10m-1=9 \rightarrow m=1$$

مثال: اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۶)

(۲, ۳) (۴) ✓

(۲, ۱) (۳)

(-۱, ۳) (۲)

(-۱, ۱) (۱)

$$a^2 - a = 2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} \quad (-1, 5) \neq (-1, 4) \times$$

$$f = \{(3, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

$$b = 3$$

(ریاضی ۹۷)

مثال: کدام یک از تابع‌های زیر، یک به یک است؟

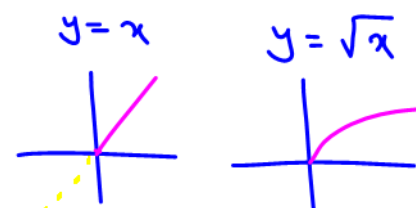
$$g(x) = x - \sqrt{x} \quad (۲)$$

$$f(x) = x + \sqrt{x} \quad (۱) \quad \checkmark$$

$$p(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (۴)$$

$$h(x) = 2x + \frac{1}{x} \quad (۳)$$

گ: ۱



الیه صعودی + الیه صعودی = الیه صعودی

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

(قلم پی ۱۴۰۰)

$$g(x) = x - x\sqrt{x} \quad (۲)$$

$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{x} \quad (۱)$$

$$p(x) = 2x^2 - |x| \quad (۴)$$

$$h(x) = x + \frac{1}{x} \quad (۳)$$



(ریاضی ۱۸)

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(۴)$ کدام است؟

-۸ (۴)

-۲ (۳)

-۵ (۲)

(۱) تعریف نشده

$$f^{-1}(۴) \Rightarrow -x + \sqrt{-2x} = 4 \Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow{(\quad)^2} -2x = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$(x+8)(x+2) = 0$$

$$x \neq -4 \quad x = -8 \quad x = -2$$

مثال: تابع f با دامنه $(۲, ۳)$ و ضابطه $f(x) = [-x]x + [x]$ تعریف شده است. مقدار $f^{-1}(-۵)$ کدام است؟

(قلم پی ۹۹)

$\frac{8}{3}$ (۴)

ناموجود (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)



مثال: اگر نمودار تابع وارون $f(x) = x^3 + 2x + 2m$ از نقطه $(۱, m)$ عبور کند، مقدار $f^{-1}(-۶)$ کدام است؟

(IQ کج)

$\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱) ✓

$$(m, 1) \in f^{-1} \Rightarrow (1, m) \in f \Rightarrow 1 + 2 + 2m = m \Rightarrow m = -3$$

$$f(x) = x^3 + 2x - 6 \xrightarrow{f^{-1}(-6)} x^3 + 2x - 6 = -6 \xrightarrow{\text{فازین}} x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$$

مثال: اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $g\left(-\frac{3}{7}\right) + g\left(\frac{5}{9}\right)$ (تقریبی معبره ۱۴۰)

کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) ✓
 $\frac{19}{20}$ (۲)
 $-\frac{11}{28}$ (۳)
 $-\frac{1}{3}$ (۴)

$x > 0 \leftrightarrow y > 0$
 $x < 0 \leftrightarrow y < 0$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases}$

$\frac{x}{1+x} = \frac{5}{9} \rightarrow 9x + 5 = 9x \Rightarrow x = \frac{5}{8}$
 $\frac{x}{1-x} = -\frac{3}{7} \rightarrow 7x = 3x - 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$\frac{5}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{8}$

مثال: اگر شکل مقابل نمودار $f(x-1)$ باشد، حاصل $f(2) - f^{-1}(2)$ کدام است؟ (تقریبی ۱۴۰۰)

(۱) صفر
 (۲) -۱
 (۳) ۱ ✓
 (۴) ۵

$f(2) = ? \xrightarrow{x=2} y=0$
 $f^{-1}(2) = ? \xrightarrow{y=2} x=-1 \rightarrow 0 - (-1) = 1$

مثال: تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$f(x) = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

$-\sqrt{x^3}, x \leq 0$ (۱) ✗
 $-\sqrt{x^3}, x \geq 0$ (۳) ✗
 $-\sqrt[3]{x}, x \leq 0$ (۲) ✗
 $-\sqrt[3]{x}, x \geq 0$ (۴) ✓

نزولی: $x \in (-\infty, 0]$
 $y = -x^3 \xrightarrow{x(-1)} x^3 = -y \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x = \sqrt[3]{-y}$
 $D_f = (-\infty, 0]$
 $R_f = [0, +\infty) = D_{f^{-1}}$
 $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$

d کدام است؟

(۱) - ۲

(۲) - ۱

(۳) ۱

(۴) ۲



مثال: قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط

(تقریبی ۹۷)

واحد

مثال: قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را

۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$

می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) - ۳

(۳) - ۲ ✓

(۴) - ۴

$$y = 2 + \sqrt{x-1}$$

↓ واحد

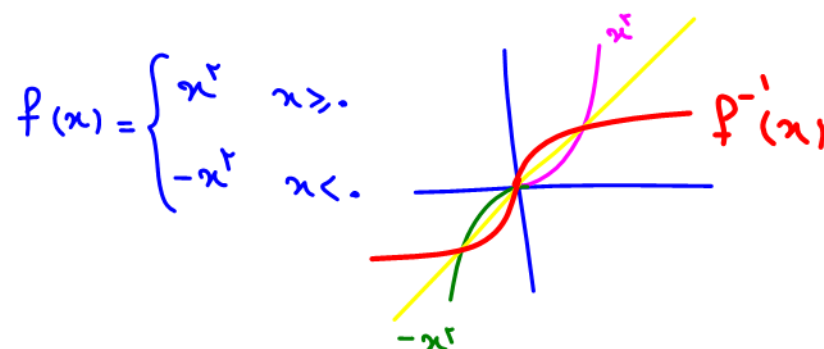
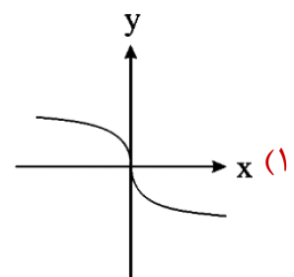
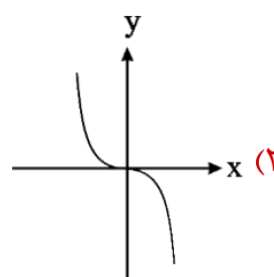
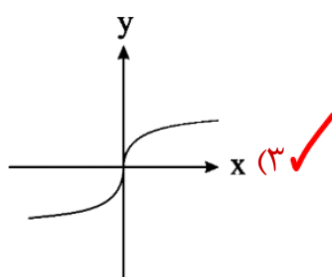
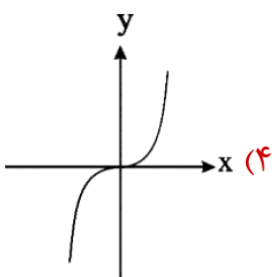
$$f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{تبدیل}} 2$$

$$g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3 = -2$$

$x=4$

(تقریبی ۹۵)

مثال: اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



برد تابع:

حدود تغییرات متغیر y را بر حسب متغیر x ، برد تابع می‌نامیم.

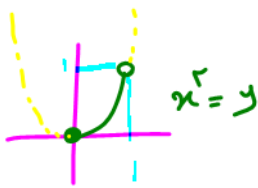
برد تابع زوج مرتبی:

مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم را برد می‌نامیم.

$$f = \{(1, 4), (4, 3), (5, 6)\} \Rightarrow R_f = \{3, 4, 6\}$$

تشخیص برد تابع از روی نمودار:

تصویر نمودار تابع بر محور y ها را برد تابع می‌نامیم.



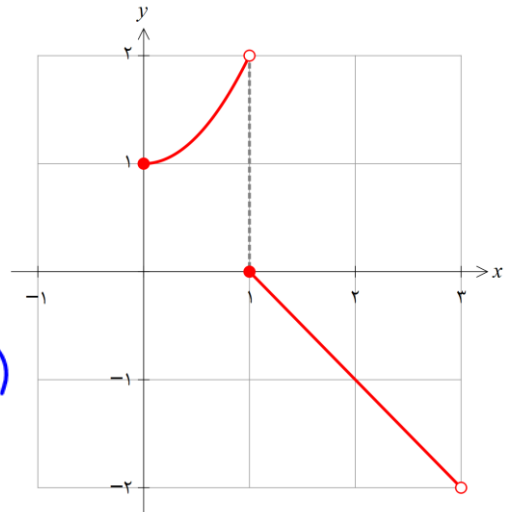
مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	1	2	-2

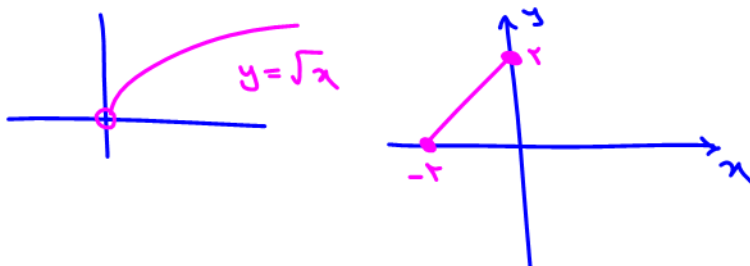
تداخل
نقطه

$$R_f = (-2, 2] \cup [1, 2)$$

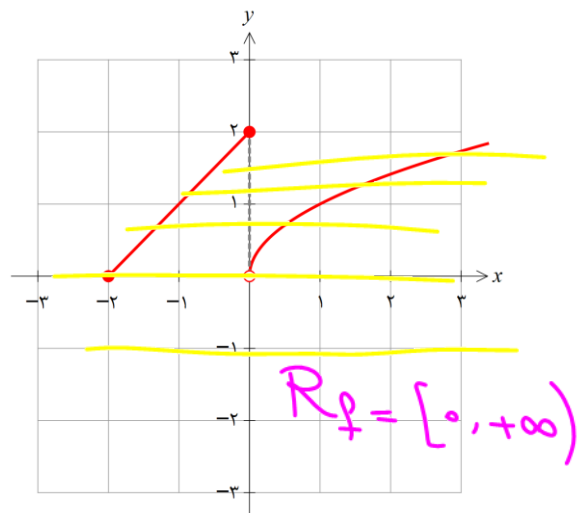


مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 2 + x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 2 + x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



$$y = x + 2 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}$$



$$R_f = [0, +\infty)$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، برد تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

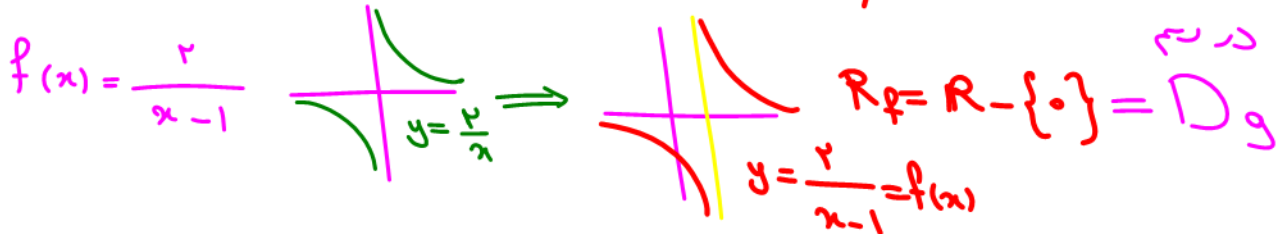
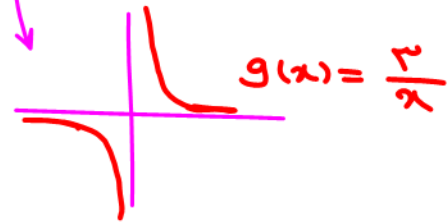
(۱) $\mathbb{R}$

(۲) $\mathbb{R} - \{1\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ ✓

(۴) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

$g(f(x))$



صحیح است؟

(۱) صفر

(۲) ✓

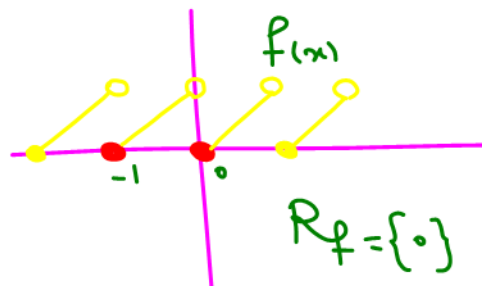
(۳) ۲

(۴) بیش از ۲

تنها عدد $(x=0)$ است.

$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$R_g = \{0, -1\} = D_f$



مثال: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $(g \circ f)(x)$ ، کدام

است؟

(۱) $[0, 2]$

(۲) $[0, 3]$

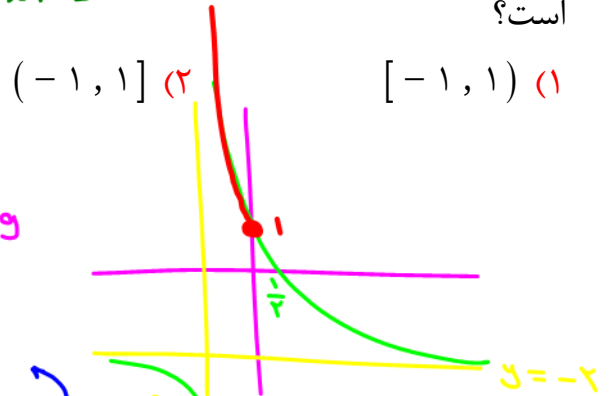
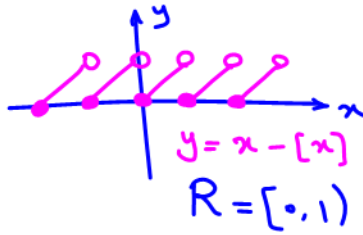
(۳) $[0, 4]$

(۴) $[1, 4]$

(تجربی ۹۹)



مثال: اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $(g \circ f)(x)$ ، کدام است؟
 معادله $x+1=0 \rightarrow x=-1$ معادله قابل
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-2x}{x+1} = -2 \Rightarrow y = -2$ افقی
 (تقریبی فارچ ۹۹)
 (۱) $[-1, 1)$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$



(موج آزمون نشر الگو)

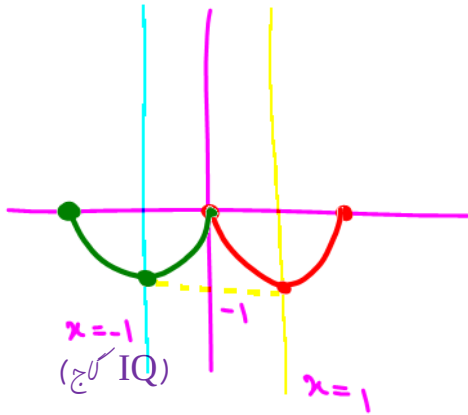
مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 2x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۴) $[-\frac{1}{2}, 0]$

(۳) $[0, 1]$

(۲) $[-1, 1]$

(۱) $[-1, 0]$ ✓



$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & 0 \leq x \leq 2 \\ x(x+2) & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ |x+2| & x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R}$

(۳) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{1\}$

(۱) $\mathbb{R} - \{0\}$



مثال: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ کدام است؟

(۴) $[0, +\infty)$

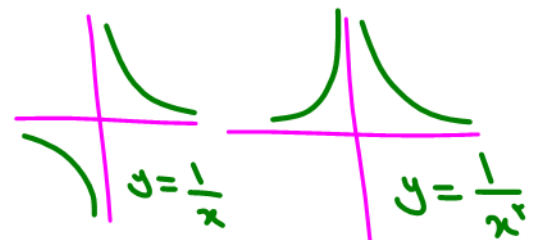
(۳) $(1, +\infty)$ ✓

(۲) $[1, +\infty)$

(۱) $(0, 1)$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$+1 < \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$$



بخش پذیری و بدست آوردن باقیمانده تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x) = 0$ باشد، چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ بخش پذیر است.

مقسوم
 $f(x)$
مقسوم علیه
 $p(x)$
خارج قسمت
 $q(x)$
باقیمانده
 $r(x)$

مثال: اگر $f(x) = x^4 - 16$ و $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

درج $p <$ درج r

عدد
 $f(x) = (ax+b)q(x) + R$
 $ax+b=0$
 $x = -b/a$
 $f(-b/a) = R$

$$p(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

باقیمانده
 $R = f(-2) = (-2)^4 - 16 = 0$
باقیمانده
باقیمانده

$$r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

نکته: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از:

مثال: در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ ، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده‌اند. نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است و سپس خارج قسمت تقسیم را بیابید.

$x^3 + 2$
 $2x - 1$
 $\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}$
 $\frac{x^2}{2} + 2$
 $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$
 $\frac{x^2}{2} + 2$
 $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$
 $2 + \frac{1}{2}$
 $\frac{17}{2}$

$\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}$
 $\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$
 $\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

مثال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^2 + x - 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

$2x + 1 = 0$
 $x = -1/2$

$R = (-1/2)^2 + (-1/2) - 2 = 1/4 - 1/2 - 2 = -17/4$

مثال: اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را بیابید.

$$x - a = 0 \rightarrow \boxed{x = a} \quad R = 0$$

$$f(a) = 0 \rightarrow (a)^2 + a(a) - 2 = 0 \rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{2}$$

مثال: اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^2 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow 1 + 4k + 2 = 6 \rightarrow \boxed{k = -1}$$

مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^2 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4a + 2b + 1 = 0 \quad (I) \\ -1 + a - b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

$$4a + 2b = -2 \quad b = a$$

$$4a + 2a = -2 \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{3}}$$



اتحادهای مهم زیر را به خاطر می سپاریم

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^1a^{n-2} + a^{n-1})$$

$x = a$
 $a^n - a^n = 0$

اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ ، اتحاد زیر شکل می گیرد.

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - x^1a^{n-2} + a^{n-1})$$

$x = -a$
 $(-a)^n + a^n = 0 \rightarrow n = \text{فرد}$

اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ ، اتحاد زیر شکل می گیرد.

$$(x^n - a^n) = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + x^1a^{n-2} - a^{n-1})$$

$x = -a$
 $(-a)^n - a^n = 0 \rightarrow n = \text{زوج}$

مثال: چندجمله‌ای $x^5 - 1$ را با عامل $x - 1$ تجزیه کنید.

$$(x^5 - 1) = (x - 1) (x^4 + x^3(1) + x^2(1)^2 + x(1)^3 + (1)^4)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

مثال: چندجمله‌ای $x^6 - 64$ را با عامل $x - 2$ تجزیه کنید.

$$x^6 - 2^6 = (x - 2) (x^5 + x^4(2) + x^3(2)^2 + x^2(2)^3 + x(2)^4 + 2^5)$$

$$x^6 - 64 = (x - 2) (x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

مثال: چندجمله‌ای $x^4 - 16$ را با عامل $x + 2$ تجزیه کنید.

$$x^4 - 2^4 = (x + 2) (x^3 - x^2(2) + x(2)^2 - (2)^3)$$

$$x^4 - 16 = (x + 2) (x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

مثال: چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را با عامل $x + 2$ تجزیه کنید.

$$x^5 + 2^5 = (x + 2) (x^4 - x^3(2) + x^2(2)^2 - x(2)^3 + (2)^4)$$

$$x^5 + 32 = (x + 2) (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

مثال: هر گاه باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x + 3$ و $x - 2$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را به دست آورید.

حاصل از درجه ۱
درجه ۲

$$f(x) = (x^2 + x - 6) Q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} f(-3) = 2 \Rightarrow -3a + b = 2 \\ f(2) = 7 \Rightarrow 2a + b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -5a = -5 \\ a = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b = 5 \end{array}$$

$$R(x) = x + 5$$



کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده

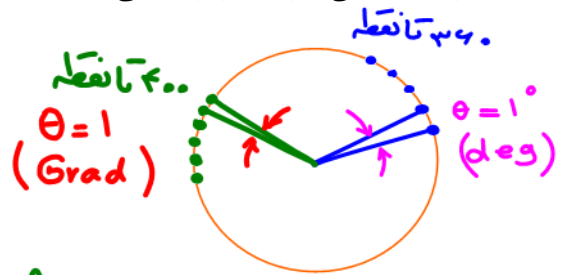
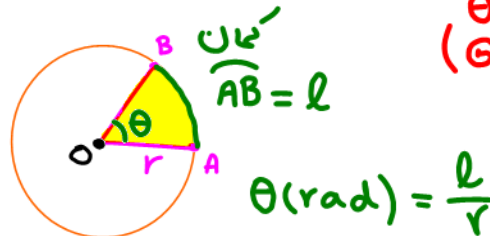


دایره کامل $\Rightarrow \theta = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ مثلثات
 $360^\circ \Rightarrow 2\pi \text{ (rad)} \xrightarrow{\div 2} \pi \text{ (rad)} \equiv 180^\circ$

رابطه بین درجه و رادیان :

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad , \quad 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ Deg}$$

$$Deg \begin{array}{c} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{\lambda_0}} \\ \xleftarrow{\times \frac{\lambda_0}{\pi}} \end{array} rad$$



مثال: زوایای 3° و 5° معادل چند رادیان هستند؟ زاویه $\frac{\pi}{2}$ معادل چند درجه می شود؟

$$\mu. \circ \frac{\text{رادیان}}{\times \frac{\pi}{18.}} \rightarrow \frac{\pi}{9} \text{ (rad)}$$

$$\frac{\pi}{r_0} \text{ (rad)} \frac{r_0}{\frac{1}{\pi}} = 9$$

$$\Delta \therefore \frac{(\Delta \lambda)}{\lambda} \times \frac{\pi}{180} \rightarrow \frac{\Delta \pi}{180} \text{ (rad)}$$

حدود تغییرات توابع مثلثاتی:

دسته محض نشد $()^2 \Rightarrow 4 < x^2 \leq 9$
 $2 < x \leq 3$

دسته محض نشد $()^2 \Rightarrow 9 \geq x^2 \geq 4$
 $-3 \leq x \leq -2$

دسته محض نشد $()^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 25$
 $-5 < x \leq +2$

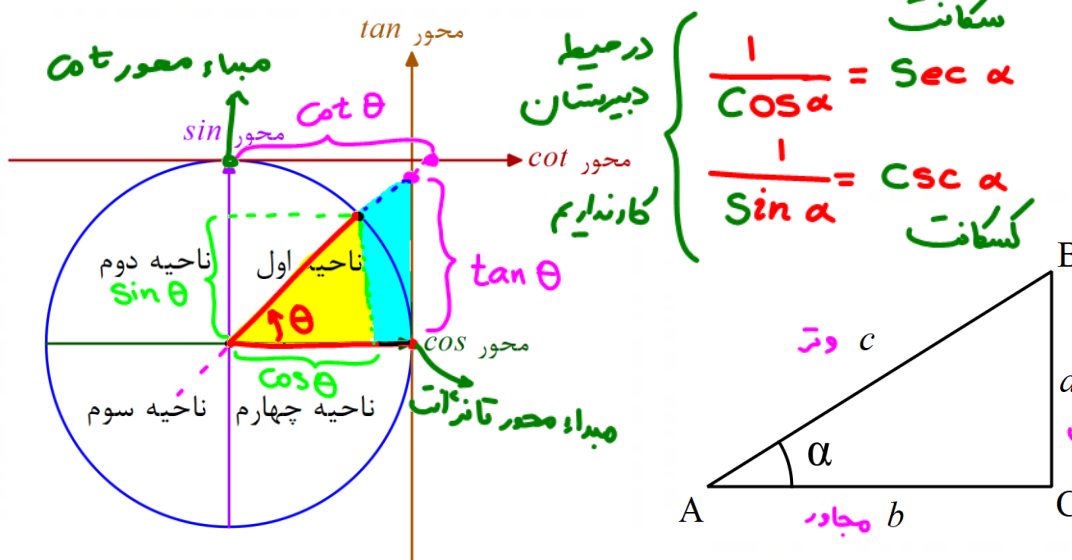
نتیجه می شود (باصفاوی) $\min$ روی 0

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad , \quad \tan x \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \cot x \in \mathbb{R}$$

مثال: حدود تغییرات عبارت $y = 5 \sin^2 x + 2$ را بیابید.

$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{(\cdot)^r}$
 $0 \leq \sin^r x \leq 1 \xrightarrow{\times \Delta}$
 $0 \leq \Delta \sin^r x \leq \Delta \xrightarrow{+r} r \leq y \leq v \rightarrow R_f = [r, v]$



نسبتهای مثلثاتی

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{مقابل } \alpha}{\text{وتر}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{مجاور } \alpha}{\text{وتر}} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{مقابل } \alpha}{\text{مجاور } \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\text{مجاور } \alpha}{\text{مقابل } \alpha}\end{aligned}$$

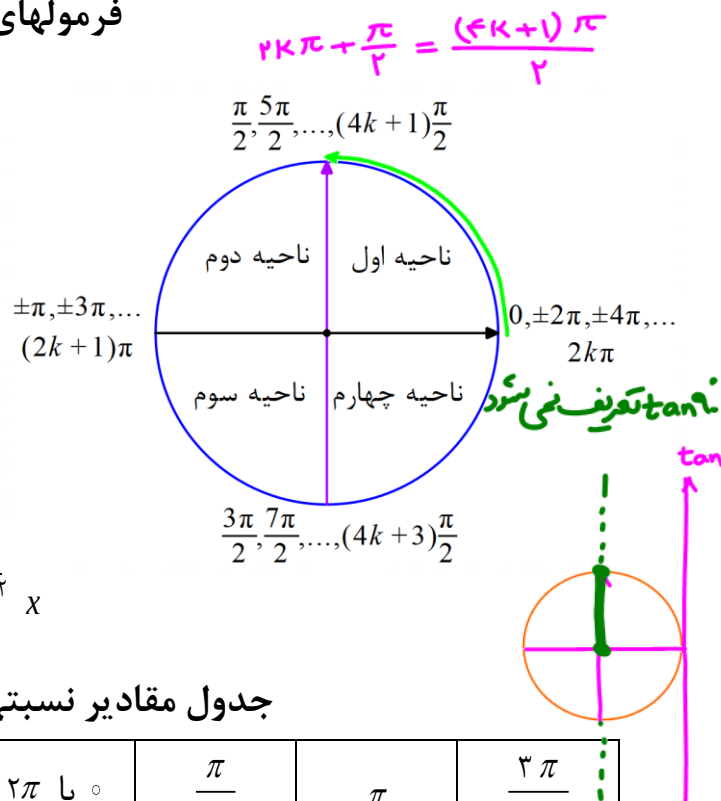
فرمولهای ابتدایی مثلثات

(I) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, (II) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(III) $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$

(IV) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$

(V) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (VI) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$



جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف

زاویه (رادیان)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	یا $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
زاویه (درجه)	۳۰	۶۰	۴۵	یا ۹۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۰	۱	۰	-۱
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	۱	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰

علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ناحیه دایره مثلثاتی

ناحیه مثلثاتی	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
محدوده زاویه	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

مثال: اگر $\sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha < 0$ باشد، α در کدام نواحی مثلثاتی قرار دارد؟

$$\sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha < 0 \quad \div (\sin^2 \alpha) \quad \sin \alpha \neq 0$$

$$\cot \alpha < 0$$


مثال: حاصل کدام یک از عبارات زیر منفی است؟

$$\textcircled{+} + \textcircled{+} = \textcircled{+} \quad \sin^{119^\circ} + \cos^{350^\circ} \quad (1)$$

$$\textcircled{-} + \textcircled{-} = \textcircled{-} \quad \sin^{190^\circ} + \tan^{170^\circ} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{+} - \textcircled{-} = \textcircled{+} \quad \tan^{200^\circ} - \cot^{300^\circ} \quad (3)$$

$$- \textcircled{-} + \textcircled{+} = \textcircled{+} \quad -\cos^{148^\circ} + \cot^{80^\circ} \quad (4)$$

یافتن نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های معروف مثلثاتی ($n > 2$)

دسته ۱	دسته ۲	دسته ۳	ناحیه مثلثاتی	فرمول مربوط به ناحیه $n > 2$
خانواده 30°	خانواده 45°	خانواده 60°		
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	ناحیه اول	$\theta = \frac{\pi}{n}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	ناحیه دوم	$\theta = \frac{(n-1)\pi}{n}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	ناحیه سوم	$\theta = \frac{(n+1)\pi}{n}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	ناحیه چهارم	$\theta = \frac{(2n-1)\pi}{n}$

نکته: به ازای زوایای هر دسته، مقادیر $|\sin \theta|$ ، $|\cos \theta|$ ، $|\tan \theta|$ و $|\cot \theta|$ برابرند و فقط تفاوت در علامت آنها می‌باشد که با توجه به علامت نسبت مورد نظر در ناحیه مثلثاتی، علامت آنها تعیین می‌گردد.

دسته ۱: $|\cot \theta| = \sqrt{3}$ و $|\tan \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $|\sin \theta| = \frac{1}{2}$

دسته ۲: $|\cot \theta| = 1$ و $|\tan \theta| = 1$ ، $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $|\sin \theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

دسته ۳: $|\cot \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $|\tan \theta| = \sqrt{3}$ ، $|\cos \theta| = \frac{1}{2}$ ، $|\sin \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = +\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = +\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

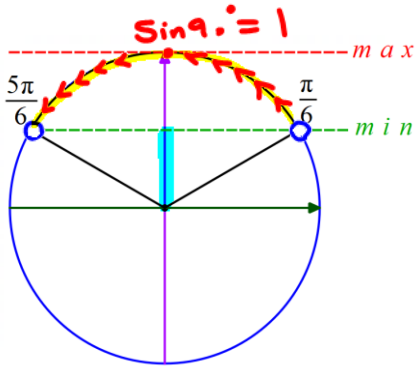
$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = +\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ باشد و $\sin x = \frac{1}{m-2}$ ، حدود متغیر m را تعیین کنید.



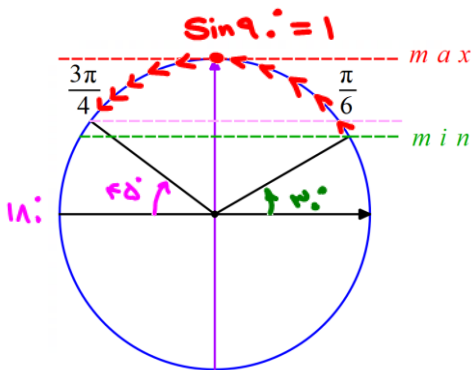
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \sin x &\leq 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{m-2} &\leq 1 \xrightarrow{\text{مکون}} \\ 2 > m-2 &\geq 1 \xrightarrow{+2} \\ 3 &\leq m < 4 \end{aligned}$$

$$(1) m \geq 4$$

$$(2) m > 2$$

$$(3) 3 \leq m < 4 \quad \checkmark$$

$$(4) m \leq 1 \text{ یا } m \geq 3$$



مثال: اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، حدود $\sin x$ را تعیین کنید.

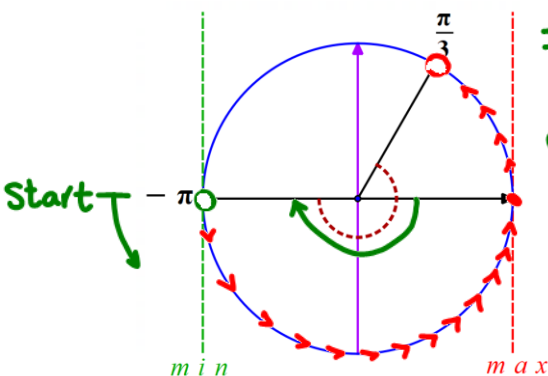
$$30^\circ < x < 135^\circ = (18^\circ - 45^\circ)$$

$$\sin 30^\circ < \sin x \leq \sin 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1$$

نکته: در سؤالاتی که حدود نسبت مثلثاتی خواسته می‌شود، به هیچ عنوان از طرفین رابطه نسبت مثلثاتی نمی‌گیریم بلکه با رسم دایره، حدود نسبت مثلثاتی را پیدا می‌کنیم.

مثال: اگر $\frac{-\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9}$ باشد و $\cos 3\alpha = \frac{m-1}{2}$ ، حدود متغیر m را تعیین کنید.



$$-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\times 3} -\pi < 3\alpha < \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(-\pi) < \cos 3\alpha \leq \cos(0)$$

$$-1 < \cos 3\alpha \leq 1 \rightarrow -1 < \frac{m-1}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2}$$

$$-2 < m-1 \leq 2 \xrightarrow{+1} -1 < m \leq 3$$



$$\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha \right) \text{ نسبتهای مثلثاتی کمان‌های مرکب}$$

- مضارب زوج π حذف می شوند.

- مضارب فرد π ، به π تبدیل می شوند.

- مضارب زوج $\frac{\pi}{2}$ ، نقاط چپ و راست دایره مثلثاتی؛

- مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، نقاط بالا و پایین دایره مثلثاتی اند

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ را به عدد ۴ تقسیم می کنیم.

اگر باقیمانده ۱ شد، زاویه معادل $\frac{\pi}{۲}$ است و اگر باقیمانده ۳ شد زاویه معادل $\frac{۳\pi}{۲}$ است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\text{Cot}(-\alpha) = -\text{Cot} \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

کسینوس متقی خوار است

روش یافتن نسبتهای مثلثاتی یک زاویه

۱- اگر زاویه داده شده منفی باشد، در مورد نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی حذف شده و در مورد سه

نسبت مثلثاتی دیگر، منفی زاویه، به پشت نسبت مثلثاتی انتقال پیدا می کند.

$$\sin 120^\circ = \frac{120^\circ \text{ wgs}}{120^\circ}$$

۲- اگر زاویه داده شده بر حسب درجه بوده و مقدار آن از 360° درجه بیشتر باشد، عدد بزرگ داده شده را (120)

به 360° تقسیم می‌کنیم و به جای این عدد بزرگ، از باقیمانده تقسیم در محاسبات بهره می‌بریم. $\sin(27\pi) =$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right) = +\frac{\sqrt{\epsilon}}{\epsilon}$$

۳- اگر زاویه داده شده بر حسب رادیان بوده و مقدار آن از $2\pi \left(\frac{6\pi}{3}, \frac{8\pi}{4}, \frac{12\pi}{6}, \dots \right)$ بیشتر باشد، عدد

ضرب π در صورت کسر را بر دو برابر مخرج کسر تقسیم کرده و بجای مضرب π در صورت کسر، از

$$\sin(\alpha + \pi) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin(180^\circ - 90^\circ) = + \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}$

باقیمانده تقسیم بهره می‌بریم.

۴- در این مرحله ابتدا علامت نسبت خواسته شده را در ناحیه مورد نظر تعیین می‌کنیم.

۵- $2k\pi$ و $(2k+1)\pi$ (نقاط راست و چپ دایره مثلثاتی) نسبت مثلثاتی را عوض نمی کنند.

$\frac{\pi}{2}^{(k+1)}$ و $\frac{\pi}{2}^{(k+3)}$ (نقاط بالا و پایین دایره مثلثاتی) نسبت مثلثاتی را عوض می کنند.

$$\begin{cases} \sin x \Rightarrow \cos x \\ \cos x \Rightarrow \sin x \end{cases}, \begin{cases} \tan x \Rightarrow \cot x \\ \cot x \Rightarrow \tan x \end{cases}$$

۶- زاویه α را جلوی نسبت مورد نظر می نویسیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

عوض $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos\alpha$

عوض $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

عوض نمی‌شود $\tan(\pi + \alpha) = +\tan\alpha$

عوض $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{397\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = +\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(\frac{27\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

صفر $\sin(\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = +\tan\alpha$

مثال: حاصل عبارات زیر را بر حسب کمان 20° بیابید.



$\sin 160^\circ =$

$\cos 200^\circ =$

$\cos 250^\circ =$

$\cot 340^\circ =$

نکته: اگر مقادیر $\tan\alpha$ یا $\cot\alpha$ در صورت سؤال داده شود و حاصل جمع و تفریق $\sin^n\alpha$ و $\cos^n\alpha$ در صورت و مخرج کسر خواسته شود، به دو طریق زیر عمل می‌کنیم.

۱- اگر $\tan\alpha$ را داده باشند، صورت و مخرج کسر را بر $\cos^n\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

۲- اگر $\cot\alpha$ را داده باشند، صورت و مخرج کسر را بر $\sin^n\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

مثال: اگر $\tan x = 2$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ چند است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{5}{6}$

مثال: اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل $\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$ را بیابید.

مثال: اگر $\tan x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x - \sin^2 x}{4 \cos^2 x - 7 \sin^2 x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{8}$

(۲) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{7}{3}$

(۴) $\frac{3}{5}$

مثال: اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۵

(۴) $\frac{7}{3}$



مثال: اگر $\tan 35^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟

(۱) $a + 1$

(۲) $a - 1$

(۳) $2a$

(۴) $2a - 2$



مثال: حاصل $\sin 20^\circ + \sin 200^\circ + \sin 340^\circ + \sin 160^\circ$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\sin 20^\circ$

(۳) $2 \sin 20^\circ$

(۴) $\sin 40^\circ$



مثال: اگر $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟

(۴) $\frac{31}{16}$

(۳) $\frac{17}{8}$

(۲) $\frac{10}{8}$

(۱) $\frac{9}{4}$

مثال: اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \theta \right) - \cos (\pi + \theta)}{\sin (\pi - \theta) - \sin (3\pi + \theta)}$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) -۲

مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin (3\pi + \alpha) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) + \cos (\pi - \alpha)}$ کدام است؟

(۴) -۴

(۳) -۳

(۲) ۱

(۱) ۵



نکته زوایای منفی:

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}, \begin{cases} \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

مثال: از تساوی $\frac{2 \sin(\alpha - 3\pi) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = 2$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال: حاصل $\cos\left(\frac{-211\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-211\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۳) $\frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}$ (۴) $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$



مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) + 2\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{10}\right) \cdot \tan\left(\frac{21\pi}{10}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) -۴ (۴) -۱۴



نکته: اگر α و β دو زاویه‌ی متمم باشند؛ یعنی: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

نکته: اگر α و β دو زاویه‌ی مکمل باشند؛ یعنی: $\alpha + \beta = \pi$ ، آنگاه:

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = -\tan \beta \\ \cot \alpha = -\cot \beta \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{36} \right) + \cos^2 \left(\frac{5\pi}{36} \right) + \cos^2 \left(\frac{9\pi}{36} \right) + \cos^2 \left(\frac{13\pi}{36} \right) + \cos^2 \left(\frac{17\pi}{36} \right)$$

$\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۳) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

مثال: حاصل عبارت $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$ کدام است؟

۲ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۲) ۱ (۱)



مثال: اگر $x = 10^\circ$ باشد، حاصل $\frac{\sin 2x \cdot \tan 4x}{\cot 5x \cdot \cos 7x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال: حاصل عبارت $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \dots + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲



مثال: اگر $x = 10^\circ$ باشد، حاصل $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos 17x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲



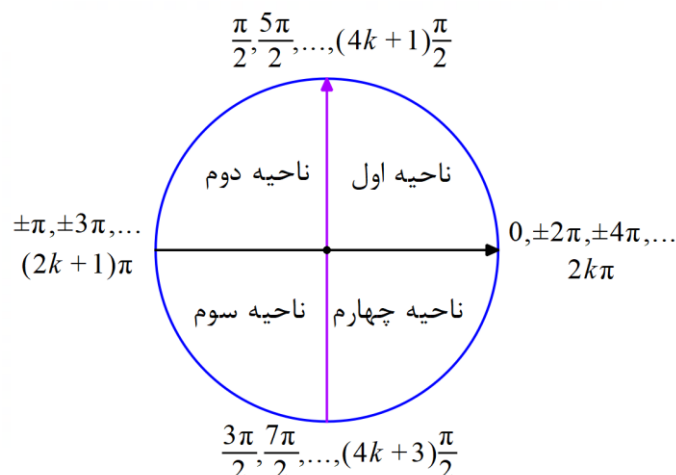
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$



مثال: حاصل عبارت $\sin^2 x \cdot \cos^2 x (2 + \tan^2 x + \cot^2 x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱ + $\sin^4 x$ (۴) ۱ + $\cos^4 x$ (۳)

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\tan \alpha$ (۱) $\cot \alpha$ (۲) -1 (۳)



مثال: حاصل عبارت $\tan^2 x + (1 + \tan^2 x)(\cos^4 x - \sin^4 x)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{\sin^2 x}$

(۴) $\frac{1}{\cos^2 x}$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) صفر



مثال: اگر انتهای کمان مقابل زاویه α در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}}$ کدام است؟

(۱) $-\cot \alpha$

(۲) $-\cos \alpha$

(۳) $\cot \alpha$

(۴) $\cos \alpha$



مثال: اگر $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan^3 x + \cot^3 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{22}{5}$

(۳) $\frac{622}{5}$

(۲) ۱۱۵

(۱) ۱۱۰

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{17}{81}$

(۳) $\frac{17}{27}$

(۲) $\frac{13}{81}$

(۱) $\frac{13}{27}$



مثال: اگر $\tan \theta = 2$ باشد، حاصل $\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta + \sin \theta}$ کدام است؟

(۴) $\frac{5}{18}$

(۳) $\frac{5}{9}$

(۲) $\frac{2}{9}$

(۱) $\frac{1}{3}$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $(\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



روابط مجموع و تفاضل دو کمان

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}$$

مثال: اگر $\cot \alpha = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5}$ (۴)

-5 (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

5 (۱)

مثال: حاصل عبارت $\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ}$ را بیابید.

مثال: اگر $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) ۲

(۱) ۱



مثال: اگر $\tan x = \frac{-1}{2}$ باشد و $\cos x < 0$ ، حاصل $\sin x$ کدام است؟

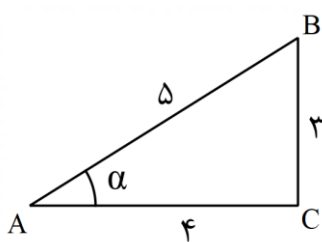
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

اعداد فیثاغورسی معروف

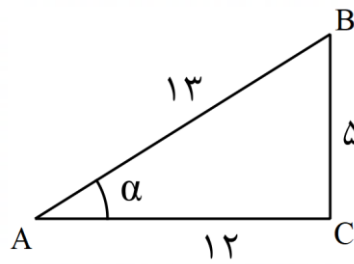


$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3}$$

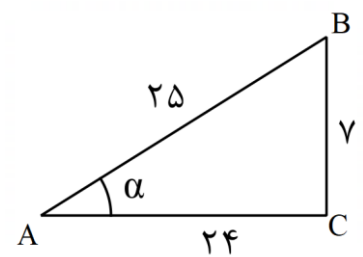


$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\cot \alpha = \frac{12}{5}$$



$$\sin \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\tan \alpha = \frac{7}{24}$$

$$\cot \alpha = \frac{24}{7}$$

روابط کمان 2α

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

روابط کمان 2α از روی مقدار $\tan \alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

فرمولهای طلایی مثلثات: تبدیل کمان 2α به α

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \\ \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \end{cases}$$

روابط کمان 3α

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \\ \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \\ \cot 3\alpha = \cot \alpha \cdot \cot(60^\circ - \alpha) \cdot \cot(60^\circ + \alpha) \end{cases}$$

نکته:

$$\begin{cases} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $8 \cos^{-2} 2\alpha$ (۲) $8 \sin^{-2} 2\alpha$ (۳) $16 \cos^{-2} 2\alpha$ (۴) $16 \sin^{-2} 2\alpha$

مثال: حاصل عبارت $\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{32}$

مثال: اگر $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x + \cos x$ باشد، حاصل $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$



مثال: اگر $\cos x + 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 0$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{4}{5}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{3}{5}$

مثال: حاصل عبارت $\sin 195^\circ \times \sin 105^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) 4 (۴) -4



مثال: حاصل عبارت $\left(\sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \right)^2$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) -2 (۴) 2



مثال: اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{4}{25}$

(۲) $-\frac{8}{25}$

(۳) $-\frac{16}{25}$

(۴) $-\frac{24}{25}$

مثال: اگر $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan 4x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(۲) $\pm \frac{3}{\sqrt{7}}$

(۳) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$

(۴) $2 \cos x$



مثال: حاصل عبارت $\cos 2x + \frac{-1}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

(۱) $\cos^2 x$

(۲) ۱

(۳) $\sin^2 x$

(۴) -۱

مثال: اگر $x = \frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $-\sqrt{3}$

(۴) ۱



مثال: حاصل عبارت $\frac{\cos 2x + 3\cos x + 1}{3\sin x + \sin 2x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} \cos x$

(۲) $\cot x$

(۳) $\frac{\cos 2x}{\sin x}$

(۴) $\cot 2x$

مثال: اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد، حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) ۲

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



مثال: حاصل عبارت $\frac{2 \sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{2 \sin 20^\circ + \sin 40^\circ}$ کدام است؟

$\tan 20^\circ$ (۴)

$\tan^2 20^\circ$ (۳)

$\tan 10^\circ$ (۲)

$\tan^2 10^\circ$ (۱)

مثال: اگر $x = \frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{\tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۱)



مثال: اگر $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$2/5$ (۴)

$2/4$ (۳)

$1/8$ (۲)

$1/5$ (۱)

مثال: اگر $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\tan x$ کدام است؟

(۱) - ۳

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) $-\frac{4}{3}$

(۴) - ۴



مثال: اگر $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 2 \sin x$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ بوده و زاویه α منفرجه باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{24}{7}$

(۲) $-\frac{7}{24}$

(۳) - ۲

(۴) $-\frac{1}{2}$



مثال: اگر $\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\cot 2x$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ}$ کدام است؟

-1 (۴)

1 (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

مثال: حاصل عبارت $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ کدام است؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

مثال: حاصل عبارت $\left[\tan \frac{\pi}{5} \right] + \left[\tan \frac{4\pi}{5} \right]$ کدام است؟

-2 (۴)

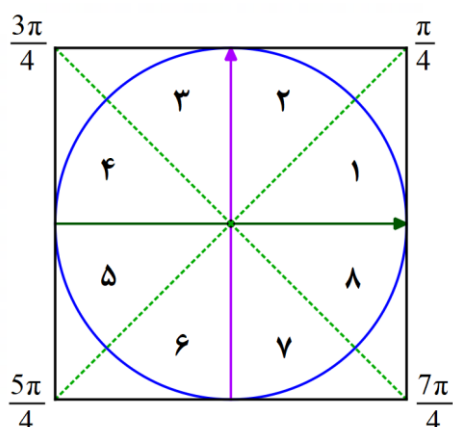
-1 (۳)

1 (۲)

(۱) صفر



مقایسه مقادیر نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



منطقه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
ناحیه مثلثاتی	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	
$\sin \alpha > \cos \alpha$								
$\sin \alpha < \cos \alpha$								
$\tan \alpha > \cot \alpha$								
$\tan \alpha < \cot \alpha$								

نکته: در تمامی نیمسازهای ۴ ناحیه دایره مثلثاتی $|\sin \theta|$ و $|\cos \theta|$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

نکته: در تمامی نیمسازهای ۴ ناحیه دایره مثلثاتی $|\tan \theta|$ و $|\cot \theta|$ برابر ۱ است.

مثال: اگر $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ کدام است؟

- (۱) $2 \cos x$ (۲) $-2 \cos x$ (۳) $2 \sin x$ (۴) $-2 \sin x$

مثال: اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}}$ کدام است؟

- (۱) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ (۲) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (۳) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (۴) ۱



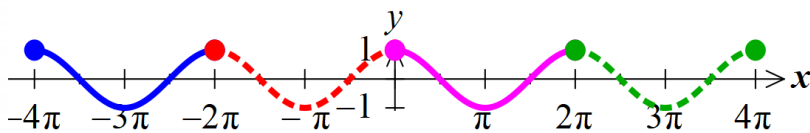
دوره تناوب

توابعی مانند $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را که دامنه آنها $\mathbb{R}$ و برد آنها $[-1, 1]$ است در نظر می‌گیریم. می‌دانیم اگر به x ، مضرب صحیحی از 2π (یعنی $2k\pi$ یا به عبارت دیگر $\dots, \pm 4\pi, \pm 2\pi, 0$) را اضافه کنیم، مقدار $\sin x$ با $\sin(2k\pi + x)$ و مقدار $\cos x$ با $\cos(2k\pi + x)$ برابرند؛ یعنی:

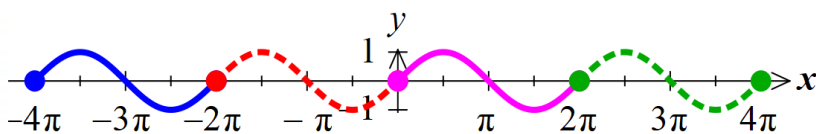
$$\begin{cases} \sin(2k\pi + x) = \sin x \\ \cos(2k\pi + x) = \cos x \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

نمودار این گونه توابع در بازه‌های 2π ، تکرار می‌شود. اگر در تابعی نمودار تابع در بازه‌هایی تکرار شود، آن تابع را متناوب می‌نامیم. کوچکترین عدد مثبتی که طول بازه تکرار است را دوره تناوب می‌نامیم و آن را با T نمایش می‌دهیم.

$$y = \cos x$$



$$y = \sin x$$



تابع متناوب: تابع $f(x)$ را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی مثبت T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ و $x \pm T \in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

دوره تناوب: کوچکترین مقدار T که رابطه $f(x \pm T) = f(x)$ را برقرار کند، دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌نامیم.

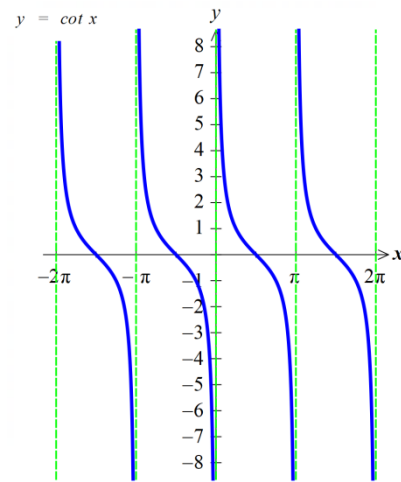
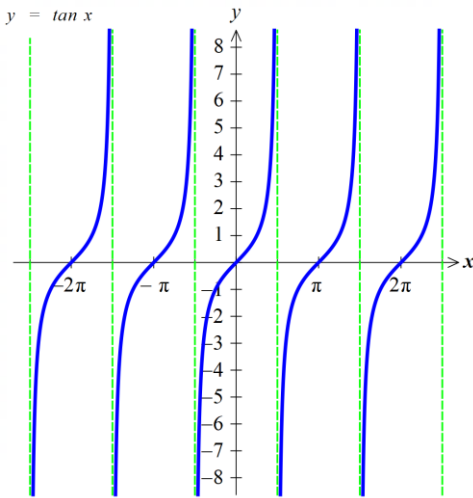
دوره تناوب در توابع مثلثاتی

$$\begin{cases} y = a \sin(bx + k) + c \\ y = a \cos(bx + k) + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

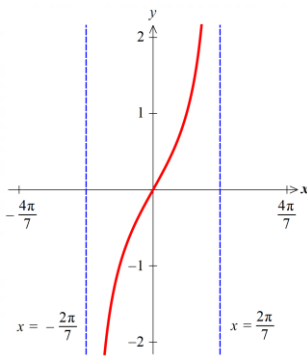
$$\begin{cases} y = a \tan(bx + k) + c \\ y = a \cot(bx + k) + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

نکته: تنها عامل مؤثر در دوره تناوب توابع مثلثاتی، ضریب x موجود در کمان تابع مثلثاتی (b) است و اعداد a ، c و k روی دوره تناوب بی‌تأثیر هستند.

نکته: دامنه تابع متناوب الزاماً $\mathbb{R}$ نیست. مثلاً تابع $y = \tan x$ ، $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \pm (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ است. نمودار توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$ به صورت زیر هستند.



مثال: قسمتی از شکل تابع $y = \tan ax$ به صورت زیر است. مقدار a را بیابید.



نکته: دوره تناوب دو تابع باید هم جنس باشد؛ یعنی اگر دوره تناوب بخشی از تابع ضربی از π یا هر عدد گنگ دیگری مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، ... باشد و دوره تناوب بخش دیگری از تابع، عددی گویا باشد، این تابع در کل نمی تواند متناوب باشد.

نکته: اگر T_f دوره تناوب تابع $f(x)$ و T_g دوره تناوب تابع $g(x)$ باشد، آنگاه ک.م.م T_f و T_g یک دوره تناوب برای $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ خواهد بود ولی الزاماً کوچکترین دوره تناوب نیست.

در نکته فوق، شرط این که توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ متناوب باشند، این است که $\frac{T_f}{T_g}$ مقداری گویا باشد.

نکته: یک راه ساده برای پیدا کردن ک.م.م چند عبارت کسری این است که ک.م.م صورت کسرها را به ب.م.م مخرج کسرها تقسیم کنیم.

مثال: برای هر یک از توابع زیر، یک دوره تناوب (نه الزاماً کوچکترین دوره تناوب) را در صورت وجود بیابید.

$$۱) y = \sin x + \cos 2x + \tan 3x + \cot 4x$$

$$۲) y = \sin 5x \cos 9x + 2$$



$$۳) y = \sin 2x + \cos \sqrt{2} (x+1)$$

$$۴) y = \cos \pi x + \tan x$$

$$۵) y = \pi \cot \pi x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{5} \right)$$

نکته: اگر x در کمان مثلثاتی، توانی جز عدد یک داشته باشد، تابع متناوب نیست.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را تعیین نمایید.

$$f(x) = \sin (x^2 + 1)$$

$$g(x) = \cos (3x^2 - 5x)$$

$$h(x) = \tan (\pi x^3 - x)$$

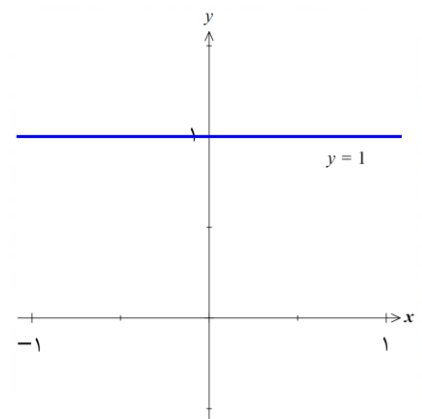
مثال: تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ از نظر متناوب بودن چگونه است؟

- ۱- متناوب است اما کوچکترین دوره تناوب ندارد.
- ۲- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.
- ۳- متناوب نیست
- ۴- متناوب است و کوچکترین دوره تناوب آن π است.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan x \cdot \cot x$ را بیابید.



نکته: توابع ثابت متناوب می باشند ولی دوره تناوب اصلی ندارند.

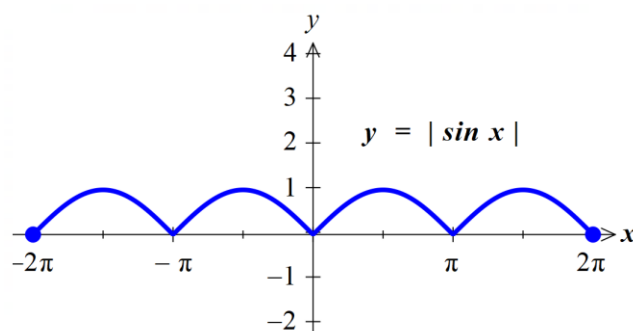
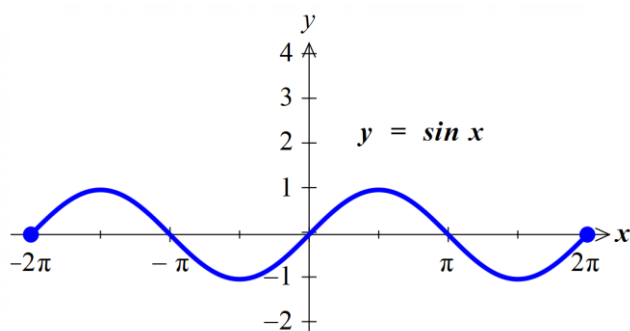


نکته: توان‌های فرد، دوره تناوب توابع $\sin x$ و $\cos x$ را تغییر نمی‌دهند.

$$\begin{cases} y = \sin x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} \\ y = \sin^3 x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} \end{cases}$$

نکته: توان‌های زوج و قدرمطلق، دوره تناوب توابع $\sin x$ و $\cos x$ را نصف می‌کنند.

$$\begin{cases} y = \sin^{2n}(ax) \\ y = \cos^{2n}(ax) \\ y = |\sin(ax)| \\ y = |\cos(ax)| \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$



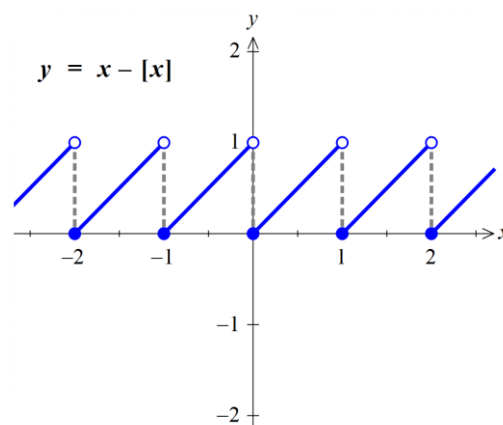
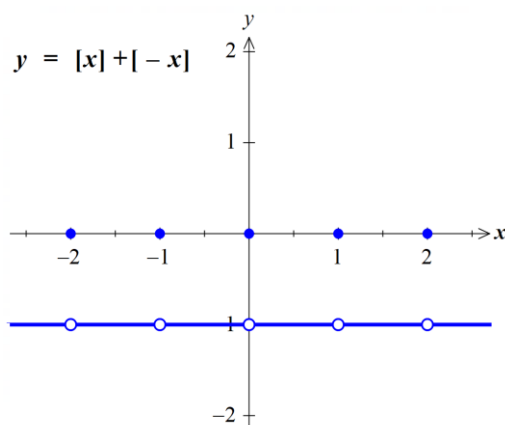
نکته: توابع $\tan x$ و $\cot x$ به هر توانی برسند (چه زوج، چه فرد) دوره تناوب آنها تغییر نمی‌کند و قدرمطلق نیز روی دوره تناوب آنها بی‌تأثیر است.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $y = |\cos 3x| + \left| \tan^2 \frac{x}{3} \right| + 3\cos^3 x$ را بیابید.

دوره تناوب توابع غیر مثلثاتی

$$\begin{cases} y = ax - [ax] \\ y = [ax] + [-ax] \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$y = (-1)^{[ax+b]} \Rightarrow T = \frac{2}{|a|}$$



یافتن دوره تناوب اصلی:

از آنجایی که برای توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ مقدار $[T_f, T_g]$ یک دوره تناوب بوده ولی لزوماً دوره تناوب اصلی نمی باشد، ابتدا یک دوره تناوب تابع را از فرمول های گفته شده یافته و سپس نصف این دوره تناوب را به روشی که در زیر توضیح داده می شود، بررسی می کنیم تا مشخص شود که اگر T دوره تناوب است، آیا $\frac{T}{2}$ هم دوره تناوب است یا خیر.

اگر $\frac{T}{2}$ دوره تناوب نبود، T را به عنوان دوره تناوب اصلی تابع معرفی می کنیم ولی اگر $\frac{T}{2}$ هم دوره تناوب تابع بود، باز هم تناوب را نصف می کنیم و $\frac{T}{4}$ را امتحان می کنیم و این کار (نصف کردن دوره تناوب) را تا جایی ادامه می دهیم که عدد نصف شده دوره تناوب تابع نباشد.

روش بررسی $\frac{T}{2}$ به عنوان دوره تناوب:

مقدار x را به $x + \frac{T}{2}$ تبدیل کرده و در تابع، جایگذاری می کنیم. اگر با عملیات جبری مشخص گردید که رابطه $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$ برقرار است، $\frac{T}{2}$ نیز دوره تناوب تابع $f(x)$ است و در غیر این صورت دوره تناوب را T در نظر می گیریم.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 3 \left[\frac{x}{3} \right] - x$$

$$g(x) = 6 \left[\frac{x}{6} \right] - 8 \left[\frac{x}{8} \right]$$



$$h(x) = 15x - [9x] - [6x]$$

نکته (مطالعه آزاد): در یافتن دوره تناوب تابع $f \circ g(x)$ ، اگر $g(x)$ متناوب نباشد، $f \circ g(x)$ نیز متناوب نخواهد بود و برای حدس اولیه T_g را انتخاب کرده و سپس $\frac{T_g}{2}$ و ... را بررسی می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = \cos(\sin ax)$$



$$y = \sin(\cos ax)$$



$$y = \sin^{\frac{1}{n}}(ax)$$



$$y = \cos^{\frac{1}{n+1}}(ax)$$



$$y = \sin^{\frac{1}{n}}(ax) + \cos^{\frac{1}{n}}(ax)$$



نکته: برای تعیین دوره تناوب، ابتدا تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{3} \cos x}{\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{5} \sin x}$$

$$y = \cot ax - \tan ax$$

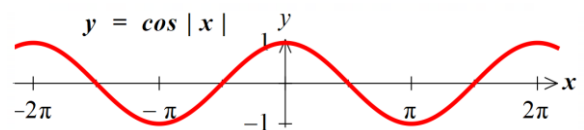
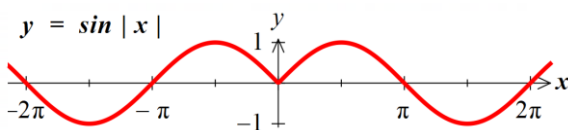
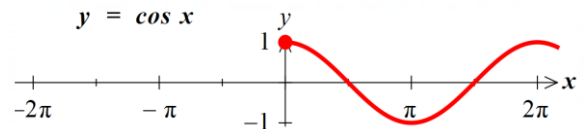
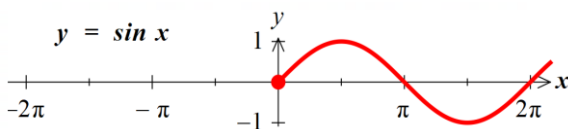
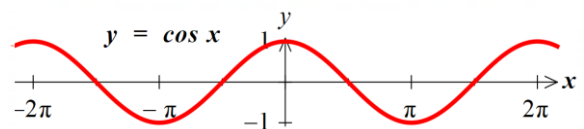
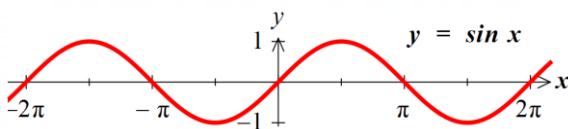


$$y = \left(-1\right)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x$$

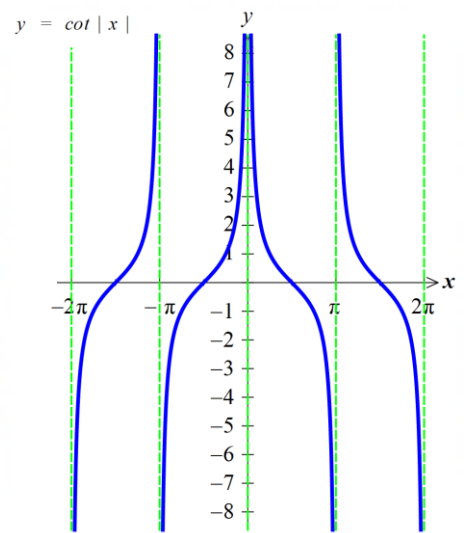
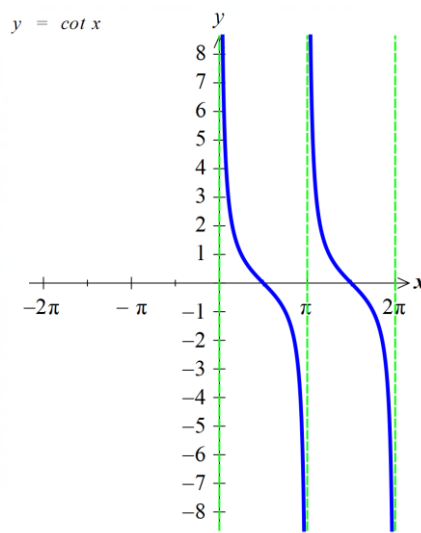
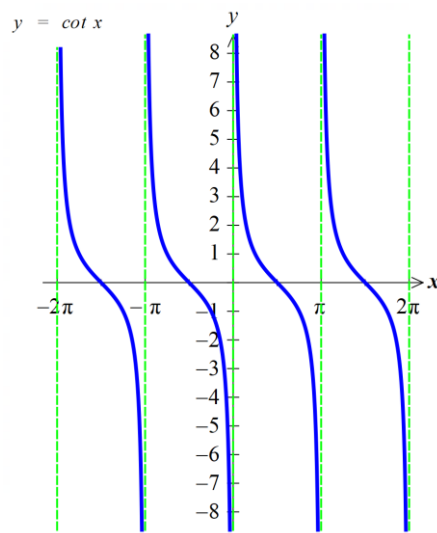
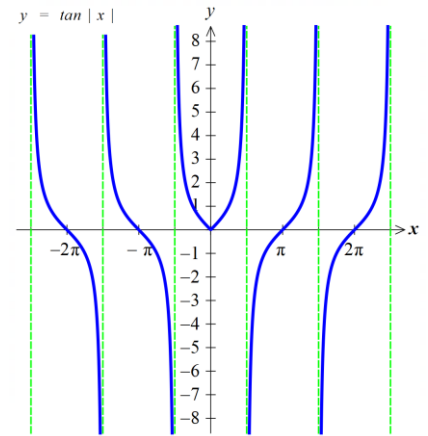
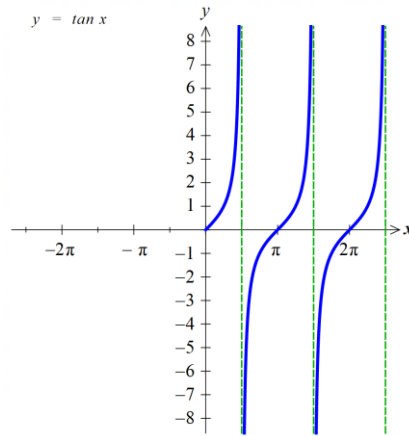
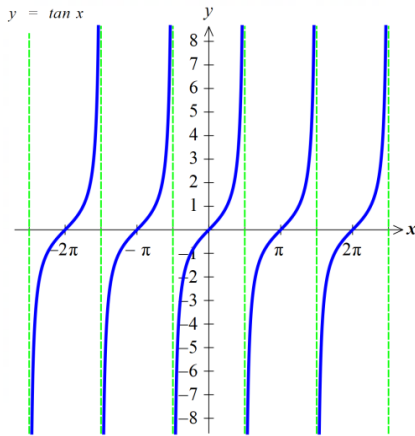


$$y = |\sin ax| + |\cos ax|$$

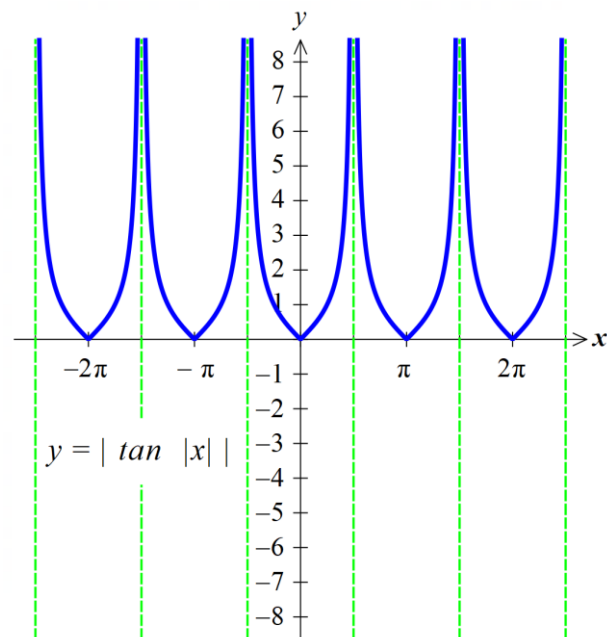
مثال: دوره تناوب توابع $y = \sin |x|$ و $y = \cos |x|$ زیر را تعیین کنید.



مثال: دوره تناوب توابع $y = \tan |x|$ و $y = \cot |ax|$ را بیابید.



مثال: دوره تناوب توابع $y = |\tan |x||$ را بیابید.



مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ را بیابید.

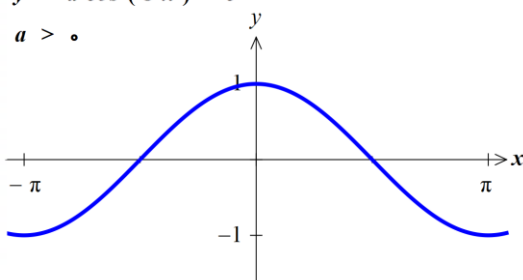
مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \tan 3x - \cot 3x$ را بیابید.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = 3x - [3x] + \cos^4 \pi x$ را بیابید.

یافتن ضابطه توابع مثلثاتی از روی نمودار آن

$$y = a \cos(bx) + c$$

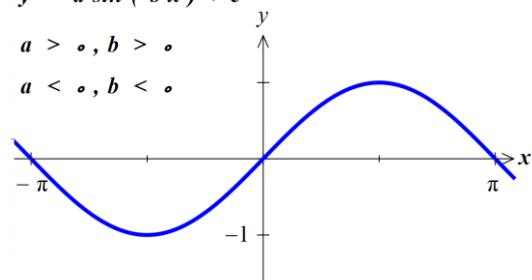
$$a > 0$$



$$y = a \sin(bx) + c$$

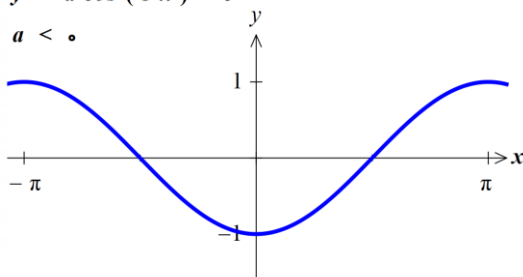
$$a > 0, b > 0$$

$$a < 0, b < 0$$



$$y = a \cos(bx) + c$$

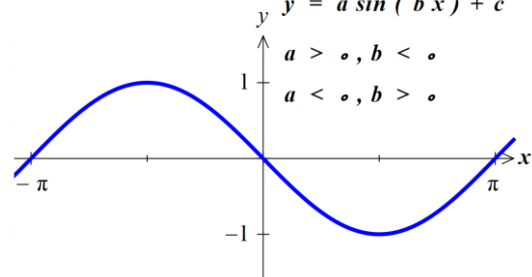
$$a < 0$$



$$y = a \sin(bx) + c$$

$$a > 0, b < 0$$

$$a < 0, b > 0$$



نکته: تابع $y = \cos x$ در $x = 0$ ماکزیمم یا مینیمم دارد در صورتی که تابع $y = \sin x$ در $x = 0$ ماکزیمم یا مینیمم ندارد.

از روی نمودار می‌توانیم مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع را تعیین کرده و از روی آن‌ها با توجه به فرمول‌های زیر، ضرایب a ، b و c را بدست آوریم.

$$|a| = \frac{\max - \min}{2}$$

$$c = \frac{\max + \min}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

نکته: برای یافتن مقادیر $\max$ و $\min$ از روی ضرایب a ، b و c ، از فرمول‌های زیر بهره می‌بریم.

$$\max = c + |a|$$

$$\min = c - |a|$$

مثال: مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع $y = -2 \sin 3x - 7$ را بیابید.

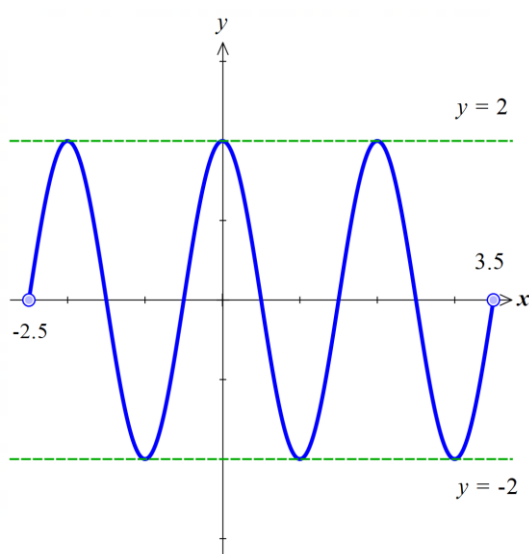
مثال: شکل مقابل مربوط به تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{1}{2} + bx\right)\pi$ است. $a \cdot b$ کدام است؟

۴ (۴)

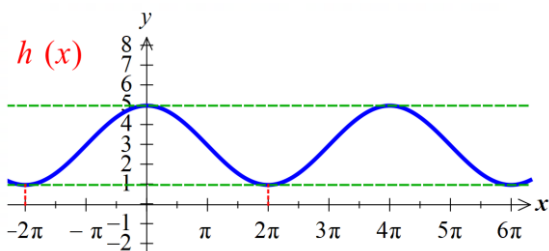
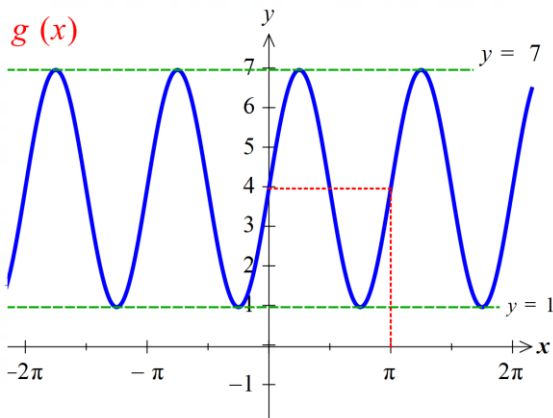
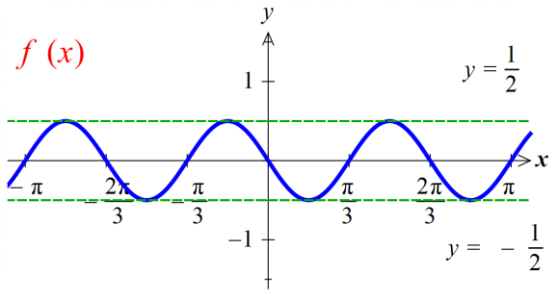
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: ضابطه توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ که نمودار آنها رسم شده است را بیابید.

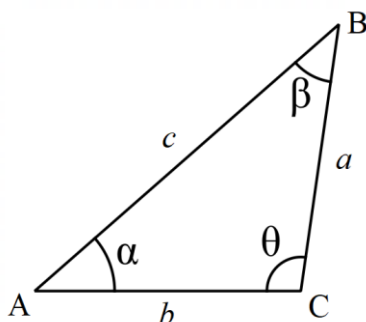


کاربردهایی از مثلثات

۱- قضیه سینوس‌ها

مقدار اندازه هر ضلع تقسیم بر سینوس زاویه مقابل آن، مقداری ثابت است.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta}$$



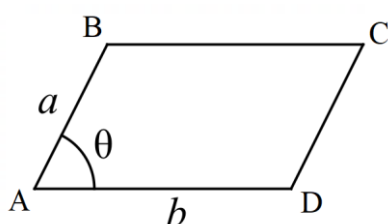
۲- قضیه سینوس‌ها

کاربرد: یافتن اندازه ضلع سوم مثلث

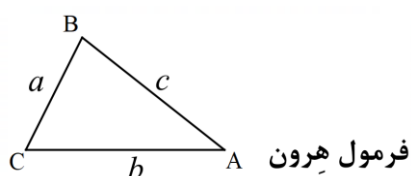
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{cases}$$

۳- مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع

مساحت متوازی‌الاضلاع مقابل برابر است با: $S = a b \sin \theta$



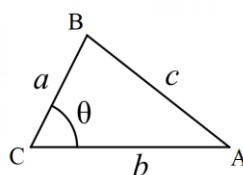
مساحت مثلث را در سه حالت می‌توانیم تعیین کنیم.



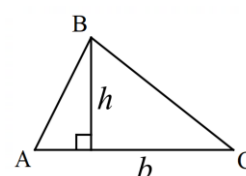
فرمول هرون

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2}$$



$$S = \frac{a b \sin \theta}{2}$$



$$S = \frac{b h}{2}$$

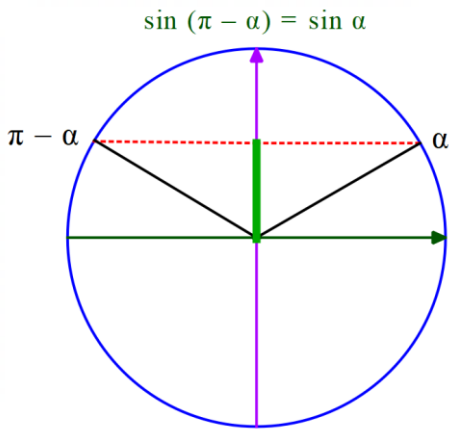
مثال: مساحت مثلثی به اضلاع ۹، ۱۲ و ۷ واحد را بیابید.

مثال: در مثلث ABC اگر $\hat{B} = 30^\circ$ و $\hat{C} = 120^\circ$ و اندازه ضلع AB برابر $3\sqrt{3}$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

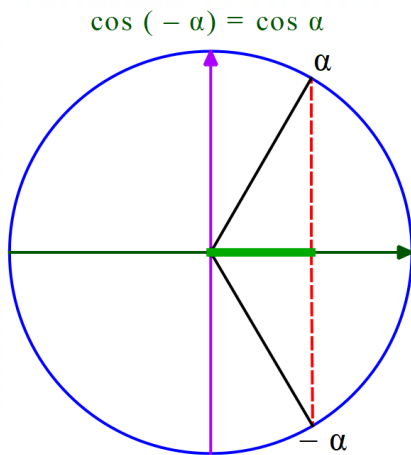
مثال: در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 60^\circ$ و اندازه اضلاع AB و AC به ترتیب 4 و 5 واحد باشد، اندازه ضلع BC را بیابید.

مثال: اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع 12 و 15 سانتی‌متر و اندازه یک زاویه آن 150° است. مساحت متوازی‌الاضلاع را بیابید.

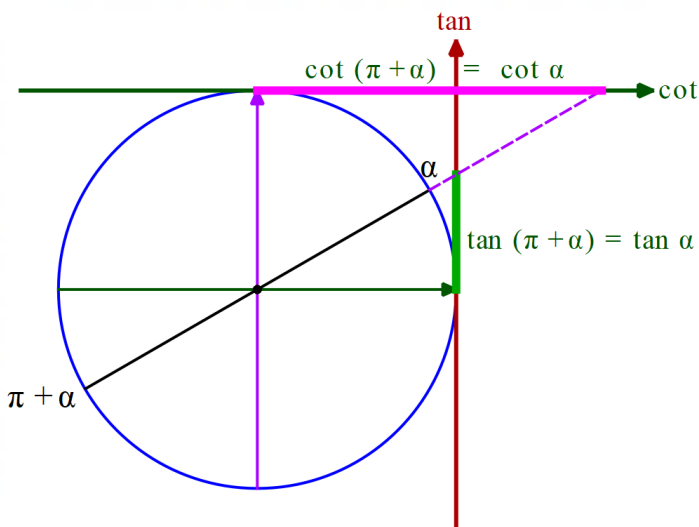
معادلات مثلثاتی



$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

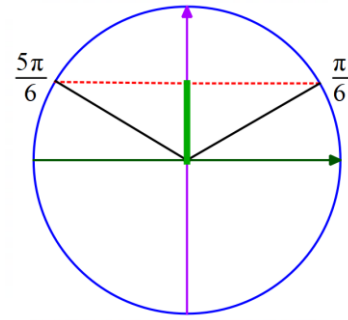


$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

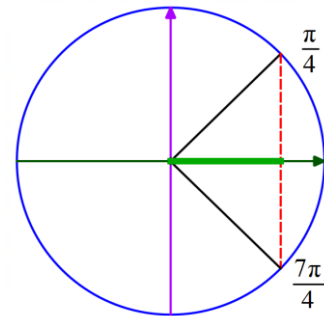


$$\begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow \{ x = k\pi + \alpha \}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.



مثال: معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.



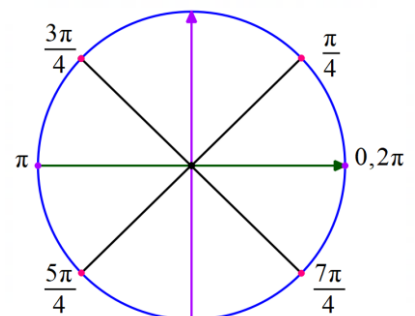
مثال: کدام گزینه بخشی از جواب معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin x$ است؟

(۴) $\frac{(2k+1)\pi}{2}$

(۳) $\frac{(2k+1)\pi}{4}$

(۲) $\frac{k\pi}{4}$

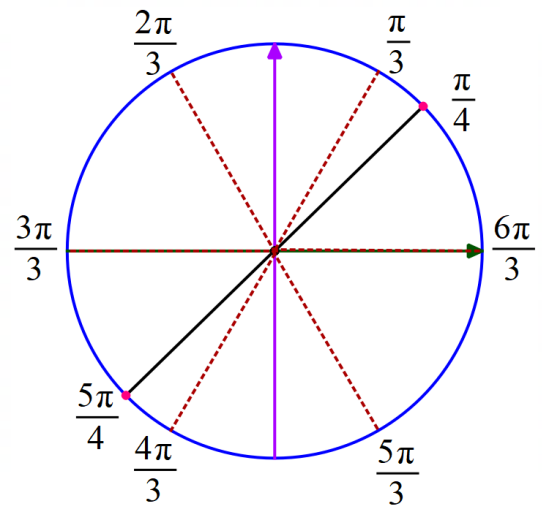
(۱) $\frac{k\pi}{2}$



نکته: در معادلات مثلثاتی باید جنس تابع مثلثاتی طرفین تساوی با هم یکسان باشد.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha \end{cases}$$

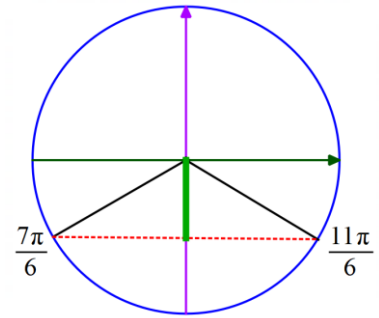
مثال: جوابهای معادله مثلثاتی $\sin 4x = \cos 2x$ را که در بازه $[0, 4\pi]$ می باشند بیابید.



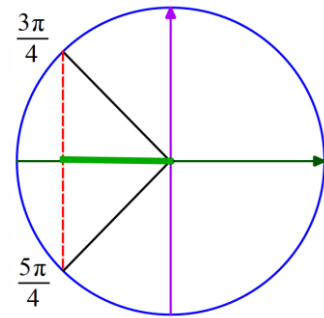
نکته: اگر در معادلات مثلثاتی، عددی که با نسبتهای مثلثاتی برابر است، منفی باشد، به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} \sin x = a & \frac{\sin \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \tan x = a & \frac{\tan \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \cot x = a & \frac{\cot \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow -\alpha \\ \cos x = a & \frac{\cos \alpha = |a|}{a < 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha \rightarrow \pi - \alpha \end{cases}$$

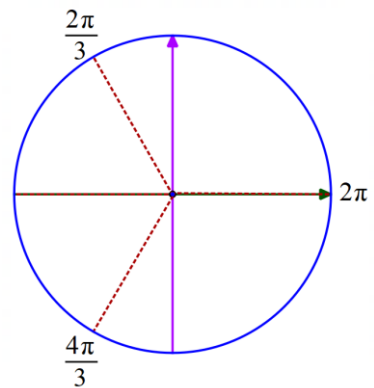
مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.



مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

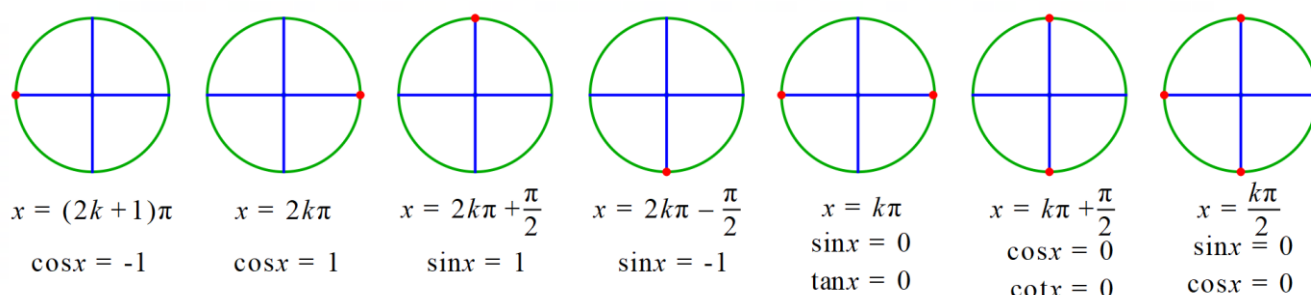
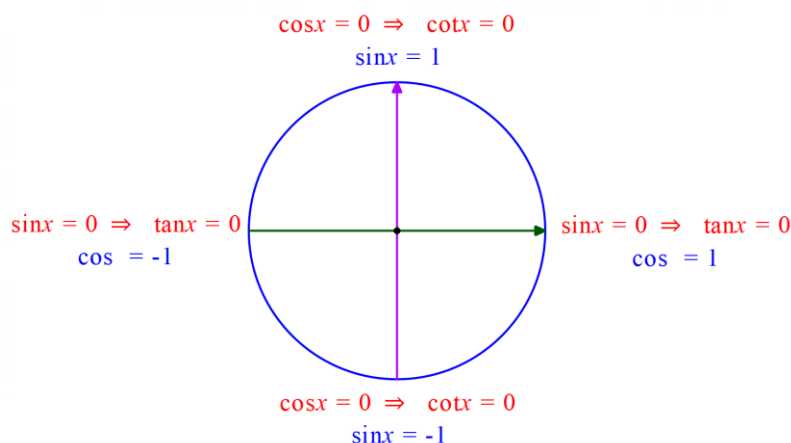


مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x = \frac{-1}{2}$ را حل کنید.

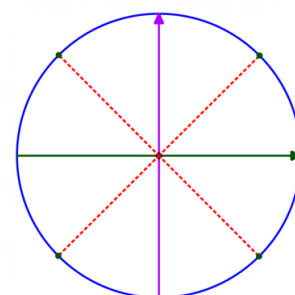


حالات خاص معادلات مثلثاتی

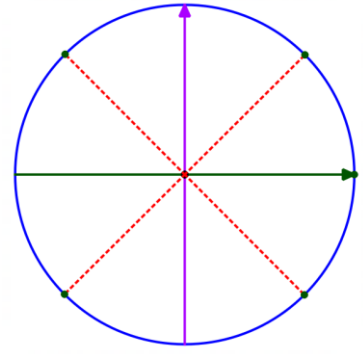
در معادلات مثلثاتی، حالاتی را که نسبت‌های $\sin x$ و $\cos x$ برابر با اعداد صفر، ۱ یا -۱ شوند و یا اینکه نسبت‌های توابع $\tan x$ و $\cot x$ برابر با عدد صفر شوند، حالات خاص می‌نامیم که در این حالت جواب‌های معادلات مثلثاتی، از بین نقاط مرزی چهار ناحیه دایره مثلثاتی خواهند بود. در نتیجه برای ۷ حالت خاص زیر می‌توانیم فرمول‌های زیر را تعریف کنیم.



مثال: معادله مثلثاتی $\cos 4x = 0$ را حل کنید.



مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = 2 \cos 2x$ چند جواب در فاصلهٔ $[-\pi, 3\pi]$ دارد؟



مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\tan 3x \cdot \tan 4x = 1$ را حل کنید.

مثال: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



مثال: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ به کدام صورت است؟

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

(۲) $2k\pi + \pi$

(۱) $k\pi$

مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cot x + \tan x = 2$ را حل کنید.



مثال: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ به کدام صورت است؟

صورت است؟

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۲) $2k\pi + \pi$

(۱) $k\pi$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

(۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

مثال: معادله مثلثاتی $(3 \sin x - \sqrt{5})(2 \cos x - \sqrt{7}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

