



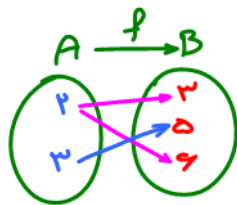
کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده





تابع

تعریف رابطه

مجموعه‌ای از تعدادی زوج مرتب را رابطه می‌نامند.

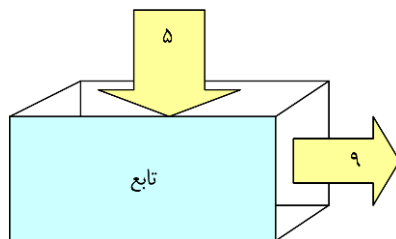
$$R = \{ (2, 3), (3, 5), (2, 6) \}$$

تابع نیست

تعریف تابع

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نظیر می‌شود (نه بیشتر و نه کمتر)

مثال: دستگاه زیر هر عضو مجموعه $A = \{ 3, 5, 6, 7, 1 \}$ را ابتدا دو برابر کرده و سپس یک واحد از حاصل به دست آمده کم می‌کند.

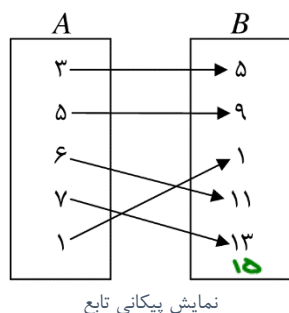


مجموعه خروجی‌های دستگاه عبارت است از:

$$B = \{ 5, 9, 11, 13, 1 \}$$

چون این رابطه هر عضو A را فقط به یک عضو از مجموعه B نسبت می‌دهد، پس این رابطه، یک تابع است. این تابع را به شکل‌های مختلفی نمایش می‌دهند.

الف: نمایش تابع به شکل پیکانی



نمایش پیکانی تابع

ب: نمایش تابع به شکل زوج‌های مرتب

$$\{ (3, 5), (5, 9), (6, 1), (7, 11), (1, 13) \}$$

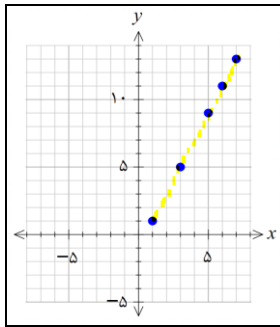
ج: نمایش تابع به شکل جدول

x	3	5	6	7	1
y	5	9	11	13	1

د: نمایش تابع به شکل ضابطه

چون مقدار y برابر $2x - 1$ است، پس داریم: $y = 2x - 1$

ه: نمایش تابع به شکل مختصات دکارتی



$$y = 3x - 1$$

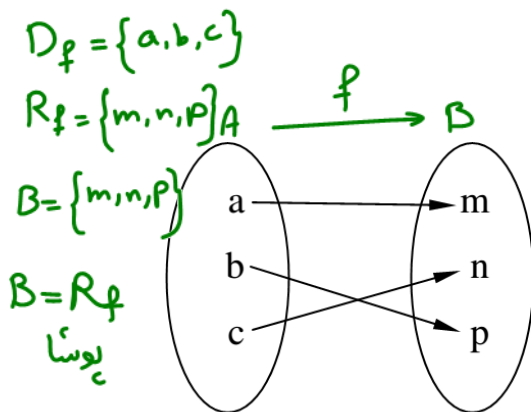
نمایش دکارتی تابع

تعریف تابع (نمودار ون): یک رابطه به صورت نمودار ون زمانی تابع می‌باشد که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

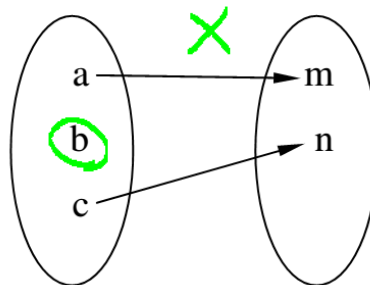
نکته: نیاز نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو از مجموعه B اصلاً پیکانی وارد نشده، یک پیکان وارد شود و یا اینکه بیش از یک پیکان وارد شود. مجموعه A را دامنه و B را هم‌دامنه (مقصد) تابع می‌نامیم. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه آن است و مجموعه‌ی اعضای را شامل می‌شود که به آن‌ها پیکان وارد شده باشد.

نکته: در حالت کلی برد تابع همواره زیرمجموعه هم‌دامنه آن است. یعنی $R_f \subseteq B$ و در حالتی که $R_f = B$ باشد، گویند تابع پوشا می‌باشند.

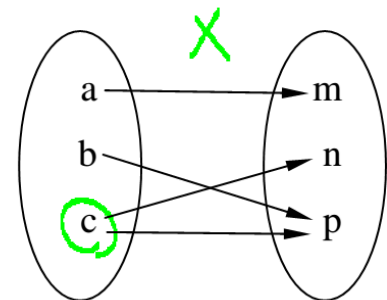
تمرین: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟



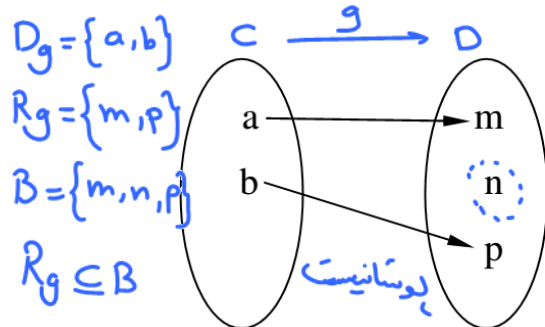
(۱)



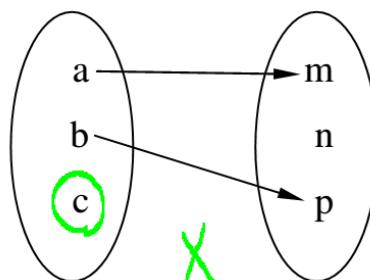
(۲)



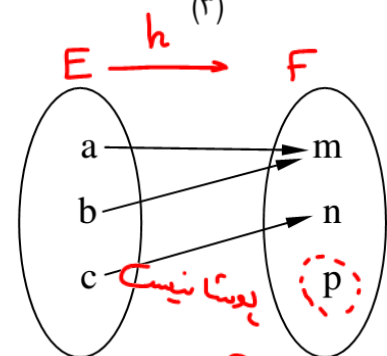
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

$D_h = \{a, b, c\}$
 $B = \{m, n, p\}$
 $R_h = \{m, n\}$

تعریف زوج مرتبی تابع:

رابطه‌ای را که مؤلفه‌های اول تکراری نداشته باشد، یعنی به ازای هر x فقط یک y داشته باشد، را تابع می‌گویند و یا اینکه اگر مؤلفه‌های اول تکراری دارد، الزاماً مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

مثال: اگر رابطه $f = \{(-1, m^2 - 3), (-1, 1), (2m, 3), (4, 6)\}$ تابع باشد، مقدار m را بیابید.

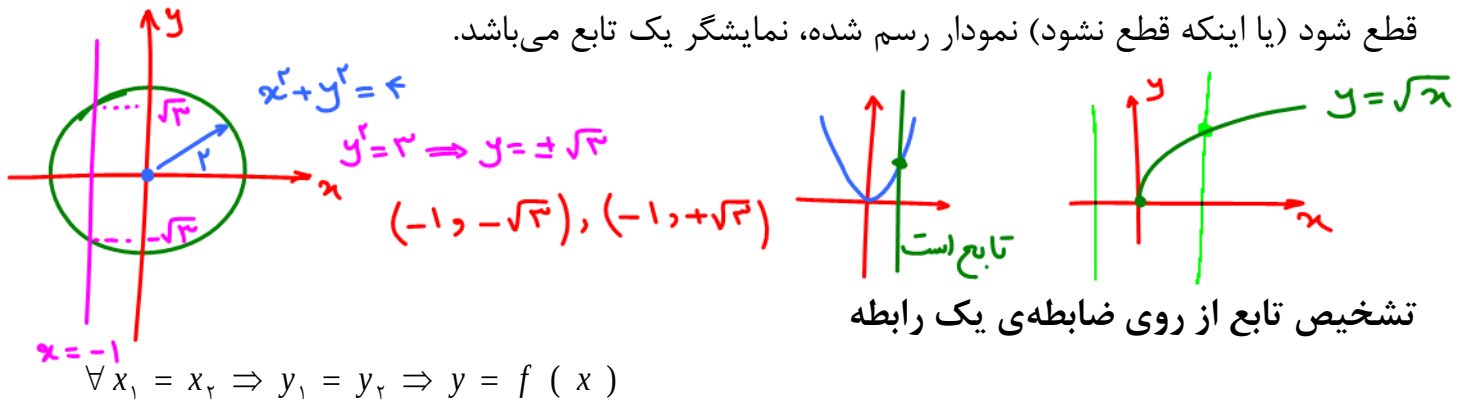
$$m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$\times m = 2 \Rightarrow (2m, 3) = (4, 3) \neq (4, 6)$$

$$\boxed{m = -2} \Rightarrow (2m, 3) = (-4, 3)$$

تعریف تابع از روی نمودار: اگر به ازای هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع f حداکثر در یک نقطه

قطع شود (یا اینکه قطع نشود) نمودار رسم شده، نمایشگر یک تابع می‌باشد.



توجه: در تابع به ازای هر ورودی (x)، فقط یک خروجی (y) داریم.

نکته: در برخی از موارد می‌توان با مثال نقض، تشخیص داد که یک رابطه تابع نیست.

مثال: کدام یک از روابط زیر نمایش دهنده یک تابع می‌باشد؟

$$[y] = x \xrightarrow{x=2} [y]=2 \Rightarrow 2 \leq y < 3 \text{ تابع نیست}$$

$$\sin y = \sqrt{x} \xrightarrow{x=0} \sin y = 0 \Rightarrow \{y = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ تابع نیست}$$

$$y^4 = x^3 \xrightarrow{x=1} \sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{1} \rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad (1, -1), (1, +1) \text{ تابع نیست}$$

$$|y| = x^4 \xrightarrow{x=2} |y| = 16 \rightarrow y = \pm 16 \quad (2, -16), (2, +16) \text{ تابع نیست}$$

$$y^3 - y = x^2 \xrightarrow{x=0} y(y^2 - 1) = 0 \rightarrow (y)(y+1)(y-1) = 0 \text{ تابع نیست}$$

$y=0 \quad y=-1 \quad y=+1$

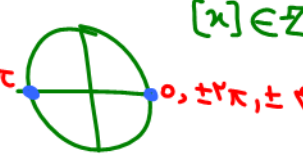
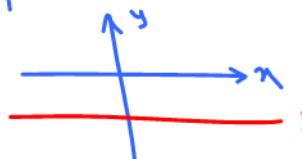
نکته: هر رابطه به صورت $f(x) = a_1 y^1 + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots + a_n y^n$ با ضرایب مثبت ($a_i > 0$) تابع است.

$$y^4 = \sqrt{x} \quad , \quad y^5 + 3y = \sin x \quad , \quad y^3 + y = x$$

نکته: اگر y درون قدرمطلق باشد، تابع نیست مگر آن که عبارت ساده شده و قدرمطلق از بین برود.

مثال: کدام عبارت زیر تابع است؟

$$|y+1| = x \xrightarrow{x=1} |y+1|=1 \Rightarrow y+1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y+1=1 \\ y+1=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad (1,0), (1,-2)$$

$$|y+1| = \sin \pi[x] \xrightarrow[\substack{x \in \mathbb{R} \\ [x] \in \mathbb{Z}}]{\text{صفر}} |y+1|=0 \rightarrow y+1=0 \rightarrow y=-1, x \in \mathbb{R}$$



مقدار تابع: اگر $(a, b) \in f(x)$ باشد، در این صورت $f(a) = b$ بوده و گوییم مقدار تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر با b است.

مثال: اگر $-f\left(\frac{x-1}{2}\right) + x = f(2)$ باشد، حاصل $f(3)$ را بیابید.

$$-f\left(\frac{x-1}{2}\right) + x = f(2) \quad \text{یا} \quad \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x=5$$

$$\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5$$

$$-f(2) + 5 = f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}$$

$$5 - \frac{5}{2} = f(3) \Rightarrow f(3) = \frac{5}{2}$$

مثال: اگر $f(x) + x f(2) = x^2 + 5$ باشد، حاصل $f(1)$ را بیابید.

$$f(2) + 2f(2) = 2^2 + 5 \Rightarrow 3f(2) = 9 \Rightarrow f(2) = 3$$

$$f(x) + x f(2) = x^2 + 5$$

$$\xrightarrow{x=1} f(1) + 3 = 1 + 5 \Rightarrow f(1) = 3$$

مثال: اگر رابطه زیر یک تابع باشد، مقدار $f(2)$ چند است؟

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + a & x \geq 1 \\ x + 4 & x \leq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} f(1) &= 4(1)^2 + a = a + 4 \\ f(1) &= 1 + 4 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 4 = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{1\}$$

$$f(2) = 4(2)^2 + 1 = 17 \Rightarrow f(2) = 17$$

مثال: اگر $f(x) + \underbrace{[f(x)]}_{\in \mathbb{Z}} = 2 \underbrace{\left[x^2 + \frac{1}{2} \right]}_{\in \mathbb{Z}}$ رابطه زیر یک تابع باشد، مقدار $f(1)$ چند است؟

الزاماً $\Rightarrow f(x) \in \mathbb{Z}$

$[f(x)] = f(x)$

$f(x) + f(x) = 2 \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow$

$\boxed{x=1}: 2f(1) = 2(1) \rightarrow \boxed{f(1)=1}$

مثال: اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آن گاه $f(8)$ کدام است؟

(تقریبی ۱۶)

۸ (۴)

۷ (۳) ✓

۳ (۲)

۵ (۱)

$f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + 4 = 7$

مثال: ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a ، $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

۱ (۴)

۲ (۳) ✓

۳ (۲)

۴ (۱)

$a \neq 0$:

$1 - |a| < 1 \xrightarrow{\text{بنا}} f(1 - |a|) = 2(1 - |a|) - 1 = 1 - 2|a|$

$2 + |a| > 1 \xrightarrow{\text{تایید}} f(2 + |a|) = (2 + |a|)^2 - (2 + |a|) - 7$

$4 + |a|^2 + 4|a| - 2 - |a| - 7 = 1 - 2|a| \Rightarrow$

$|a|^2 + 3|a| - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ |a| = -6 \end{cases} \rightarrow \boxed{a = \pm 1}$

$a = 0 \Rightarrow$

$f(1) \neq f(2) \Rightarrow -7 \neq -5$

نابرابرند

نکته: اگر بزرگ‌ترین توان y زوج باشد، عبارت مورد نظر تابع نیست.

نکته: برد توابع درجه فرد $\mathbb{R}$ است.

$y = -x^3 + 5x - 7$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow -(+\infty)^3 = -\infty$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow -(-\infty)^3 = +\infty$



$R_f = [\min, +\infty)$

دامنه تابع:

حدود تعییرات متغیر x را دامنه تابع می‌نامیم.

دامنه تابع بصورت زوج مرتب:

مجموعه مؤلفه‌های اول یک تابع زوج مرتبی را دامنه می‌نامیم.

$f = \{ (3, 5), (5, 9), (6, 11), (7, 13), (1, 1) \} \Rightarrow D_f = \{ 1, 3, 5, 6, 7 \}$

دامنه توابع دکارتی:

اگر یک تابع در دستگاه مختصات دکارتی ترسیم شده باشد، تصویر نمودار بر روی محور x ها را دامنه تابع می نامیم.

$$D_f = [-5, 0] \cup (2, +\infty)$$

$$R_f = \{-3\} \cup [-2, +\infty)$$

تعیین دامنه تابع از روی ضابطه:

الف) دامنه توابع چندجمله ای:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x - 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

ب) دامنه توابع گویا:

اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله ای باشند $g(x) = 4x^5 - 3x^2 + 4x - 5 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, +2\} = \mathbb{R} - \{\pm 2, 0\}$$

$$x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow (x^2)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x)^2(x-2)(x+2) = 0$$

$x=0, x=2, x=-2$
مضاعف ساده ساده

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{8}\}$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1^3 \Rightarrow x = 1$$

$$f(x) = \frac{5}{[x] + 2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-2, -1) = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$$

$$[x] + 2 = 0 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

مخرج ناممکن نشد



$$f(x) = \frac{3x + 6}{|x - 1| - 2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

$$|x - 1| - 2 = 0 \Rightarrow |x - 1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{2}{x^2 + x + m + 1}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود m را بیابید. کسی
 $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه معرج}\}$

$$x^2 + x + m + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (1)^2 - 4(1)(m+1) < 0 \Rightarrow 1 - 4m - 4 < 0 \Rightarrow$$

$$-3 < -4m \Rightarrow \boxed{m > -\frac{3}{4}}$$

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{6}{2x^2 + mx + n}$ برابر $\mathbb{R} - \{3\}$ باشد، مقادیر m و n را بیابید.

تنهاریشه معرج
 $x=3 \Rightarrow 2(x-3)^2 = 2x^2 - 12x + 18$

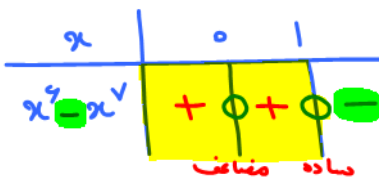


$D_f = \mathbb{R} - \{3, 5\} \Rightarrow \text{معرج} = 2(x-3)(x-5) = 2x^2 - 14x + 30 \Rightarrow \begin{cases} m = -14 \\ n = 30 \end{cases}$

پ) دامنه توابع رادیکالی: رادیکال فرجه زوج بر دامنه تابع بی تأثیر است و می توانیم آن را در نظر نگیریم ولی در مورد رادیکال فرجه زوج باید به این نکته توجه کنیم که عبارت زیر رادیکال فرجه زوج نباید منفی باشد.

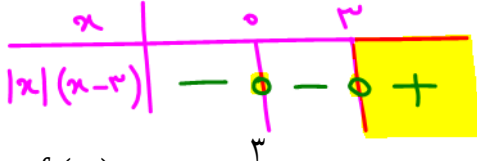
مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{x^6 - x^4} \Rightarrow x^4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(1-x^2) \geq 0$$



$$D_f = (-\infty, 1]$$

$$f(x) = \sqrt{|x|(x-3)} \Rightarrow |x|(x-3) \geq 0 \Rightarrow D_f = [3, +\infty) \cup \{0\}$$



$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1} - 1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$$

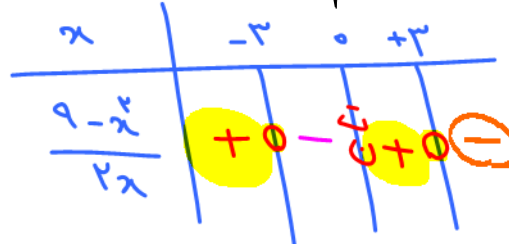
$$D_f = [1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_f = [1, +\infty) - \{2\}$$

$$\frac{9-x^2}{2x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(3-x)(3+x)}{2x} \geq 0$$

$$D_f = (-\infty, -3] \cup (0, 3]$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{2x}}$ را بیابید.



مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x - m}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود m را بیابید.

$$x^2 - x - m \geq 0$$

بسی

$$a > 0 \rightarrow 1 > 0$$

$(\Delta = 0) \cup (\Delta < 0) = \Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(-m) \leq 0 \Rightarrow 4m \leq -1 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{4}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{\cos \pi x - 1}$ رابطه زیر یک تابع باشد، مقدار $f\left(\frac{3}{2} - f(x)\right)$ چند است؟

$$\cos \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos \pi x \geq 1 \rightarrow \cos \pi x = 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

بنده یا مساوی

$$f\left(\frac{3}{2} - f(x)\right) = \sqrt{\cos \pi \left(\frac{3}{2} - f(x)\right) - 1} = \sqrt{-\sin \pi \left(\frac{3}{2} - f(x)\right) - 1} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

ت) دامنه توابع لگاریتمی:

$$f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-1)} |x|$ را بیابید.

$$\begin{aligned} ① \quad |x| > 0 &\Rightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ ② \quad x - 1 > 0 &\Rightarrow x > 1 \\ ③ \quad x - 1 \neq 1 &\Rightarrow x \neq 2 \end{aligned}$$

حذف

$$D_f = (1, +\infty) - \{2\} = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

دامنه توابع مثلثاتی:

توابع سینوسی و کسینوسی همانند فرجه فرد بر دامنه تابع تأثیری ندارند و برای تعیین دامنه توابع به صورت تانژانت و کتانژانت، عبارت را به صورت کسری می نویسیم.

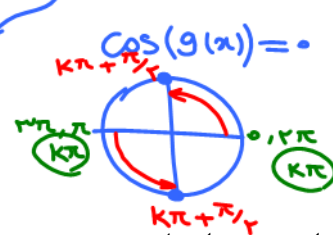
$$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow D_f = \left\{x \mid g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f(x) = \cot(g(x)) \Rightarrow D_f = \{x \mid g(x) \neq k\pi\}$$

$$\tan(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{\cos(g(x))}$$



مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{[x]}\right) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

مخرج را منفی نشاند

$$f(x) = \tan(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}$$

$$\cos(\pi x) \neq 0 \Rightarrow \pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z} \dots, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$$

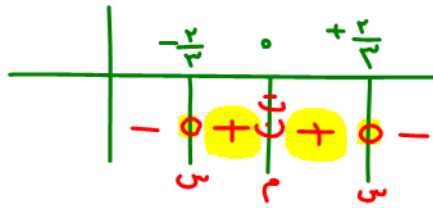
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{x = \frac{(2k+1)}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ کدام است؟

(تقریبی خارج ۹۶)

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0$$

مضاعف



(۱) $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ X

(۲) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ X

(۳) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, 2]$ X

(۴) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$ ✓

$x=1 \Rightarrow 2 - \frac{9}{2} \geq 0$ ✗

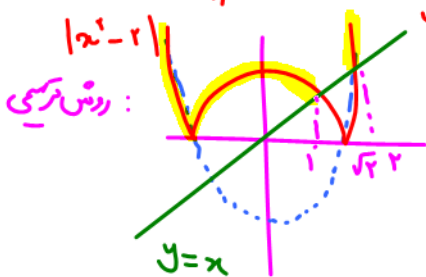
مثال: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_4(|x^2 - 2| - x)$ کدام است؟

(تقریبی خارج ۱۴۰۰)

$$|x^2 - 2| - x > 0$$

$x=0 \Rightarrow 2 > 0$ ✓

$x=1.5 \Rightarrow 0.25 - 1.5 > 0$ ✗



(۱) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$ X

(۲) $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ X

(۳) $[-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ X

(۴) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ ✓



مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ کدام است؟

(ریاضی ۹۵)

$x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x-3) > 0$ $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

(۱) $[-2, 0) \cup (3, 5]$ ✓

(۲) $[-2, 0] \cup (3, 5)$ X

(۳) $[-2, 3)$ X

(۴) $(0, 5]$ X

$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1$

$x=0 \rightarrow 0 > 0$ ✗

$\log(x^2 - 3x) \leq \log 1$

$x=2 \rightarrow -2 > 0$ ✗

بزرگتر از ۱ نیست
دعایه کدش نمی

$x^2 - 3x \leq 1 \rightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0$

$(x-5)(x+2) \leq 0$ $[-2, 5]$



مثال: دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_6 \left(\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} \right)$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

(۱) $(-9, 9)$ ✓
 (۲) $(-4, 9)$ ✗
 (۳) $(4, 9)$ ✗
 (۴) $(-4, 4)$ ✗



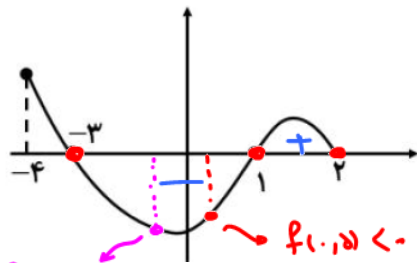
$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{6} > 0 \quad \checkmark$$

$$x=5 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{5}} > 0$$

$$x=-5 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{5}} > 0$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} > 0$$

مثال: اگر شکل روبه‌رو نمودار $y = f(x)$ باشد، دامنه $\sqrt{x} f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



$f(x) < 0$ for $x \in (-3, 1)$

$f(x) \geq 0$ for $x \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

$x=0$ is a point where $f(x) < 0$.

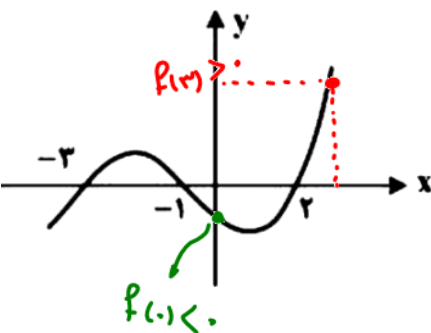
x	-4	-3	0	1	2
$f(x)$	+	+	-	-	+
$x f(x)$	-	-	-	-	+

- (۱) $[-3, 2]$ ✗
 (۲) $[0, 2]$ ✗
 (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$ ✗
 (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$ ✓✓

$x=-1$ + ✓
 $x=-1.5$ - ✗

مثال: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)} f(x)$ ، کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۷)



$x=0 \Rightarrow \sqrt{1 \times f(0)} = \sqrt{-} \notin \mathbb{R}$

$x=3 \Rightarrow \sqrt{4 \times f(3)} = \sqrt{+} \text{ OK}$

- (۱) $[-3, 2]$ ✗
 (۲) $[-1, +\infty)$ ✗
 (۳) $(-\infty, -1]$ ✗
 (۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$ ✓



توابع چندجمله‌ای:

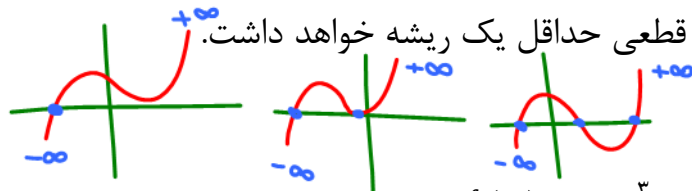
هر تابع به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$ را که در آن ضرایب اعداد حقیقی بوده و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

به بزرگترین توان مطرح شده در متغیر مستقل (x) تابع چندجمله‌ای، درجه چندجمله‌ای می‌گوییم. x^{24} x^{18} x^{12} x^6 x^2 x

مثلاً تابع $f(x) = x^5 + 6x^4 + 12x + 4$ از درجه ۵ می‌باشد.

$f(x) = (x^2 - 8x)^{12} (5x^3 + 2x^2)^6$

نکته: توابع درجه زوج می‌توانند ریشه نداشته باشند یعنی نمودار این توابع امکان دارد محور افقی را قطع نکند اما هر تابع چندجمله‌ای که از درجه فرد باشد، بطور قطعی حداقل یک ریشه خواهد داشت.



تابع درجه ۳:

تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در این تابع چون درجه فرد است، الزاماً یک ریشه دارد یعنی نمودار آن محور افقی را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع کل مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. ابتدا نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸

$y = ax^3 + \dots$

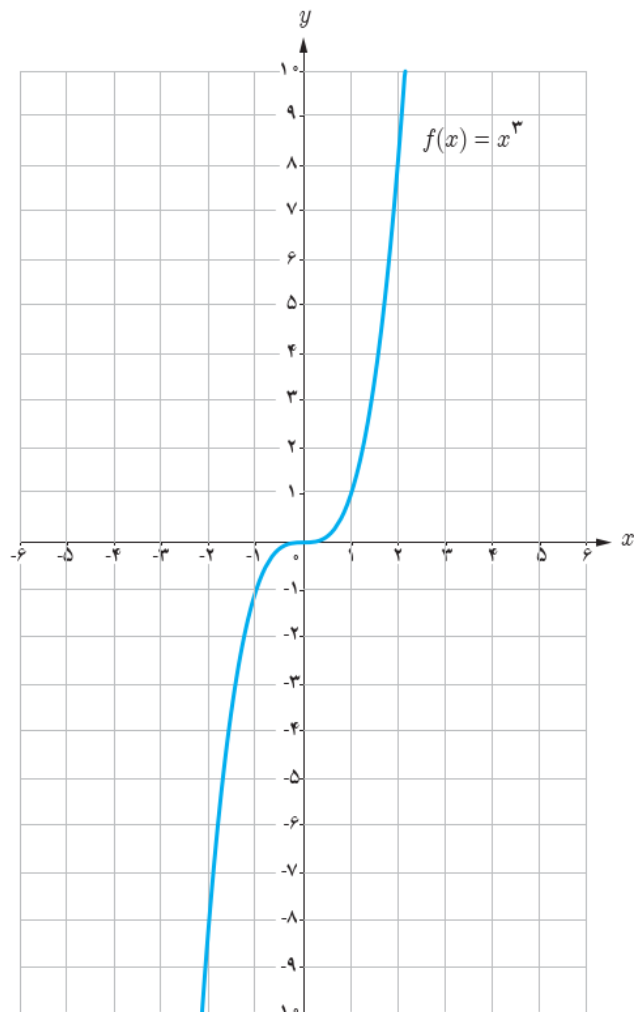
$2(2)^3 = +16$

$y = 2x^3 + \dots$

$(2, 16)$

$(1, 1)$

$2 \times 1 = 2$



$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

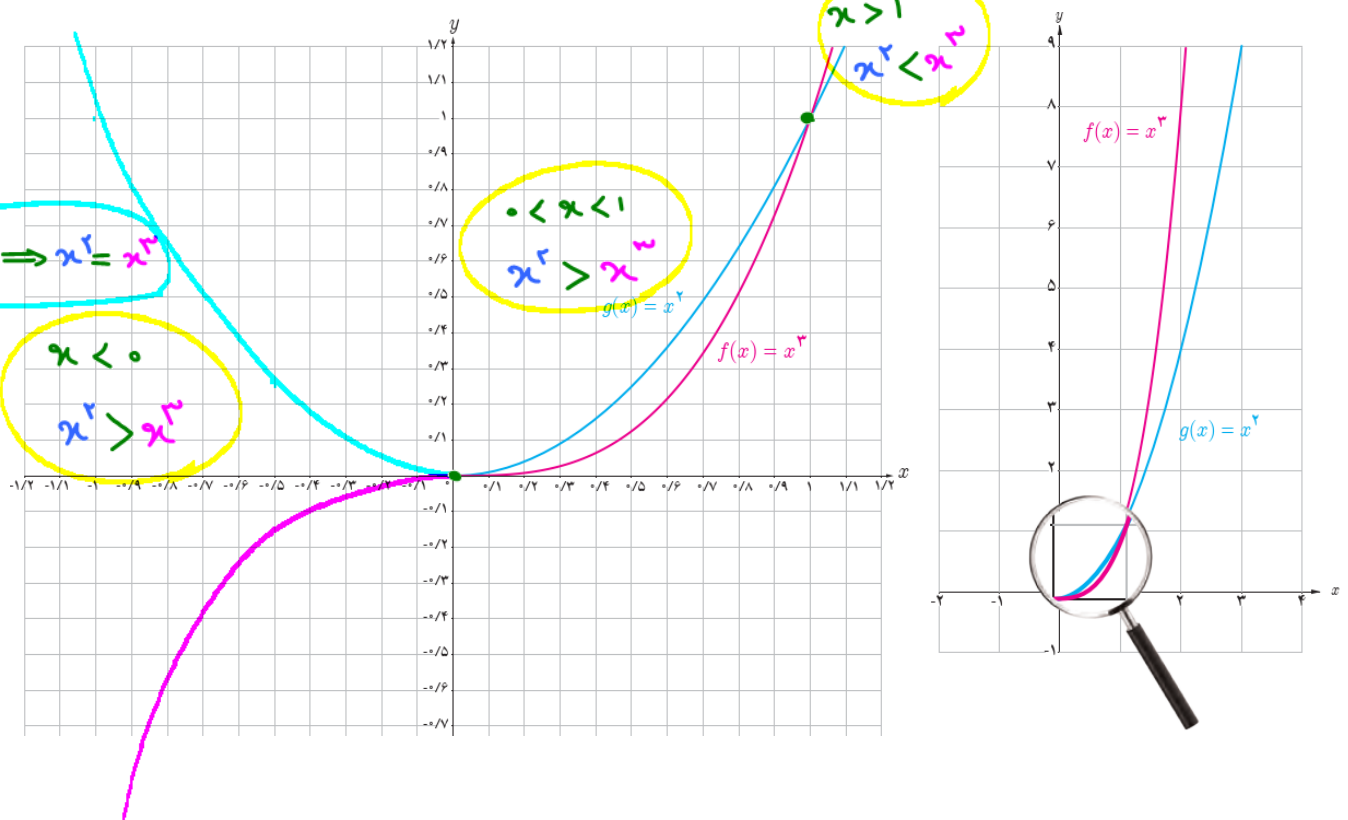
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

مثال: با رسم توابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ بیان کنید در چه بازه‌هایی نمودار تابع درجه ۳ پایین‌تر از

نمودار تابع سهمی قرار می‌گیرد؟



رسم تابع به کمک تبدیلات:

اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، در این صورت:

- ۱- برای رسم نمودار تابع $f(x) + k$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
- ۲- برای رسم نمودار تابع $f(x) - k$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
- ۳- برای رسم نمودار تابع $af(x)$ ($a > 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور y ها، با ضریب a کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)
- ۴- برای رسم نمودار تابع $af(x)$ ($0 < a < 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور y ها، با ضریب a فشرده می‌شود. (انقباض عمودی)
- ۵- برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
- ۶- برای رسم نمودار تابع $f(x-k)$ ($k > 0$)، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

۷- برای رسم نمودار تابع $f(ax)$ ($a > 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور x ها، با ضریب $\frac{1}{a}$ فشرده می‌شود. (انقباض افقی)

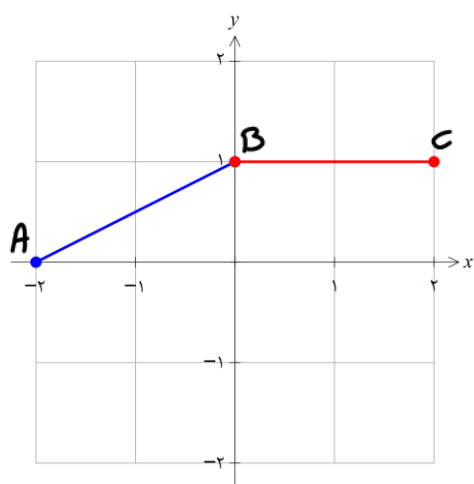
۸- برای رسم نمودار تابع $f(ax)$ ($0 < a < 1$)، نمودار تابع $f(x)$ در امتداد محور x ها، با ضریب $\frac{1}{a}$ کشیده می‌شود. (انبساط افقی)

۹- برای رسم نمودار تابع $-f(x)$ ، نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x ها، قرینه می‌شود.

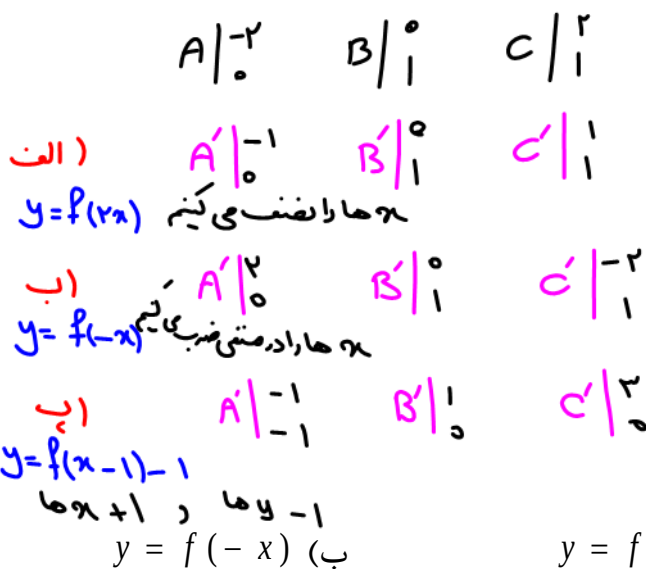
۱۰- برای رسم نمودار تابع $f(-x)$ ، نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها، قرینه می‌شود.

۱۱- برای رسم نمودار تابع $-f(-x)$ ، نمودار تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.

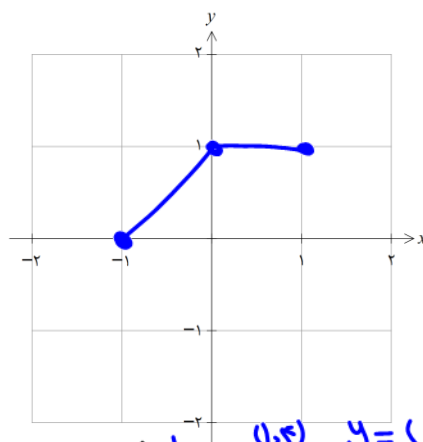
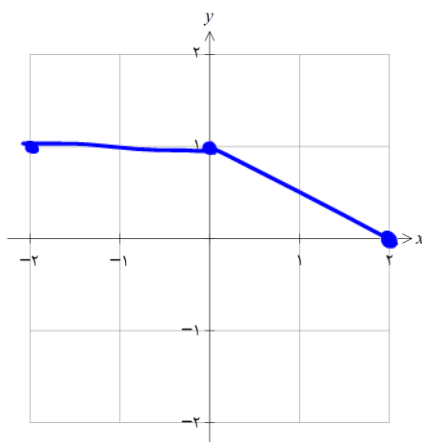
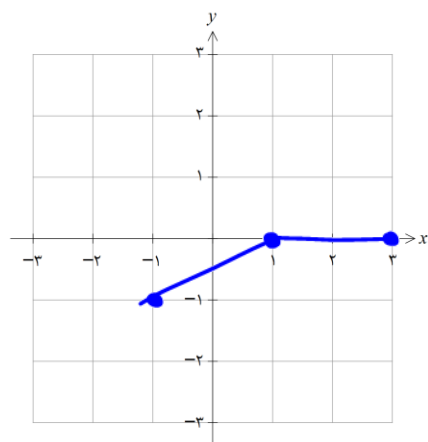
مثال: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، مطلوبست دامنه و برد و رسم توابع زیر: $(1) f(x) + (2) d$



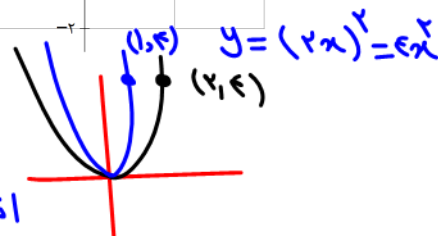
$$y = f(x - 1) - 1 \quad (\text{پ})$$



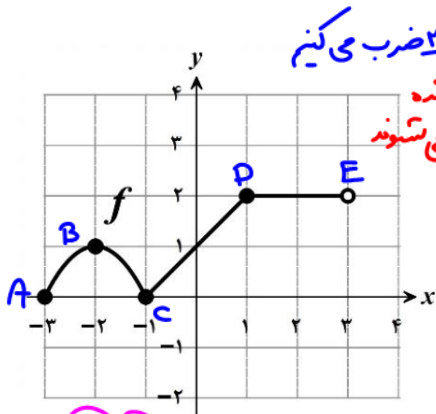
$$y = f(x) \quad (\text{الف})$$



$f(x) = x^r \rightarrow f(rx) = (rx)^r$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{انقباض کنی} \\ f(x) = rx^r \text{ انبساط کنی} \end{array} \right.$



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $g(x) = 3\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ باشد، آن گاه:



یها را در 3 ضرب می کنیم

یها اول 3 برابر شده
د بعد به اندازه 1 جی تاشوند

الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید.

ب) اگر $A(-2, 1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد،

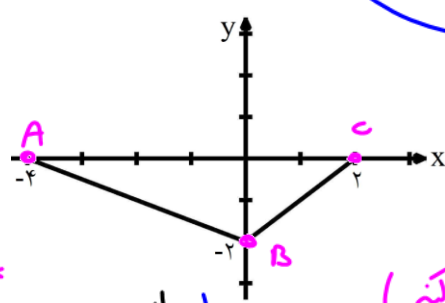
آن گاه نقطه متناظر A روی نمودار تابع g را بنویسید.

$A -3$	$B -2$	$C -1$	$D 1$	$E 3$
$A' 0$	$B' 1$	$C' 0$	$D' 2$	$E' 2$
$A' -6$	$B' -4$	$C' -2$	$D' 2$	$E' 6$
$A' 1$	$B' 4$	$C' 1$	$D' 7$	$E' 7$

الف) $D_g = [-6, 6)$ $R_g = [1, 7]$

مثال: فرض کنید نمودار تابع $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ به صورت زیر باشد. نمودار تابع $y = 3f(-2x)$ را رسم

کرده و دامنه و برد آن را مشخص نمایید.



$f\left(-\frac{1}{2}x\right) \rightarrow 3f(-2x)$
 (ماهم یها را در 3 ضرب می کنیم)

ماهم یها را به 3 نصف می کنیم

$A -4$	$A' -1$
$B 0$	$B' 0$
$C 4$	$C' 1$

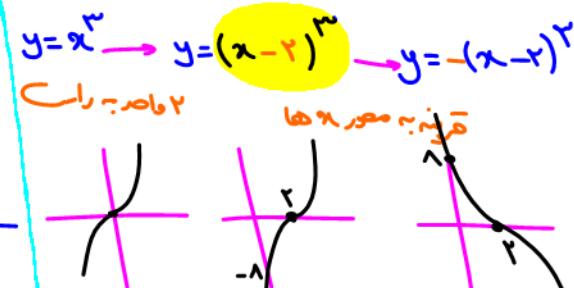
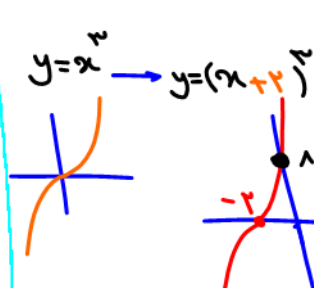
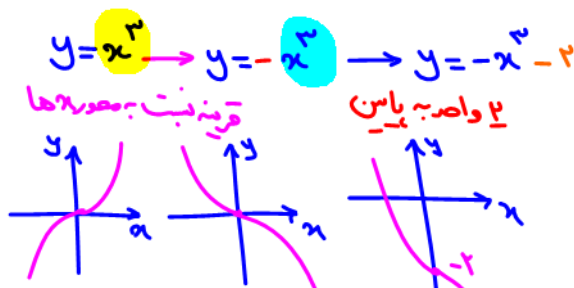
$\Rightarrow D_f = [-1, 1]$ $R_f = [-6, 0]$

مثال: با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

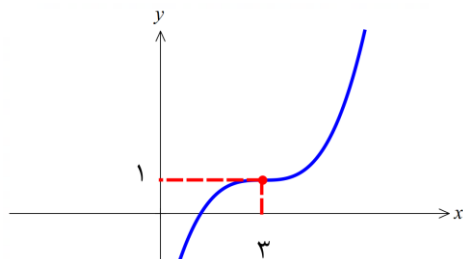
پ) $y = -x^3 - 2$

ب) $y = (x+2)^3$

الف) $y = -(x-2)^3$



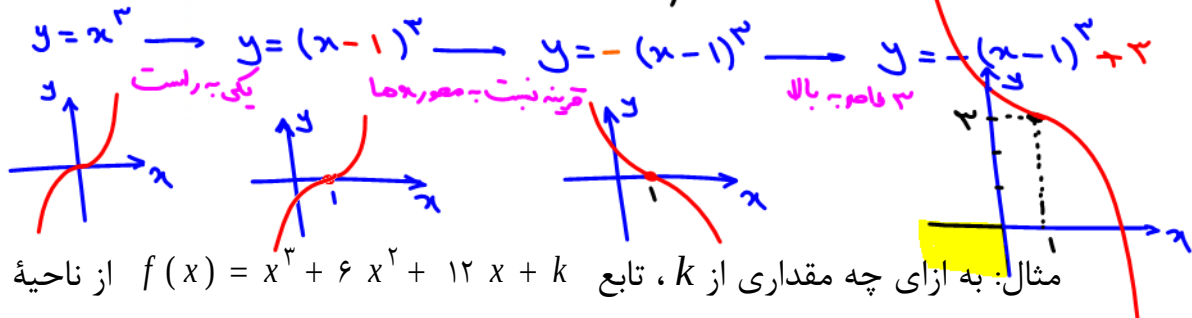
مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = (x - m)^3 + h$ به صورت شکل زیر باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x) = -(x - h)^3 + m$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



$$y = x^3 \xrightarrow[\text{پای بالا}]{\text{راست، 3}} f(x) = (x - 3)^3 + 1$$

$$h = 1, m = 3$$

$$g(x) = -(x - 1)^3 + 3$$



مثال: به ازای چه مقداری از k ، تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + k$ از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

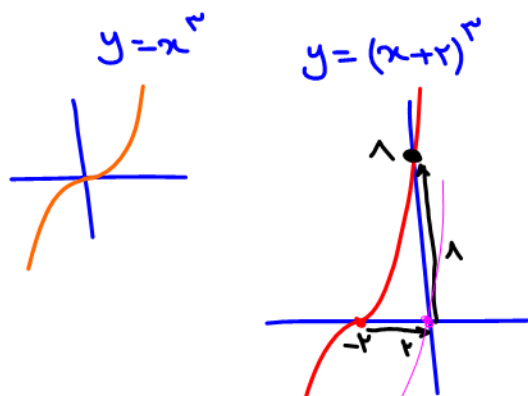
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + k = (x+2)^3 + k - 8$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

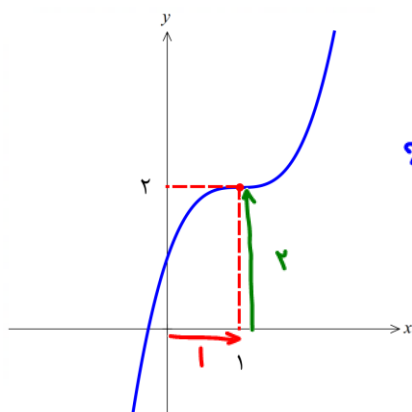
$$f(x) = (x+2)^3 + k - 8$$

$$k - 8 \leq -8$$

$$k \leq 0$$



مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = (x + a)(x^2 + bx + c)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $a.b + c$ را بیابید.



$$f(x) = (x - 1)^3 + 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac$$

$$ab + c = 3$$



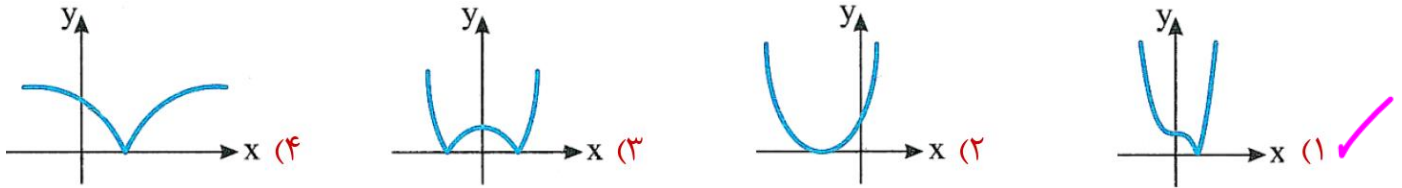
مثال: اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به صورت $D_f = [-1, 2]$ و $R_f = (-3, 1]$ باشد، دامنه و برد تابع

$y = 2f(2x - 1)$ را بیابید.

$f(x) \xrightarrow{\text{بهرتر}} f(x-1) \xrightarrow{\text{بدرتر}} f(2x-1)$ $[-1, 2] \rightarrow [0, 3] \rightarrow [0, \frac{3}{2}]$ (دامنه)
 $f(x) \xrightarrow{\text{بدرتر}} f(2x) \xrightarrow{\text{بهرتر}} f(2(x-\frac{1}{2}))$ $[-1, 2] \rightarrow [-\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, \frac{3}{2}]$
 برد: $(-3, 1] \xrightarrow{\times 2} (-6, 2]$

(موج آزمون نشر الگو)

مثال: نمودار تابع $f(x) = |x^3 - 1|$ کدام است؟

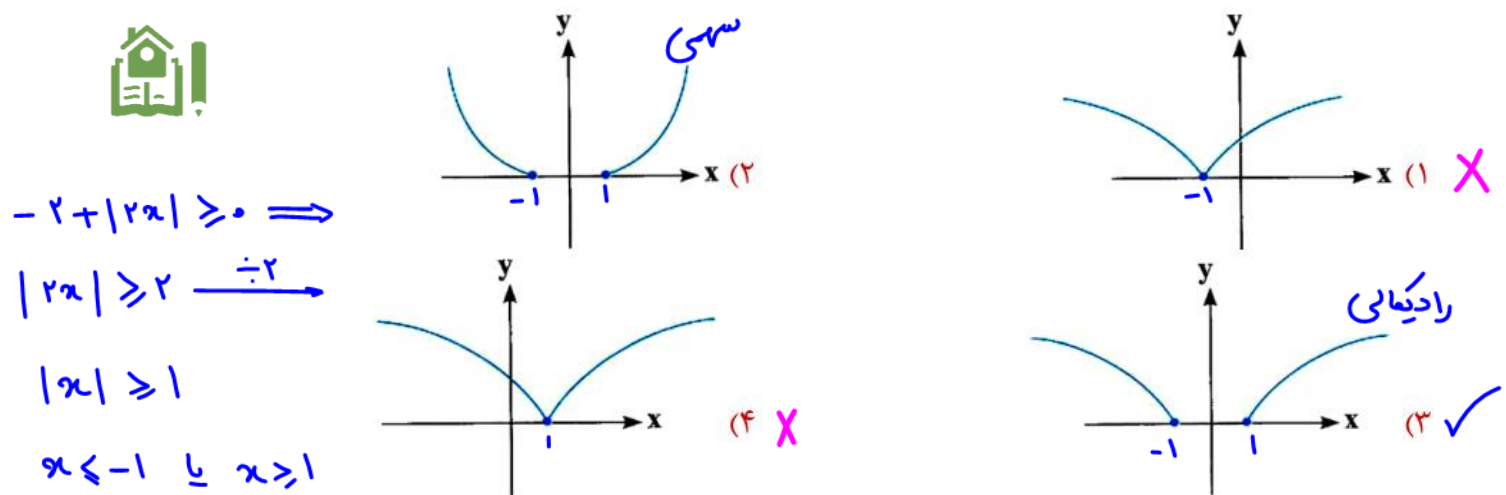


$y = x^3 \rightarrow y = x^3 - 1 \rightarrow y = |x^3 - 1|$
 (The graphs show the transformation from the cubic function to the absolute value function, which is symmetric about the y-axis and has a minimum at (0, 1) and (1, 0).)

(IQ کج)



مثال: نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-2 + |2x|}$ کدام است؟



$y = \sqrt{-2 + |2x|} \xrightarrow{x \geq 1} y = \sqrt{2x - 2}$
 (The graph shows the function for x ≥ 1, which is a square root function starting at (1, 0) and increasing.)

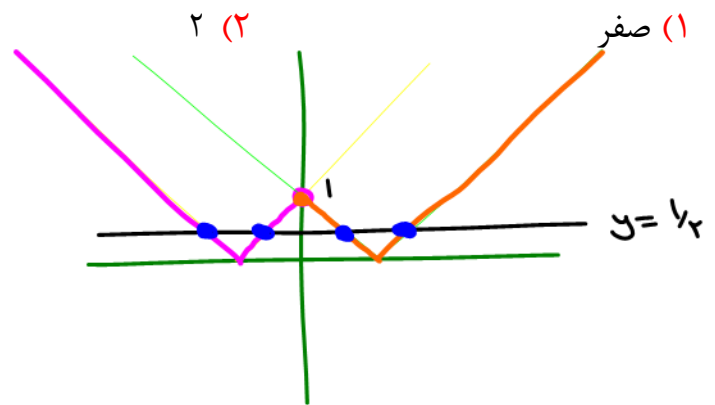
مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$ و خط $y = \frac{1}{2}$ در چند نقطه متقاطع اند؟

(1Q✓ج)

۴ (۴✓)

$$y = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1} = \begin{cases} |x-1| & x \geq 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

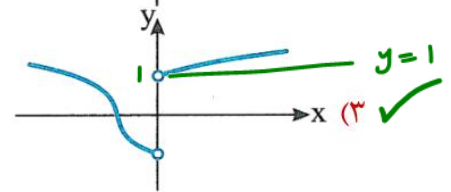
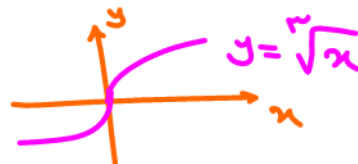
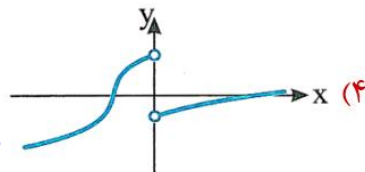
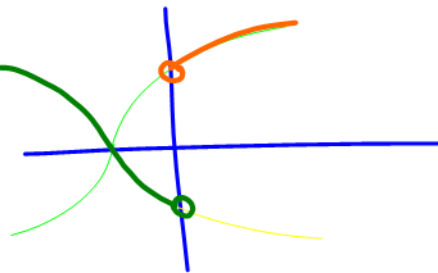
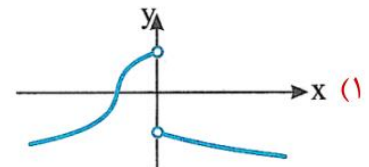
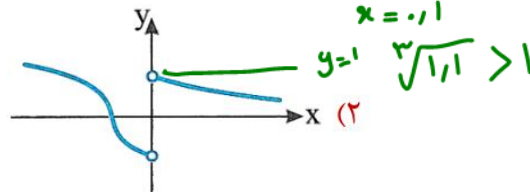
$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2}$



مثال: نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|} \sqrt[3]{x+1}$ کدام است؟

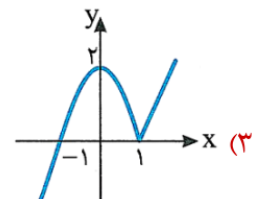
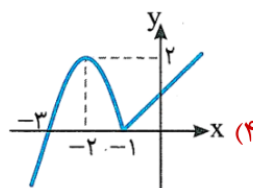
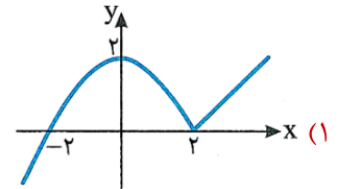
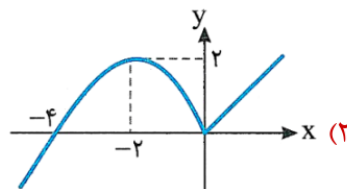
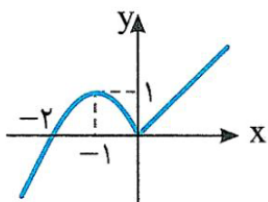
(موج آزمون نشر الگو)

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases}$$



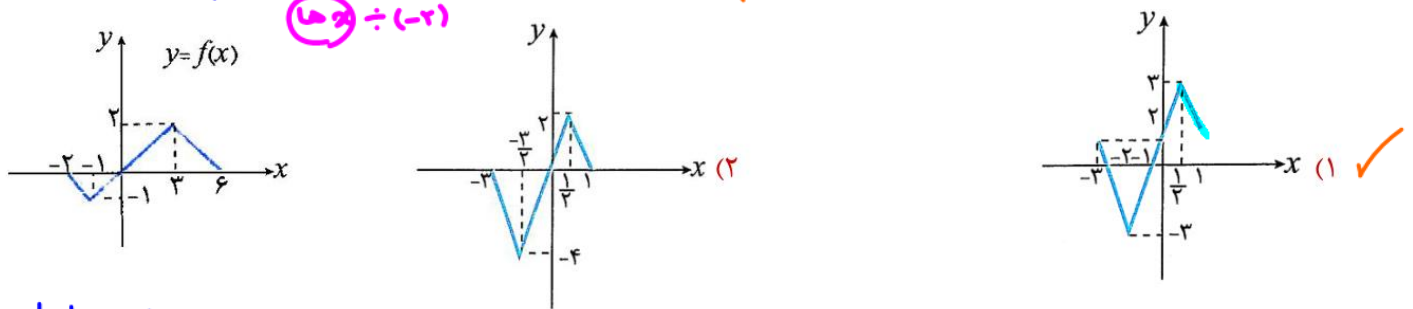
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ کدام است؟

(موج آزمون نشر الگو)



مثال: شکل مقابل، نمایش نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = 1 - 2f(-2x)$

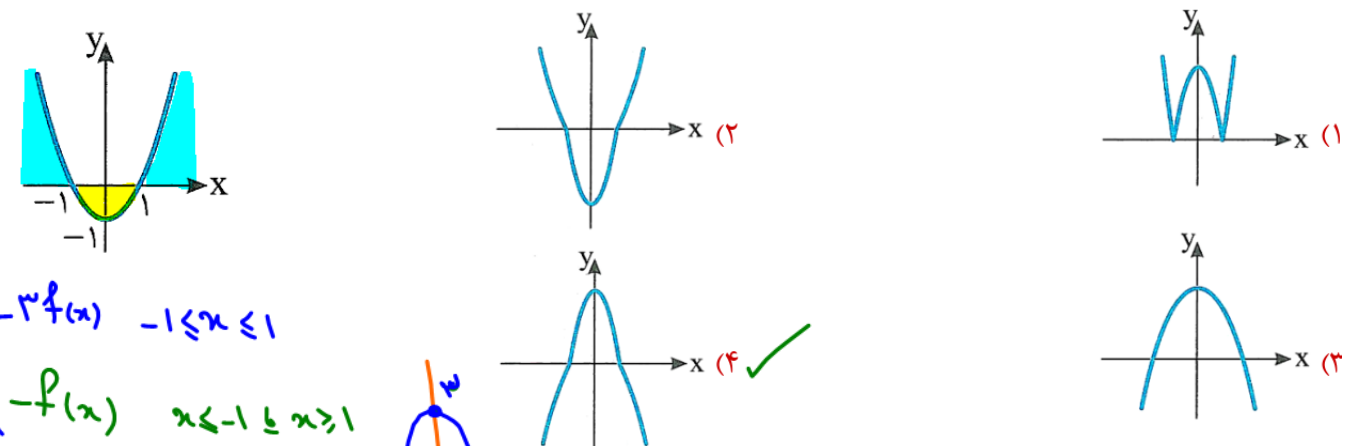
کدام است؟ $f(x) \rightarrow -2f(-2x) + 1$ (فوشوان)



A/2 B/-1 C/3 D/4
A'/1 B'/1/2 C'/-3/4 D'/-2

مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -2f(x) + |f(x)|$

کدام است؟ (موج آزمون نشر الگو)



$y = \begin{cases} -2f(x) & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x) & x \leq -1 \text{ or } x \geq 1 \end{cases}$



مثال: اگر نقطه $A(3, -1)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر با A روی نمودار تابع

$y = 3f(2x + 1) + 5$ کدام است؟ (IQ)

(1, -8) (4) (1, 2) (3) (7, 2) (2) (3, 2) (1)

$y = f(x) \rightarrow y = 3f(2x + 1) + 5$

$3x \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{\div 2} 1$

$-1 \xrightarrow{\times 3} -3 \xrightarrow{+5} 2$

مثال: نمودار تابع $y = x^3$ را به کمک انتقال به نمودار $y = x^3 - 6x^2 + 12x$ منطبق می‌کنیم.
در این صورت نقطه‌ای به طول $x = 1$ در نمودار اولیه به کدام نقطه در نمودار ثانویه تبدیل می‌شود؟

(1) $(-3, 9)$ (2) $(-3, -9)$ (3) $(3, -9)$ (4) $(3, 9)$ ✓

$y = x^3 \xrightarrow{x=1, y=1} y = x^3 - 6x^2 + 12x - 1 + 1$
 $y = x^3 - \frac{(6x+1)}{(6x+2)} \rightarrow y = (x-2)^3 + 8$
 $A|_1 \rightarrow A'|_9$

مثال: اگر نقطه $(4, 0)$ روی نمودار تابع $y = 2f(3x-4) + 6$ باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع

$y = \frac{1}{3}f(-1-3x) + 1$ است؟

(1) $(-3, 0)$ ✓ (2) $(3, 0)$ (3) $(3, 3)$ (4) $(-3, 3)$

$A|_4 \in 2f(3x-4) + 6 \rightarrow A'|_{-3} \in f(x) \rightarrow A''|_0 \in \frac{1}{3}f(-3x-1) + 1$
 $3x-4 \xrightarrow{\div 3} x-4 \xrightarrow{+4} x$
 $0 \xrightarrow{-6} -6 \xrightarrow{\div 2} -3$
 $0 \xrightarrow{-3} -3 \xrightarrow{+1} -2$

$(3x-4) \xrightarrow{\div 3} (x-4) \xrightarrow{+4} x$
 $2y+6 \xrightarrow{-6} 2y \xrightarrow{\div 2} y$

مثال: طول نقاط روی نمودار تابع $y = f(x)$ را نصف می‌کنیم و عرض آن‌ها را سه برابر می‌کنیم. سپس نمودار را دو واحد به سمت چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

(1) $y = 3f(4-2x)$ ✓ (2) $y = 3f(2-2x)$
(3) $y = -3f(2x+2)$ (4) $y = -3f(2x+4)$

$f(x) \rightarrow 3f(2x) \rightarrow 3f(2(x+2)) \xrightarrow{\text{قرینه شوند}} 3f(2x+4) \xrightarrow{x \rightarrow -x} 3f(4-2x)$

مثال: نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی، سپس ۹ واحد به طرف y های منفی

انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه زیر محور x ها است؟

- (۱) $(-5, 2)$ ✓ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

$$y = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3 \rightarrow y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} - 9$$

$\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{مربع}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ضرب } x} x$

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < 0 \rightarrow$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4} \rightarrow -\frac{7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2} \xrightarrow{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{-5 < x < 2}$$

مثال: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی

حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی،

کدام است؟

- (۱) ۰, ۲ (۲) ۱, ۱ (۳) ۱, ۲ (۴) ۱, ۲



مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال

می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{10}$



تساوی دو تابع: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با شرایط زیر با هم مساوی هستند.

$$\left. \begin{array}{l} 1) D_f = D_g \\ 2) \forall x \in D : f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f = g$$

مثال: برابر دو تابع زیر را بررسی نمایید.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x| \\ g(x) = \sin 2x \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \neq g(x) \\ \mathbb{R} = D_f = D_g \end{array} \right\} \Rightarrow f \neq g$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \log x(x-2) \\ g(x) = \log x + \log(x-2) \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ضابطه‌ها برابرند} \\ D_f \neq D_g \end{array} \right\} \Rightarrow f \neq g$$

$D_f: x(x-2) > 0$ 

$D_g: x > 0, x-2 > 0 \Rightarrow D_g = (2, +\infty)$
 $x > 0 \cap x > 2 = (2, +\infty)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x(x-1)} \\ g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1} \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ D_f \neq D_g \end{array} \right\} \rightarrow f \neq g$$

$D_f: x(x-1) \geq 0$ 

$D_g: x \geq 0, x \geq 1 \rightarrow D_g = [1, +\infty)$

(تجربی خارج ۹۷)

مثال: کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$x = -2 \notin D$

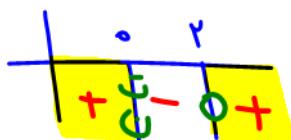
$y = \log \frac{x-2}{x}$

$\log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$ (۲) $\log \frac{(x-2)^2}{x}$ (۱) $\log(x-2) - \log x$ (۱) $\times$

$\frac{x-2}{x} > 0$

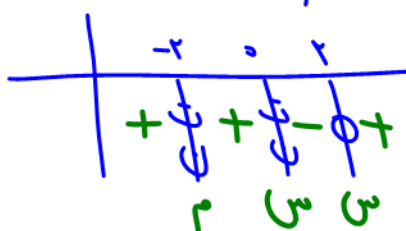
$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ (۴) $\bigcirc$

$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$ (۳) $\times$



$D_f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$2 \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} > 0$



$\left(\frac{x-2}{x} \right)^2 > 0$
 $\mathbb{R} - \{2, 0\}$


اعمال جبری روی توابع و دامنه‌ی آنها

$\frac{f}{g} \neq \emptyset$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \\ (f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad (g(x) \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{f+g} = D_f \cap D_g \\ D_{f-g} = D_f \cap D_g \\ D_{f \times g} = D_f \cap D_g \\ D_{f \div g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \{(2, -1), (0, 0), (1, 4), (3, 2)\}$ و $g(x) = \{(2, 1), (0, 4), (5, 3), (1, 2)\}$ باشد،

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$1) f - g = \left\{ (2, -2), (0, -4), (1, 2) \right\}$$

$$2) f + 2 = \left\{ (2, 1), (0, 2), (1, 6), (3, 4) \right\}$$

$$3) \frac{-1}{f} \oplus 2g = \left\{ (2, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{4}) \right\}$$

$$\frac{-1}{f} = \left\{ (2, -\frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{0}), (1, -\frac{1}{4}), (3, -\frac{1}{2}) \right\}$$

$$2g = \left\{ (2, 2), (0, 8), (5, 6), (1, 4) \right\}$$

مثال: اگر $f(x) = \log x$ و $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید.

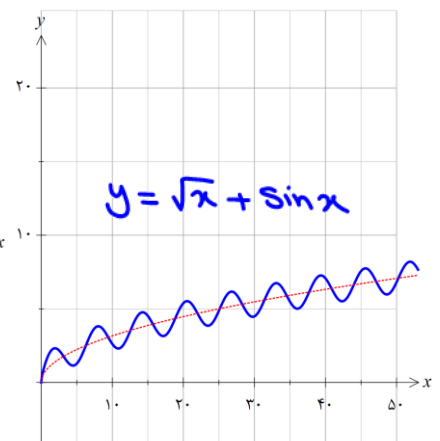
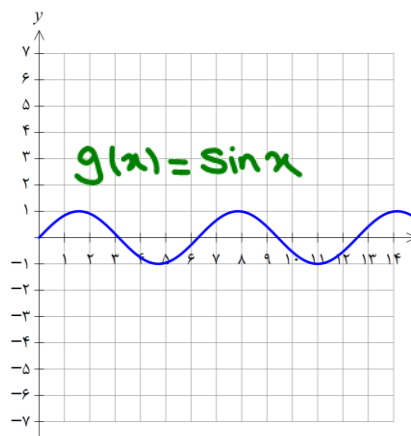
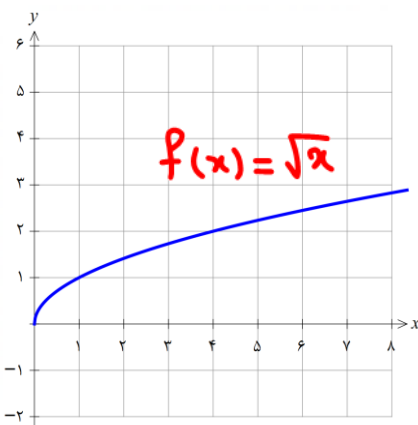
$$D_g: 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \xrightarrow{\sqrt{}} |x| \leq 3 \Rightarrow D_g = [-3, 3]$$

$$D_f: x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه}} \sqrt{9-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

$$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (0, 3) - \{-3, 3\} = (0, 3)$$

مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{x} + \sin x$ را رسم کنید.



مثال: دامنه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{x-1}}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{\frac{x}{2-x}}}_{h(x)}$$

$$x-1 \geq 0$$

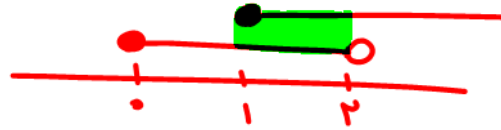
$$\boxed{x \geq 1}$$

$$\frac{x}{2-x} \geq 0$$

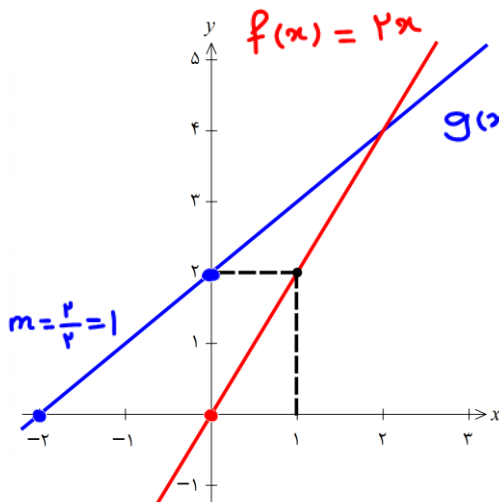
تعیین علامت



$$D_f = [1, 2)$$



مثال: در شکل مقابل نمودار توابع f و g رسم شده‌اند مقدار $(f+g)\left(\frac{3}{2}\right)$ را بیابید.



$$f(x) = 2x$$

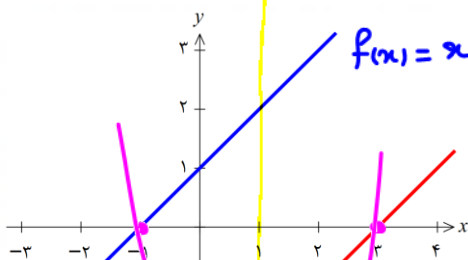
$$g(x) = x + 2$$

$$(f+g)(x) = 3x + 2$$

$$(f+g)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$(f+g)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

مثال: در شکل مقابل نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. نمودار تابع $(f \cdot g)(x)$ را رسم کنید.



$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = (x+1)(x-3)$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 3$$

$x=1$
مورد تناقض

۳ برابر ۲ است

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (-1, 5)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, -1), (5, 2), (4, 6)\}$

(موج آزمون نشر الگو)

$(f + g)(a) = 2(f - g)(a)$ مقدار a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳ X)

۳ (۲ X)

۱ (۱)

$$f(a) + g(a) = 2f(a) - 2g(a) \Rightarrow$$

$$3g(a) = f(a) \rightarrow \boxed{a=5}$$

$a \neq -1$

مثال: نمودارهای دو تابع f و $f - g$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $g(3) + g(-3)$

کدام است؟

(مهر و ماه)

$$f - (f - g) = g$$

$$g(3) = f(3) - (f - g)(3) = 12 - (-4) = 16$$

$$g(-3) = f(-3) - (f - g)(-3) = 0 - (-4) = 4$$

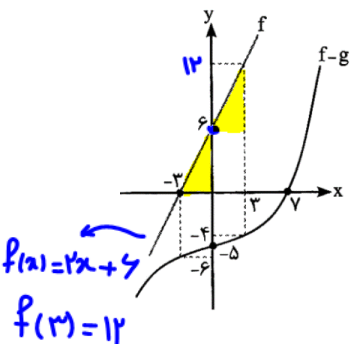
$$g(3) + g(-3) = 20$$

۱۰ (۱)

۱۶ (۲)

۲۲ (۳ ✓)

۶ (۴)



مثال: اگر $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ برد تابع $f \circ g$ کدام است؟ (نردبان فیلی سبز)

$[0, +\infty)$ (۴)

$[0, 1]$ (۳ ✓)

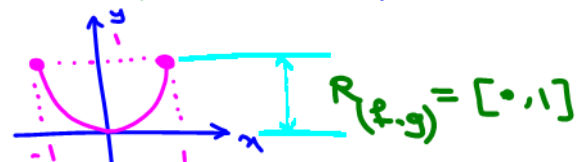
$\{1\}$ (۲)

$\mathbb{R}$ (۱)

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2} \\ g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow (f \circ g)(x) = (1 + \sqrt{1-x^2})(1 - \sqrt{1-x^2}) = 1 - (1-x^2) = x^2$$

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = D_g = [-1, 1]$$



مثال: اگر $f(x) = 2 - |x+1|$ و $g(x) = x + |x|$ آن گاه برد تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام

$$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = (0, +\infty) - (-\infty, 0] = (0, +\infty)$$

است؟

$(0, +\infty)$ (۴)

$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳ ✓)

$(-1, +\infty)$ (۲)

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ (۱)

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

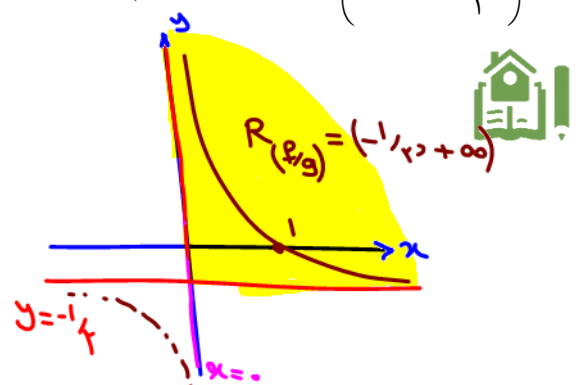
همگرایی

$$x > 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x+1}{2x}$$

مجاانب قائم: $2x=0 \rightarrow x=0$

مجاانب افقی: $y = -\frac{1}{2}$

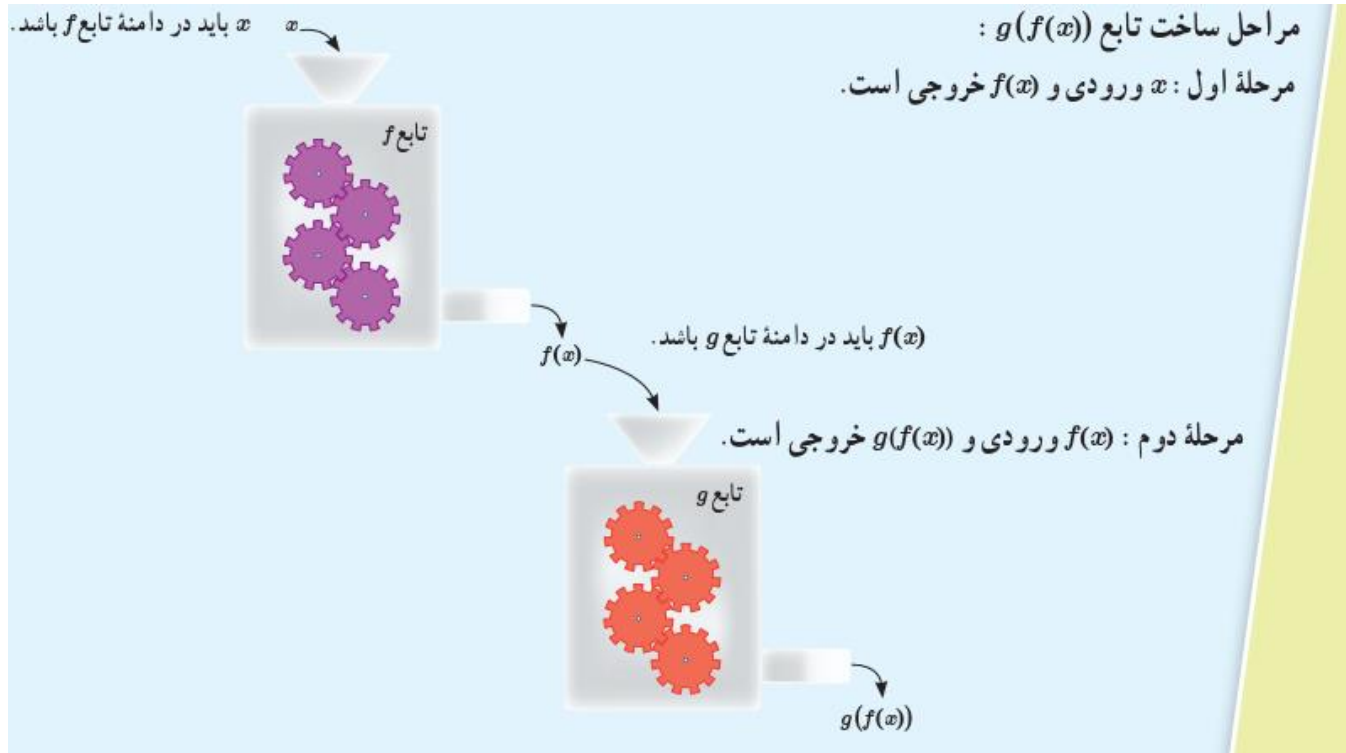
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \geq -1 \\ x+3 & x < -1 \end{cases}$$



ترکیب دو تابع

$$x \rightarrow \boxed{g(x)} \rightarrow g(x) \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$$x \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g(x)} \rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$



دامنه تابع مرکب:



$$D_{f \circ g} = D_{f(g(x))} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

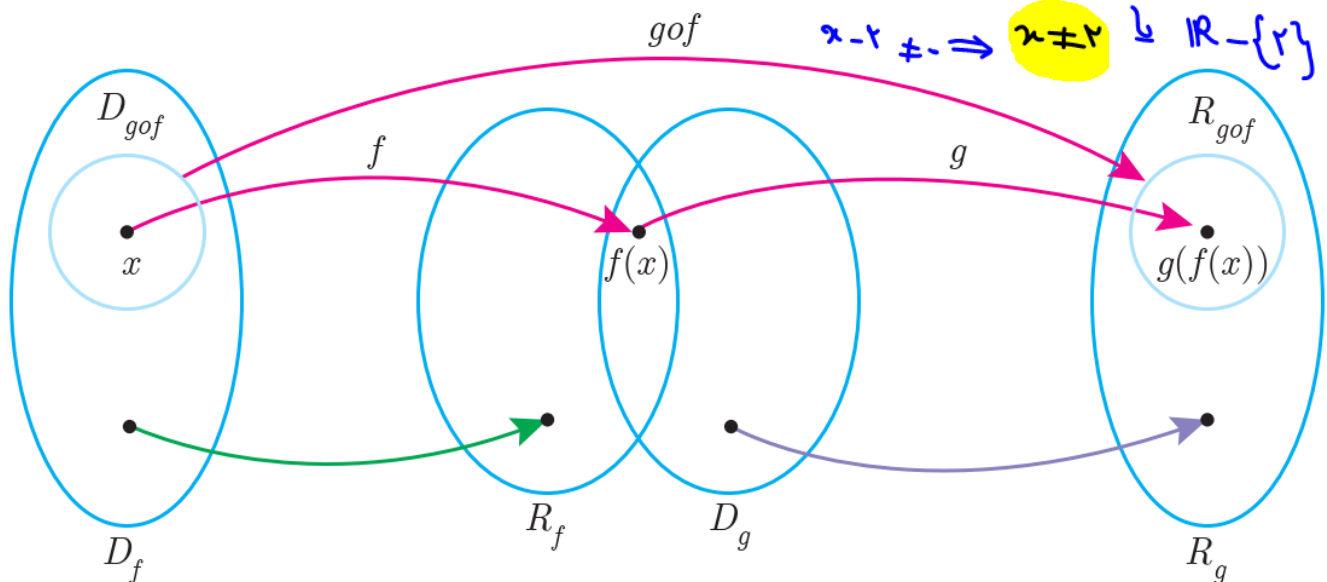
$$D_{g \circ f} = D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } [1, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ یا } \mathbb{R} - \{2\}$$



مثال: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x + 2$ باشد، معادله زیر را حل کنید.

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$$

$$f(g(x)) + g(f(x)) = g(g(x))$$

$$(x+2)^2 + 1 + (x^2 + 1) + 2 = (x+2) + 2$$

$$2x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(4) < 0 \quad \text{جواب ندارد}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ را بیابید.

$$(f \circ f)(x) : f(f(x)) = \sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$D_{(f \circ f)(x)} = D_{f(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$D_f : 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ f} = [-1, 1]$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\sqrt{1-x^2} \leq 1 \xrightarrow{(\quad)^2} 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} -1 \leq x \leq 1$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $(f \circ g)(x) = x$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g) = \frac{g+1}{g} = \frac{x}{1} \Rightarrow$$

$$gx = g+1 \Rightarrow gx - g = 1 \Rightarrow$$

$$g \cdot (x-1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$$

درمونی: $g \rightarrow f$

$$f(g) = \frac{g+1}{g}$$

سوال داد

مثال: اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{x+1}{2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{A}{1} \Rightarrow Ax + A = 1 - x \Rightarrow Ax + x = 1 - A \Rightarrow$$

$$x(A+1) = (1-A) \Rightarrow x = \frac{1-A}{1+A}$$

$$g(A) = \frac{\frac{1-A}{1+A} + 1}{\frac{1-A}{1+A}} = \frac{\frac{1-A+1+A}{1+A}}{\frac{1-A}{1+A}} = \frac{2}{1-A} = \frac{1}{\frac{1-A}{2}}$$

$$g(A) = \frac{1}{A+1} \xrightarrow{A=2} g(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

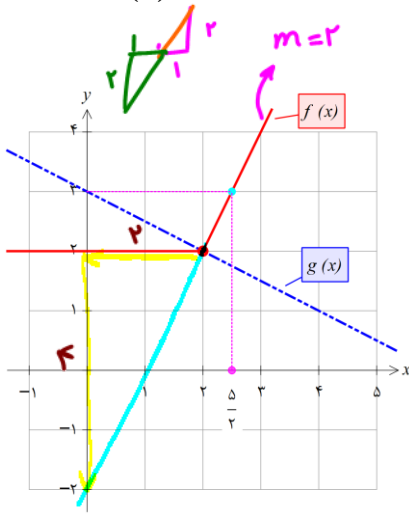
$$g(f(x)) = \frac{x+1}{2}$$

مجهول = بیرونی

تابع داخلی = A

معادله را بر حسب A مرتب کنیم

مثال: نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ در شکل زیر ترسیم شده‌اند. مقادیر $(f \circ g)(1)$ و $(g \circ f)\left(\frac{5}{2}\right)$ را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3 & x \geq 2 \\ 3 & x < 2 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

$$(g \circ f)\left(\frac{5}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = g(2) = \frac{3}{2}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 2$ باشد، دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} D_g: x \geq 0 \\ D_f: x \leq 1 \end{cases}$$

$$D_{g \circ f} = D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \leq 1, \sqrt{1-x} \geq 0$$

$$\boxed{x \leq 1} \cap \boxed{x \leq 1} = (-\infty, 1]$$

$$D_{g \circ f} = (-\infty, 1]$$

مثال: اگر $f = \{(-3, 7), (-1, 2), (2, 4), (0, 5), (6, -2)\}$ و $g(x) = \sqrt{2x+3} - x$ مقدار

(گزینه دو ۱۴۰۰)

$(f \circ g)(3)$ کدام است؟

$$g(3) = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

(۲) ۷

(۱) صفر

$$f(g(3)) = f(0) = 5$$

مثال: اگر $f(x) = x - 3$ و $g = \{(-2, 4), (3, 0), (-5, 7)\}$ باشند، حاصل عبارت

(گزینه دو ۹۹)

$(f \circ g)(3) + (g \circ f)(-2)$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

$$f(g(3)) + g(f(-2)) = f(0) + g(7) = 0 + 4 = 4$$

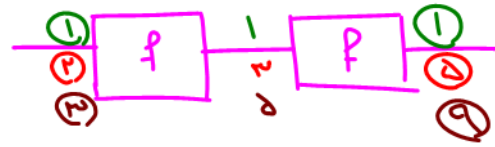


مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1) \mid x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟
(تقریبی ۱۴)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7), (5,9)\}$$

$$f(f(x)) = f \circ f = \{(1,3), (3,7), (5,9)\}$$



(تقریبی ۱۶)

مثال: اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

(۱) ۴ - (۲) ۳ - (۳) ۲ - (۴) ۱ -

$$f(g(\sqrt{2})) = f(-2-\sqrt{2}) = \left[\underbrace{-2-\sqrt{2}}_{=-3.4} \right] = -4$$



$$g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{-1} = -2-\sqrt{2}$$

(تقریبی خارج ۱۸)

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ ، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

(۱) تعریف نشده ✓ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

$$-x^2-x+2 \geq 0 \xrightarrow{(-1)}$$

$$x^2+x-2 \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$

$$D_f = [-2, +1]$$

$$f(-1) = \sqrt{2}$$

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \text{تعریف نشده}$$

$$\sqrt{2} \notin D_f$$

$$\sqrt{-\sqrt{2}} \notin \mathbb{R}$$



مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$

(تقریبی ۹۰)

کدام است؟

(۱) ۹ ✓ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۶

$$f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$$



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < -1 \\ \frac{-5}{x} + 1 & -1 \leq x < 1 - \{0\} \\ \sqrt{x^2 + x + 6} & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f\left(f\left(\frac{-5}{4}\right)\right)$ کدام است؟

پاسخ: $f\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-5}{\frac{3}{2}} = -\frac{10}{3} = -\frac{5}{\frac{3}{2}}$

(فوشوان)

کدام است؟

۷ (۳) ✓ ۶ (۲) -۵ (۱) $\frac{7}{6}$ (۴)

$f\left(f\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{5}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-5}{-\frac{5}{\frac{3}{2}}} + 1 = 7$

(ریاضی ۱۴۰۱)

مثال: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $(f \circ f \circ f)(\sqrt{2})$ کدام است؟

پاسخ: $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3(\sqrt{2}) - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} = \frac{2}{3 - 2} = 2$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ مقدار $f \circ f \circ \dots \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

پاسخ: $2 + \sqrt{2}$ (۱) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $2(\sqrt{2} + 1)$ (۳) $2(\sqrt{2} - 1)$ (۴)



مثال: اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، مقدار $(g \circ f)\left(\frac{-5}{3}\right)$

(تجربی ۱۴۰۲)

کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳) ✓

۴ (۱)

$$g\left(f\left(\frac{-5}{3}\right)\right) = g\left(\frac{-7}{3}\right) = f\left(\left[\frac{-7}{3} + f\left(\frac{-7}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[\frac{-7}{3} - \frac{11}{3}\right]\right) = f(-6) = -6$$

$$f\left(\frac{-5}{3}\right) = 2\left[\frac{-5}{3}\right] - \left(\frac{-5}{3}\right) = -4 + \frac{5}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$[-1, 6] = -3$$

مثال: اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، مقدار $(f \circ g)\left(\frac{-1}{3}\right)$ کدام

(تجربی فارغ ۱۴۰۲)

است؟

۴ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۲ (۱)



مثال: اگر $f(x) = 2x + a$ ، $g(x) = 6 - 2x$ و $(f \circ g)(2) - (g \circ f)(a) = 3$ ، مقدار a کدام

(موج آزمون نشر الکو)

است؟

$$\frac{5}{7} \quad (4) \checkmark$$

$$\frac{7}{5} \quad (3)$$

$$g(2) = 2$$

$$g(2a) = 6 - 2a$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$f(a) = 2a$$

$$f(2) = 4 + a$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$f(g(2)) - g(f(a)) = 3$$

$$f(2) - g(2a) = 3$$

$$4 + a - (6 - 2a) = 3$$

$$4 + a - 6 + 2a = 3$$

$$3a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{3}$$



$$\frac{(f \circ g)(1) + (g \circ f)(-4)}{(f \circ f)(-3)}$$

مثال: شکل مقابل نمودار توابع f و g را نمایش می‌دهد. حاصل

کدام است؟

۳ (۱)

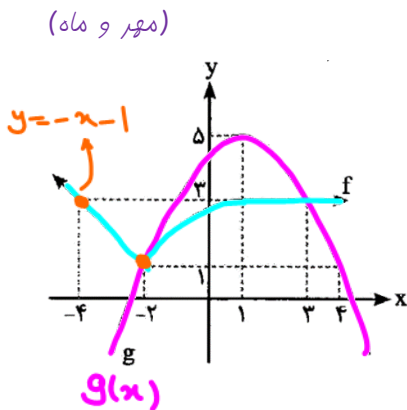
-۳ (۲)

۲ (۳) ✓

۴ قابل محاسبه نیست.

$$\frac{f(g(1)) + g(f(-4))}{f(f(-3))} =$$

$$\frac{f(5) + g(3)}{f(2)} = \frac{3 + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

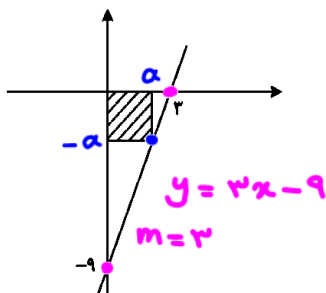


(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

مثال: در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟

$$A|_{-a} \rightarrow -a = 3a - 9 \Rightarrow 4a = 9 \rightarrow a = \frac{9}{4}$$

$$S = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$$



(ریاضی خرداد ۱۴۰۳)

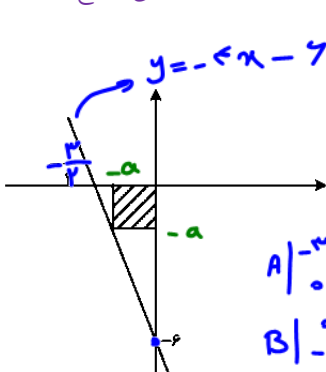
مثال: در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟



$$y = -4x - 6 \xrightarrow{(-a, -a)} -a = +4a - 6 \rightarrow$$

$$5a = 6 \rightarrow a = \frac{6}{5}$$

$$S = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$$



(مهر و ماه)

مثال: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $(f \circ f)\left(\frac{7}{2}\right)$ کدام است؟

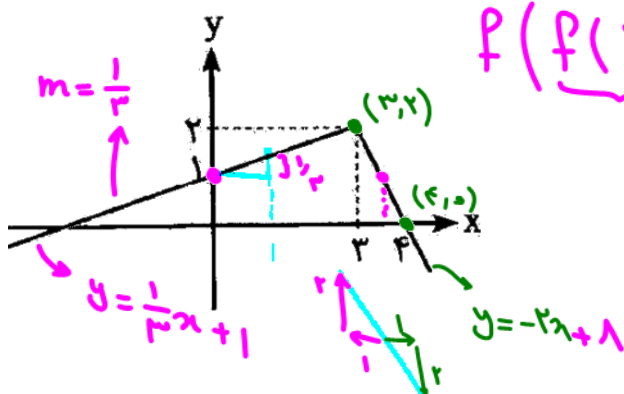
$$f\left(f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = f(1) = \frac{4}{3}$$

۱ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۲)

صفر (۳)

$\frac{4}{3}$ (۴) ✓



مثال: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

(تجربی ۹۶)

$x+1$ (۴)

$-x-1$ (۳)

$-x$ (۲)

x (۱)

$x=1 \Rightarrow f(1)=5$

$g(5) = \frac{1-15}{5} = -2$

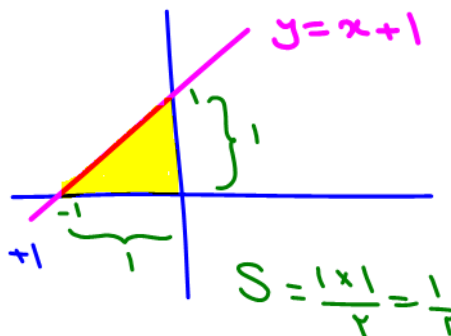


مثال: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ و $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = f \circ g(x)$ و محورهای مختصات کدام است؟

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1$

$g(x) = (x+1)^3 - 1$

$f(g(x)) = \sqrt[3]{(x+1)^3 - 1 + 1} = x+1$



۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

مثال: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

(تجربی ۹۵)

۶ (۴)

$4/5$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند، دامنه تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(تقریبی خارج ۹۴)

- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$



$$x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$D_{g(f(x))} = x \in D_f, f(x) \in D_g \Rightarrow$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشد، دامنه تعریف $g \circ f$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

$$D_g: x-x^2 \geq 0, D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{g(f(x))}$$

$$x=0 \rightarrow g(f(0)) = g(1) = 0$$

$$x=-1 \rightarrow g(f(-1)) = g(-1) = 0$$

$$x=2 \rightarrow g(f(2)) = g(-\frac{3}{5}) = \sqrt{-} \quad \times$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشد، دامنه تعریف تابع $f \circ g$

(ریاضی ۹۴)

کدام است؟

$$f(g(x))$$

$$[-4, 2] \quad (1) \times$$

$$[-2, 0] \quad (2) \times$$

$$[-4, -1] \cup (1, 2] \quad (3) \checkmark$$

$$[-4, -2] \cup (0, 2] \quad (4) \times$$

$$x=0 \rightarrow g(0) \times$$

$$x=-2 \rightarrow f(g(-2)) = \log_2(0) \times$$



کدام است؟

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشد، دامنه تعریف تابع $f \circ g$

(ریاضی فارغ ۹۵)

$$D_{f(g(x))}$$

$$x = -1 \Rightarrow \log 16 = g(-1)$$

$$\sqrt{2 - \log 16} = \sqrt{+}$$

$$x = 20$$

$$\log(100) = 2$$

$$f(2) = 0 \checkmark$$

$$(0, 5) \cup [20, 25) \quad (1) \times$$

$$[-5, 0) \cup (15, 20] \quad (2) \checkmark$$

$$(15, 20] \quad (3) \times$$

$$[-5, 0) \quad (4) \times$$

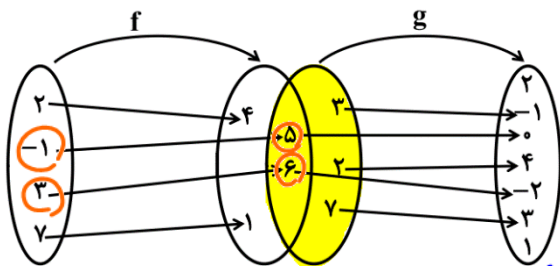
مثال: با توجه به شکل زیر، دامنه $g \circ f$ چند عضو دارد؟

(1)

(2) $\checkmark$

(3)

(4)



$$D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{-1, 3\}$$

مثال: نمودار توابع f و g به شکل مقابل است. دامنه تعریف تابع $g \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح

(مهر و ماه)

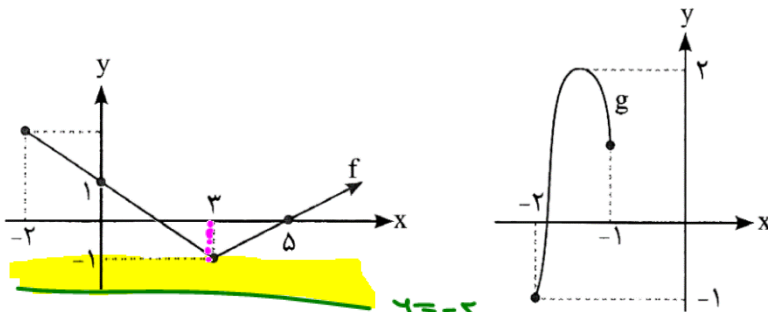
است؟

(1) صفر

(2) $\checkmark$

(3)

(4)



$$D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \in [-2, 5], -2 \leq f(x) \leq 1$$

(تبریزی ۱۶)

مثال: اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

(4)

(3) $\checkmark$

(2) $\frac{7}{2}$

(1) $\frac{11}{9}$

$$\text{ورودی} \Rightarrow 2x - 2 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \text{خروجی}$$

$$2x - 2 = 4$$

$$x = 3$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3}$$

$$x = 3$$

مثال: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد،

عدد a کدام است؟

(تجربی ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: توابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$

مفروضاند، اگر $(4,2) \in f \circ g$ و $(4,1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

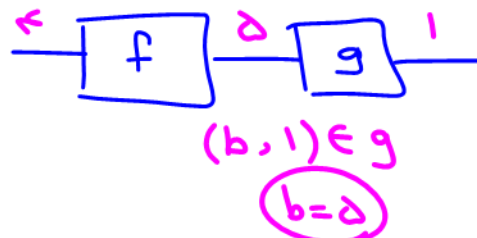
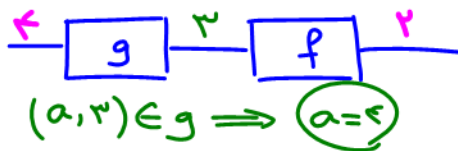
(ریاضی ۹۰)

(۵, ۴) (۴)

(۴, ۵) (۳✓)

(۴, ۳) (۲)

(۳, ۴) (۱)



مثال: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت زیر باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، مقدار $f(5)$ کدام

(تجربی خارج ۹۱)

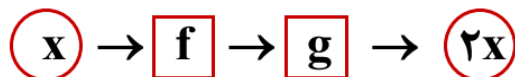
است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(تجربی ۱۴)

مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x+1}{x-1}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f\left(a f\left(\sqrt{5}\right)\right) = 2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟
(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $-\frac{1}{3}$ ✓

(۳) $\frac{1}{5}$

(۴) $-\frac{1}{5}$

$$f(a f(\sqrt{5})) = f(3a) = 2 \rightarrow (3a)^2 - [3a] = 2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3 \quad a = -\frac{1}{3}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟
(ریاضی ۱۹)

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$

(۲) $\frac{2x}{x^2-1}$

(۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$

(۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{1} = \frac{x^2 - 2x(x-1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{-(2x+1)}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

(۵) $x=2$

(تقریبی ۹۷)

مثال: اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $x^2 - x + 3$

(۲) $x^2 - 2x - 1$

(۳) $x^2 - 2x + 1$

(۴) $x^2 - x + 1$



(نزدیک فیل سبز)

مثال: اگر $f(\cot x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{x^3+1}{x^2}$

(۲) $\frac{x^2+1}{x^3}$

(۳) $\frac{x^3-1}{x^2}$

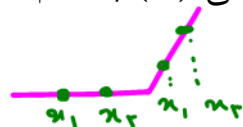
(۴) $\frac{x^2-1}{x^3}$



تابع صعودی و نزولی:

تابع $f(x)$ را صعودی گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$



تابع $f(x)$ را نزولی گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$



تابع $f(x)$ را صعودی اکید گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) < f(x_2)$$



تابع $f(x)$ را نزولی اکید گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$f(x_1) > f(x_2)$$



تابع $f(x)$ را ثابت گوئیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی $f(x)$ داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

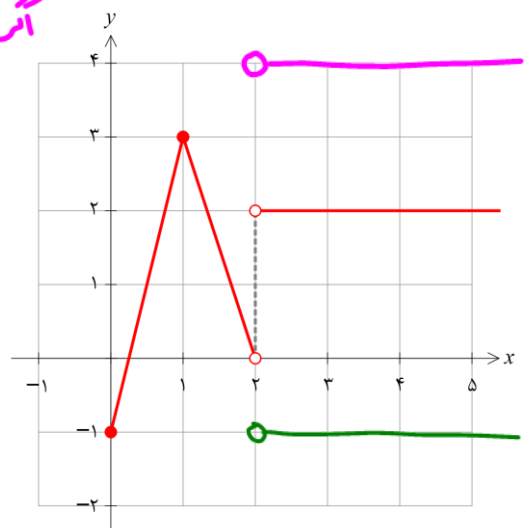
هم صعودی هم نزولی

نکته: تابعی که صعودی یا نزولی باشد را یکنوا نامیده و تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد را اکیداً یکنوا می‌نامیم.

نکته: تابعی که در بازه‌ای اکیداً صعودی و در بازه‌ای دیگر اکیداً نزولی باشد را غیر یکنوا می‌نامیم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & 0 \leq x < 1 \\ -3x+6 & 1 \leq x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$ را رسم کرده و بازه‌های یکنوایی آن را تعیین نمایید.

۲ اگر ۱- بود
۲ اگر ۲- بود



صعودی: $x \in [0, 1] \cup (2, +\infty)$

اکیداً صعودی: $x \in [0, 1]$

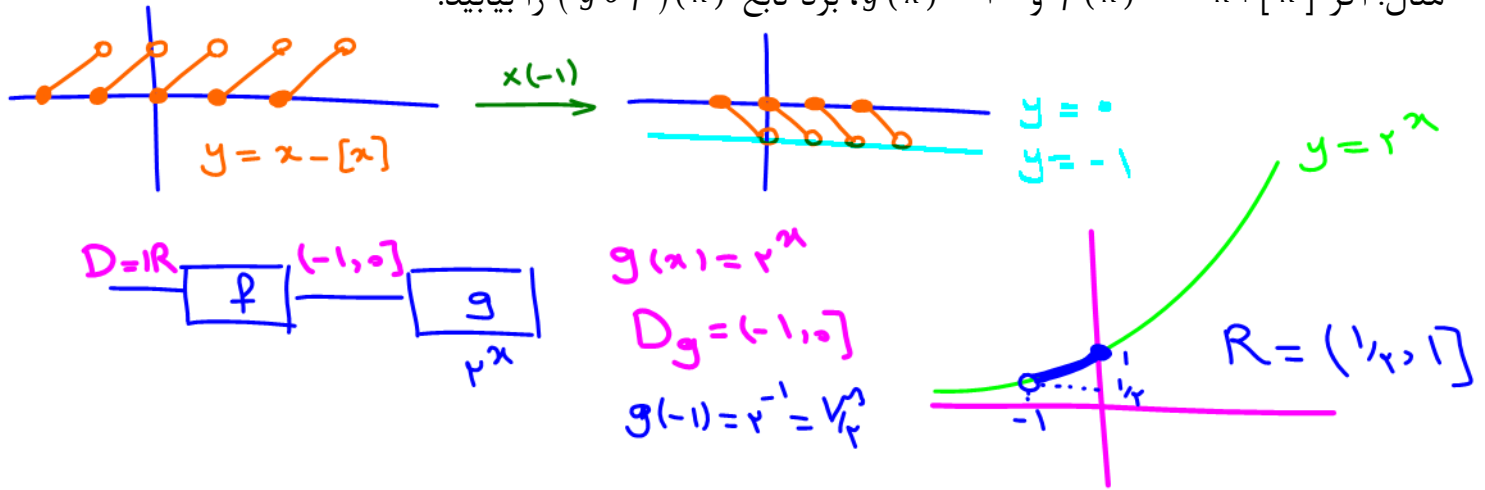
نزولی: $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

اکیداً نزولی: $[1, 2]$



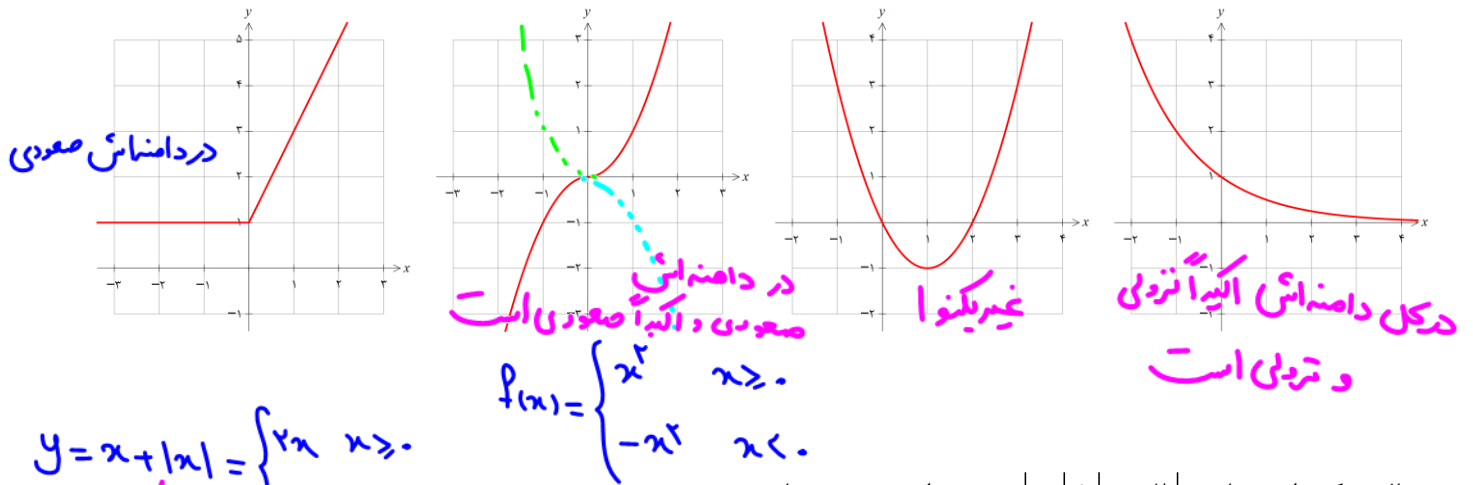
(هم صعودی هم نزولی): $(2, +\infty)$: ثابت

مثال: اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ برد تابع $(g \circ f)(x)$ را بیابید.

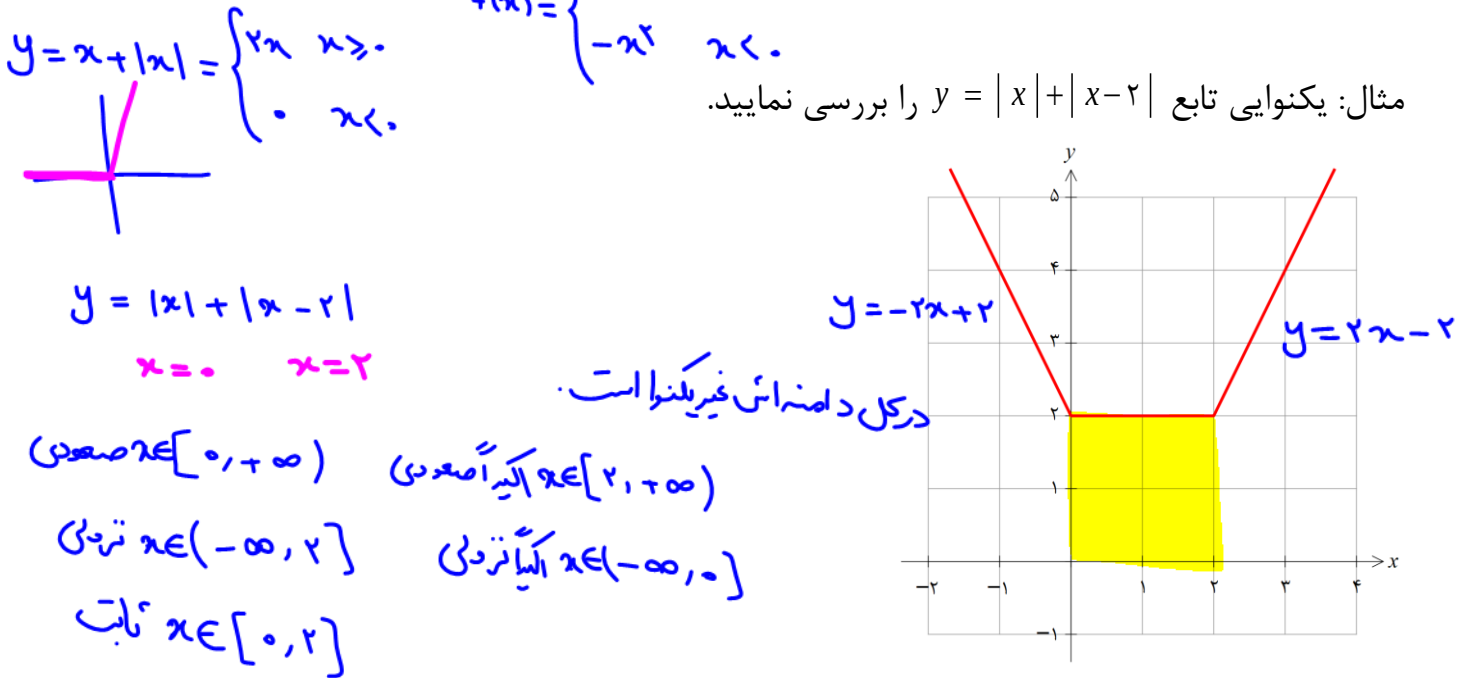


مثال: صعودی و نزولی بودن توابع زیر را بررسی نمایید.

(۴) $f(x) = x + |x| + 1$ (۳) $f(x) = x|x|$ (۲) $f(x) = x^2 - 2x$ (۱) $f(x) = 2^{-x}$



مثال: یکنوایی تابع $y = |x| + |x-2|$ را بررسی نمایید.

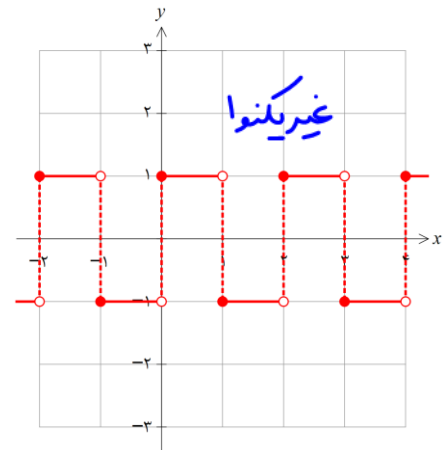


مثال: نمودار تابع $f(x) = (-1)^{[x]}$ را در بازه $f(x) = [-1, 2)$ رسم و سپس یکنوایی آن را بررسی نمایید.

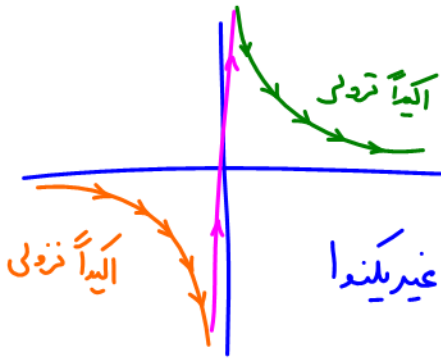
$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = (-1)^{-1} = -1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = (-1)^0 = +1$$

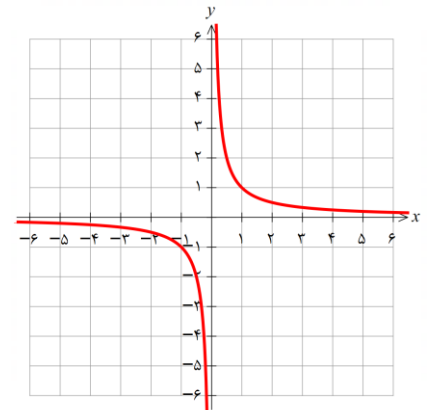
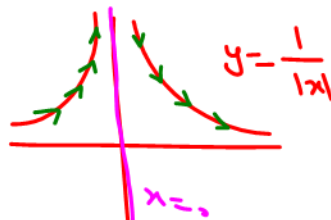
$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = (-1)^1 = -1$$



مثال: یکنوایی تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در دامنه آن بررسی نمایید.



هر تابعی که مجانب قائم دارد، در هر بازه شکل مجانب قائم غیر یکنوا است.



مثال: تابعی مثال بنزید که صعودی باشد ولی اکیداً صعودی نباشد.

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



مثال: تابعی مثال بنزید که نزولی باشد ولی اکیداً نزولی نباشد.



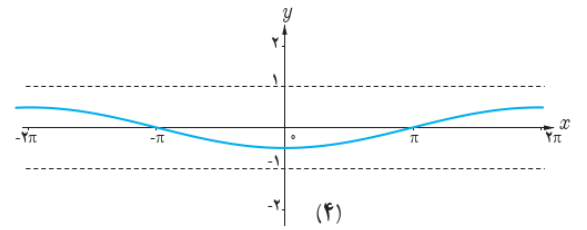
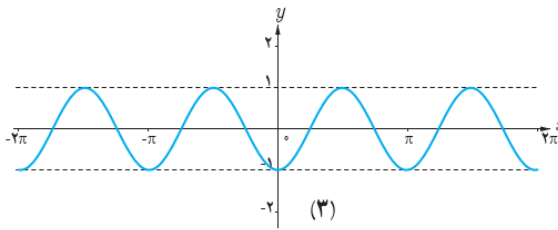
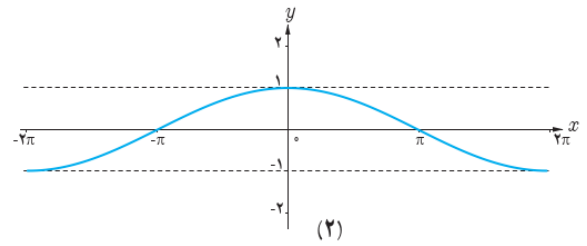
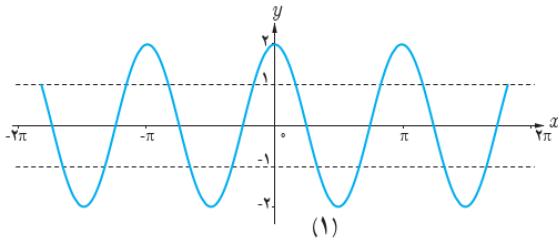
مثال: با استفاده از نمودار تابع $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است. ضابطه هر نمودار را مشخص نمایید.

الف) $y = -\frac{1}{3} \cos(-\frac{1}{3}x)$ (۴)

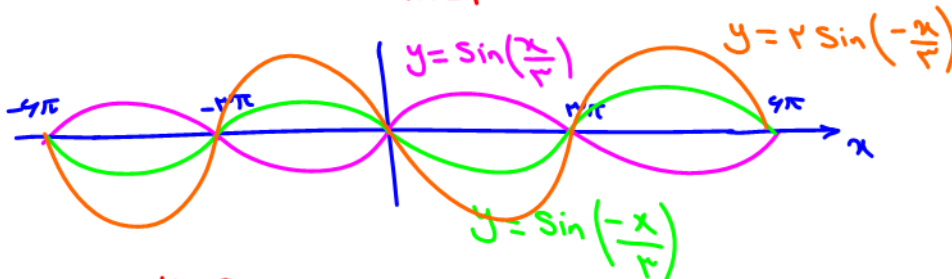
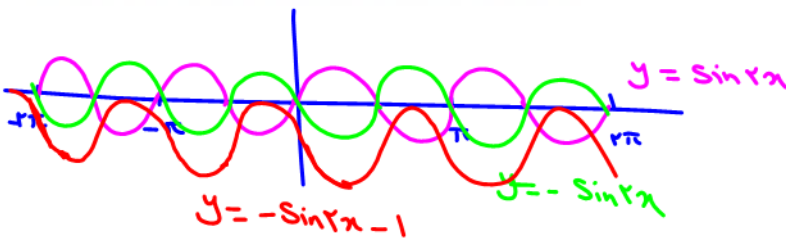
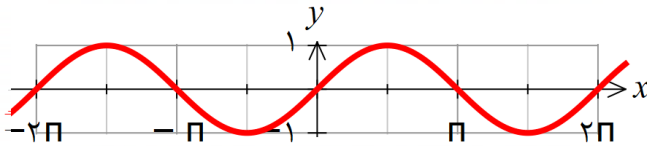
ب) $y = 2 \cos 2x$ (۱)

پ) $y = \cos(\frac{1}{3}x)$ (۲)

ت) $y = -\cos 2x$ (۳)



مثال: نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



$y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

$y = 2 \sin(-\frac{x}{3})$, $-3\pi \leq x \leq 3\pi$

مثال: تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $f(x^2 - 1) < f(2x + 2)$ ، حدود x کدام است؟ (مبتکران ۹۹)

(۱) $(-2, 4)$

(۲) $(-1, 3)$ ✓

(۳) $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

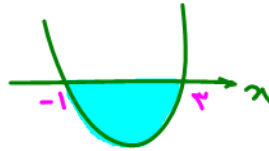
(۴) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x^2 - 1 < 2x + 2$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

$(x - 3)(x + 1) < 0$



$-1 < x < 3$

مثال: تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر

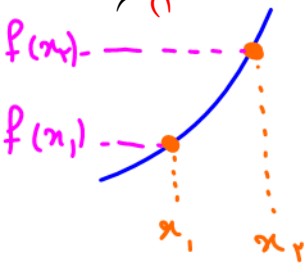
$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟ (ریاضی فارغ ۱۴۰۲)

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۲

(۱) ۱ ✓



$2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4$

$m^2 - 5m - 6 < 0$

$(m - 6)(m + 1) < 0$

$-1 < m < 6$

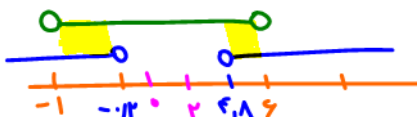
$2m^2 - 9m - 2 > 0$

$\frac{9 \pm \sqrt{97}}{4} \approx 4.8$

$m^2 - 4m + 4 > 0$

$(m - 2)^2 > 0$

$m \neq 2$



مثال: در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع

(تجربی ۹۷)

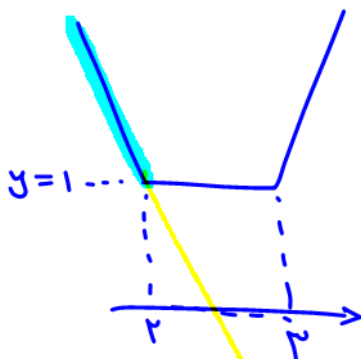
$g(x) = 2x^2 - x - 10$ ، در چند نقطه مشترک هستند؟

(۴) فاقد نقطه مشترک

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱ ✓



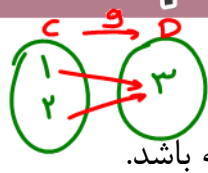
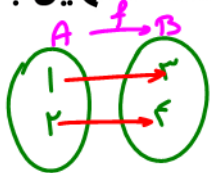
$x \leq 2 \Rightarrow y = 2 - x + 3 - x = -2x + 5$

$2x^2 - x - 10 = -2x + 5$

$2x^2 + x - 15 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-15) = 121$

$\frac{-1 \pm 11}{4} \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = -5$



تابع یک به یک:

تابعی یک به یک است که به ازای متغیر (y) فقط یک (x) داشته باشد.

یک به یک است
(دارون پذیر)
 $\forall y_1 = y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow y = f(x)$

بررسی تابع یک به یک از روی زوج مرتبها: تابعی یک به یک است که مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد و اگر مؤلفه‌های دوم زوج مرتبها برابر بودند، مؤلفه‌های اول نیز برابر باشند.

مثال: رابطه‌ی زیر نمایشگر یک تابع یک به یک می‌باشد. مقدار متغیر m را بیابید.

$$f = \{ (1, a+1), (1, 5-a), (2m, a-1), (5, a-3) \}$$

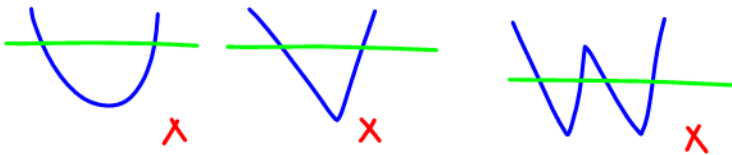
$$a+1 = 5-a \Rightarrow a=2$$

$$f = \{ (1, 3), (2m, 1), (5, -1) \}$$

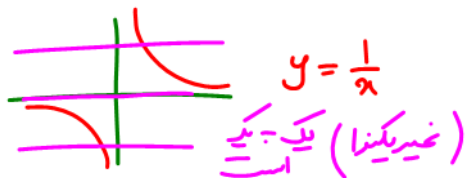
$$m \in \mathbb{R} - \{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \}$$

$$2m \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \quad 2m \neq 5 \Rightarrow m \neq \frac{5}{2}$$

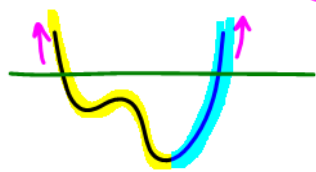
بررسی تابع یک به یک از روی نمودار: تابعی یک به یک است که هر خط افقی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



روش‌های تشخیص تابع یک به یک:



۱- عددگذاری: برای بیان مثال نقض و رد گزینه استفاده می‌شود.



۲- توابع درجه‌ی زوج هیچ‌گاه یک به یک نیستند، مگر این که محدودیت دامنه ایجاد شود.

۳- تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ با شرط آن که $x \geq \frac{-b}{2a}$ یا $x \leq \frac{-b}{2a}$ یک به یک است.

الیه صعودی
(یک به یک)

صعودی (یک به یک)

$$x + |x| = y$$

۴- تابع $y = |ax + b|$ یک به یک نیست.

۵- توابع یکنوای اکید (صعودی اکید یا نزولی اکید) یک به یک هستند.



۶- توابع به فرم $y = ax + b + k|cx + d|$ ممکن است یک به یک باشد و ممکن است یک به یک نباشد.

علامت سیما (برابر) ← یک به یک ✓
" " نابرابر ← یک به یک ✗

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟

$$y = [x] \xrightarrow{y=1} [x]=1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \quad \times$$

$$y = \sin x \xrightarrow{y=0} \begin{array}{c} \pi \\ 0, 2\pi \\ 3\pi \end{array} \quad x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

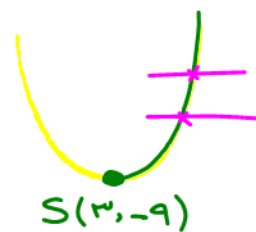

$$y = x^4 + x^3 \xrightarrow{y=0} x^4 + x^3 = 0 \rightarrow x^3(x+1) = 0 \quad \times$$

$x=0$ $x=-1$

$$y = x^4 - 5 \xrightarrow{y=-4} -4 = x^4 - 5 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = -1, x = +1$$

$\times$

$$y = x^2 - 6x, \quad x \geq 3$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$


$S(3, -9)$

$$y = x^3 + x \quad \checkmark$$

$$y' = 3x^2 + 1 > 0 \rightarrow \text{یک به یک}$$

آلایه صعودی

$$y = x^3 - x$$

$$y=0 \Rightarrow (x^3 - x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-1) = 0$$

$\odot$ $\ominus$ $\odot$

$$y = \sqrt{x-2} + |x+4|$$

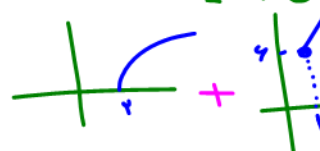
$y = x+4$

آلایه صعودی = آلایه صعودی + آلایه صعودی

آلایه نزولی = آلایه نزولی + آلایه نزولی

آلایه صعودی = آلایه صعودی $\rightarrow$ یک به یک

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$



$$y = x + |2x - 2|$$

$$y = \begin{cases} 3x - 2 & x \geq 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$$


$m=3$ $m=-1$

$$y = 2x + |x - 1|$$

$$y = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

آلایه صعودی $\rightarrow$ یک به یک



تابع معکوس:

تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد و برای یافتن تابع معکوس به روش های زیر عمل می کنیم.

۱- توابع زوج مرتبی: جای مؤلفه های اول و دوم را عوض می کنیم.

مثال: معکوس تابع زیر را بیابید.

$$f = \{(1, 4), (4, 3)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(4, 1), (3, 4)\}$$

دو تابع $f = \{(1, 4), (2, 3)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 4)\}$ را در نظر می گیریم. رابطه معکوس این دو تابع به صورت زیر می باشد.

$$f = \{(1, 4), (2, 3)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2)\} \quad \text{تابع وارون } f \quad \checkmark$$

$$g = \{(1, 4), (2, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (4, 2)\} \quad \text{وارون تابع } g \quad \times$$

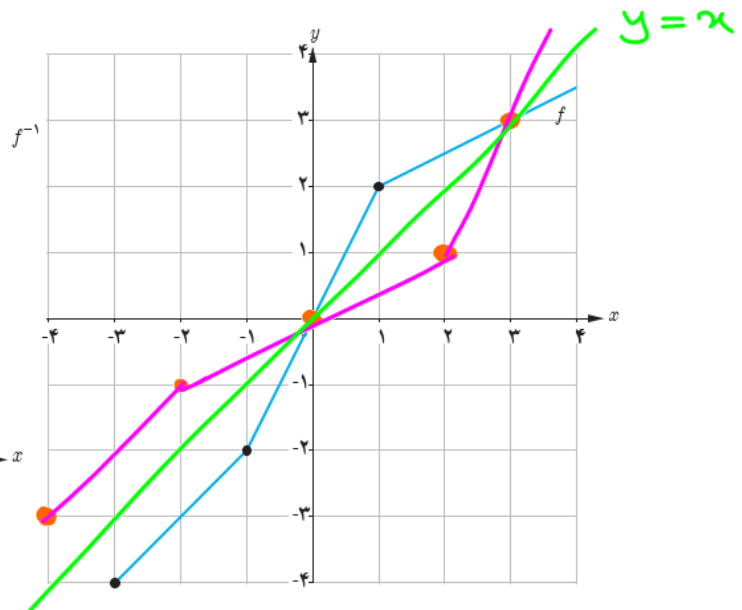
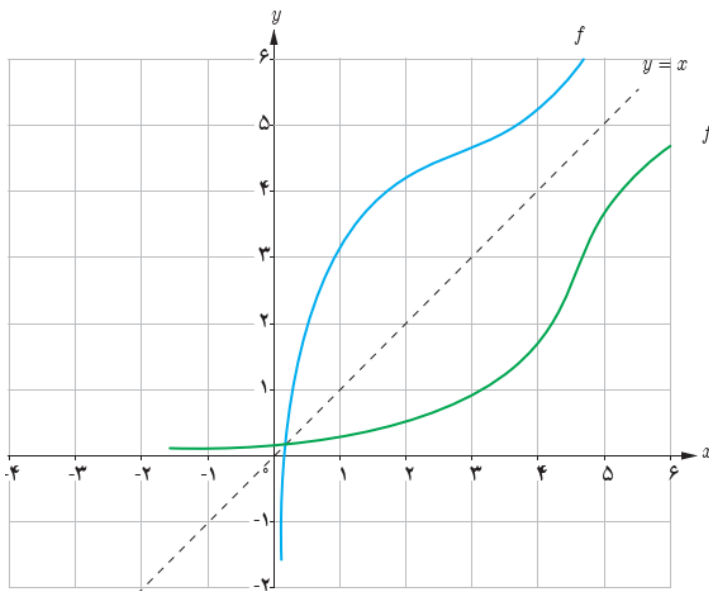
یک به یک نیست

تابع f را که رابطه معکوس آن، تابع می باشد، معکوس پذیر (وارون پذیر) می گوئیم.

تابع g را که رابطه معکوس آن، تابع نمی باشد، معکوس ناپذیر (وارون ناپذیر) می گوئیم.

اصطلاحاً f^{-1} را تابع معکوس تابع f می نامیم ولی در مورد تابع g ، رابطه g^{-1} صرفاً رابطه معکوس تابع g می باشد و از آنجایی که g^{-1} تابع نیست، نمی توان به آن تابع معکوس تابع g گفت.

۲- یافتن معکوس از روی نمودار: قرینه تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) را رسم می کنیم.



۳- یافتن تابع معکوس در توابعی که ضابطه آن‌ها داده شود: ابتدا یک به یک بودن بررسی شده و سپس متغیر x را بر حسب متغیر y یافته و در نهایت جای متغیرهای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال: معکوس توابع زیر را بیابید.

یافتن وارون:

$$\begin{aligned} y+9 &= (x-3)^2 \xrightarrow{x < 3} \\ \sqrt{y+9} &= |x-3| \xrightarrow{-3} \\ \sqrt{y+9} &= 3-x \xrightarrow{\times (-1)} \\ \sqrt{y+9} - 3 &= -x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \\ x &= 3 - \sqrt{y+9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= 3 - \sqrt{x+9} \\ D_{f^{-1}} &= (-9, +\infty) = R_f \\ R_{f^{-1}} &= (-\infty, 3) = D_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3, -9) \\ D_f &= (-\infty, 3) \\ R_f &= (-9, +\infty) \end{aligned}$$

$$y = x^2 - 6x, \quad x < 3$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 9 - 9 \Rightarrow \\ y &= (x-3)^2 - 9 \end{aligned}$$

بررسی وارون پذیری:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \Rightarrow (x_1-3)^2 - 9 = (x_2-3)^2 - 9 \xrightarrow{+9} \\ (x_1-3)^2 &= (x_2-3)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x_1-3| = |x_2-3| \Rightarrow \\ 3-x_1 &= 3-x_2 \xrightarrow{-3} -x_1 = -x_2 \xrightarrow{\times (-1)} x_1 = x_2 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

$$f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x-1} + 1 \xrightarrow{-1} \\ y-1 &= \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{(\quad)^3} \\ (y-1)^3 &= x-1 \xrightarrow{+1} \\ (y-1)^3 + 1 &= x \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 1 \end{aligned}$$

$$y = \log_2 2x$$

$$\log_2 2x = y \Rightarrow 2x = 2^y \xrightarrow{\div 2} x = 2^{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{x-1}$$

$$\begin{aligned} y &= \log_2 2x \\ y-1 &= \log_2 x \\ 2^{y-1} &= x \end{aligned}$$

یافتن وارون: $\frac{y}{1} = \frac{x-4}{x+1} \rightarrow$

$$yx + y = x - 4 \rightarrow$$

$$4 + y = x - yx \rightarrow$$

$$(4+y) = x(1-y) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{4+y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4+x}{1-x} \end{aligned}$$

بررسی وارون پذیری: $y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1-4}{x_1+1} = \frac{x_2-4}{x_2+1} \Rightarrow$

$$x_1x_2 + x_1 - 4x_2 - 4 = x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 4$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \xrightarrow{\div \Delta} x_1 = x_2$$

وارون پذیری است $x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ y &= \frac{dx-b}{-cx+a} \end{aligned}$$

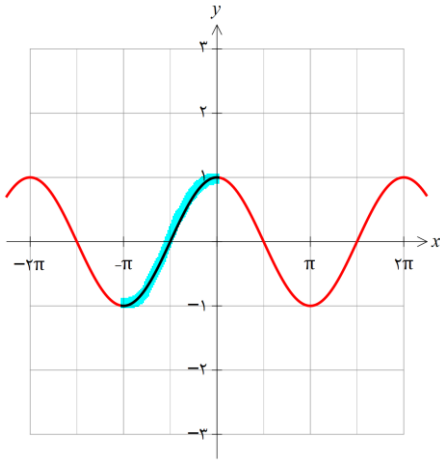
مثال: معکوس تابع $y = \cos x$ روی کدام بازه‌ی زیر یک تابع است؟

(۱) $[-\pi, 0]$

(۲) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(۳) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

(۴) $[0, 2\pi]$



مثال: اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x - 1$ ، ضابطه‌ی تابع $f \circ g^{-1}$ را بیابید.

$$g(x) = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = x + 1}$$

$$f(g^{-1}(x)) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

مثال: اگر تابع $f(x) = x^3 + 3x + 10$ و $f(a) = 24$ ، آنگاه مقدار $f^{-1}(-4)$ را بر حسب a بیابید.

$$a^3 + 3a + 10 = 24 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\boxed{f^{-1}(-4) = b} \xrightarrow{f}$$

$$f(f^{-1}(-4)) = f(b)$$

$$\boxed{-4 = f(b)}$$

$$-4 = x^3 + 3x + 10$$

$$-14 = x^3 + 3x$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$\boxed{x = -a}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f^{-1}(\sin x)$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow x^2 y + y^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = x^2 - x^2 y^2 \rightarrow x^2(1-y^2) = y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \rightarrow \boxed{|x| = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{|\cos x|} \rightarrow \begin{cases} \tan x \\ -\tan x \end{cases}$$

۴۱

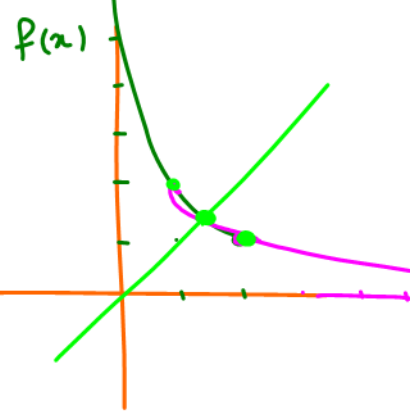
مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه

و برد تابع f و وارون آن را بنویسید و سپس این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم نمایید. $x_5 = \frac{-b}{2a} = 2$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1, \quad x \leq 2$$

$$D_f = (-\infty, 2], \quad R_f = [1, +\infty)$$

یافتن f^{-1} : $y-1 = (x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$



$$|x-2| = \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \leq 2} 2-x = \sqrt{y-1} \rightarrow x = 2 - \sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$$

نکته: اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن گاه داریم:

$$(f \circ g)(x) = x, \quad (g \circ f)(x) = x$$

مثال: در هر مورد از قسمت‌های زیر، نشان دهید که f و g وارون یکدیگر هستند.

الف) $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$

$$g(f(x)) = \frac{2(\frac{-7}{2}x - 3) + 6}{-7} = \frac{-7x - 6 + 6}{-7} = \frac{-7x}{-7} = x$$

$$f(g(x)) = \frac{-7}{2} \left(\frac{-2x+6}{-7} \right) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$
تابع f و g وارون یکدیگرند

ب) $g(x) = 8 + x^2; x \leq 0$ و $f(x) = -\sqrt{x-8}$



نکاتی در مورد تابع وارون

۱- اگر توابع f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند، آن گاه: $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$.

۲- اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی تابع f^{-1} قرار دارد.

۳- اگر توابع f و f^{-1} متقاطع باشند، نقطه برخورد آن‌ها روی نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$) قرار می‌گیرد.

۴- در توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، در این صورت $f(x) = f^{-1}(x)$ می‌باشد.

$$5) \forall x \in D_f ; (f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$6) \forall x \in D_f ; (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

مثال: برد تابع معکوس تابع $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ را بیابید.

$$R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

مثال: اگر نقطه $(k, 2)$ روی تابع معکوس تابع $y^5 + y = x$ قرار داشته باشد، مقدار متغیر k را بیابید.

$$\left| \begin{matrix} k \\ 2 \end{matrix} \right| \in f^{-1} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix} \right| \in f \quad k^5 + k = 2 \rightarrow k=1$$

مثال: نقطه برخورد تابع $y = x^3 + x - 8$ با معکوس خودش را بیابید.

$$x^3 + x - 8 = y \xrightarrow{y=x} x^3 + x - 8 = x$$

$$x^3 = 8 \rightarrow x=2 \rightarrow y=2$$

مثال: ضابطه تابع معکوس $f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$ را بیابید.

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) = \frac{3x+5}{x-3}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3$ و $g(x) = x^3$ مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(44) = 4$$

$$f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3 \xrightarrow{f^{-1}(5)=?} 5 = \frac{x}{\lambda} - 3 \Rightarrow 8 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 44$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(6) = f^{-1}(f^{-1}(6)) = f^{-1}(72) = 60$$

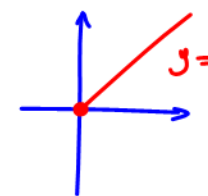
$$f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3 \Rightarrow 9 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 72 \quad f(x) = \frac{x}{\lambda} - 3 \Rightarrow 75 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 60$$

$$(f \circ g)^{-1}(5) = (g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = 4$$

مورد اول همین سؤال

مثال: توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$



$y = |x| \Rightarrow y = x \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1}(x) = x$

$x \geq 0$
 $R_f = [0, +\infty)$
 $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$
 $R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

ب) $g(x) = -x^2$



$y = -x^2 \xrightarrow{x \leq 0} x^2 = -y \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{x^2} = \sqrt{-y} \xrightarrow{|x| = \sqrt{-y}} x = \sqrt{-y} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{نهاد وارون}} f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$

$D_f = (-\infty, 0]$
 $R_f = (-\infty, 0]$
 $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$
 $R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید.

ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید.

$f(x) = \sqrt{x+3}$, $D_f = [-3, +\infty)$, $R_f = [0, +\infty)$

$f^{-1}(x) = x^2 - 3$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$, $R_{f^{-1}} = [-3, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x+3} \xrightarrow{y = \sqrt{x+3}} y^2 = x+3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = y^2 - 3 \xrightarrow{\text{نهاد}} f^{-1}(x) = x^2 - 3$

مثال: رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند، به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

$y = \frac{9}{5}x + 32$
 $y - 32 = \frac{9}{5}x \xrightarrow{\times \frac{5}{9}} x = \frac{5}{9}(y - 32)$
 $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

(تجربی ۱۴۰۱)

مثال: وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند؟

$(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8})$ (۴) $(1, 2)$ (۳) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ (۲) $(-1, -2)$ (۱)

$(a, b) \in f^{-1} \Rightarrow (b, a) \in f$

$(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \in f \checkmark$
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} \checkmark$

$(-1, -2) \notin f$
 $-1 \notin f$

مثال: اگر نقطه $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a کدام

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

است؟

$3/5$ (۴) 3 (۳) 5 (۲) $\frac{5}{27}$ (۱)



مثال: به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

$10y - x = -10$ را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند؟

5 (۴) 9 (۳) 12 (۲) ✓ 15 (۱)

$10y - x = -10 \xrightarrow{y=1} x = 20$

$20 \in f^{-1} \Rightarrow 10 \in f$

$1 + a = 20 \rightarrow a = 19$

مثال: وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض 10 قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۲)

۱ (۴) ✓

۲ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$y = 12 - x \rightarrow x = 2$$

$$10 \in f^{-1} \Rightarrow 10 \in f$$

$$f(m+4) = f(5) = \sqrt{5-2} \sqrt{1(5)-1}$$

$$f(5) = 1$$

$$\sqrt{10-2} \sqrt{10m-1} = 2 \Rightarrow$$

$$10-2\sqrt{10m-1} = 4 \xrightarrow{\div 2}$$

$$5 - \sqrt{10m-1} = 2 \rightarrow 3 = \sqrt{10m-1} \rightarrow$$

$$10m-1=9 \rightarrow m=1$$

مثال: اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۶)

(۲, ۳) (۴) ✓

(۲, ۱) (۳)

(-۱, ۳) (۲)

(-۱, ۱) (۱)

$$a^2 - a = 2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} \quad (-1, 5) \neq (-1, 4) \times$$

$$f = \{(3, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

$$b = 3$$

(ریاضی ۹۷)

مثال: کدام یک از تابع‌های زیر، یک به یک است؟

$$g(x) = x - \sqrt{x} \quad (۲)$$

$$f(x) = x + \sqrt{x} \quad (۱)$$

$$p(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (۴)$$

$$h(x) = 2x + \frac{1}{x} \quad (۳)$$

(قلم پی ۱۴۰۰)

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

$$g(x) = x - x\sqrt{x} \quad (۲)$$

$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{x} \quad (۱)$$

$$p(x) = 2x^2 - |x| \quad (۴)$$

$$h(x) = x + \frac{1}{x} \quad (۳)$$



(ریاضی ۱۱)

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

$$-8 \quad (۴)$$

$$-2 \quad (۳)$$

$$-5 \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ تعریف نشده}$$

مثال: تابع f با دامنه $(2, 3)$ و ضابطه $f(x) = [-x]x + [x]$ تعریف شده است. مقدار $f^{-1}(-5)$

(قلم پی ۹۹)

کدام است؟

$$\frac{8}{3} \quad (۴)$$

$$(۳) \text{ ناموجود}$$

$$\frac{7}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۱)$$



مثال: اگر نمودار تابع وارون $f(x) = x^3 + 2x + 2m$ از نقطه $(1, m)$ عبور کند، مقدار $f^{-1}(-6)$

(IQ کج)

کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ صفر}$$

مثال: اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $g\left(-\frac{3}{7}\right) + g\left(\frac{5}{9}\right)$

کدام است؟

(تجربی مهر ۱۴۰۰)

$-\frac{1}{3}$ (۴)

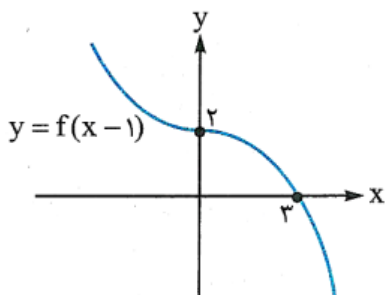
$-\frac{11}{28}$ (۳)

$\frac{19}{20}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

مثال: اگر شکل مقابل نمودار $f(x-1)$ باشد، حاصل $f(2) - f^{-1}(2)$ کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۰)



صفر (۱)

-1 (۲)

1 (۳)

5 (۴)

مثال: تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه،

(ریاضی ۱۴۰۰)

کدام است؟

$-\sqrt[3]{x}, x \leq 0$ (۲)

$-\sqrt{x^3}, x \leq 0$ (۱)

$-\sqrt[3]{x}, x \geq 0$ (۴)

$-\sqrt{x^3}, x \geq 0$ (۳)

d کدام است؟

(۱) - ۲

(۲) - ۱

(۳) ۱

(۴) ۲



مثال: قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط

(تقریبی ۹۷)

مثال: قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را

۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$

می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) - ۳

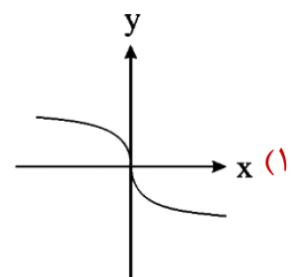
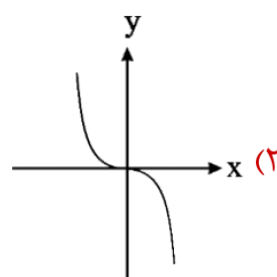
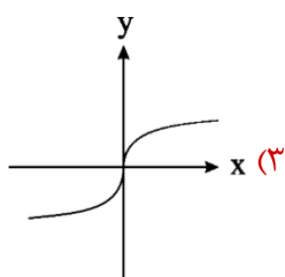
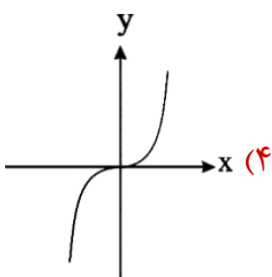
(۳) - ۲

(۴) - ۴

(تقریبی ۱۴۰۰)

مثال: اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

(تقریبی ۹۵)



برد تابع:

حدود تغییرات متغیر y را بر حسب متغیر x ، برد تابع می‌نامیم.

برد تابع زوج مرتبی:

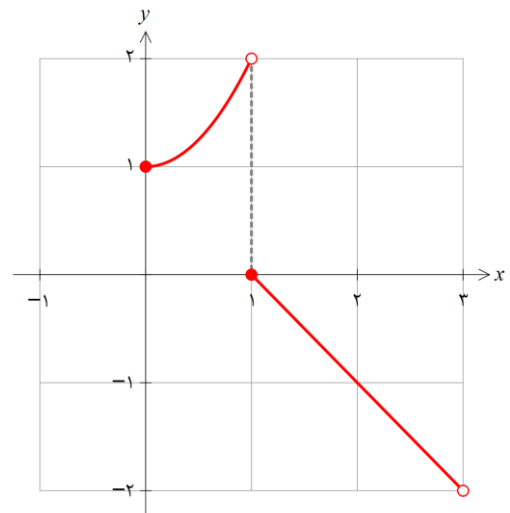
مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم را برد می‌نامیم.

$$f = \{(1, 4), (4, 3), (5, 6)\} \Rightarrow R_f =$$

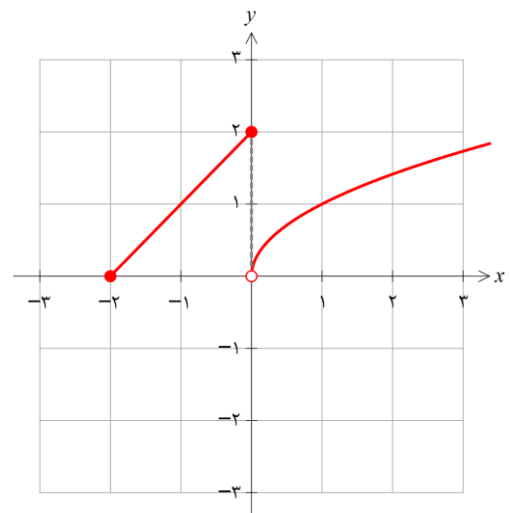
تشخیص برد تابع از روی نمودار:

تصویر نمودار تابع بر محور y ‌ها را برد تابع می‌نامیم.

مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ را بیابید.



مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 2 + x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را بیابید.



مثال: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، برد تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

مثال: اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = [x] + [-x]$ باشند، برد تابع $(f \circ g)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲

مثال: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $(g \circ f)(x)$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۹)

- (۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$



مثال: اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $(g \circ f)(x)$ ، کدام

است؟

(تقریبی فارچ ۹۹)

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1)$

مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 2x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

(موج آزمون نشر الگو)

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[\frac{-1}{2}, 0]$

مثال: برد تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ |x+2| & x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

(IQ کج)

- (۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ (۴) $\mathbb{R}$



مثال: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

بخش پذیری و بدست آوردن باقیمانده تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x) = 0$ باشد، چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ بخش پذیر است.

مثال: اگر $f(x) = x^4 - 16$ و $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

نکته: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از:

$$r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

مثال: در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ ، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده‌اند. نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است و سپس خارج قسمت تقسیم را بیابید.

مثال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^2 + x - 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

مثال: اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را بیابید.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.



اتحادهای مهم زیر را به خاطر می سپاریم

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^1 a^{n-2} + a^{n-1})$$

اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ ، اتحاد زیر شکل می گیرد.

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - x^1 a^{n-2} + a^{n-1})$$

اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ ، اتحاد زیر شکل می گیرد.

$$(x^n + a^n) = (x - a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + x^1 a^{n-2} - a^{n-1})$$

مثال: چندجمله‌ای $x^5 - 1$ را با عامل $x - 1$ تجزیه کنید.

مثال: چندجمله‌ای $x^6 - 64$ را با عامل $x - 2$ تجزیه کنید.

مثال: چندجمله‌ای $x^4 - 16$ را با عامل $x + 2$ تجزیه کنید.

مثال: چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را با عامل $x + 2$ تجزیه کنید.

مثال: هر گاه باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x + 3$ و $x - 2$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را به دست آورید.