کارنامه خرد

جزوه ریاضی دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

استاد سهیل بابازاده

$ax^2+bx+c=0$

$\alpha,\beta=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $\Delta=b^2-4ac$

نکات حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ مجموع ضرایب صفر باشد ($a+b+c=0$)، یکی از ریشه‌ها عدد ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

۲- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، ($a+c=b$)، یکی از ریشه‌ها عدد ۱- و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

مثال: معادلات درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

$(x-5)(x-2)=0$ ، $S=\frac{-b}{a}$, $P=\frac{c}{a}$

$x^2+7x+10=0$

$S=-7$, $P=10$

-5 , -2

$x^2-7x+10=0$

$S=7$, $P=10$

2 , 5

$x^2+3x-10=0$

$S=-3$, $P=-10$

-5 , 2

$x^2-3x-10=0$

$S=3$, $P=-10$

5 , -2

$S=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{a}=\frac{\alpha+\beta}{a}$

$P=\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{a}=\frac{\alpha\beta}{a^2}$

$x^2-12x-189=0$ ($\div 3$, $\div 9$)

$x^2-4x-21=0$

$S=4$, $P=-21$

$7\times 3=21$ ، $-3\times 3=-9$

$x^2-22x+96=0$ ($\div 2$, $\div 4$)

$x^2-11x+24=0$

$S=11$, $P=24$

$3\times 2=6$ ، $8\times 2=16$

$\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x-6=0 \xrightarrow{\times 4}$

$x^2-10x-24=0$

$S=10$, $P=-24$

$+12$ ، -2

$2x^2-2x-12=0 \xrightarrow{\div 2}$

$x^2-x-6=0$

$S=1$, $P=-6$

$+3$ ، -2

$4x^2+5x-6=0$

$x^2+5x-24=0$

$S=-5$, $P=-24$

$\frac{-8}{4}$ ، $\frac{+3}{4}$

$2x^2-3x+1=0$

$ax^2+bx+c=0$

$x^2+bx+ac=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\times 1}$

$x^2-3x+2=0$

$S=3$, $P=2$

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$

$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times 2}$

$2x^2-x-3=0$

$x^2-x-6=0$

$S=1$, $P=-6$

$\frac{-2}{2}=-1$ ، $\frac{+3}{2}$

$4x^2+2x-20=0 \xrightarrow{\div 2}$

$2x^2+x-10=0$

$x^2+x-20=0$

$S=-1$, $P=-20$

$\frac{-5}{2}$ ، $\frac{+4}{2}=2$

تذکر۱: در هر معادله‌ای با هر درجه‌ای اگر مجموع ضرایب صفر شود، یکی از ریشه‌ها عدد ۱ می‌باشد و برای یافتن ریشه‌های دیگر عبارت را بر $x-1$ تقسیم کرده و پس از تجزیه‌ی خارج قسمت، ریشه‌های دیگر را می‌یابیم.

تذکر۲: در هر معادله‌ای با هر درجه‌ای اگر مجموع ضرایب جملات با درجه‌ی زوج (توان زوج) مساوی مجموع ضرایب جملات با درجه‌ی فرد (توان فرد) شود، یکی از ریشه‌ها ۱- می‌باشد و برای یافتن ریشه‌های دیگر عبارت را بر $x+1$ تقسیم کرده و پس از تجزیه‌ی خارج قسمت، ریشه‌های دیگر را می‌یابیم.

$1+(-10)=-9=(-1)+(-8)$

مثال: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$ را بیابید.

$x=-1$

$(x-(-1))=0 \longrightarrow (x+1) \longleftarrow$ بخش‌پذیر

$(x+1)(x^2-2x-8)=0 \longrightarrow (x+1)(x-4)(x+2)=0$

درجه ۱   درجه ۲

$\underset{a}{x=-1}\ ,\ \underset{b}{x=4}\ ,\ \underset{c}{x=-2}$

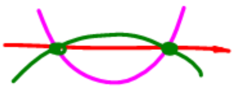
$(1)\times($جزئی$)=-2x$

$a^2-b^2+3c=?$

۳- شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه باشد، این است که $\frac{c}{a}<0$ و دیگر نیازی به بررسی شرط $\Delta>0$ نمی‌باشد.

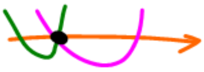
$\Delta=b^2-\underbrace{4ac}_{+}=b^2+(+)>0$

۴- شرط لازم و کافی برای آن‌که دو معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$ دارای ریشه‌های مشترک باشند، آن است که:



$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

۵- اگر دو معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، برای یافتن ریشه‌ی مشترک کافی است به‌صورت دستگاه، جملات درجه‌ی دوم را حذف کرده و معادله‌ی خطی درجه‌ی اول باقی‌مانده را حل کنیم.



مثال: اگر معادلات $mx^2+4x-6=0$ و $4mx^2-7x-3=0$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، مقدار m را بیابید.

$\times 4$: $4mx^2+16x-24=0$

$$\ominus\begin{cases}\cancel{4mx^2}-7x-3=0\\ \cancel{4mx^2}+16x-24=0\end{cases}$$

$-23x+21=0 \longrightarrow \boxed{x=\frac{21}{23}}$

$21=23x$

جایگذاری

$m=\dots$ ✓

$۳(۸x^۳+۱۲x^۲+۶x+۱)$

مثال: مقدار عبارت $\dfrac{۲۴x^۳+۳۶x^۲+۱۸x+۳}{(۴x^۲+۴x+۱)^۲}$ به ازای ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲+x=۱$ کدام است؟

$(۲x)^۲ \quad (۱)^۲$

$x^۲+x-۱=۰ \longrightarrow \dfrac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$

(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

۱) $۰/۱\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۲\sqrt{۵}$ ۳) $۰/۳\sqrt{۵}$ ۴) $۰/۶\sqrt{۵}$ ✓

$$\frac{۳(۲x+۱)^۳}{\left((۲x+۱)^۲\right)^۲}=\frac{۳}{۲x+۱}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}=۰/۶\sqrt{۵}$$

$$\cancel{۲}\left(\frac{\cancel{-۱}+\sqrt{۵}}{\cancel{۲}}\right)\cancel{+۱}$$

مثال: مقدار عبارت $\dfrac{\overset{(۲x)^۳}{۸x^۳}-۳۶x^۲+۵۴x-\overset{(۳)^۳}{۲۷}}{۸x^۲-۲۴x+۱۸}$ به ازای ریشهٔ ~~مثبت~~ بزرگتر معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ کدام است؟

$۲(۴x^۲-۱۲x+۹)$

(ریاضی خارج ۱۴۰۴)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۵\sqrt{۵}$ ✓ ۳) $۰/۱\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

$$\frac{(۲x-۳)^۳}{۲(۲x-۳)^۲}=\frac{۲x-۳}{۲}=\frac{\cancel{۳}+\sqrt{۵}-\cancel{۳}}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}=$$

$$\boxed{۰/۵\sqrt{۵}}$$

$x^۲-۳x+۱=۰$

$\Delta=(-۳)^۲-۴(۱)(۱)=۵$

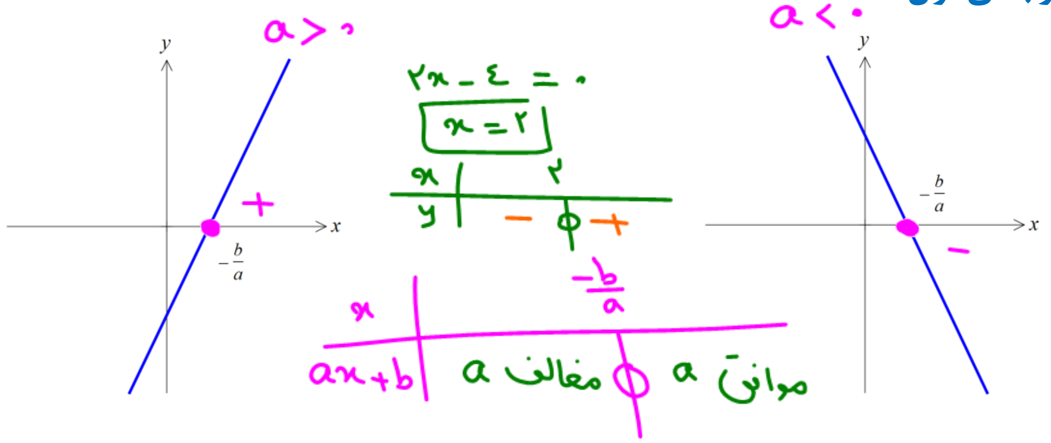
$\dfrac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$

$\dfrac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$

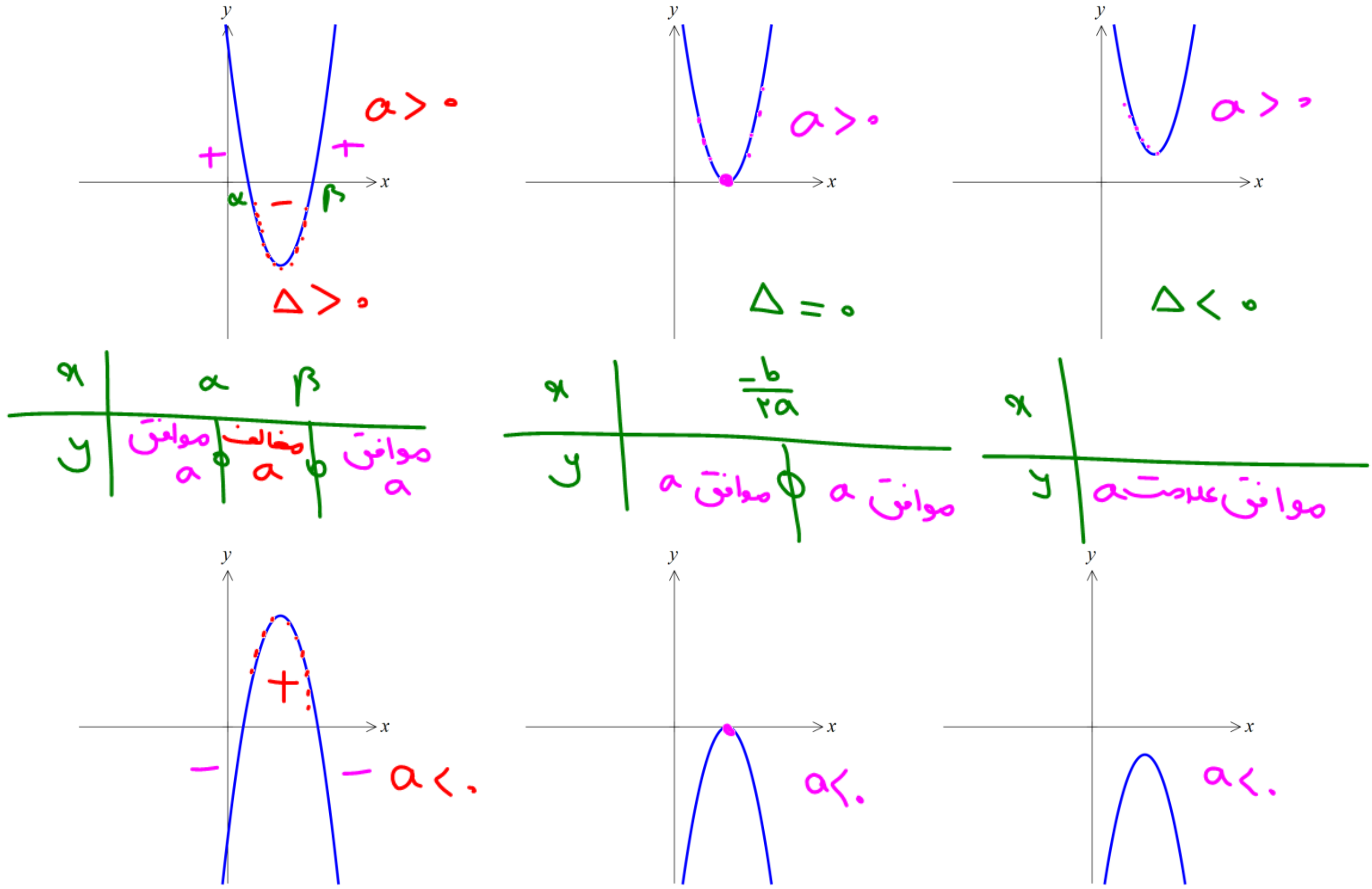
معادلات و نامعادلات

تعیین علامت

تعیین علامت تابع درجه‌ی اول



تعیین علامت تابع درجه‌ی دوم



نکته: توابع به فرم $y = |f(x)|$ همواره به ازای ریشه‌های تابع $f(x) = 0$ برابر با صفر بوده و به ازای بقیه‌ی مقادیر اعداد حقیقی، مثبت هستند.

مثال: عبارت $p(x) = |x^2 - 3x + 2|$ را تعیین علامت کنید.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$a + b + c = 0$

$x = 1 \ , \ x = \frac{c}{a} = 2$

x		1		2	
$p(x)$	+	0	+	0	+

تعیین علامت عبارات شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج

در عبارات حاوی رادیکال فرجه‌ی زوج، ابتدا باید دامنه‌ی عبارت رادیکالی را تعیین کرده و به ازای جمیع مقادیری که عضو دامنه‌ی تعریف هستند، کل عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

مثال: عبارت $p(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 4x - 5}$ را تعیین علامت کنید.

$-\frac{c}{a} = 5$

$x + 1 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq -1}$

$P(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-5)(x+1)}$

		-1		5	
	$\notin D_f$	ت	$-$	ت	$+$

ساده

تعیین علامت عبارات شامل رادیکال فرجه‌ی فرد

رادیکال فرجه‌ی فرد، هیچ‌گونه تأثیری روی تعیین علامت ندارد.

مثال: عبارت $p(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 + 6x + 9}$ را تعیین علامت کنید.

$h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 9} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}$

مضاعف -3

		-3		-1		$+1$	
$h(x)$ یا $p(x)$	$+$	ت	$+$	0	$-$	0	$+$
		م		س		س	

ساده : (درجه ۱) – (درجه ۲ $\Delta>0$) -

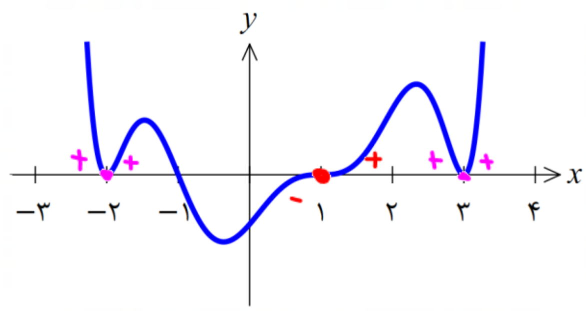
$(x-2)^3$

مضاعف : ( ) زوج (درجه ۲ $\Delta=0$) , | |

جدول تعیین علامت

ریشه‌های ساده : ریشه‌ای که در آن مقدار عبارت تغییر علامت دهد، ریشهٔ ساده می‌نامند. ریشه‌های عبارات درجه‌ی یک به فرم کلی $ax+b$ و یا تمامی عبارات درجهٔ یک که به توان فرد $(ax+b)^{2n-1}$ رسیده باشد، همچنین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم در حالتی که دلتا مثبت باشد، جزو ریشه‌های ساده محسوب می‌شوند.

ریشه‌های مضاعف : ریشه‌ای که در آن مقدار عبارت تغییر علامت ندهد، ریشهٔ مضاعف می‌نامند. ریشهٔ تمام عبارات با توان زوج به فرم کلی $(ax+b)^{2n}$ و یا عبارات قدرمطلقی به فرم $|f(x)|$ جزو ریشه‌های مضاعف محسوب می‌شوند.



$(x+1)^1$ (غیرمکرر) ساده $x=-1$

$(x-3)^{\text{زوج}}$ $(x+2)^{\text{زوج}}$ (مکرر زوج) مضاعف $x=-2$, $x=3$

$(x-1)^{\text{فرد}}$ (مکرر فرد) $x=1$

۱- ابتدا عبارات صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. سپس عبارات یکسان را ساده (از صورت و مخرج) و ترکیب (در صورت کنار هم یا در مخرج کنار هم) می‌کنیم.

۲- عبارت‌های همواره مثبت نظیر عبارات توان زوج، فرجهٔ زوج، قدرمطلق، سهمی در حالی که $(\Delta<0\ ,\ a>0)$ و ... را حذف می‌کنیم.

۳- توان فرد و فرجهٔ فرد عبارات را در نظر نمی‌گیریم. (فقط توان را در نظر نمی‌گیریم و عبارتی که به توان رسیده است را نگه می‌داریم.)

۴- تمام عبارات موجود در مخرج کسر را به صورت کسر منتقل می‌کنیم.

۵- ریشهٔ تمام عبارات را در جدول تعیین علامت در ردیف اول نوشته و در ردیف دوم، علامت خانهٔ سمت راست ($+\infty$) را تعیین کرده که با تعیین علامت عبارات با بزرگ‌ترین توان در صورت و مخرج تعیین می‌گردد. (می‌توانیم به جای علامت خانهٔ سمت راست، علامت هر خانهٔ دیگری را با اختصاص یک عدد از محدودهٔ مورد نظر بیابیم.) علامت خانه‌های دیگر را بصورت یکی در میان منفی و مثبت در نظر می‌گیریم.

۶- ریشه‌های مُکَرَّر زوج صورت را در صورتی که مساوی در نامعادله در نظر گرفته شده باشد، اعلام کرده و در صورتی که نامعادله شامل مساوی نباشد، اعلام نمی‌کنیم.

۷- ریشه‌های مُکَرَّر زوج یا حذف شدهٔ مخرج را در هر صورت حذف می‌کنیم.

مثال: عبارت $p(x)=\dfrac{(1-x^{3})(x^{2}-2x-3)}{(x^{2}-9)(3+x)^{2}}$ را تعیین علامت کنید.

$(1-x)(1+x+x^2)$ $\quad$ $(\cancel{x-3})(x+1)$

$(\cancel{x-3})(x+3)$ $\quad$ $\underbrace{(x+3)^2}_{(x+3)^3}$

همواره $\oplus$ ، $a>0$ ، $\Delta=-3<0$

$$P(x)=\frac{(1-x)(\cancel{x^2+x+1})(x+1)}{(x+3)^{3}}$$

عبارت $=(1-x)(x+3)(x+1)$

	-3		-1		$+1$	
$+$	ت ن	$-$	0	$+$	0	$-$

$P(x)\geq 0 \Rightarrow (-\infty,-3)\cup[-1,1]$

$P(x)\leq 0 \Rightarrow (-3,-1]\cup[1,3)\cup(3,+\infty)$

$P(x)<0 \to (-3,-1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

$P(x)>0 \to (-\infty,-3)\cup(-1,1)$

مثال: عبارت $p(x)=\dfrac{(x-4)(x-1)}{(x^{2}+9)(x^{2}-6x+8)}$ در چه بازه‌ای از اعداد حقیقی نامثبت است؟

$$P(x)=\frac{(\cancel{x-4})(x-1)}{\underbrace{(\cancel{x^2+9})}_{\text{همواره } \oplus}(\cancel{x-4})(x-2)}\leq 0$$

$x\in[1,2)$

عبارت $=(x-1)(x-2)$

x		1		2	
عبارت	$+$	0	$-$	ت ن	$+$

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^{3}-9x^{2}-x+9$ برای $x>0$ در بازه‌ی (a,b) زیر محور xها قرار می‌گیرد. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ را بیابید.

مثبت

$f(x)<0$

$x^3-9x^2-x+9<0$

$x^2(x-9)-1(x-9)<0$

$(x-9)(x^2-1)<0$

$(x-9)(x-1)(x+1)<0$

x		-1		1		9	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x\in \cancel{(-\infty,-1)}\cup(1,9) \xrightarrow{x>0}$

$x\in(1,9)=(a,b) \to b-a=8$

خواص نامساوی‌ها برای حل نامعادلات

مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$ و مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی را با $\mathbb{R}^-$ نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

۱- قاعده‌ی تثلیث

$$\forall a , b \in \mathbb{R} ; \ a < b \ \vee \ a = b \ \vee \ a > b$$

۲- قاعده‌ی تعدی

$$\forall a , b , c \in \mathbb{R} ; \ a < b \ , \ b < c \ \Rightarrow \ a < c$$

۳- می‌توان به دوطرف نامساوی عددی را اضافه یا کم نمود.

$$a < b \ \Rightarrow \ a \pm c < b \pm c$$

۴- می‌توان عدد مثبتی را به طرفین یک نامساوی ضرب نمود و جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ ac < bc \ , \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

۵- می‌توان طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب یا بر آن تقسیم نمود و جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$a < b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ ac > bc \ , \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

۶- طرفین دو نامساوی را می‌توان نظیر به نظیر جمع کرد.

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \ a + c > b + d$$

۷- طرفین دو نامساوی مثبت را می‌توان نظیربه‌نظیر در هم ضرب کرد که جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \ 0 < ac < bd$$

۸- طرفین دو نامساوی منفی را می‌توان نظیربه‌نظیر در هم ضرب کرد که جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\begin{cases} a < b < 0 \\ c < d < 0 \end{cases} \Rightarrow \ ac > bd > 0$$

۹- اگر طرفین یک نامساوی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشد، حین معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ a < b < 0 \end{cases} \Rightarrow \ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۱۰- اگر طرفین یک نامساوی را که یکی مثبت و دیگری منفی باشد، معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$a < 0 < b \ \Rightarrow \ \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

۱۱- طرفین نامساوی را می‌توان به توان عددی فرد رساند و جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$a < b \Rightarrow a^{۲n+۱} < b^{۲n+۱}$$

۱۲- اگر طرفین یک نامساوی مثبت باشند، می‌توان طرفین را به توان عددی زوج رساند.

$$۰ < a < b \Rightarrow ۰ < a^{۲n} < b^{۲n}$$

۱۳- اگر طرفین یک نامساوی منفی باشند، می‌توان طرفین را به توان عددی زوج رساند و جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$a < b < ۰ \Rightarrow a^{۲n} > b^{۲n} > ۰$$

۱۴- اگر طرفین یک نامساوی مثبت باشند، می‌توان از طرفین ریشه‌ی زوج گرفت و جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$۰ < a < b \Rightarrow \sqrt[۲n]{a} < \sqrt[۲n]{b}$$

۱۵- از طرفین یک نامساوی می‌توان ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد گرفت.

$$a < b \Rightarrow \sqrt[۲n+۱]{a} < \sqrt[۲n+۱]{b}$$

۱۶- اگر از علامت طرفین نامساوی اطلاع دقیقی نداشته باشیم، حین ریشه‌ی زوج گرفتن، طرفین قدرمطلق می‌گیرند.

$$a^{۲n} < b^{۲n} \Leftrightarrow |a| < |b|$$

۱۷- اگر عددی بزرگ‌تر از یک را به توان برسانیم بزرگ شده و اگر از آن ریشه بگیریم، کوچک می‌شود.

$$a > ۱ \Rightarrow \begin{cases} a < a^{۲} < a^{۳} < \cdots \\ a > \sqrt{a} > \sqrt[۳]{a} > \cdots \end{cases}$$

۱۸- اگر عددی بین صفر و یک را به توان برسانیم، کوچک شده و اگر از آن ریشه بگیریم، بزرگ می‌شود.

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \begin{cases} a > a^{۲} > a^{۳} > \cdots \\ a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۵]{a} < \cdots \end{cases}$$

۱۹- در جذرگیری از طرفین یک نامساوی داریم:

$$\begin{cases} x^{۲} \le a^{۲} \xrightarrow{a>۰} |x| \le |a| \Leftrightarrow -a \le x \le a \\ x^{۲} \ge a^{۲} \xrightarrow{a>۰} |x| \ge |a| \Leftrightarrow x \le -a \ \vee \ x \ge a \end{cases}$$

۲۰- اگر عددی را با معکوس آن جمع کنیم، حاصل یا از عدد ۲ بیشتر است و یا از عدد ۲- کوچک‌تر.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -۲ \ \vee \ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge ۲$$

مثال: اگر $a > b$ و $c > d$ باشد، کدام رابطه همواره صحیح است؟

۱) $a - c > b - d$ ۲) $a - d > b - c$ ✓ ۳) $ac > bd$ ۴) $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

$c > d \xrightarrow{\times(-1)} \boxed{-c < -d}$

$$\begin{cases} a > b \\ -d > -c \end{cases} \oplus \quad a - d > b - c$$

مثال: اگر $y - x \geq ۳$ و $z - y \geq ۴$ و $x + z \leq ۷$ باشد، محدوده‌ی قابل قبول متغیر x را بیابید.

$$\begin{cases} \cancel{y} - x \geq ۳ \\ \cancel{z} - \cancel{y} \geq ۴ \\ -x - \cancel{z} \geq -۷ \end{cases} \oplus \quad -۲x \geq ۰ \xrightarrow{\times(-1)} ۲x \leq ۰ \xrightarrow{\div ۲} x \leq ۰$$

$x \in (-\infty, ۰]$

مثال: اگر $a^{\frac{۱}{۲}} < b^{\frac{-۱}{۲}}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a > b$ ۲) $a < b$ ۳) $ab > ۱$ ۴) $ab < ۱$

$\sqrt{a} < \frac{۱}{\sqrt{b}} \xrightarrow{(\ )^۲} a < \frac{۱}{b} \xrightarrow[b>0]{\times b} ab < ۱$

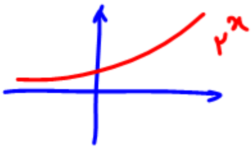
$a \geq 0$ $b > 0$

گزینه ۴

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

حل نامعادلات

برای حل نامعادلات، ابتدا کل عبارات را به یک سمت علامت نامساوی منتقل کرده و پس از تجزیهٔ عبارت انتقال داده شده و تعیین ریشه‌های عبارت مورد نظر، با ترسیم جدول تعیین علامت به جستجوی محدودهٔ مورد نظر نامعادلهٔ تشکیل شده می‌پردازیم.



مثال: مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص نمایید.

$x(۲^x) + ۲^{x+۳} > ۲^{x+۲}$

$۲^x \times ۲^۳$ $۲^x \cdot ۲^۲$

$x(\cancel{۲^x}) + ۸(\cancel{۲^x}) > ۴(\cancel{۲^x}) \xrightarrow{\div ۲^x} x + ۸ > ۴ \longrightarrow \boxed{x > -۴}$

$\frac{۳}{۴}(x + ۳) + \frac{x}{۳} > \frac{۱}{۲}(۲x - ۵) + \frac{x}{۴} \xrightarrow{\times ۱۲}$

یادآوری دهم

$|x| \leq a \longrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \longrightarrow x \leq -a$ یا $x \geq a$

$, \quad \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌ی زیر را بیابید.

$\left(x^2 - 2\right)^2 \leq 4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x^2 - 2| \leq 2 \longrightarrow -2 \leq x^2 - 2 \leq 2$ (+۲)

$\underbrace{0 \leq \underbrace{x^2 \leq 4}}$

$|x| \leq 2 \longrightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 2}$

$x^2 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\cap$

$x \in [-2, 2]$

مثال: مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ در بازه‌ی (a, b) پایین خط $y = \frac{3}{2}$ قرار می‌گیرد. بیشترین مقدار $b - a$ را بیابید.

$\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 < \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2}$

$x^2 + 4x - 2 < 3 \longrightarrow$

$x^2 + 4x - 5 < 0$

$S = -4, \quad P = -5$ متی

$-5, \quad +1$

$-5 < x < 1 \rightarrow x \in (-5, 1)$

$(a, b) \longrightarrow b - a = 6$

مثال: در چه بازه‌ای نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x$ بالای خطی به معادله‌ی $y + 2x + 5 = 0$ و زیر خط به معادله‌ی $y = 12$ قرار می‌گیرد.

$y = -2x - 5$

$\underbrace{-2x - 5 < \underbrace{x^2 + 4x < 12}_{\mathrm{II}}}_{\mathrm{I}}$

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \dots \checkmark$

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بیابید.

$\frac{x^2 - 13}{x - 2} < 4$ ~~$\times(x-2)$~~ غیرمجاز

$\frac{x^2 - 13}{x - 2} - \frac{4}{1} < 0$

$(x-5)(x+1)$

$\frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)} < 0$

	-1		2		5	
$-$	0	$+$	ت ن	$-$	0	$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, 5)$

$\frac{x^2 - 13}{x^2 + 1} < 5 \xrightarrow{\times(x^2+1)}$

مثال: حدود x را طوری بیابید که نامعادلهٔ زیر برقرار باشد.

$$\frac{x+18}{x-2} \geq x$$

$$\frac{x+18}{x-2} - \frac{x}{1} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+3x+18}{x-2} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{x^2-3x-18}{(x-2)} \leq 0 \qquad (x-6)(x+3)$$

$-3 \quad 2 \quad 6$

$- \quad + \quad - \quad +$

$$x \in (-\infty, -3] \cup (2, 6]$$

نامعادلاتی که با عددگذاری حل می‌شوند

۱) نامعادلات گویا

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x - 4 < x^2 - 3x \leq 4$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)

۱) $[-1, 4]$ ✗ ۲) $[-1, 4)$ ✗ ۳) $[-1, 1) \cup \{4\}$ ✗ ۴) $[-1, 1)$ ✓

$x=4 \Longrightarrow \underbrace{4<4}_{\text{غ}} \leq 4$

$x=2 \Longrightarrow \underbrace{0<-2}_{\text{غ}} \leq 4$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-2} > \frac{7x-8}{x^2-x-2}$، به صورت بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $(-4, -2) \cup (1, 2)$ ✗ ۲) $(2, 4)$ ✗ ۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$ ✓ ۴) $(-1, 2)$ ✗

$x=0 \Longrightarrow 4 > 0$ ✓

$x=3 \Longrightarrow \frac{13}{4} > 3$ ✓

$3.25 > 3$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x < \frac{1}{2}$ ۲) $x < 3$ ۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳ > \frac{۲x-۳}{x+۱} > ۱$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ✓
۲) $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ✗
۳) $x>۴$ ✗
۴) $x<-۶$ ✗

$-۶ \quad ۴ \quad ۵$ $-۴ \quad ۵ \quad ۶$

$x=۵ \Longrightarrow ۱<\frac{۷}{۶}<۳$

$x=-۷ \Longrightarrow ۱<\frac{-۱۷}{-۶}=\frac{۱۷}{۶}<۳$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳ > \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $(۰/۶ , ۱/۵)$
۲) $(۰/۸ , ۱/۲)$
۳) $(۱ , ۲)$
۴) $(۰/۸ , ۲)$

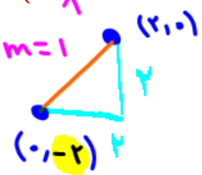
مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳ > \frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $(۰ , +\infty)$
۲) $(۴ , +\infty)$
۳) $\mathbb{R}-[-۴ , ۰]$
۴) $\mathbb{R}-[-۴ , -۱]$

مثال: تابع خطی f، نقاط برخورد تابع $g(x)=\frac{x-۲}{x^۲+x+۱}$ با محورهای مختصات را به هم وصل می‌کند. در این صورت نمودار $g(x)$ در کدام فاصله بالای نمودار f قرار می‌گیرد؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

۱) $(۱ , ۳)$ ✗
۲) $(۳ , ۵)$ ✗
۳) $(-۱ , ۱)$ ✗
۴) $(۰ , ۲)$ ✓

$g(x):$ $x=۰ \longrightarrow y=-۲$
$y=۰ \longrightarrow x=۲$



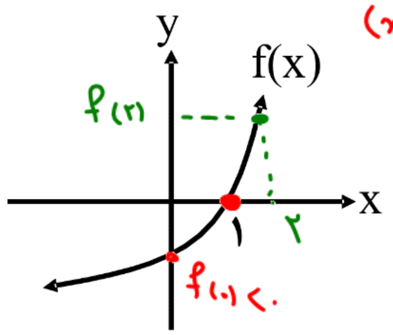
$y=mx+h$
$y=۲x-۲=f(x)$

$\frac{x-۲}{x^۲+x+۱} > ۲x-۲$

$x=۰ \longrightarrow -۲>-۲$ ✗
$x=۴ \longrightarrow \frac{۲}{۲۱}>۶$ ✗
$x=۲ \longrightarrow ۰>+۲$ ✗

مثال: اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، جواب نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^2-2x+1}>0$ کدام است؟ (گاج ۹۹)

$(x-1)^2$



$x=1 \notin D$

$\frac{f(x)}{(x-1)^2}>0$

$x=2 \longrightarrow \frac{\overset{+}{f(2)}}{+}>0$ ⊕

$x=0 \longrightarrow \frac{\overset{\ominus}{f(0)}}{+}>0$ غلط

۱) $x \neq 1$ ✗

۲) $x<1$ ✗

۳) $x>1$ ✓

۴) $x>0$ ✗

۲) نامعادلات قدرمطلقی

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-2|>x^2-2x$، به صورت کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,2)$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2+1|>|x-2|-1+2x$، به صورت کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(1,2)$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1$ به صورت کدام بازه‌ها است؟ (تجربی ۹۲ با تغییر)

۱) $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ ✓ ۲) $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ✗

۳) $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ ✗ ۴) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ ✗

$x=0 \longrightarrow 2>1$

$x=-2 \longrightarrow \left|\frac{-4}{-3}\right|=\frac{4}{3}>1$ ✓

مثال: x عضوی از کدام یک از مجموعه‌های زیر باشد تا نمودار تابع $f(x) = x|x|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = x^3$ باشد؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
۲) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
۳) $(-1, 0) \cup (0, 1)$
۴) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$x|x| > x^3$

یادآوری نامساوی‌های قدرمطلقی

$$\begin{cases} x^2 \le a^2 \xrightarrow{a>0} |x| \le |a| \Leftrightarrow -a \le x \le a \\ x^2 \ge a^2 \xrightarrow{a>0} |x| \ge |a| \Leftrightarrow x \le -a \ \vee \ x \ge a \end{cases}$$

نامعادلاتی که با عددگذاری حل نمی‌شوند

مثال: در بازهٔ (a, b) عبارت $15x^2 + 73x + 14$ منفی و عبارت $\left|\frac{x-1}{2} - 1\right|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{5}{3}$ ✓
۲) $\frac{23}{3}$
۳) $\frac{4}{15}$
۴) $\frac{67}{15}$

$\left|\frac{x-1}{2}-1\right| > 3$ و $15x^2+73x+14<0$

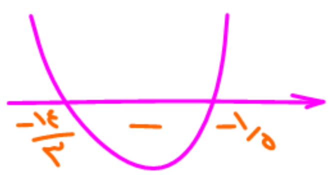
$\frac{x-1}{2}-1<-3$ یا $\frac{x-1}{2}-1>3$

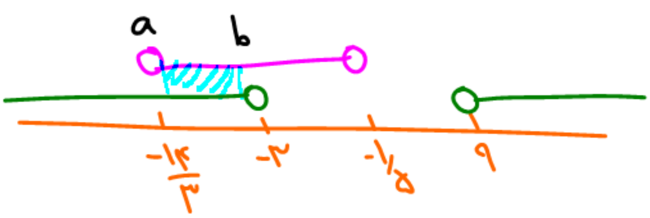
$\boxed{x<-3}$ یا $\boxed{x>9}$

$x^2+73x+210<0$

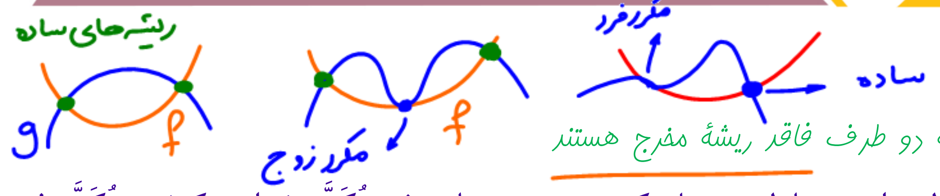
$S=-73$, $P=210$

$-\frac{14}{3} = -\frac{70}{15}$, $-\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}$





$b-a=(-3)-\left(-\frac{14}{3}\right)=\frac{5}{3}$



$\overline{x^2+5}$

نامساوی‌هایی که دو طرف فاقد ریشهٔ مخرج هستند

۱- ابتدا نامعادله را به معادله تبدیل کرده و ریشه‌های غیرمُکَرَّر (توان یک) و مُکَرَّر فرد (ریشه‌های ساده که تغییر علامت دارند) را به عنوان مرز جواب‌ها در نظر می‌گیریم.

۲- با استفاده از گزینه‌های مطرح شده در صورت سؤال و یا چک کردن با یک عدد، متوجه می‌شویم که بازهٔ جواب، محدودهٔ بین ریشه‌ها را شامل می‌شود یا اینکه بازهٔ خارج دو ریشهٔ به‌دست آمده است.

۳- ریشه‌های مُکَرَّر زوج در صورتی که علامت نامعادله شامل مساوی بود، بعنوان جواب اعلام می‌شوند و در غیراین‌صورت اعلام نمی‌شوند (اگر در بازه قرار دارد هم بایدخارج کنیم).

مثال: اگر $x^4 < x^2$ باشد، $[x]$ چند مقدار متفاوت دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) (آکاج ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ✓ ۴) ۴

$x^4 = x^2 \longrightarrow x^4 - x^2 = 0 \longrightarrow (x^2)(x^2-1) = 0 \longrightarrow (x-0)^2(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0$ مکرر زوج $\quad x=1 \,,\, x=-1$

$[x]=-1 \qquad [x]=0$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$\checkmark(-1,1)$ یا $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \times$

$x = 0.2 \qquad (0.2)^4 < (0.2)^2 \checkmark$

در صورتی که $x^4 > x^2$ باشد، چطور؟

$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

در صورتی که $x^4 \leq x^2$ باشد، چطور؟

$(-1,1)\cup\{0\} = (-1,1)$

در صورتی که $x^4 \geq x^2$ باشد، چطور؟

$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\cup\{0\}$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2+4}$ در بازهٔ (a,b) پایین‌تر از خط به معادلهٔ $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ✓ ۳) ۸ ۴) ∞

$\dfrac{3x^2-2x}{x^2+4} \overset{=}{<} 2 \longrightarrow 3x^2 - 2x = 2x^2 + 8$

فاقد ریشه

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

4 و -2

$(a,b) = (-2,4)$

$b - a = 4-(-2) = 6$

مثال: در بازهٔ (a, b) نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطهٔ وسط این بازه کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) -1 ✓ ۴) $-0/5$

$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x|$

$x \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 7x - 9 = 0$: $x = 1$ ✓ ، $x = -4/5$ ✗

$x < 0 \longrightarrow 2x^2 + 3x - 9 = 0$

$x^2 + 3x - 18 = 0$ ، $S = -3,\ P = -18$: $-\frac{6}{2} = -3$ ✓ ، $+\frac{3}{2} = +1/5$ ✗

$(a, b) = (-3, 1)$

$وسط = \frac{-3+1}{2} = -1$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2 - x - 2| < |x^2 + 2x + 7|$ به صورت بازهٔ $(-\infty, b)$ است. b کدام است؟

$|f| = |g| \longrightarrow f = g$ یا $f = -g$

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ✓ ۴) -4

$\cancel{x^2} + 2x + 7 = \cancel{x^2} - x - 2 \longrightarrow \boxed{x = -3} \longrightarrow (-\infty, b) = (-\infty, -3)$

$x^2 + 2x + 7 = -x^2 + x + 2$

$2x^2 + x + 5 = 0$

$\Delta < 0$ جواب ندارد

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $x + |2x - 1| \leq 3$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$x \geq 1/2 \longrightarrow$

$x < 1/2 \longrightarrow$

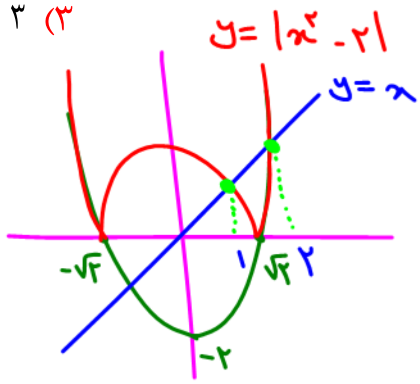
تذکر: گاهی می‌توان با رسم نمودار توابع، ریشه‌ها را راحت‌تر حدس زد.

مثال: در بازهٔ (a , b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |۲x^{۲} - ۴|$ در زیر خط $y = ۲x$ واقع است. بیش‌ترین مقدار $b - a$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) ۱ ✓
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

$|۲x^{۲} - ۴| \overset{=}{<} ۲x \xrightarrow{\div ۲}$

$|x^{۲} - ۲| = x$



حدس‌ها: ۱ ، ۲

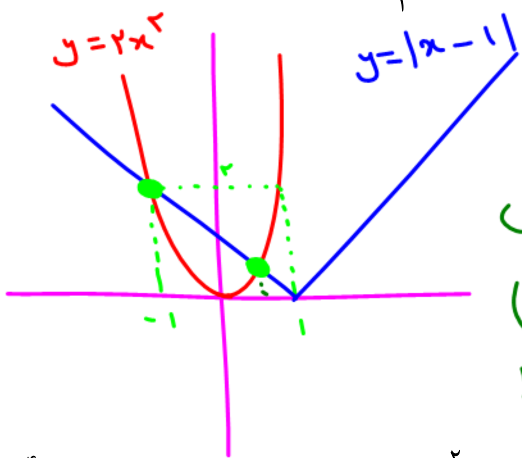
$(۱,۲) \Rightarrow ۲-۱=۱$

مثال: در بازهٔ (a , b)، نمودار تابع $y = (x - ۱)^{۲}$ بالاتر از نمودار تابع $y = ۴x^{۴}$ است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$ ✓
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

$(x-۱)^{۲} \overset{=}{>} ۴x^{۴} \quad \checkmark \longrightarrow$

$|x-۱| = ۲x^{۲}$



حدس = ۱/۲ ، -۱

$(a,b) = (-۱, ۱/۲) \longrightarrow$

$b - a = ۳/۲$

مثال: در بازهٔ (a , b)، نمودار $y = (x - ۲)^{۲}$ بالاتر از نمودار $y = x^{۴}$ قرار دارد. مقدار $b - a$ کدام است؟ (تجربی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مثال: اگر جواب نامعادلهٔ $x > |x^2 - 8x|$ به صورت (a , b) باشد، $a^2 + b^2$ کدام است؟ (گاج ۱۴۰۰)

۱) ۴۹ ۲) ۸۱ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۶

مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = -x(x+3) + 4$ در بازهٔ $[a , b]$ پایین‌تر از نمودار $g(x) = x(2x+1) - 28$ نباشد، مقدار $(a+1)^2 b^2$ کدام است؟ (بنفش قلم‌چی)

۱) $\frac{64}{9}$ ۲) ۶۴ ۳) $\frac{29}{3}$ ۴) $-\frac{32}{3}$

مثال: بازهٔ $(0 , \frac{1}{2})$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$ پایین نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۳)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ✓ ۴) $-\frac{3}{8}$

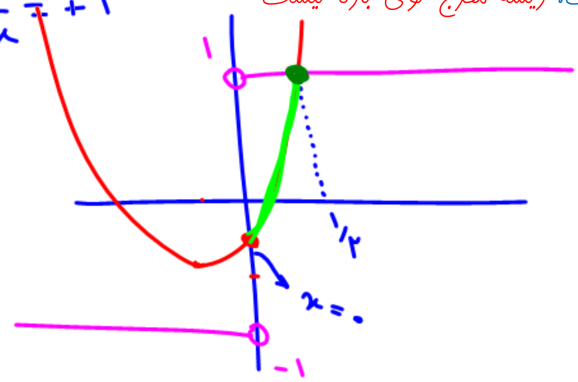
$(0,\frac{1}{2}) \xrightarrow{x>0} |x| = +x \Longrightarrow y = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{+x} = +1$

دقت: ریشهٔ مخرج توی بازه نیست

$2x^2 + \frac{3}{2}x + c \overset{=}{<} +1$ $\quad x_s = -\frac{3}{8}$

$x = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{کن}]{\text{صدق}} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + c = +1 \longrightarrow$

$\boxed{c = -\frac{1}{4}}$



مثال: بازهٔ $\left(-\frac{۵}{۴}, ۰\right)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار $y = -۲x^۲ - \frac{۳}{۲}x + c$ بالای نمودار $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۳)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^۳ + ax^۲ + bx + c > ۰$، مجموعهٔ $(-۱, +\infty) - \{۱\}$ است. مقدار b کدام است؟

(کنکوریوم مهر و ماه)

۱) ۱ ۲) -۱ ✓ ۳) ۲ ۴) -۳

ساده یا مکرر فرد $(x+1)^1$

مکرر زوج صورت $(x-1)^2$

$(x-(-1))$

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$(x+1)(x-1)^2 = 0$

$(x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$a = -1$

$\boxed{b = -1}$

$c = 1$

مثال: اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = -x^۳ + ax^۲ + bx + c$ به صورت زیر باشد، $a + b$ کدام است؟

(نردبام خیلی سبز)

x		-۲		۳	
P	+	۰	−	۰	−

$x = -2$ ساده

$x = 3$ مضاعف (مکرر زوج)

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۷
۴) ۷ ✓

$-(x+2)\underbrace{(x-3)^2}$

$(-x-2)(x^2 - 6x + 9)$

$-x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

$a + b = 7$

مکرر زوج $\Delta = 0$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\underbrace{(8x+2)}_{x=\frac{-1}{4}}\underbrace{(3x^2+2mx+m)}_{\Delta<0\ ,\ a=3} > 0$ به‌صورت $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ است؟

همواره مثبت

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

$$(I)\ \Delta<0 \rightarrow 4m^2-4(3)(m)<0 \xrightarrow{\div 4} m^2-3m<0 \qquad 0<m<3$$

$$m\in \mathbb{Z}$$

$$m=\{1,2\}$$

$$(II)\ \Delta=0 \rightarrow m^2-3m=0 \quad m=0 \quad 3x^2=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \left(-\frac{1}{4},+\infty\right)-\{0\}$$

$$m=3 \rightarrow 3x^2+6x+3=0 \xrightarrow{\div 3} x^2+2x+1=0 \rightarrow (x+1)^2=0 \quad x=-1$$

$$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)-\{-1\}=\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-3)(x^2+ax+b)\geq 0$ بازهٔ $[-3, +\infty)$ است. مقدار b کدام است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

ریشهٔ ساده $(x+3)$

۱) ۹ ۲) -9 ✓ ۳) -6 ۴) ۶

$$(x-3)\underbrace{(x-3)(x+3)}$$

$$(x-3)(x^2-9)$$

$$a=0$$

$$\boxed{b=-9}$$

نکته (حالت خاص): تابع هموگرافیک در نامساوی دوطرفه

$$M < \frac{ax+b}{cx+d} < N$$

باز هم نامساوی را به مساوی تبدیل می‌کنیم و ناحیه‌ای را انتخاب می‌کنیم که شامل ریشه‌های مخرج نمی‌باشد.

تذکر: در مورد نامساوی‌های یک‌طرفه مجاز به استفاده از این نکته نیستیم.

مثال: اگر $-۲ < \frac{۱-۳x}{x+۱} < ۰$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{۲}\right]$ چند عضو دارد؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۱ $\quad$ ۲) ۲ $\quad$ ۳) ۳ $\quad$ ۴) ۴

$$\underbrace{\frac{-۲}{۱} = \frac{۱-۳x}{x+۱}}_{-۲x-۲=۱-۳x} = \frac{۰}{۱}$$

$\boxed{x=۳}$

$\underbrace{۱-۳x=۰}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{x=\frac{۱}{۳}}$

$\frac{۱}{۳} < x < ۳ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱}{۶} < \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۲}$

$\frac{۱}{۶} < \frac{x}{۲} < ۱$ $\quad$ $\left[\frac{x}{۲}\right] = ۰$

$۱ \le \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۲}$ $\quad$ $\left[\frac{x}{۲}\right] = ۱$

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی از دامنهٔ تابع $y = -\frac{۱}{۳-x}$، نمودار این تابع بالای $y = -۴$ و پایین $y = ۰$ قرار دارد؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) ۴ $\quad$ ۲) ۳ $\quad$ ۳) ۲ $\quad$ ۴) ۱

$x = ۳$

یک، دو

$\frac{-۴}{۱} < \frac{۱}{x-۳} < \frac{۰}{۱}$

جواب ندارد

$-۴x+۱۲=۱$

$\boxed{x=\frac{۱۱}{۴}}$

$(-\infty, \frac{۱۱}{۴})$ $۳ \notin$ $۲{,}۷۵$ یا $(\frac{۱۱}{۴}, +\infty)$ $۳ \in$ $۲{,}۷۵$

$\{۱, ۲\} \in \mathbb{N}$

نکته: اگر حداقل یکی از دو طرف دارای ریشهٔ مخرج باشند، به کمک جدول تعیین علامت که قبلاً روش سریع آن بیان شد، عمل می‌کنیم.

تذکر۱: اگر نامعادله شامل مساوی بود، ریشه‌های مُکَرَّر زوج صورت کسر، به‌عنوان جواب اعلام می‌شوند.

تذکر۲: اگر نامعادله شامل مساوی نبود، ریشه‌های مُکَرَّر زوج صورت کسر، به‌عنوان جواب اعلام نمی‌شوند.

تذکر۳: ریشه‌های مطرح شدهٔ مخرج در هر صورت حذف می‌شوند.

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{x^{2}(4x-3)^{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{4}(x^{2}+2x+6)}{(x^{2}+3x-10)(x^{2}+6x+5)^{5}}\le 0$ شامل چند عدد صحیح در بازهٔ $(-6\,,\,6)$ است؟ (ریاضیزیست ۱۴۰۰)

همواره + $\Delta<0$

$(x+5)(x-2)$ $\quad (x+5)^{5}(x+1)^{5}$

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ✓ ۴) ۴

$\dfrac{(x-0)^{2}(4x-3)^{3}(x-\frac{3}{2})^{4}(x^{2}+2x+6)}{(x+5)^{6}(x-2)(x+1)^{5}}\le 0$

$P(x)=(4x-3)(x-2)(x+1)$

$\neq -5$

$(-\infty,-1)\cup[\frac{3}{4},2)$

$\cup\{\frac{3}{2}\}$ $\cup\{0\}$

$(-\infty,-5)\cup(-5,-1)\cup[\frac{3}{4},2)\cup\{0\}$

$-4,-3,-2$ ، ۱ ، صفر

توجه: اگر <0 بود، چطور می‌شد؟

مثال: اگر $\dfrac{4-2x}{3x+1}\ge 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ ✓

$-\frac{1}{3}<x\le 2 \xrightarrow{\times 3} -1<3x\le 6$

$[6]=6$

$-1,0,1,2,3,4,5,6$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{x+1}{x-1}>2$ شامل چند عدد صحیح است؟ (مرآت ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳

$\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{2}{1}>0 \longrightarrow \dfrac{x+1-2x+2}{x-1}>0 \longrightarrow \dfrac{-x+3}{x-1}>0$

$x\in(1,3)$

اعداد صحیح $x=2$

مثال: چند عدد طبیعی در بازهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x^{۲}+۲x}{x-۱}>۴x$ صدق می‌کند؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

مثال: نمودار تابع $y=\frac{۲}{x^{۲}-۳x+۲}$، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=۰$ و $y=-۲$ واقع می‌شود؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

مثال: جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{۶}>\frac{۱}{x+۳}-\frac{۱}{x}$ در مجموعه اعداد حقیقیِ منفی به صورت (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟ (خیلی‌سبز)

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

مثال: فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{\left(\left(m^{2}-1\right)x^{2}-4mx+4\right)\left(x-3\sqrt{x}+2\right)}{(2x-3)} \geqslant 0$، به ازای $x > \dfrac{3}{2}$، بازهٔ $[2, 4]$ باشد. مقدار m، کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

۱) -2　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

$x > \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2x > 3 \longrightarrow 2x-3 > 0$

جواب باشه $\in x=3$

$\left(\left(m^{2}-1\right)x^{2}-4mx+4\right)\left(x-3\sqrt{x}+2\right) \geq 0$

ریشه $x=2$

$4m^{2}-\cancel{4}-8m+\cancel{4}=0 \longrightarrow (4m)(m-2)=0 \to m=0 \;,\; m=2$

$m=0 \longrightarrow \left(-x^{2}+4\right)\left(x-3\sqrt{x}+2\right) \geq 0$

$x=3 \longrightarrow \underbrace{(-5)}_{-}\big(\underbrace{5-3\sqrt{3}}_{-0/1}\big) \geq 0$ درست

$\boxed{m=2} \longrightarrow \left(3x^{2}-8x+4\right)\left(x-3\sqrt{x}+2\right) \geq 0$

$x=3 \longrightarrow 7 \times (5-5/1) \geq 0$ نادرست

مثال: اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\dfrac{(x-1)(x-2)^{2}}{x^{2}+x-3} \leq 0$ به صورت $(-\infty, a) \cup [1, b) \cup \{c\}$ باشد، حاصل abc کدام است؟

(قلم‌چی ۱۴۰۰)

۱) -6　　۲) ۶　　۳) ۳　　۴) -3

$\dfrac{(x-1)(x-2)^{2}}{x^{2}+x-3} \leq 0$

مکرر زوج $x=2$　　$c=2$

مساوی داره

a　b

$(-\infty, a) \cup [1, b) \cup \{c\}$

مخرج

ریشه صورت

مکرر زوج صورت

$\underbrace{abc}=? \quad \boxed{ab=-3} \times \boxed{c=2} = -6$

ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}$

مثال: اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{(x+6)^{2}\left(x^{3}-4x^{2}+5x-2\right)}{x^{2}+3x-5}\geq 0$ به صورت $(a\,,\,b)\cup[c\,,\,+\infty)\cup\{d\}$ باشد، حاصل $a+b-\dfrac{d}{c}$ کدام است؟ (تکمیلی خیلی سبز)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{x^{3}-4x}{x^{3}+3x^{2}+2x}\leq 0$ به صورت $(a\,,\,b]-\{c\}$ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟ (IQ گاج)

۱) صفر　　۲) -3　　۳) ۲　　۴) ۱

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{\left(x^{3}-6x^{2}+9x\right)(x-1)}{\sqrt{x}}\leq 0$ به شکل $(a\,,\,b]\cup\{c\}$ است. $a+b+c$ کدام است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۱)

۱) ۴　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۱

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x^{۲}+۸x}{۲x^{۲}-۴}<۲$ به صورت $(-\infty, a)\cup(b, c)\cup(d, +\infty)$ است. مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟ (IQ گاج)

۱) $\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

مثال: اگر جواب نامعادلهٔ $\frac{x+b}{۲ax-۳}>۰$ به‌صورت $(-۱, ۵)$ باشد، حاصل ab کدام است؟ (قلم‌چی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) -۵ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{-۱۵}{۲}$

مثال: اگر جواب نامعادلهٔ $\frac{x^{۳}-۲x^{۲}+x}{x-۲}<۰$ به صورت $(a, b)-\{c\}$ باشد، حاصل $a+۲b-c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{۴}\left(\frac{(x-a)^{۲}(x-b)}{x+۱}\right)$ به‌صورتِ $(-\infty\,,\,-۱)\cup(۴\,,\,+\infty)$ است. a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟ (تکمیلی خیلی‌سبز)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

مثال: عبارت $y=\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x^{۲}-۴}$ به ازای مقادیری از x که عضو مجموعهٔ $(a\,,\,b)-\{c\}$ باشند، منفی است. مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟ (موج آزمون نشر الگو)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

مثال: اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\frac{x^{۲}+ax+b}{x+c}$ به صورت زیر باشد، مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟ (قلم‌چی ۱۴۰۲)

x		−۱		۲	
P(x)	−	۰	+	ت ن	+

۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) -۳

۴) ۳

مثال: مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{(x^{۲}-۳x+۲)(x^{۲}+۳x-۴)^{۲}}{|x-۱|}<۰$ بازهٔ $(a\,,\,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟ (موج آزمون نشر الگو)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\text{۲}a+\text{۳})x^{\text{۲}}+\underbrace{(\text{۴}b-\text{۵})}x+\text{۴}c+\text{۱}<\text{۰}$ به صورت بازهٔ $(a\ ,\ +\infty)$ است. اگر b عدد طبیعی باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

منفی

$\text{۴}b-\text{۵}<\text{۰}$

$b<\text{۵}/\text{۴}$

$b\in N \rightarrow b=\text{۱}$

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۲ − ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۴ −

$\underbrace{\cancel{(\text{۲}a+\text{۳})}}_{\text{صفر}}x^{\text{۲}}+(\text{۴}b-\text{۵})x+\text{۴}c+\text{۱}<\text{۰}$ درجه ۱ باشد، ۱ مرز داشته باشد

$\boxed{a=-\text{۳}/\text{۲}} \xrightarrow{b=\text{۱}} -x+\text{۴}c+\text{۱}=\text{۰}$

$(-\text{۳}/\text{۲}\ ,+\infty)$ $\quad x=-\text{۳}/\text{۲}$ $\quad \text{۳}/\text{۲}+\text{۱}+\text{۴}c=\text{۰} \rightarrow c=-\text{۵}/\text{۸}$

$\frac{a}{c}=\frac{-\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}{-\frac{\text{۵}}{\text{۸}}}=\frac{\text{۲۴}}{\text{۱۰}}=\text{۲/۴}$

مثلاً $\boxed{b=\text{۲}} \rightarrow \text{۳}x+\text{۴}c+\text{۱}=\text{۰} \rightarrow c=\text{۷}/\text{۸}$

$x=-\text{۳}/\text{۲}$ $\quad$ ۲۴/۲۸ $\quad$ شیب (+)

$b\geq \text{۲}$ $\quad (-\text{۳}/\text{۲}\ ,+\infty)$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\text{۵}-\text{۲}m)x^{\text{۲}}-(\text{۲}m+n-\text{۵})x<n$ به صورت بازهٔ $\underbrace{(-\text{۱}\ ,\ m-\text{۲})}$ است. اگر m عدد طبیعی باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\underbrace{(\text{۵}-\text{۲}m)}_{\text{دهانه رو به بالا}}x^{\text{۲}}-(\text{۲}m+n-\text{۵})x\underbrace{-n}_{c}\underbrace{<\text{۰}}_{\text{منفی}}$

$\text{۵}-\text{۲}m>\text{۰} \rightarrow \text{۲}m<\text{۵} \rightarrow m<\text{۲/۵} \xrightarrow{m\in N} m=\text{۱}$ یا $m=\text{۲}$

$m=\text{۱} \xrightarrow{\text{بازه}} (-\text{۱},-\text{۱})$ ✗

$m=\text{۲} \xrightarrow{\text{بازه}} (-\text{۱},\text{۰})$

ریشه‌ها $-\text{۱}$ ، ۰ $\xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} (-\text{۱})\times(\text{۰})=\text{۰}$ $\quad \frac{c}{a}=\text{۰} \rightarrow \frac{-n}{\text{۱}}=\text{۰} \rightarrow n=\text{۰}$

مثال: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(m+\text{۴})x^{\text{۲}}<n-(m-n+\text{۴})x$ به صورت بازهٔ $(m+\text{۱}\ ,\ -\text{۱})$ است. اگر m عدد صحیح باشد، مقدار $m\ n$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۴)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳ − ۴) ۶ −

$(m+\text{۴})x^{\text{۲}}+(m-n+\text{۴})x-n\underbrace{<\text{۰}}_{\text{منفی}}$ $\quad a>\text{۰}$

$m+\text{۴}>\text{۰} \rightarrow m>-\text{۴} \xrightarrow{m\in Z} \{-\text{۳},-\text{۲},\dots\}$

$\boxed{m=-\text{۳}} \Rightarrow (-\text{۲},-\text{۱}) \longrightarrow (\underset{\alpha}{-\text{۲}},\underset{\beta}{-\text{۱}})$

$m=-\text{۲} \Rightarrow (-\text{۱},-\text{۱})$ ✗

$m=-\text{۱} \Rightarrow (\text{۰},-\text{۱})$ ✗ نمی‌شه

$\boxed{m=-\text{۳}}$

$\alpha\beta=+\text{۲} \rightarrow \frac{c}{a}=\text{۲} \rightarrow \frac{-n}{m+\text{۴}}=\text{۲} \rightarrow \boxed{n=-\text{۲}}$

نمودار تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن $y = ax^2 + bx + c$

در تابع درجه‌ی دوم به فرم $y = ax^2$ رأس سهمی نقطهٔ $(0 , 0)$ است. اگر رأس سهمی را به نقطهٔ $S(x_0 , y_0)$ انتقال دهیم، معادلهٔ سهمی به فرم $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ تبدیل می‌شود.

اگر ضریب جملهٔ درجهٔ دوم (a) مثبت باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا بوده و سهمی حاوی نقطهٔ min است.


min

اگر ضریب جملهٔ درجهٔ دوم (a) منفی باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین بوده و سهمی حاوی نقطهٔ max است.


max

برای یافتن مقدار مینیمم یا ماکزیمم ابتدا باید مختصات طول نقطه‌ی سهمی را از فرمول $x_S = \frac{-b}{2a}$ یافته و سپس آن را در داخل تابع درجه‌ی دوم قرار می‌دهیم.

محور تقارن
$x=\frac{-b}{2a}$
$x=x_s$

$$f(x_S) = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

$\frac{-\Delta}{4a}=y_s$

$S\left(\frac{-b}{2a} , f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$


محور تقارن

نکته: max یا min تابع، جایی است که مماس افقی بر سهمی رسم می‌شود.

نکته: تابع درجه‌ی دوم دارای خط تقارنی به معادله‌ی $\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ $\Leftarrow$ $x = x_S$ است.

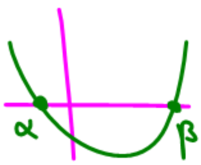
نکته: در صورت داشتن دو نقطه که دارای عرض یکسان هستند، بین طول این نقاط معدل می‌گیریم و معادلهٔ محور تقارن را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} A(x_1 , m) \\ B(x_2 , m) \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$A(3, m)$
$B(5, m)$ $\longrightarrow x_s=\frac{3+5}{2}=4$

نکته: اگر در تابع درجه‌ی دوم $c = 0$ باشد، منحنی از مبدأ مختصات می‌گذرد.

نکته: اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، منحنی از چهار ربع دستگاه مختصات خواهد گذشت.


α β
$\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$

مثال: تابع درجه‌ی دوم $y = 3x^2 - 2x - 1$ مفروض است. مختصات رأس سهمی و همچنین مقدار اکسترموم تابع و نوع آن را مشخص نمایید.


$a=3>0$
$y=\frac{-4}{3}$
اکسترممی از نوع min دارد.

$x_s=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

مقدار مینیمم $=f\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)-1=\frac{-4}{3}$

$S\left(1/3, -4/3\right)$


مماس افقی
رأس

مثال: محیط مستطیلی ۸۰ متر است. اندازه‌ی مساحت ماکزیمم این مستطیل را بیابید.

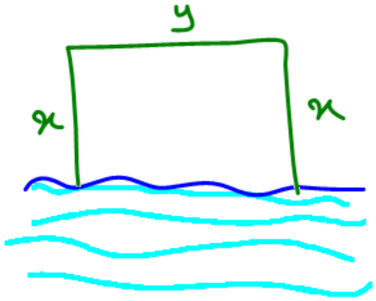
$P = 2(x+y) = 80 \xrightarrow{\div 2} x+y = 40 \longrightarrow y = 40 - x$

$S(x,y) = xy \xrightarrow{y=40-x} S(x) = -x^2 + 40x$ (درجه ۲)

$x_s = \dfrac{-(40)}{2(-1)} = 20 \longrightarrow S_{max} = S(x=20) = 400$

$\left.\begin{matrix} x=20 \\ y=20 \end{matrix}\right\} S = 400$

مثال: بیشترین طول زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند مترمربع است؟



$2x + y = 88$

مثال: نمودار توابع درجه‌ی دوم زیر را رسم کنید.

$y = -x^2 - 2x + 3$

$x_s = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{-2} = -1$

x	-2	-1	0	1
y	3	4	3	0

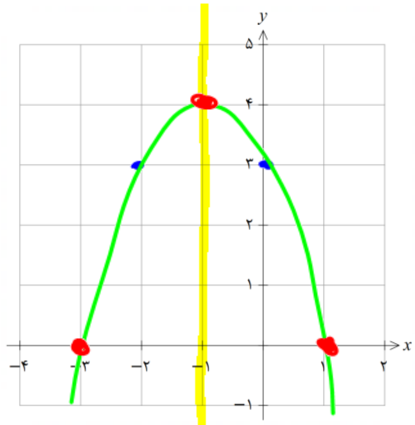
راه دوم (تجزیه‌شدنی)

$-x^2 - 2x + 3 = 0$

$x = 1 , x = -3 \longrightarrow x_s = \dfrac{\alpha + \beta}{2} = -1$

$f(-1) = 4$

$x = -1$



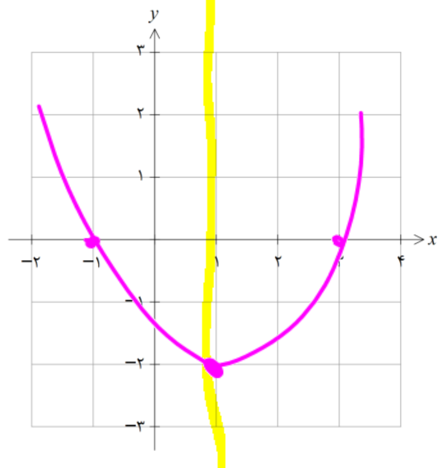
$y = \dfrac{1}{2}(x - 3)(x + 1)$

$x = 3 \quad x = -1$

$x_s = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1$

$f(1) = -2$

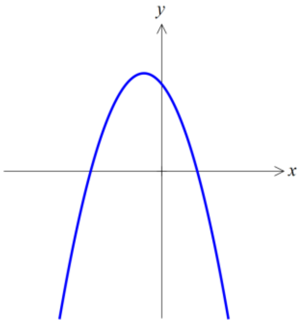
$x = 1$



مثال: معادله‌ی نمودار مقابل، کدام گزینه است؟

۱) $y = x^۲ + ۳x - ۲$ ۲) $y = -x^۲ - ۳x + ۲$

۳) $y = -x^۲ + ۳x - ۲$ ۴) $y = -x^۲ + ۳x + ۲$



رأس سهمی

$A(۰,-۱)$

مثال: نمودار $y = ax^۲ + bx + c$ محور x ها را در ۱- و ۳ و محور y ها را در ۱- قطع می‌کند. طول و عرض نقطهٔ رأس سهمی را بیابید.

$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ریشه‌ها را داریم

$y = a(x-x_s)^۲ + y_s$ رأس را داریم

$a(x+۱)(x-۳) = y \xrightarrow{(۰,-۱)}$

$-۳a = -۱ \longrightarrow \boxed{a = ۱/۳}$

$y = \frac{۱}{۳}(x+۱)(x-۳)$

$y = \frac{۱}{۳}x^۲ - \frac{۲}{۳}x - ۱$

$x_s = ۱ \quad , \quad y_s = -\frac{۴}{۳}$

نقطه   روی   خط

مثال: اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (قلم‌چی ۹۶)

$x = ۰$

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) ۳   ۴) ۳-

$a(x+۱)(x-۳) = y$

$S\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right. \xrightarrow{y=x} \alpha = \beta \longrightarrow S(\alpha,\alpha)$

$x_s = \frac{(-۱)+(۳)}{۲} = ۱ \xrightarrow{\alpha=\beta} S(۱,۱)$

$a(۲)(-۲) = ۱ \longrightarrow \boxed{a = -۱/۴}$

$y = -\frac{۱}{۴}(x+۱)(x-۳)$

$x = ۰: \quad -۱/۴\,(۱)(-۳) = ۳/۴$

تلاقی: $y_1=y_2 \xrightarrow{\text{مکرر زوج}}$ درجه ۲ $\Delta=0$

مثال: نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیهٔ دوّم، بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$y=-x$ ، $x<0$ ، $y>0$

۱) $\frac{-1}{18}$ ۲) $\frac{-5}{18}$ ۳) $\frac{-7}{6}$ ✓ ۴) $\frac{-1}{2}$

$3x^2+(2m-1)x+m+\frac{4}{3}=-x$ ، $+x$ ، $x_s=\frac{-(2m-1)}{6}$

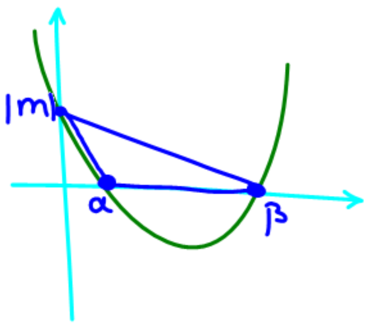
$3x^2+2mx+m+\frac{4}{3}=0 \xrightarrow{\Delta=0}$

$(2m)^2-4(3)(m+\frac{4}{3})=0 \xrightarrow{\div 4} m^2-3m-4=0$ ؛ $m=-1 \to x_s=\frac{1}{2}$ ، $m=4 \to x_s=-\frac{7}{6}$

مثال: صفرهای تابع $y = \underbrace{2}_{a}x^2 \underbrace{-(m+2)}_{b}x + \underbrace{m}_{c}$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام عدد می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟ (تجربی ۱۴۰۲)

$T=|\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ ، $x_s=\frac{m}{2}$

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{-3}{4}$ ۴) $\frac{-1}{2}$ ✓



$S=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\overbrace{(\beta-\alpha)}^{T}|m|}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{\cancel{a}}|m|=\frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2}$

$\sqrt{(m+2)^2-8m}\cdot|m|=3 \Rightarrow |m-2||m|=3 \Rightarrow |m^2-2m|=3$

$(m+2)^2-8m = \underbrace{m^2+4m+4-8m}_{m^2-4m+4} = (m-2)^2$

$m^2-2m=3 \to m^2-2m-3=0$ ؛ $m=-1 \to x_s=-\frac{1}{2}$ ، $m=3 \to x_s=\frac{3}{2}$

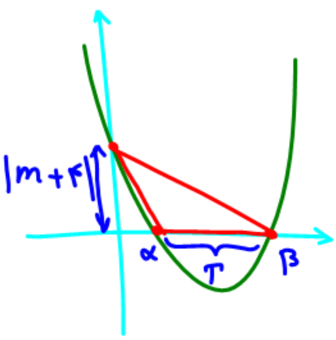
$m^2-2m=-3 \to m^2-2m+3=0$ ، $\Delta<0$

مثال: صفرهای تابع $y = mx^2 - 4x - (m+4)$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور y ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{16+4(m)(+m+4)}=\sqrt{\underbrace{4m^2+16m+16}_{4(m^2+4m+4)}}=2|m+2|$

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ✓ ۴) $\frac{9}{2}$

$x_s=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}=\frac{2}{m}$



$S=3 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|m|}\times\frac{|m+4|}{2}=3 \Rightarrow \frac{2|m+2||m+4|}{|m|\times\cancel{2}}=3$

$|(m+2)(m+4)|=3|m| \Rightarrow m^2+6m+8=\pm 3m \Rightarrow$

$m^2+3m+8=0$

$m^2+9m+8=0 \to$ $m=-1 \to x_s=\frac{2}{-1}=-2$ ، $m=-8 \to x_s=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$ ؛ اختلاف $\frac{7}{4}$

مثال: اگر α و β صفرهای سهمی $\underbrace{y = ۲۵\alpha x^۲ + ۴x + \beta}_{y=-5x^2+4x+1}$ و $\alpha < \beta$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) اول ✓ ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

$\frac{c}{a} = P = \alpha\cdot\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Longrightarrow 25\alpha^2 = 1 \Longrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{5}$

$\beta > \alpha$

$\underbrace{\frac{-b}{a} = S = \alpha + \beta = \frac{-4}{25\alpha}}$

$\alpha = \frac{1}{5} \longrightarrow \frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{5} \longrightarrow \boxed{\beta = -1}$ نادرست ✗

$\alpha = \frac{-1}{5} \longrightarrow \frac{-1}{5} + \beta = \frac{4}{5} \longrightarrow \boxed{\beta = +1}$

$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-5\cdot 2} = \frac{2}{5} \longrightarrow y_S = \frac{-4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{5}{5} = \frac{9}{5} \longrightarrow \boxed{y_S = 9/5}$

مثال: رأس سهمی $y = kx^۲ - ۴x - ۶$ روی خط $y = -۴x - ۴$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

(ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۸ ✓

$y = kx^2 - 4x - 6$

$x_S = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k} \Longrightarrow \boxed{x_S = \frac{2}{k}}$

$y_S = k\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{k}\right) - 6 \Longrightarrow \boxed{y_S = \frac{-4}{k} - 6}$

$\frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 6$

$\frac{-4}{k} - 6 = \frac{-8}{k} - 4 \longrightarrow$

$\frac{4}{k} = 2 \Longrightarrow k = 2$

$\boxed{y_S = -8}$

مثال: رأس سهمی $y = -ax^۲ + ax + ۲$ روی سهمی $y = ۲bx^۲ - bx - ۱$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) -۶ ۲) ۶ ✓ ۳) -۱۸ ۴) ۱۸

$y_1 = -ax^2 + ax + 2$

$x_S = \frac{-a}{2(-a)} = \frac{1}{2}$

$y_S = \frac{-a}{4} + \frac{a}{2} + 2 = \frac{a}{4} + 2$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{4} + 2\right) \in y_2$

$\frac{a}{4} + 2 = \frac{b}{\cancel{2}} - \frac{b}{\cancel{2}} - 1 \longrightarrow \boxed{a = -12}$

$y_2 = 2bx^2 - bx - 1$

$x_S = \frac{-(-b)}{2(2b)} = \frac{1}{4}$

$y_S = \frac{b}{8} - \frac{b}{4} - 1 = \frac{-b}{8} - 1$

$\left(\frac{1}{4}, \frac{-b}{8} - 1\right) \in y_1$

$\frac{-b}{8} - 1 = \underbrace{\frac{-a}{16} + \frac{a}{4}}_{3/16\,a} + 2 \xrightarrow{a=-12} \boxed{b = -6}$

$b - a = (-6) - (-12) = 6$

مثال: محور تقارن نمودار تابع $y = (x-۱)(x-۳) - x$ کدام خط است؟ (گزینه دو ۹۳)

۱) $x = ۲$ ۲) $x = \frac{۵}{۲}$ ✓ ۳) $x = ۳$ ۴) $x = \frac{۷}{۲}$

$x = x_s$

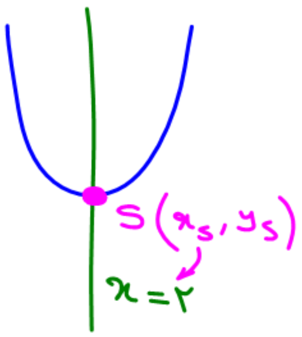
$y = x^۲ - ۴x + ۳ - x$

$y = x^۲ - ۵x + ۳$

$x_s = \frac{-(-۵)}{۲(۱)} = \frac{۵}{۲}$

مثال: اگر یکی از منحنی‌های تابع درجهٔ دوّم $y = (a-۱)x^۲ + x + ۳$ نسبت به خط $x = ۲$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ (تجربی ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶ ✓



$x_s = ۲ \Rightarrow \frac{-۱}{۲(a-۱)} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow (a-۱) = \frac{-۱}{۴} \Rightarrow \boxed{a = \frac{۳}{۴}}$

$y = \frac{-۱}{۴}x^۲ + x + ۳ \xrightarrow[y=۰]{\text{تقاطع با x ها}} \frac{-۱}{۴}x^۲ + x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times(-۴)}$

$x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰$ → $\alpha = -۲$, $\boxed{\beta = ۶}$

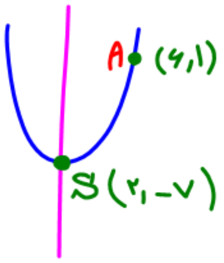
$S = ۴ \ , \ P = -۱۲$

مثال: محور تقارن سهمی $y = x^۲ + ۴x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (۲-) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می‌کند، کدام است؟ (قلم‌چی ۹۴)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

مثال: سهمی $y = ax^{2} + bx + c$ گذرا بر نقطهٔ $(6, 1)$، محور تقارن خود را در $(2, -7)$ قطع می‌کند. این سهمی از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟ (تجربی مجدد ۱۴۰۱)

۱) $(-2, 3)$
۲) $(4, -1)$
۳) $(4, -3)$
۴) $(-2, 1)$ ✓



$y = a(x-\cancel{x_s})^2 + \cancel{y_s} = a(x-2)^2 - 7$

$A\begin{vmatrix}6\\1\end{vmatrix} \Longrightarrow 16a - 7 = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 7$

$(4, -5)$ ✗

$(-2, 1)$ ✓

$x_s = \frac{-b}{2a} = 2 \Longrightarrow \boxed{b = -4a}$

$\begin{vmatrix}2\\-7\end{vmatrix} \longrightarrow 4a + 2b + \cancel{c} = -7$

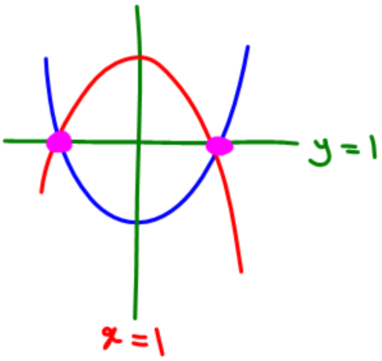
$\begin{vmatrix}6\\1\end{vmatrix} \longrightarrow 36a + 6b + \cancel{c} = 1$

$32a + 4b = 8 \xrightarrow{\div 4} 8a + b = 2$

$a = \frac{1}{2}$
$b = -2$
$c = -5$

مثال: محور تقارن سهمی‌های $y = x^{2} + ax - 2$ و $y = -x^{2} - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) -8
۲) -4
۳) 8 ✓
۴) 4



$x_s = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \Longrightarrow \boxed{x_s = -1}$

$x_s = \frac{-a}{2(1)} = -1 \Longrightarrow \boxed{a = +2}$

$y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Longrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x = -3 \quad x = 1$

$\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} \longrightarrow -1 - 2 + b = 1 \longrightarrow \boxed{b = 4}$

یا

$\begin{vmatrix}-3\\1\end{vmatrix} \longrightarrow -9 + 6 + b = 1 \longrightarrow \boxed{b = 4}$

مثال: نقاط $(-4, 3)$ و $(-4, -1/5)$ روی یک تابع درجهٔ دوّم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) $\frac{3}{2}$ ✓
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) $\frac{5}{4}$

$x_s = \frac{(-1/5) + 3}{2} = \frac{3}{4} = \frac{-b}{2a}$

$y = ax^2 + bx + c$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$

$\times 2$

مثال: نقاط $(\beta, ۱)$ و $(\beta, -۵)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $\frac{-۱}{۲}$ است.
اگر سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۳}{۲}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۴ ✓
۲) ۳
۳) -۲
۴) -۱

$x_S = \frac{-۵+۱}{۲} = -۲$

$S(-۲, \frac{-۱}{۲})$

$y = a(x - x_S)^۲ + y_S =$

$y = a(x+۲)^۲ - \frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۰, ۳/۲)}$

$\frac{۳}{۲} = ۴a - \frac{۱}{۲} \longrightarrow a = ۱/۲$

$y = \frac{۱}{۲}(x+۲)^۲ - ۱/۲$

$x = ۱ \xrightarrow{y = \beta} \beta = ۴$

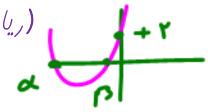
مثال: نقاط $A(۳, y)$ و $B(-۵, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۵$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $\frac{-۱}{۳}$
۲) $\frac{-۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

$\frac{c}{a}<0$ $\quad \alpha\beta<0$

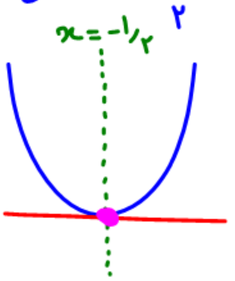
مثال: سهمی گذرا از نقاط $(1, a)$ و $(-2, a)$ بر خط $y+3=0$ مماس بوده و از هر چهار ناحیهٔ مختصات می‌گذرد. اگر فاصلهٔ نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات ۲ واحد باشد، مقدار a کدام است؟ (ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

عرض از مبدا

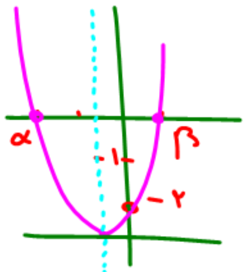


۱) ۲۰ ۲) -20 ۳) -6 ۴) ۶ ✓

$x_S=\frac{(-2)+(1)}{2}=\frac{-1}{2}$ $\quad x=-\frac{1}{2}$



مماس بر $y=-3$ $\longrightarrow S\left(-\frac{1}{2},-3\right)$



$(0,-2)$ عرض از مبدا

$y=m\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(-3)$

$y=m\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3 \xrightarrow{(0,-2)}$

$\frac{m}{4}-3=-2 \Rightarrow \boxed{m=4}$

$y=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3 \xrightarrow{x=1} \boxed{y=6}$

مثال: نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$، دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطهٔ $S(b, b-2)$ رأس این سهمی باشد، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی تیر ۱۴۰۴)

۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ✓ ۴) $\frac{13}{8}$

$x_S=\frac{7-2a+2a+3}{2}=\frac{10}{2}=5$

$7-2a\geq 1 \Rightarrow 2a\leq 6 \Rightarrow a\leq 3$

$a-2\geq 1 \Rightarrow a\geq 3$

$2a+3\geq 1 \Rightarrow 2a\geq -2 \Rightarrow a\geq -1$

$\Rightarrow \boxed{a=3} \in \mathbb{N}$

$A(9,1) \quad B(1,1)$ $\quad b=5 \xrightarrow{b-2=3} S(5,3)$

$y=m(x-5)^2+3 \xrightarrow{(1,1)} 16m+3=1 \Rightarrow \boxed{m=-\frac{1}{8}}$ عرض از $-\frac{1}{8}$

$c=?$ $\quad x=0 \Rightarrow \frac{-25}{8}+\frac{24}{8}=\frac{-1}{8} \longrightarrow |c|=\left|-\frac{1}{8}\right|=+\frac{1}{8}$

مثال: نقاط $A(2b+1, 2b-b^2)$ و $B(2b-1, 2b-b^2)$، دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های صحیح مثبت از سهمی $y=m(x-\alpha+1)^2+\alpha+1$ باشند. مقدار m کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۴)

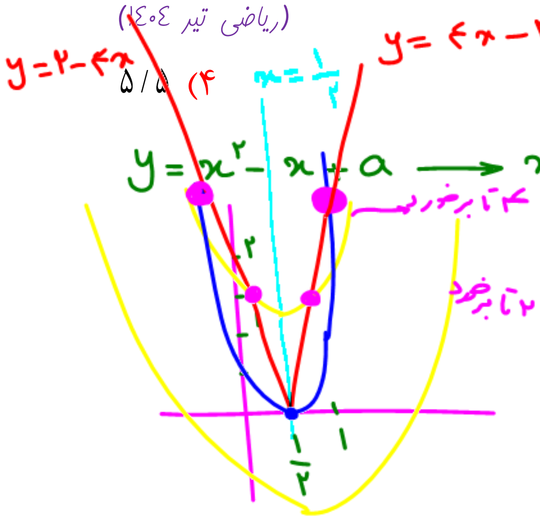
۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

مثال: اگر معادلهٔ $|4x-2| = x^2 - x + a$ دارای سه ریشهٔ حقیقی باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر معادله کدام است؟

$x = \frac{1}{2}$

(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ✓ ۳) ۵ ۴) ۵/۵



$y = x^2 - x + a \longrightarrow x_s = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$

شکل ۳ ریشه $\Longrightarrow y_s = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$y = x^2 - x + a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 4x - 2 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 9 = 0$

$(2x)^2 - 10(2x) + 9 = 0$

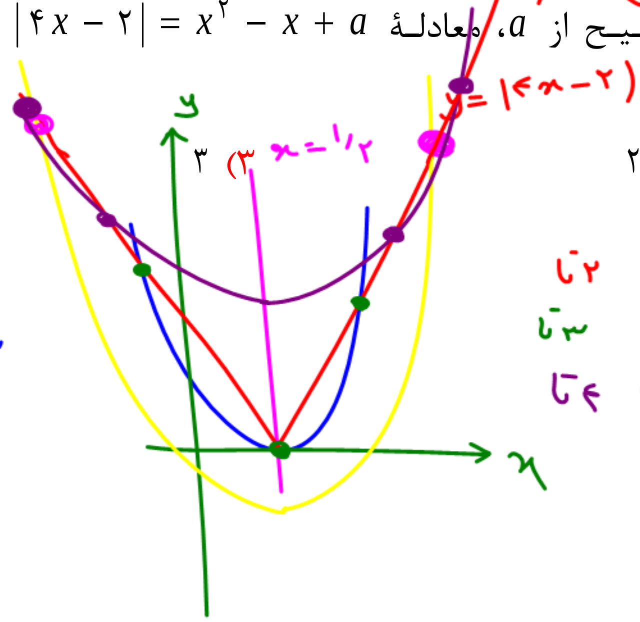
$(2x-9)(2x-1) = 0 \rightarrow \frac{9}{2}, \frac{1}{2}$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح از a، معادلهٔ $|4x-2| = x^2 - x + a$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$\begin{cases} y_s > 0 \\ x_s = \frac{1}{2} \end{cases}$



۲تا $(y_s < 0)$

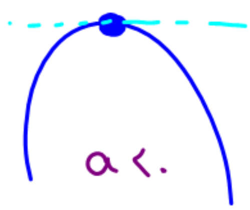
۳تا $(y_s = 0)$

۴تا $(y_s > 0)$

مثال: اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

(تجربی ۸۳)

۱) -4 ✓ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۴



$y_s = 0$

$k + 3 < 0 \Longrightarrow \boxed{k < -3}$

$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \xrightarrow{\text{صورت} = 0} \Delta = 0 \longrightarrow (-4)^2 - 4(k+3)(k) = 0 \xrightarrow{\div 4}$

$k^2 + 3k - 4 = 0$

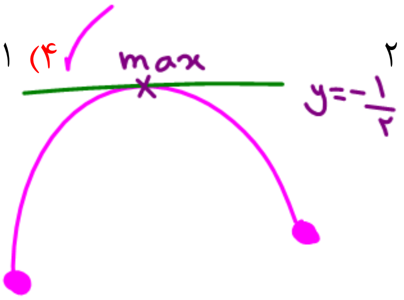
غ ق $k = 1 \notin (-\infty, -3)$ ، $k = -4$ ✓

$a<0$

مثال: در یک دامنهٔ محدود، برای چند مقدار مختلف a، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $\frac{-1}{2}$ است؟

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

۱) ۳ ۲) هیچ مقدار a ۳) ۲ ۴) ۱



$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \Delta = 2a$

$1 - 4a(2a) = 2a \Rightarrow 8a^2 + 2a - 1 = 0$

$a^2 + 2a - 8 = 0$

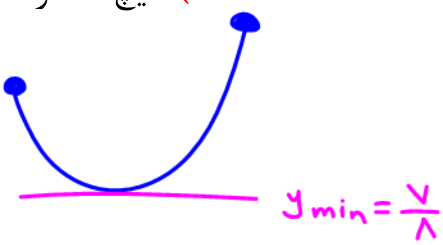
$\frac{-1}{2} = \frac{-4}{8}$ ✓ , $\frac{+2}{8} = \frac{1}{4}$ ✗

مثال: در یک دامنهٔ محدود، برای چند مقدار مختلف a، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟

$= a>0$

(تجربی خارج ۱۴۰۳)

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a



$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{7}{8} \Rightarrow 2\Delta = -7a \Rightarrow$

$2(9 - 4a^2) = -7a \longrightarrow 0 = 8a^2 - 7a - 18$

$a^2 - 7a - 144 = 0$

✗ $\frac{-9}{8}$ $\frac{16}{8} = 2$

مثال: کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

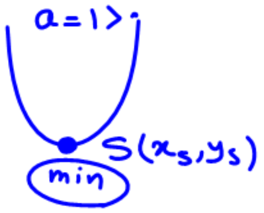
(ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $x = ۲$ ۲) $x = ۲/۵$ ۳) $x = ۳$ ۴) $x = ۳/۵$

$\frac{6}{m} = ?$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m، نقطهٔ مینیمم تابع $y = x^{۲} - mx + ۲ - m$ در ناحیهٔ اول محورهای مختصات قرار دارد؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳



$\frac{m}{2}$

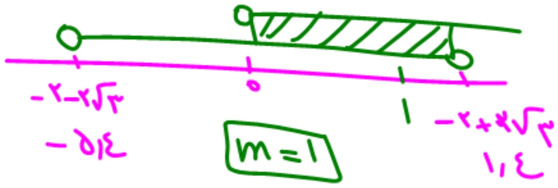
$x_s>0 \Rightarrow \frac{-(-m)}{2(1)}>0 \Rightarrow \frac{m}{2}>0 \to \boxed{m>0}$

$y_s>0 \Rightarrow \frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{2}+2-m>0 \Rightarrow 0>\frac{m^2}{4}+m-2 \xrightarrow{\times 4}$

$m^2+4m-8<0$　$\boxed{\Delta=48}$

16×3

$\alpha,\beta=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2}=-2\pm2\sqrt{3}$



$\boxed{m=1}$

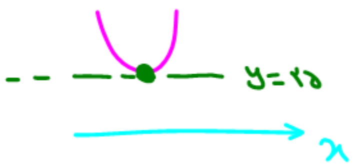
مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۵}{\sqrt{mx^{۲}-۸x+۳۹}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m، بیشترین مقدار تابع f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) صفر

$mx^2-8x+39 \xrightarrow{min=25}$

همواره مثبت باشد.

$m>0$ ، $\Delta<0$



$\frac{-\Delta}{4a}=25 \Rightarrow \Delta=-100a \Rightarrow 64-\overbrace{4(m)(39)}^{-156m}=-100m$

$64=56m \Rightarrow m=\frac{64}{56}=\frac{8}{7} \Rightarrow \boxed{m=\frac{8}{7}}$

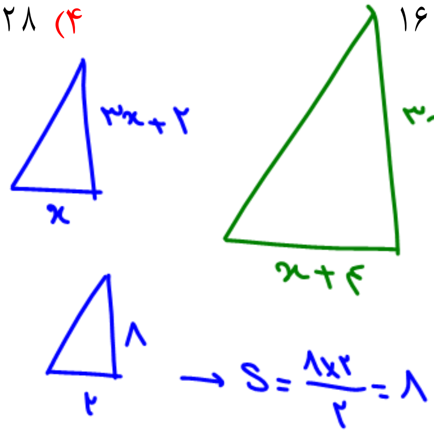
$\left[\frac{8}{7}\right]=1$

مثال: اگر معادلهٔ حرکت یک توپ فوتبال به صورت $y=-\frac{۱}{۴۰}x^{۲}+x$ باشد، که در آن x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ است، ماکسیمم فاصلهٔ توپ از سطح زمین کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۴۰　　۲) ۳۰　　۳) ۲۰　　۴) ۱۰

مثال: ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعدهٔ آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعدهٔ این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید ۴/۵ برابر مساحت مثلث اولیه می‌شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۴)

۱) ۸ ✓ ۲) ۱۴/۵ ۳) ۱۶/۵ ۴) ۲۸



$\rightarrow S = \frac{8\times 2}{2} = 8$

$3(x+2)$

$\frac{(3x+6)(x+4)}{2} = \frac{9}{2}\times\frac{(3x+2)(x)}{2}$

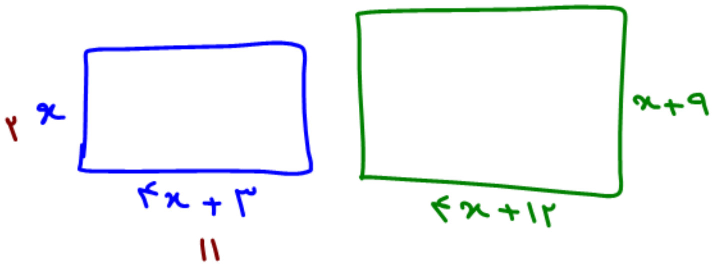
$2x^2+12x+16 = 9x^2+6x$

$0 = 7x^2-6x-16$

$0 = x^2-6x-112 \rightarrow \frac{14}{7} = 2 \quad , \quad \frac{-8}{7}$

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر ۹ واحد هم به طول و هم به عرض این مستطیل اضافه شود، مساحت مستطیل جدید ۱۰ برابر مساحت مستطیل اولیه می‌شود. محیط مستطیل اولیه کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۴)

۱) ۴۱ ۲) ۳۶ ۳) ۳۱ ۴) ۲۶ ✓



$P = 2(2+11) = 26$

$(4x+12)(x+9) = 10\,x(4x+3)$

$4x^2+48x+108 = 40x^2+30x$

$36x^2-18x-108 = 0 \xrightarrow{\div 18}$

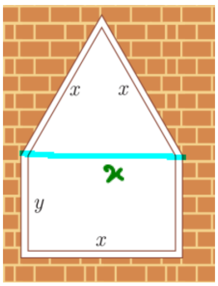
$2x^2-x-6 = 0 \longrightarrow$

$2 = \frac{4}{2} \; , \; \frac{-3}{2}$ ✗

مثال: اگر محیط پنجره زیر برابر $2\sqrt{3}$ باشد، به ازای کدام مقدار x ، بیشترین نوردهی را داریم؟

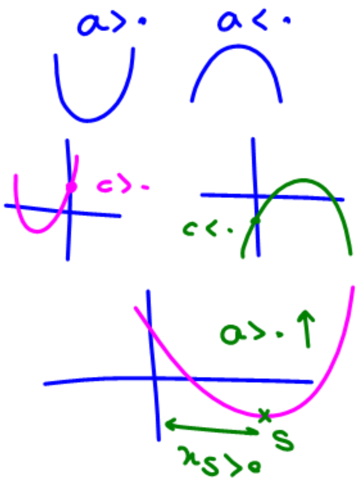
۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(کتاب درسی)



$S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$S_{\text{مستطیل}} = x \times y$



رسم و تشخیص نمودار تابع درجهٔ دوم

برای تشخیص علامت a به دهانه سهمی توجه می‌کنیم.

برای تشخیص علامت c به تقاطع با محور عمودی (عرض از مبدأ) توجه می‌کنیم.

برای تشخیص علامت b به علامت رأس سهمی توجه می‌کنیم.

نکاتی در مبحث معادله‌ی درجه‌ی دوم:

۱- اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، در صورتی که ریشه‌ی مضاعف معادله عدد x_0 باشد، معادله را می‌توان به صورت مقابل نوشت.

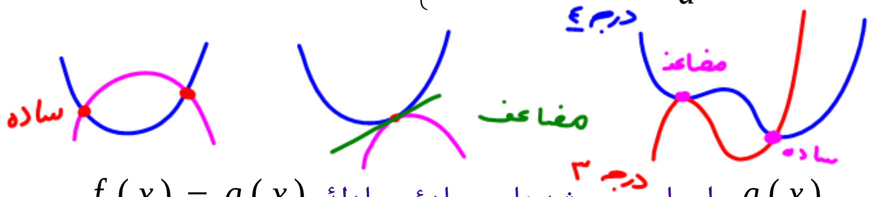
$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2$$

۲- اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی x_1 و x_2 متمایز باشد، می‌توان آن را به صورت حاصل-ضرب دو پرانتز نوشت.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

۳- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی ضریب x (b) عددی زوج باشد، می‌توان از دستور زیر ریشه‌ها را محاسبه کرد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} b' = \dfrac{b}{2} \quad , \quad \Delta' = b'^2 - ac \\ x_1 \,,\, x_2 = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \end{cases}$$



یافتن تعداد نقاط تلاقی دو تابع

۱- اگر بخواهیم نقاط تلاقی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را بیابیم، ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $f(x) = g(x)$ را می‌یابیم.

۲- اگر بخواهیم نقاطی را بیابیم که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بر هم مماس هستند به‌دست آوریم، ریشه‌های مضاعف معادلهٔ $f(x) = g(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال: تعداد نقاط تلاقی دو تابع $y = x^2 - 3x$ و $y = x - 3$ را بیابید.

$x^2 - 3x = x - 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Downarrow$

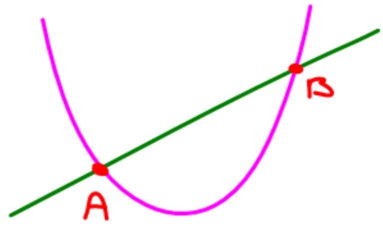
$\dfrac{x\,(\cancel{x-3})}{1} = \dfrac{(\cancel{x-3})}{1} \Longrightarrow \boxed{x=3}$

$x = 1$

$(x-3)^1(x-1)^1 = 0$

$x = 3 \quad y = 0$ $x = 1 \quad y = -2$

$B\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$ $A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$



مثال: نقاط تقاطع و نقاطی که دو تابع $y = x^3 + x$ و $y = 4x - 2$ بر هم مماس هستند را بیابید.

تلاقی: $x^3 + x = 4x - 2$

$1x^3 - 3x + 2 = 0$

جمع ضرایب $= 0 \longrightarrow x = 1$ یکی از ریشه‌ها

$-x$

$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Longrightarrow \underbrace{(x-1)(x-1)}(x+2) = 0$

$-2x$

$(x-1)^2 (x+2)^1 = 0$

مضاعف $x = +1$ $x = -2$ ساده

مثال: نمودار دو تابع $y = \dfrac{1}{x-2}$ و $y = x + 2$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^2 - 2x - 8$ را حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا هر دو نقطهٔ تلاقی آن با محور طول‌ها، در x های نامنفی باشد؟ (گزینه دو ۹۴)

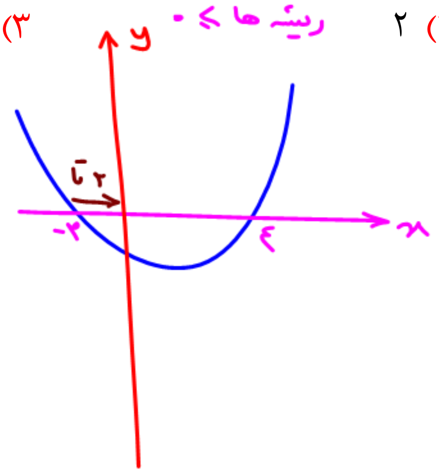
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

ریشه‌ها ≥ 0

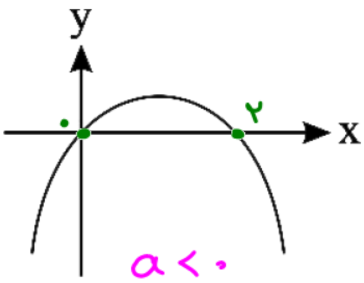
$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4 \quad x = -2$



مثال: کدام گزینه می‌تواند ضابطهٔ تابع زیر باشد؟ (گزینه دو ۹۵)



۱) $y = x^2 + 2x$

۲) $y = -x^2 + 2x$

۳) $y = x^2 - 2x$

۴) $y = -x^2 - 2x$

$-x^2 + 2x = 0$

$(-x)(x-2) = 0$

$x = 0 \quad x = 2$

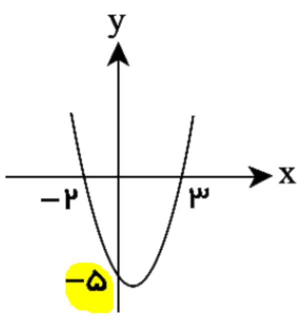
ریشه‌ها

$0 , -2$

مثال: شکل زیر، نمودار تابع درجهٔ دوم به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۴)

جمع ضرایب $\rightarrow x = 1$

۱) ۵ ۲) -5 ۳) ۶ ۴) -6



$y = \cancel{a}^{\,5/6}(x+2)(x-3)$

$\begin{vmatrix} 0 \\ -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -6a = -5 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{6}}$

$x = 1 \longrightarrow a + b + c = -5$

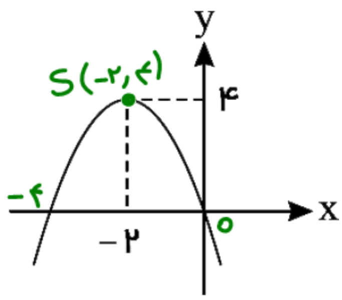
مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$، مقدار a کدام است؟ (قلم‌چی ۹۵)

۱) ۱

۲) -۱ ✓

۳) -۲

۴) ۲



$a(x)(x+۴) = y$

$\begin{vmatrix} -۲ \\ ۴ \end{vmatrix} \longrightarrow a(-۲)(۲) = ۴$

$a = -۱$

راس داشتم: $y = a(x - x_s)^۲ + y_s$

ریشه‌ها را داشتم: $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

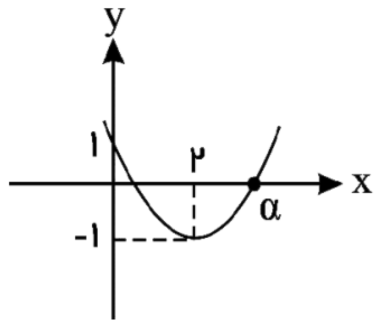
مثال: با توجه به شکل روبه‌رو که نمودار یک تابع درجهٔ ۲ را نشان می‌دهد، مقدار α کدام است؟ (قلم‌چی ۹۵)

۱) ۳

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $۲ + \sqrt{۲}$

۴) $\frac{۴ + \sqrt{۲}}{۲}$



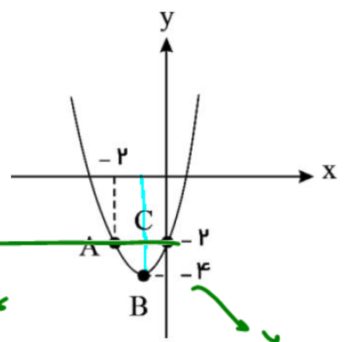
مثال: نمودار تابع درجهٔ دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۶)

۱) ۵

۲) ۶ ✓

۳) ۷

۴) ۸



$y = -۲$

عدم تقارن

$y_s = -۴$

$x_s = \frac{-۲+۰}{۲} = -۱$

$S(-۱,-۴)$

$y = a(x+۱)^۲ - ۴$

$\begin{vmatrix} ۰ \\ -۲ \end{vmatrix} \Rightarrow a - ۴ = -۲ \Rightarrow \boxed{a = ۲}$

$y = ۲(x+۱)^۲ - ۴ = ۲x^۲ + ۴x - ۲$

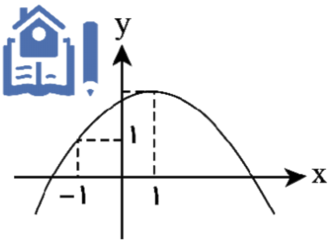
$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = (-۲)^۲ - ۲(-۱) = ۴ + ۲ = ۶$

جمع $= \frac{-b}{a} = -۲$

ضرب $= \frac{c}{a} = \frac{-۲}{۲} = -۱$

مثال: در سهمی شکل مقابل به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$، اگر $a - b = -۳$ آن‌گاه $f(۱)$ کدام است؟

(قلم‌چی ۹٤)



۱) -۴

۲) ۰

۳) ۴

۴) ۵

مثال: اگر مقدار max تابع $y = ax^۲ - ۴x + ۲a - ۱$ برابر ۳ باشد، مقدار a را بیابید.

$y_{max}=۳$

$a<۰$

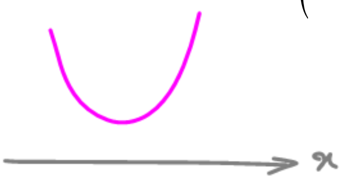
$\frac{-\Delta}{۴a}=۳ \Longrightarrow \Delta=-۱۲a \longrightarrow ۱۶-۴a(۲a-۱)=-۱۲a \Longrightarrow$

$۸a^۲-۱۶a-۱۶=۰ \xRightarrow{\div ۸} x^۲-۲x-۲=۰ \longrightarrow \frac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۱\pm\sqrt{۳}$ ، $۱+\sqrt{۳}$ ✗ ، $۱-\sqrt{۳}$

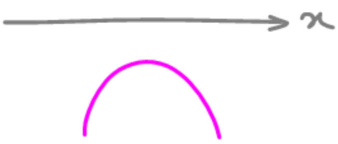
$\Delta=۴-۴(۱)(-۲)=۱۲$

نکته: تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را در نظر می‌گیریم.

۱- به ازای $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ عبارت همواره مثبت است. $(ax^۲ + bx + c > ۰)$



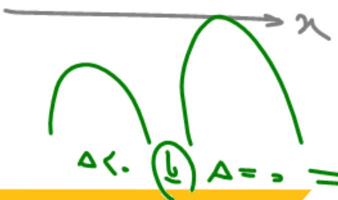
۲- به ازای $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ عبارت همواره منفی است. $(ax^۲ + bx + c < ۰)$



۳- به ازای $a > ۰$ و $\Delta \leq ۰$ عبارت همواره نامنفی است. $(ax^۲ + bx + c \geq ۰)$

$\Delta<۰ \cup \Delta=۰$

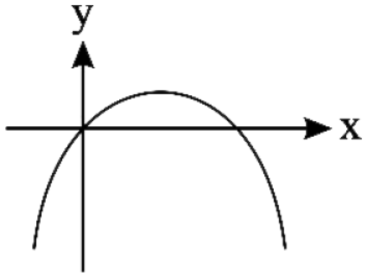
۴- به ازای $a < ۰$ و $\Delta \leq ۰$ عبارت همواره نامثبت است. $(ax^۲ + bx + c \leq ۰)$



$a<۰$

$\Delta<۰$ یا $\Delta=۰ \Longrightarrow \Delta\leq۰$

مثال: کدام‌یک از معادلات زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟



۱) $y = x^{۲} - ۳x - ۲$

۲) $y = x^{۲} - ۳x + ۲$

۳) $y = x^{۲} - ۳x + ۴$

۴) $y = x^{۲} - ۳x - ۴$

مثال: مقدار m را چنان بیابید که سهمی $y = \underbrace{(m + ۲)}x^{۲} + ۴x + m - ۱$ محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند.

$m+۲ \neq ۰ \Rightarrow m \neq -۲$

۲ ریشه $\Delta > ۰$

$۱۶ - ۴(m+۲)(m-۱) > ۰ \xrightarrow{\div ۴} ۴ > (m+۲)(m-۱)$

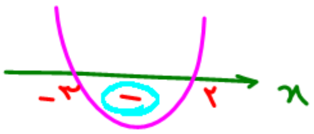
$۴ > m^۲ + m - ۲$

منفی بشه

$m^۲ + m - ۶ < ۰$

$(m+۳)(m-۲) < ۰$

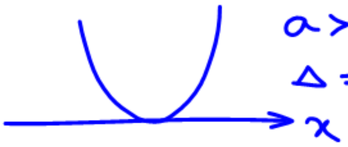
$-۳ \quad ۲$



$m \in (-۳, ۲) - \{-۲\}$ یا $-۳ < m < ۲$

$m \in (-۳, -۲) \cup (-۲, ۲)$

مثال: به ازای کدام مقدار m، تابع $y = (m - ۱)x^{۲} + ۲x + m + ۱$ بالای محور طول‌ها و بر آن مماس است؟



$a > ۰ \longrightarrow (m-۱) > ۰ \longrightarrow \boxed{m > ۱}$

$\Delta = ۰ \longrightarrow (۲)^۲ - ۴(m-۱)(m+۱) = ۰ \xrightarrow{\div ۴}$

$۱ = m^۲ - ۱ \longrightarrow m^۲ = ۲$

$m = -\sqrt{۲}$ غ ق ق , $m = +\sqrt{۲}$ ✓

مثال: به ازای کدام مقدار m، تابع $y = (m - ۱)x^{۲} + \sqrt{۵}\ x + m + ۱$، همواره زیر محور طول‌ها قرار می‌گیرد؟

$a < ۰$

$\Delta < ۰$

مثال: به ازای چه مقداری از m عبارت $mx^{2}+x+m$ همواره منفی است؟

$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

مثال: اگر معادله‌ی $y=x^{2}-mx+\left(m+\frac{5}{4}\right)$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد، حدود m را بیابید.

$\Delta>0$

مثال: اگر $mx^{2}+4x-2\le 0$ باشد، حدود m را بیابید. همواره نامثبت

$\Delta=0$ یا $\Delta<0$

$a<0 \longrightarrow \boxed{m<0}$ (I)

$\Delta\le 0 \longrightarrow 16-4m(-2)\le 0 \longrightarrow$ (II)

$16+8m\le 0 \longrightarrow 8m\le -16 \xrightarrow{\div 8} \boxed{m\le -2}$

$(I)\cap(II) \Rightarrow \boxed{m\le -2}$ یا $m\in(-\infty,-2]$

مثال: مجموع مربّعات دو عدد طبیعیِ فرد متوالی ۲۹۰ است. مجموع این دو عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۲۴ ✓

$(2x-1)^{2}+(2x+1)^{2}=290 \Longrightarrow$

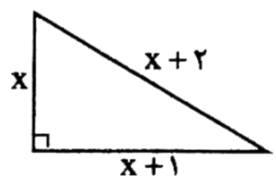
$8x^{2}=288 \xrightarrow{\div 8} x^{2}=36$

$x=-6$ یا $x=+6$

-13 و -11 $\notin \mathbb{N}$ غقق

11 و 13 $\in \mathbb{N}$ ✓

مثال: مساحت مثلث قائم‌الزّاویهٔ مقابل، کدام است؟ (کتاب درسی)

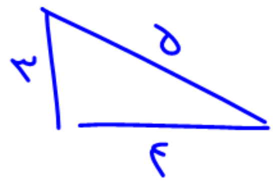


۱) ۵
۲) ۶ ✓
۳) ۱۰
۴) ۱۲

$(x+2)^{2}=x^{2}+(x+1)^{2} \Longrightarrow$

$0=x^{2}-2x-3$

$x=-1$ غقق ، $x=3$



$S=\frac{3\times 4}{2}=6$

مثال: اندازهٔ اضلاعِ مثلث قائم‌الزّاویه‌ای، به صورت $x + ۱$، $۲x + ۱$ و $۲x + ۳$ است. مساحت مثلث، کدام است؟

(ریاضی ۹۹)

۱) ۶۰

۲) ۵۶

۳) ۴۵

۴) ۳۹

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابرِ عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربّع باشد، محیط این مستطیل کدام است؟

(کتاب درسی)

$(x)(۴x + ۳) = ۴۵$

$\boxed{x = ۳}$

$P = ۳۶$

۱) ۲۸

۲) ۳۶ ✓

۳) ۴۲

۴) ۴۸

مثال: طول یک مستطیل، ۲ واحد کمتر از ۱/۵ برابرِ عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربّع باشد، محیط آن کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۵۲

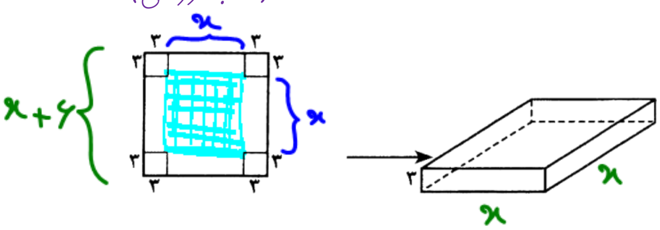
۲) ۵۶

۳) ۶۰

۴) ۶۴

مثال: مطابق شکل زیر، از یک صفحه مقوّایی به شکل مربّع، چهار گوشه‌اش را برش می‌زنیم و مربّع‌هایی به ضلع ۳ را از آن خارج می‌کنیم. سپس با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر حجم این جعبه، ۳۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع صفحه مقوایی کدام بوده است؟

(کتاب درسی)



$V(x) = ۳x^۲ = ۳۰۰$

$x^۲ = ۱۰۰ \rightarrow \boxed{x = ۱۰}$

۱۶

۱) ۷

۲) ۱۰

۳) ۱۳

۴) ۱۶ ✓

نکته: در صورتی که نیاز به محاسبهٔ مبین معادلهٔ درجهٔ ۲ (دلتا) باشد، بعضاً می‌توانیم با انتخاب عدد مناسب، عمل کنیم.

نکته: در صورتی که ضریب جملهٔ درجهٔ دوم پارامتری باشد، به ضریب a دقت بیشتری می‌کنیم.

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوّم $(۲m-۱)x^۲+۶x+m-۲=۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $-۲<m<۲/۵$ ✗
۲) $-۲<m<۳/۵$ ✗
۳) $-۱<m<۳/۵$ ✓
۴) $-۱<m<۲/۵$ ✗

$\Delta>0 \Longrightarrow 36-4(2m-1)(m-2)>0 \Longrightarrow$

$m=3 \longrightarrow 5x^2+6x+1=0 \quad \Delta>0$ ✓

$m=-1 \longrightarrow -3x^2+6x-3=0 \xrightarrow{\div(-3)}$

$x^2-2x+1=0$ مضاعف

$(x-1)^2=0 \longrightarrow \Delta=0$

مثال: ریشهٔ مضاعفِ معادلهٔ $ax^۲+۳x+۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$
۲) $\frac{۸}{۹}$
۳) $\frac{-۴}{۳}$ ✓
۴) $\frac{-۳}{۴}$

$\Delta=0 \longrightarrow 9-4(a)(2)=0 \longrightarrow \boxed{a=\frac{9}{8}}$

$\frac{9}{8}x^2+3x+2=0 \xrightarrow{\times 8} 9x^2+24x+16=0$

ریشه مضاعف: $x=\frac{-b\pm\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2(\frac{9}{8})}=\frac{-4}{3}$ | $(3x+4)^2=0 \longrightarrow x=\frac{-4}{3}$

مثال: سهمی $y=۲ax^۲-۵x+۱۸a$ در نقطهٔ A بر نیمساز ناحیهٔ سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a، کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۳)

$y=x$

۱) $\frac{-۵}{۲}$
۲) $\frac{-۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

معادله تلاقی: $2ax^2-5x+18a=x \Longrightarrow 2ax^2-6x+18a=0 \xrightarrow{\div 2}$

$ax^2-3x+9a=0 \xrightarrow{\Delta=0} 9-4(a)(9a)=0 \longrightarrow a^2=\frac{1}{4}$, $a=\frac{1}{2}$ ✗, $a=-\frac{1}{2}$

$x_S<0 \Longrightarrow \frac{3}{2a}<0 \longrightarrow a<0 \longrightarrow a=-\frac{1}{2}$

مثال: سهمی $y = ax^2 + 7x + 16a$ در نقطهٔ A بر نیمساز ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات مماس است. مقدار a، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۳)

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 1 ۴) -1

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشهٔ حقیقی است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

$\Delta < 0$

۱) $-3 < m < 5$

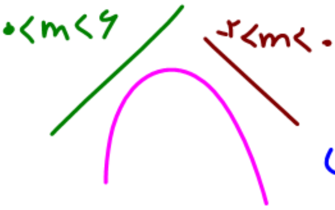
۲) $-3 < m < 4$

۳) $-2 < m < 4$

۴) $-1 < m < 5$

مثال: خط به معادلهٔ $y = mx + 4$ با منحنی به معادلهٔ $y = -x^2 + 2x$، هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m کدام است؟ (تجربی ۸۶)

۱) $m < 0$ ۲) $m > 4$ ۳) $-1 < m < 4$ ۴) $-2 < m < 6$ ✓



$-x^2 + 2x = mx + 4$

تلاقی: $x^2 + (m-2)x + 4 = 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(1)(+4) < 0 \longrightarrow$

(1) $m^2 - 4m + 4 - 16 < 0$

$m^2 - 4m - 12 < 0$

$(m-6)(m+2) < 0$

(2) $(m-2)^2 < 16 \xrightarrow{\sqrt{}} |m-2| < 4 \longrightarrow -4 < m-2 < 4 \longrightarrow -2 < m < 6$

مثال: سهمی $y=-mx^{۲}+mx+۱$ و خط $y=-m-x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر ✓

تلاقی ،

$-mx^2+mx+1=-m-x \longrightarrow mx^2-(m+1)x-(m+1)=0$

$(\Delta<0) \Rightarrow (m+1)^2+4m(m+1)<0 \longrightarrow (m+1)(m+1+4m)<0$

$(m+1)(5m+1)<0$ ، -1 ، $-\frac{1}{5}$ ، $m\in(-1,-\frac{1}{5})$ ، -1 ، $-\frac{1}{5}$ ، 0

عدد صحیح نداریم

نکته: در سؤالات چندشرطی شامل شروط دلتا، ضرب ریشه‌ها و جمع ریشه‌ها، ابتدا شروط ضرب و جمع ریشه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در نهایت به سراغ شرط دلتا می‌رویم.

نکته: گاهی اوقات استفاده از گزینه‌ها نیز در تعیین مقدار مجهول مؤثر است.

مثال: به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(۱-a)x^{۲}+۲\sqrt{۶}\,x-a$، همواره بالای محور x ها است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $a<۱$ ۲) $a<-۲$ ✓ ۳) $a>۳$ ۴) $-۲<a<۱$

ضریب $x^2>0 \Rightarrow 1-a>0 \Rightarrow \boxed{a<1}$

$\Delta<0 \Rightarrow 24-4(1-a)(-a)<0 \xrightarrow{\div 4}$

$6<-a(1-a) \longrightarrow a^2-a>6 \longrightarrow$

$a^2-a-6>0$

$(a-3)(a+2)>0$

-2 ، 1 ، 3

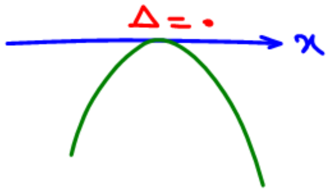
مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^{۲}+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور x ها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $۱<m<۵$ ۲) $۲<m<۵$ ۳) $۲<m<۴$ ۴) $۲<m<۶$

مثال: به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y=(m-2)x^2+3x+m+2$ پایین محور x ها و مماس بر آن است؟

(گزینه دو ۹۴)

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{-5}{2}$



$a<0 \longrightarrow m-2<0 \longrightarrow \boxed{m<2}$

$\Delta=0 \longrightarrow 9-4(m-2)(m+2)=0 \longrightarrow$

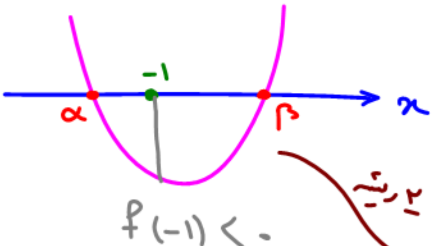
$m^2-4=\frac{9}{4} \longrightarrow m^2=\frac{25}{4} \longrightarrow m=-5/2 \ , \ m=+5/2$

مثال: اگر $x=-1$ بین ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+(m+1)x+m^2-3=0$ باشد، حدود m کدام است؟

$a>0$

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

۱) $0<m<2$ ۲) $-1<m<2$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-2<m<0$



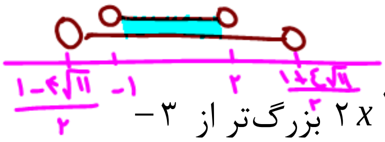
$f(-1)<0 \Longrightarrow 2-m-1+m^2-3<0$

$m^2-m-2<0 \longrightarrow (m-2)(m+1)<0$

$m\in(-1,2)$

$\Delta>0 \longrightarrow (m+1)^2-4(2)(m^2-3)>0 \longrightarrow 7m^2-2m-25<0$

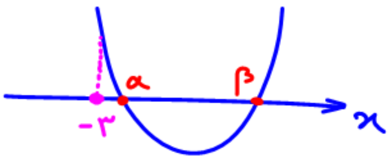
$\frac{2\pm\sqrt{704}}{14}=\frac{1\pm\sqrt{176}}{7}=\frac{1\pm4\sqrt{11}}{7}$ $=-1.75$ ، $=2.05$



مثال: برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادلهٔ $2x^2+7x+m=0$ بزرگ‌تر از -3 است؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر



$f(-3)>0 \Longrightarrow 18-21+m>0 \Longrightarrow \boxed{m>3}$

$\Delta>0 \Longrightarrow 49-4(2)(m)>0 \longrightarrow \boxed{m<\frac{49}{8}}$ 6.125

$f(-3)>0$

$\Delta>0$

$\left.\begin{matrix} 3<m<6.125 \\ m\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\} \longrightarrow m=\{4,5,6\}$

مثال: برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادلهٔ $-x^2+5x+m=0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{2}$ است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، روابط زیر را به خاطر می‌سپاریم.

$$\alpha+\beta=S=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\times\beta=P=\frac{c}{a}$$

$$|\alpha-\beta|=T=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$$

$$\alpha^4+\beta^4=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2$$

مثال: اگر رابطهٔ $5\alpha+\beta=12$ بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-4x+m-3=0$ برقرار باشد، مقدار m را بیابید.

$S=4 \quad , \quad P=m-3$

$\begin{cases}5\alpha+\cancel{\beta}=12\\ \alpha+\cancel{\beta}=4\end{cases}$ $\ominus$

$4\alpha=8 \longrightarrow \alpha=2 \ , \ \beta=2$

$x=2 : 4-8+m-3=0$

$m=7$

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+125=0$ مجذور ریشهٔ دیگر باشد، مقدار m را بیابید.

$S=m \quad , \quad P=125$

$\beta=\alpha^2$

$P=\alpha\beta=125 \longrightarrow \alpha^3=125 \longrightarrow \boxed{\alpha=5}$, $\boxed{\beta=25}$ $\xrightarrow{x=5}$ $25-5m+125=0$

$150=5m$

$\boxed{m=30}$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ را بیابید.

$S=3 \quad , \quad P=1$

$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)}=\frac{S^3-3SP}{P}=\frac{27-9}{1}=18$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲-۶x+۴=۰$ باشد ($\alpha>\beta$)، حاصل عبارت $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ را بیابید.

$$(A)^۲=\underbrace{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^۲}_{+} \xrightarrow{(\ )^۲} A^۲=(\alpha+\beta)-۲\sqrt{\alpha\beta}$$

$$A^۲=S-۲\sqrt{P}$$

$$\left.\begin{array}{l} S=۶ \\ P=۴ \end{array}\right\} \to A^۲=۶-۲\sqrt{۴}=۲$$

$$A=\pm\sqrt{۲} \xrightarrow{A>۰} \boxed{A=+\sqrt{۲}}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۳x^۲-x-۱=۰$ باشد، حاصل عبارت $۳\alpha^۳\beta-\alpha^۲\beta+۳$ را بیابید.

$$۳\alpha^۲-\alpha=۱ \quad , \quad ۳\beta^۲-\beta=۱$$

$$(\alpha\beta)\big(\overbrace{۳\alpha^۲-\alpha}\big)+۲=P(۱)+۲=P+۲=\frac{c}{a}+۲=\frac{-۱}{۳}+۲=\frac{۵}{۳}$$

مثال: در معادله‌ی $x^۲-۱۲x+m=۰$ یک ریشه از دوبرابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد کمتر است. مقدار m را بیابید.

$x=2$

مثال: اگر $\alpha = 2$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $mx^2 + 3x + m - 1 = 0$ باشد، مجموع ریشه‌های معادله، چند برابر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله است؟

$4m+6+m-1=0$

$\boxed{m=-1}$

۱) $\frac{3}{2}$ ✓ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{-3}{2}$ ۴) $\frac{-2}{3}$

$-x^2+3x-2=0$

$x^2-3x+2=0$ → $x=1$, $x=\frac{c}{a}=2$

$\frac{S}{P}=\frac{1+2}{1\times 2}=\frac{3}{2}$

✓ $\frac{S}{P}=\frac{-b}{c}=\frac{-(3)}{-2}=+\frac{3}{2}$

نکتهٔ مهم: در سؤالاتی که صحبت از S و P به میان می‌آید، قطعاً دو ریشه داریم و به شرط $\Delta > 0$ توجه ویژه‌ای می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ درجهٔ دوّم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموعِ ریشه‌ها با معکوسِ حاصل‌ضربِ آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ✓ ۲) 3 ۳) -1 ۴) $\frac{-5}{2}$

$\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta} \Longrightarrow \frac{-b}{a}=\frac{a}{c} \longrightarrow a^2=-bc \longrightarrow a^2+bc=0$

$9+\underbrace{(2m-1)(2-m)}_{-2m^2+5m-2}=0 \longrightarrow 2m^2-5m-7=0$

$\boxed{a+c=b}$

$\cancel{m=-1}$ $(3x^2-3x+3=0)$ $x^2-x+1=0$ $\Delta<0$

$m=\frac{-c}{a}=\frac{7}{2}$

مثال: α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 - 8x + 4 = 0$ است. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های $\underbrace{\alpha\beta^2}_{\alpha'}$ و $\underbrace{\alpha^2\beta}_{\beta'}$، برابر باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}} a$ کدام است؟ $(a > 0)$ (تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) 1 ۲) 2 ✓ ۳) 3 ۴) 4

$S'=P' \Longrightarrow \alpha'+\beta'=\alpha'\beta' \Longrightarrow \overbrace{(\alpha\beta)(\alpha+\beta)}^{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}=\alpha^3\beta^3$

$P\times S=P^3 \xrightarrow[\div P]{P\neq 0} S=P^2 \longrightarrow \frac{8}{a}=\left(\frac{4}{a}\right)^2 \Rightarrow 16a=8a^2 \longrightarrow$

$a^2=2a \longrightarrow \begin{cases} a=0 \times \quad \log_{\sqrt{2}} 0 \text{ ن ت} \\ a=2 \end{cases}$

$\log_{\sqrt{2}} 2=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^1=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 2=2$

مثال: به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ عددی بین دو ریشهٔ حقیقیِ معادلهٔ درجهٔ دوّم $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

(ریاضی ۸۴)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -4 ✓

واسطه حسابی

x, y, z دنباله حسابی

$2y = x + z$

$2\left(\frac{1}{8}\right) = \overbrace{\alpha+\beta}^{S} \Rightarrow S = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{m^2-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cancel{m=4}$ ، $m=-4$ ✓

$\Delta<0$: $12x^2-3x+4=0$

$12x^2-3x-4=0$: $\Delta>0$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2(a+1)x+2a-1=0$ باشد، به ازای کدام مقدار a، به ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

A ، $\frac{C}{A} = P$

$\underbrace{\alpha, a, \beta}_{\text{هندسی}} \Rightarrow a^2 = \alpha\beta \Rightarrow a^2 = 2a-1 \longrightarrow a^2-2a+1=0 \longrightarrow (a-1)^2=0$

$a=1$

مثال: اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2kx+5=0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴ ✓

$T = |\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{4k^2-20}}{1} = \frac{4}{3}k \Rightarrow 4k^2-20 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow \frac{20}{9}k^2 = 20 \xrightarrow{\div 20}$

$k^2 = 9 \xrightarrow{\div 2} \frac{k^2}{2} = 4.5 \Rightarrow [4.5] = 4$

$T=2$

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+1)x+a=0$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a+1)x+b=0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟

$T'=2$

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ✓ ۳) ۱۳ ۴) ۹

$T=2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2 \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2-4a}=2 \Rightarrow a^2-2a+1=4 \longrightarrow a^2-2a-3=0$: $\cancel{a=-1}$ ($x^2-1=0$ ، $x=\pm1$) ، $\boxed{a=3}$

$x^2-10x+b=0$

$x^2-4x+3=0$ ، $P=3$

$x^2-10x+24=0$ ، $P=24$

$T=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{1}=2 \longrightarrow \sqrt{100-4b}=2 \longrightarrow 100-4b=4 \longrightarrow \boxed{b=24}$

$|24-3| = |21| = 21$

کاربردهای S و P

۱) کاربرد در تعیین ریشه‌ها و بالعکس

$x=-5$

مثال: اگر در معادلهٔ $ax^{2}-bx+c=0$، رابطهٔ $25a+5b+c=0$ بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه‌های این معادله، کدام است؟ (گزینه دو ۹۶)

۱) $-\dfrac{c}{5a}$ ۲) $-\dfrac{c}{25a}$ ۳) $-\dfrac{c}{125a}$ ۴) $-\dfrac{c}{a}$

$\alpha+(-5)=\dfrac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha=\dfrac{b}{a}+5}$

$(-5)(\alpha)=\dfrac{c}{a} \Rightarrow \alpha=\dfrac{c}{-5a}=-\dfrac{c}{5a}$

مثال: معادلهٔ درجهٔ دوّمی که ریشه‌های آن به صورت $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ باشد، کدام است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۱)

$\simeq\sqrt{3.7}$ ، $\simeq\sqrt{0.3}$

$\beta>0$ ، $\alpha>0$

۱) $2x^{2}+\sqrt{3}x-1=0$

۲) $2x^{2}-\sqrt{3}x-1=0$

۳) $x^{2}+\sqrt{6}x-1=0$

۴) $x^{2}-\sqrt{6}x+1=0$

$\alpha\beta>0 \longrightarrow P>0 \longrightarrow \dfrac{c}{a}>0$?

$\alpha+\beta>0 \longrightarrow S>0 \longrightarrow -\dfrac{b}{a}>0$?

مثال: ضرایب معادلهٔ $x^{2}+bx+c=0$ صحیح و یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ می‌باشد. مقدار bc چقدر می‌تواند باشد؟ (حلی‌سنج ۱۴۰۱)

۱) -3 ۲) 3 ۳) 4 ۴) -4

مثال: اگر $\alpha + \beta = ۲$ و $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۸$ ریشه‌های کدام معادله $\alpha\beta + ۱$ و $\alpha + \beta - ۴$ می‌باشد؟

(حلی سنج ۱۴۰۱)

۱) $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$

۲) $x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$

۳) $x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$

۴) $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

مثال: اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

$(a+b)^۲ - ۲ab$

$S = a + b = a^۲ + b^۲ - ۱۲ \Longrightarrow (a+b) = (a+b)^۲ - ۲(a+b-۱) - ۱۲ \xrightarrow{a+b=t}$

$t = t^۲ - ۲t + ۲ - ۱۲ = ۰ \longrightarrow t^۲ - ۳t - ۱۰ = ۰$

$P = a \cdot b = a + b - ۱$

$(t-۵)(t+۲) = ۰ < \begin{cases} t = -۲ \longrightarrow a+b = -۲ \quad a,b \in \mathbb{N} \\ \boxed{t = ۵} \end{cases}$

مثال: اگر a و b عددهای مخالف صفر و $a + b$ و ab جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ax - b = ۰$ باشند، قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟

$P = \frac{C}{A} = \frac{-b}{۱} = -b$

$S = \frac{-B}{A} = \frac{-(-a)}{۱} = a$

(قلم‌چی ۱۴۰۱)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$T = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$S = \alpha + \beta = a \Longrightarrow \cancel{a} + b + ab = \cancel{a} \longrightarrow b(۱+a) = ۰ < \begin{cases} b = ۰ \\ \boxed{a = -۱} \end{cases}$

$P = \alpha \cdot \beta = -b \Longrightarrow (a+b)(ab) = -b$

$(b-۱)(-b) = (-b) \longrightarrow b - ۱ = ۱ \quad \boxed{b = ۲}$

$x^۲ + x - ۲ = ۰$

$T = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(۱)^۲ - ۴(۱)(-۲)} = \sqrt{۹} = ۳$

مثال: معادله‌های $x^۲ + ۶x + m = ۰$ و $x^۲ + ۲x - ۳m = ۰$ یک ریشهٔ مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

(ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

راه بهتر

$\cancel{x^۲} + ۶x + m = ۰ < \alpha, \beta \qquad S = \alpha + \beta = -۶$

$\ominus \quad \cancel{x^۲} + ۲x - ۳m = ۰ < \alpha, \beta' \qquad S = \alpha + \beta' = -۲$

راه دوم: $۴x + ۴m = ۰ \quad \boxed{x = -m}$ ادامه

$\longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -۶ \\ \ominus \ \alpha + \beta' = -۲ \end{cases}$

$\beta - \beta' = -۶ - (-۲) = -۴$

$\beta' - \beta = ۴$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}+x-1-m^{2}=0$ باشد، کمترین مقدار ممکن برای $\alpha^{2}+\beta^{2}$ کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) ۱ ۲) ۳ ✓ ۳) ۵ ۴) ۷

$\alpha^{2}+\beta^{2}=S^{2}-2P=(-1)^{2}-2(-1-m^{2})=3+2m^{2}\longrightarrow \min\{3+2m^{2}\}=3$

min این عبارت صفر است.

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$

$P=\frac{c}{a}=\frac{-1-m^{2}}{1}=-1-m^{2}$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-5x+2=0$ باشد، کمترین مقدار ممکن برای $\frac{4\alpha+\beta^{5}}{5\beta^{2}}$ کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴)

$S=5 \quad P=2$

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

$P^{2}=2^{2}=4$

$\frac{4\alpha+\beta^{5}}{5\beta^{2}}\times\frac{\alpha^{2}}{\alpha^{2}}=\frac{4\alpha^{3}+(\alpha^{2}\beta^{2})\beta^{3}}{5(\alpha\beta)^{2}}=\frac{4\alpha^{3}+4\beta^{3}}{20}=\frac{4(\alpha^{3}+\beta^{3})}{4\times5}=\frac{1}{5}(\alpha^{3}+\beta^{3})=$

$\frac{1}{5}(S^{3}-3SP)=\frac{1}{5}(125-30)=\frac{95}{5}=19$

$\sqrt{\frac{1}{\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}=5\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=5\longrightarrow\frac{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{2}}{(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta})^{2}}=(5)^{2}\longrightarrow$

$\frac{(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}=25$

مثال: مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادلهٔ $36x^{2}-(m+14)x+1=0$ برابر ۵ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $mx^{2}+3x+2=0$ کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۴)

$S=\frac{-b}{a}=\frac{m+14}{36} \quad P=\frac{1}{36}$

۱) -2 ✓ ۲) -3 ۳) ۲ ۴) ۳

$\frac{\frac{m+14}{36}+\frac{1}{3}^{\times 12}_{\times 12}}{\frac{1}{36}}=25\longrightarrow m+26=25\longrightarrow\boxed{m=-1}$

$-x^{2}+3x+2=0\longrightarrow$

$\frac{c}{a}=?=\frac{2}{-1}=-2$

مثال: اگر عکس مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $-4ax^2+bx+\frac{1}{2}c=0$ برابر $\log 4$ و a واسطهٔ حسابی b و c باشد، مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

خاصیت: $a^{\log_a x}=x$

$\boxed{a=\frac{b+c}{2}} \xrightarrow{\times 2} 2a=b+c \xrightarrow{\div a} 2-\frac{b}{a}=\frac{c}{a}$

(ریاضی تیر ۱۴۰۴)

۱) $\sqrt[4]{5}$ ✓ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt[4]{10}$ ۴) $\sqrt{10}$

$\frac{1}{S}=\frac{1}{\frac{-B}{A}}=-\frac{A}{B}=-\frac{-4a}{b}=\frac{4a}{b}=\log 4 \longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{\log 4}{4} \longrightarrow \frac{b}{a}=\frac{4}{\log 4}$

$\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{2-\frac{\cancel{4}\,2}{\log 4}}$, $\log 4=\cancel{4}\,2\log 2$

$=\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\log 2}\right)}=\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^{1-\frac{1}{\log 2}}=\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^{\log_2 \frac{1}{5}}=2^{\log_2\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{4}}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{5}$

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $(a\log 2)x^2+ax+b\log 2=0$ برابر -1 باشد، مقدار $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{b}{a}}$ کدام است؟

$\frac{1}{\log 2}=\frac{\log 10}{\log 2}=\log_2 10$ $\quad 1-\frac{1}{\log 2}=1-\log_2 10=\log_2 2-\log_2 10=\log_2\frac{1}{5}$

(ریاضی خارج ۱۴۰۴)

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۵ ۴) ۱۰

مثال: اختلاف جذر دو ریشهٔ معادلهٔ $x^2-3mx+m=0$ برابر ۱ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+mx-m=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{18}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲) کاربرد در تعیین علامت ریشه‌ها

بحث در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ضرب $\alpha \cdot \beta$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ۲ تا ریشه داریم

- $\frac{c}{a} > 0$ هم علامتند $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow +/+$
  - $\frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow -/-$
- $\frac{c}{a} = 0$ یکی از ریشه ها صفر $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow 0/+$
  - $\frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow 0/-$
- $\frac{c}{a} < 0$ ناهم علامتند $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow |\oplus| > |\ominus|$
  - $\frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow$ ریشه ها قرینه اند
  - $\frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow |\oplus| < |\ominus|$

نکته: شرط آن‌که یک معادلهٔ درجهٔ دوم، دارای یک ریشهٔ صفر باشد، این است که : $c = 0$ و $b \neq 0$

نکته: شرط آن‌که یک معادلهٔ درجهٔ دوم، دارای دو ریشهٔ قرینه باشد، آن است که : $\frac{c}{a} < 0$ و $b = 0$ ناهم علامت

نکته: شرط آن‌که یک معادلهٔ درجهٔ دوم، دارای یک ریشهٔ مضاعفِ صفر باشد، آن است که : $b = c = 0$.

$ax^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0$

مثال: مقدار m را چنان بیابید که تابع $y = (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)\,x + 1$ دارای دو ریشهٔ قرینه باشد.

$b = 0 \longrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0$ ، $a + c = b$

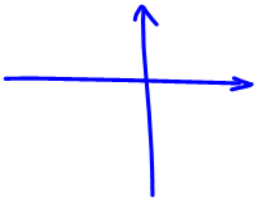
$m = -1$ ✗

$m = -\frac{c}{a} = -3$ ✓

$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{1}{m+2} < 0 \longrightarrow m + 2 < 0 \longrightarrow m < -2$

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + (a+۳)x - ۱$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $a < -۹$ ✓ ۲) $a < -۳$ ✗ ۳) $a > -۱$ ۴) $-۳ < a < ۰$



$\alpha , \beta < 0$

$S < 0 \longrightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{a+3}{\underset{\text{منفی}}{a}} > 0 \longrightarrow a+3 < 0$ $\boxed{a < -3}$

$P > 0 \longrightarrow \frac{-1}{a} > 0 \longrightarrow \frac{1}{a} < 0 \longrightarrow \boxed{a < 0}$

$\Delta > 0$

مثلاً $a = -4$ $\quad -4x^2 - x - 1 = 0 \longrightarrow 4x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta < 0$

مثال: به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوّم $(m-۶)x^{۲} - ۲mx - ۳ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است؟ (تجربی ۹۷)

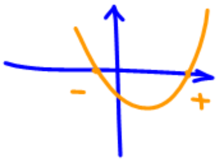
۱) $m < -۶$ ۲) $m > ۳$ ۳) $۰ < m < ۳$ ۴) $۳ < m < ۶$

مثال: معادلهٔ درجهٔ دوّم $۲x^{۲} + mx + m + ۶ = ۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹، مشابه تجربی خارج ۹۷ و تجربی ۹۶)

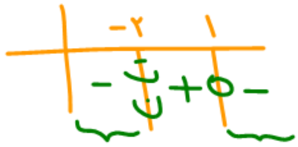
۱) $(-۴ , ۰)$ ۲) $(-۴ , -۲)$ ۳) $(-۶ , ۰)$ ۴) $(-۶ , -۴)$

مثال: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2+3x+1-m$، محور x ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) $m<-2$ ۴) $m>1$



$\Rightarrow P<0 \to \alpha\beta<0 \to \frac{c}{a}<0 \to \frac{(1-m)}{(m+2)}<0 \to$



$m<-2$ یا $m>1$

$\Delta>0 \to \begin{cases} m=2 \to 4x^2+3x-1=0 \quad \Delta>0 \\ m=-3 \to -x^2+3x+4=0 < \begin{matrix} x=-1 \\ x=4 \end{matrix} \end{cases}$

مثال: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(m+5)x+2m-3=0$ و $x_1<|x_1|<x_2$ باشد، آن‌گاه m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟ (قلم‌چی ۱۴۰۱)

$x_1=\alpha<0$ $\quad x_2=\beta>0$ $\quad |x_2|>|x_1|$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ریشه‌ها $\alpha<0<\beta$

$S>0 \to \frac{-b}{a}>0 \to m+5>0 \to \boxed{m>-5}$

$P=\alpha\beta<0 \to \frac{c}{a}<0 \to \frac{2m-3}{1}<0 \to \boxed{m<3/2}$

$\Delta>0 \Rightarrow (m+5)^2-4(1)(2m-3)>0 \to \underbrace{m^2+2m+37}_{\Delta<0 \quad a>0}>0 \to x\in\mathbb{R}$

همواره مثبت

۶ مقدار صحیح

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادلهٔ $(x-1)(x^2+ax-a+1)=0$، دو جواب مثبت و یک جواب منفی دارد؟ (قلم‌چی ۹۵)

$x=1$ $\quad$ ۱ جواب مثبت $\neq 1$ ، ۱ جواب منفی $\quad \frac{\beta}{\alpha}$

۱) $a>1$ ۲) $a>-1$ ۳) $0<a<1$ ۴) $-1<a<0$

$\alpha\beta<0 \to \frac{-a+1}{1}<0 \to -a+1<0 \to a>1$

اضافی

همواره برقرار $\begin{cases} 1+a-a+1\neq 0 \\ 2\neq 0 \end{cases}$

$\Delta>0 \to a^2-4(1)(-a+1)>0 \to$

$a^2+4a-4>0$

$\frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{2}=-2\pm 2\sqrt{2}$

$-2-2\sqrt{2}$ $\quad -4/8$ $\quad -2+2\sqrt{2} \simeq 0/8$ $\quad 1$

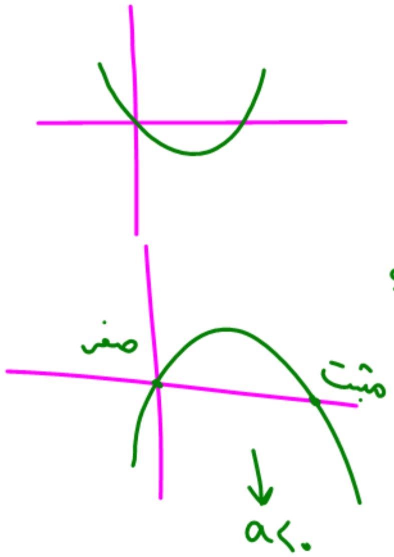
مثال: به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y = ax^{۲} - (a+۲)x$، از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۸۹)

$c = ۰$

$\frac{c}{a} = ۰$

$\boxed{P = ۰}$

۱) $a \le -۲$
۲) $a > -۲$
۳) $a > ۰$
۴) $-۲ \le a < ۰$



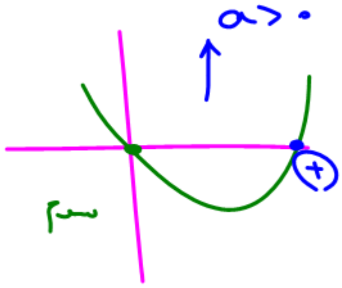
$a < ۰$

$S > ۰$

$\Delta > ۰$

مثال: به ازای چند مقدار a، سهمی به معادلهٔ $y = ax^{۲} + (۳ + ۲a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) هیچ مقدار a
۲) تمام مقادیر a
۳) ۱
۴) ۲



$a > ۰$

$S > ۰$

$\Delta > ۰$

۳) کاربرد در معادلات دومجذوری (تغییر متغیر)

حل معادلات به کمک روش تغییر متغیر (مجهول معاون)

اگر عبارتی در دوجای معادله به صورتی داده شود که توانِ آن در یکی از عبارات داده شده، مضربی از توانِ عبارت دیگر باشد، عبارت با توان کمتر را متغیر A تعریف کرده و عبارت با توان بالاتر را به‌صورت توانی از A می‌نویسیم و معادلهٔ حاصل را بر حسب متغیّر جدید حل می‌کنیم.

مثال: تعداد ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$$\frac{2x-1}{2x}=A$$

$$\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2+4\left(\frac{2x-1}{2x}\right)+3=0$$

$$A^2+4A+3=0 \xrightarrow{a+c=b} A=-1,\quad A=-3$$

$$(A+3)(A+1)=0$$

$$-3 \qquad -1$$

$$\frac{2x-1}{2x}=\frac{-1}{1} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\frac{2x-1}{2x}=\frac{-3}{1} \Rightarrow x=\frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{\left(x^2+x\right)^2}-2\underbrace{\sqrt[3]{x^2+x}}_{A}=3$$

$$\left(x^4-x^2\right)^2-7\left(x^4-x^2\right)-8=0$$

مثال: معادلهٔ $\left(x^{2}+x+1\right)^{2}+3\left(x^{2}+x+1\right)-4=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ (ریاضی ۹۲)

۱) چهار ریشه　　۲) دو ریشه

۳) دو ریشهٔ متمایز و یک ریشهٔ مضاعف　　۴) دو ریشهٔ مضاعف

$(A+4)(A-1)=0$

$A^{2}+3A-4=0 \xrightarrow{a+b+c=0}$

$A=1 \longrightarrow x^{2}+x+1=1 \longrightarrow x^{2}+x=0 \longrightarrow x(x+1)=0 < \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$

$A=-4 \longrightarrow x^{2}+x+1=-4 \longrightarrow x^{2}+x+5=0$ ریشه ندارد

$\Delta=-19<0$

مثال: معادلهٔ $\left(x^{2}-2x\right)^{2}-\left(x^{2}-2x\right)=2$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

مثال: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^{6}+26x^{3}-27=0$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) صفر　　۲) -2　　۳) -13　　۴) -26

$x^{3}=A \longrightarrow A^{2}+26A-27=0$

$A=1 \longrightarrow x^{3}=1 \longrightarrow x=1$

$A=-27 \longrightarrow x^{3}=-27 \longrightarrow x=-3$

مثال: مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\left(x^{2}+x\right)^{2}-6\left(x^{2}+x\right)-72=0$ کدام است؟ (تجربی ۹۰ با تغییر)

۱) -1　　۲) -2　　۳) ۲　　۴) ۱

معادلات دومجذوری $ax^4+bx^2+c=0$

روش حل معادلات دومجذوری: با انتخاب $x^2=A$ به‌عنوان مجهول معاون، معادلهٔ مورد نظر را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرده و مقادیر ممکن برای متغیر A را می‌یابیم. سپس مقادیر به‌دست آمده را در عبارت $x^2=A$ جایگذاری کرده و ریشه‌های معادلهٔ دومجذوری را می‌یابیم.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $x^4+5x^2-6=0$ را بیابید.

$x^2=A \Rightarrow A^2+5A-6=0$

$a+b+c=0 \longrightarrow A=1 \longrightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$

$A=\frac{c}{a}=-6 \longrightarrow x^2=-6$ ×

تذکر: در معادله‌ی دومجذوری همواره مجموع ریشه‌ها برابر صفر است.

بحث در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی دومجذوری

$$ax^4+bx^2+c=0 \xrightarrow{x^2=A} aA^2+bA+c=0 \rightarrow \Delta \;,\; \frac{c}{a} \;,\; \frac{-b}{a}$$

۱) $\Delta>0 \;,\; \frac{c}{a}>0 \;,\; \frac{-b}{a}>0$ $+/+$ A   چهار ریشهٔ حقیقی

۲) $\Delta>0 \;,\; \frac{c}{a}>0 \;,\; \frac{-b}{a}<0$ $-/-$ A   ریشهٔ حقیقی ندارد

۳) $\Delta>0 \;,\; \frac{c}{a}<0$ $-/+$ A   دو ریشهٔ قرینه دارد

۴) $\Delta=0 \;,\; \frac{-b}{a}>0$ $A=(+) \longrightarrow x^2=(+)$ دو ریشهٔ قرینه دارد

۵) $\Delta=0 \;,\; \frac{-b}{a}<0$ ریشهٔ حقیقی ندارد

۶) $\Delta<0$ ریشهٔ حقیقی ندارد

مثال: حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی $mx^4-4x^2+m-3=0$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد.

$mA^2-4A+m-3=0$ ۲ جواب مثبت

$P>0 \longrightarrow \frac{m-3}{m}>0 \longrightarrow m-3>0 \longrightarrow m>3$

$S>0 \longrightarrow \frac{4}{m}>0 \longrightarrow m>0$

$\Delta>0 \quad 16-4(m)(m-3)>0 \longrightarrow m^2-3m<4 \longrightarrow m^2-3m-4<0$ $-1, 4$ $-1<m<4$

مثال: اگر معادلهٔ $x^{۴}-(m+۲)x^{۲}+(m+۵)=۰$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۵)

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

مثال: کدام‌یک از معادلات زیر، چهار ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (کتاب درسی)

۱) $۲x^{۴}+۷x^{۲}+۱=۰$ X $S<۰$

۲) $۲x^{۴}-۷x^{۲}+۱=۰$ ✓ $S>۰$

۳) $۲x^{۴}+۷x^{۲}-۱=۰$ X $P<۰$

۴) $-۲x^{۴}+۷x^{۲}+۱=۰$ X $P<۰$

A مشخصه $\longrightarrow$ +/+

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۷x+۳=۰$ باشند، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\beta x^{۴}+۱۱x^{۲}+۳\alpha=۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ✓ ۳) ۷ ۴) -۷

$S=۰$

مثال: اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{۴} - ۷x^{۲} - ۵ = ۰$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $۲P^{۲} - ۳\cancel{S}P + ۲\cancel{S}$، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$\boxed{S=0}$

۱) $۵۹ - ۷\sqrt{۶۹}$ ۲) $۷ + \sqrt{۶۹}$ ۳) ۵۰ ۴) $۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}$ ✓

$$A^{2} - 7A - 5 = 0 \longrightarrow A_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(-5) = 69$$

$$A_1 = \frac{7-\sqrt{69}}{2} < 0 \quad x^2 < 0 \quad \times$$

$$A_2 = \frac{7+\sqrt{69}}{2} > 0 \longrightarrow x^2 = \frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \longrightarrow P = -\frac{7+\sqrt{69}}{2} \xrightarrow{(\ )^2} P^2 = \frac{(7+\sqrt{69})^2}{4} = \frac{118+14\sqrt{69}}{4}$$

$$2P^2 = \cancel{2}^{1} \times \frac{118 + 14\sqrt{69}}{\cancel{4}_{2}} = 59 + 7\sqrt{69}$$

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، از معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟ (تجربی خارج ۸۸ با تغییر)

۱) $m \geq ۱$ ۲) $m < ۱$ یا $m = ۲$ ۳) $۱ \leq m < ۲$ ۴) هیچ مقدار m

تمرین بیشتر: حالات مختلف دیگر را برای خود تحلیل کنید.

۴) کاربرد در معادلات درجات بالاتر

در معادلات با درجات بیش از ۲، اگر ریشه داشته باشند، داریم:

$$a x^{n} + b x^{n-۱} + \cdots + h = ۰$$

$$S = \frac{-b}{a}$$

$$P = \begin{cases} \frac{h}{a} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{-h}{a} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

مثال: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادل‌های زیر را بیابید.

$$۳x^{۶} + ۲x^{۵} - ۳x^{۳} + ۴x^{۲} + x + ۷ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-۲}{۳} \\ P = +\frac{۷}{۳} \end{cases}$$

$a = ۳$
$b = ۲$
$h = ۷$

$$۲x^{۵} - ۳x^{۳} + ۴x^{۲} + x + ۷ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S = ۰ \\ P = -\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

$a = ۲$
$b = ۰$
$h = ۷$

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x\left(a x^{۲} - x - ۵\right) = ۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

$x(۲x^{۲} - x - ۵)$

۱) -۲ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ ✓ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$x = ۲ \Rightarrow \cancel{۲}^{۱}(۴a - ۲ - ۵) = \cancel{۲}^{۱} \Rightarrow ۴a - ۷ = ۱ \Rightarrow \boxed{a = ۲}$$

$$۲x^{۳} - x^{۲} - ۵x - ۲ = ۰$$

$$S = \frac{-(-۱)}{۲} \Rightarrow ۲ + \alpha + \beta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = -۳/۲}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $4x^3+kx^2-9x-2=0$، $\alpha+\beta=1$ و $\alpha\beta=-2$ باشد، مقدار k چقدر است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

α, β, γ

۱) $\frac{-27}{5}$ ۲) $\frac{27}{5}$ ۳) -3 ✓ ۴) 3

ضرب $P=\underbrace{\alpha\cdot\beta}\cdot\gamma=-\frac{h}{a}=-\frac{(-2)}{4}=\frac{1}{2}$

$(-2)\times\gamma=\frac{1}{2}\longrightarrow\boxed{\gamma=-\frac{1}{4}}$

جمع $S=\underbrace{\alpha+\beta}_{1}+\gamma=1-\frac{1}{4}=\frac{-b}{a}\Rightarrow$

$\frac{3}{4}=\frac{-k}{4}\longrightarrow\boxed{k=-3}$

مثال: به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟ (تجربی خارج ۹۴)

نزدیک‌ترین

۱) $a>-4$ ۲) $a<-4$ ✓ ۳) $a<4$ ۴) $a>4$

جمع ضرایب: $\cancel{1}+(\cancel{a}-\cancel{1})+(\cancel{4}-\cancel{a})+(-\cancel{4})=$ صفر

$(x-1)($۲ درجه$)=$ عبارت درجه ۳ $\Rightarrow(x-1)(\underbrace{x^2+ax+4})=0$

$\boxed{x=1}$ ، $x=1$ ، ۲ تا ریشهٔ مثبت و متمایز $\neq1$

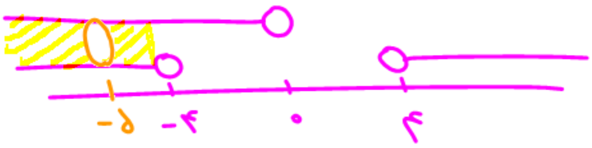
1	1	$a-1$	$4-a$	-4
	1	a	4	0
	x^2	x^1	x^0	

$S>0\to-a>0\to\boxed{a<0}$

$P>0\to4>0$ بدیهی $a\in\mathbb{R}$

$\Delta>0\to a^2-4(1)(4)>0\to a^2>16$

$\boxed{a<-4 \text{ یا } a>4}$



$(1)^2+a(1)+4\neq0\Rightarrow\boxed{a\neq-5}$

$a\in(-\infty,-5)\cup(-5,-4)=(-\infty,-4)-\{-5\}$

۵) کاربرد در معادله و رابطهٔ بین ریشه‌ها

در سؤالات روابط متقارن سعی می‌کنیم عبارات $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ را ایجاد کنیم.

در سؤالات روابط نامتقارن ابتدا سعی می‌کنیم تا جای ممکن روابط متقارن ایجاد کنیم و سپس برای قسمت‌های نامتقارن باقی‌مانده تلاش می‌کنیم تا با قرار دادن ریشه‌ها در معادلهٔ داده شده، عبارات متقارن ایجاد کرده و مقادیر مجهول را بیابیم.

$T = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = |\alpha - \beta|$ ، $S = \frac{-b}{a} = \alpha + \beta$

$P = \frac{c}{a} = \alpha \cdot \beta$

نکته: در برخی از سؤالات یافتن ریشه‌های معادله نیز می‌تواند در روند حل سوال مؤثر باشد.

مثال: مطلوبست محاسبهٔ روابط زیر بین ریشه‌های (α و β) معادلهٔ $x^2 - 8x + 4 = 0$.

$S = 8$ ، $P = 4$

$|\alpha^2 - \beta^2| = |\alpha - \beta| \times \underbrace{|\alpha + \beta|}_{S} = 4\sqrt{3} \times 8 = 32\sqrt{3}$

$T = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{64 - 4(1)(4)}}{1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^3 - 3SP}{P^2}$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (A)^2 \xrightarrow{(\ )^2} (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Longrightarrow S + 2\sqrt{P} = A^2 \longrightarrow A^2 = 12$

$A = \pm\sqrt{12} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$(\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha})^2 = A^2$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چه‌قدر است؟ (تجربی خارج ۸۵)

$S = \frac{-b}{a} = 3$ ، $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

$\frac{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}{(\sqrt{\alpha\beta})^2} = A^2 \Longrightarrow \frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} = A^2 \Longrightarrow A^2 = 16 \xrightarrow{A > 0} \boxed{A = 4}$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $x^{2}+x-3=0$ باشند، حاصل عبارت $\left(\frac{-3}{\alpha}+1\right)^{2}+\left(\frac{-3}{\beta}+1\right)^{2}$ چه‌قدر است؟

(گزینه دو ۱۴۰۱)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱۱

$S=\frac{-b}{a}=7$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-7x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\beta^{2}+7\alpha$ کدام است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

$\beta^2-7\beta+1=0$

$\boxed{\beta^2=7\beta-1}$

$\cancel{\beta^2}+7\alpha = 7(\overbrace{\beta+\alpha}^{S})-1 = 7S-1 = 7(7)-1 = 48$

$7\beta-1$

$S=-4 \;,\; P=-1$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}+4x-1=0$ باشند و $\beta<\alpha$، حاصل عبارت $\frac{2}{\beta^{2}}+\frac{1}{\alpha^{2}}$ کدام است؟

ریشه‌ی کوچکتر

$\alpha,\beta=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2(1)}=-2\pm\sqrt5$

$\boxed{\beta=-2-\sqrt5}$

۱) $16+\sqrt{5}$ ۲) $16-\sqrt{5}$ ۳) $27-4\sqrt{5}$ ۴) $27+4\sqrt{5}$

سخت تر :

$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\overbrace{\beta^2+\alpha^2}^{S^2-2P}}{\underbrace{\alpha^2\beta^2}_{P^2}}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{18}{1}+\frac{1}{9+4\sqrt5}\times\frac{9-4\sqrt5}{\underbrace{9-4\sqrt5}_{81-80}}=$

$\beta^2=(-2-\sqrt5)^2=4+5+4\sqrt5=9+4\sqrt5$

$18+9-4\sqrt5=27-4\sqrt5$

سهل

$\frac{\beta^2+2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\overbrace{S^2-2P}^{18})+(-2+\sqrt5)^2}{\underbrace{\cancel{P^2}}_{1}}=18+4+5-4\sqrt5=27-4\sqrt5$

۶) کاربرد در رابطهٔ بین ریشه‌ها

مثال: به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2 + 3x + m^2 = 2$، معکوس یکدیگرند؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

$\boxed{\alpha, \beta}$ معکوس : $\alpha\beta = 1 \longrightarrow \frac{c}{a} = 1 \longrightarrow a = c$

$m = m^2 - 2 \longrightarrow m^2 - m - 2 = 0$ $\boxed{a + c = b}$

$\boxed{m = -1} \longrightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0$, $\Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 5 > 0$

$m = 2$ ✗ $2x^2 + 3x + 2 = 0 \longrightarrow \Delta = -7 < 0$

مثال: به ازای کدام مقدار m، مجموع مربّعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{-9}{5}$ ۲) 1 ۳) 1 و $\frac{-9}{5}$ ۴) -1 و $\frac{9}{5}$

$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \longrightarrow S^2 - 2P = 6 \Longrightarrow \frac{(m+3)^2}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \xrightarrow{\times m^2}$

$(m+3)^2 = m^2 + 6m + 9$

$S = \frac{-b}{a} = \frac{m+3}{m}$

$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$

$9m^2 + 10m - m^2 - 6m - 9 = 0 \longrightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$

$m = 1 \longrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0}$ ✗

$\boxed{m = -9/5}$

مثال: به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۱۲x-a=۰$ و $۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷$ باشد، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

مثال: اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^۲-ax-b=۰$ و $۴۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta=۱۷$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

$S=-۶ , P=a$

مثال: α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۶x+a=۰$ هستند. اگر $\alpha<\beta<۰$ بوده و $۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۱   ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲۱}{۵}$ ۴) ۲

$۲(\alpha^۲+\beta^۲)$ $۳۶-۲a$

$\alpha^۲+۲\alpha^۲+۲\beta^۲=\alpha^۲+۲(S^۲-۲P)=\underbrace{۱۸-a+۶\sqrt{۹-a}-a+۷۲-۴a}$

$\alpha=\frac{-۶-\sqrt{۳۶-۴a}}{۲}=-۳-\sqrt{۹-a}$

$۹۰-۵a+۶\sqrt{۹-a}=۸۵+۱۲\sqrt{۲}$

$\alpha^۲=(-۳-\sqrt{۹-a})^۲=۹+۹-a+۶\sqrt{۹-a}$

$a=۱$

مثال: α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۶x+a=۰$ هستند. اگر $\beta<\alpha<۰$ بوده و $\alpha^۳+\beta^۳+\beta^۲=-\frac{۲۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۳۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) ۳   ۴) ۵

مثال: در معادلهٔ درجهٔ دوم $\underbrace{x^2 - 8x}_{} + m = 0$، یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر، ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

$S = -\frac{(-8)}{1} = 8$

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ✓ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

$\alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2\alpha - \cancel{\beta} = 10 \\ \alpha + \cancel{\beta} = 8 \end{cases}$ (+)

$\alpha = 6 \ , \ \beta = 2$

$(2)^2 - 8(2) + m = 0$

$\boxed{m = 12}$

مثال: رابطهٔ $2x_1 - 3x_2 = 16$ بین ریشه‌های x_1 و x_2 از معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 3x = 2m - 1$ برقرار است. حاصل $x_1^3 + x_2^3 + 30m$ کدام است؟

۱) ۲۲۸ ۲) ۲۹۰ ۳) ۲۸۲ ۴) ۲۹۸

مثال: به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2 - ax + 4 = 0$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱- تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم از روی دو ریشه‌ی معلوم α و β

$$\beta\ ,\ \alpha \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha \times \beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^{۲} - Sx + P = ۰}$$

مثال: معادله‌ی بنویسید که ریشه‌های آن $۲ \pm \sqrt{۳}$ باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = ۲+\sqrt{۳} \\ \beta = ۲-\sqrt{۳} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} S = ۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳} = ۴ \\ P = (۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳}) = (۲)^۲ - \sqrt{۳}^۲ = ۱ \end{array}$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$

$$\boxed{x^۲ - ۴x + ۱ = ۰}$$

۲- تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش رابطه‌ی معینی با ریشه‌های معادله‌ی مفروض داشته باشد.

الف) S' و P' (مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید) را بر حسب S و P معادله‌ی مفروض مسأله به‌دست آورده و با جایگذاری در فرم کلی $x^{۲} - S'x + P' = ۰$، معادله‌ی مورد نظر را می‌یابیم.
(همواره این روش جواب می‌دهد)

ب) ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x و ریشه‌های معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم و با نوشتن رابطه‌ی بین ریشه‌ها که در صورت سؤال داده شده است، x را بر حسب y یافته و در معادله‌ی مفروض جایگذاری می‌کنیم. سپس معادله را بر حسب متغیر y مرتب سازی می‌کنیم. (روش مذکور زمانی جواب می‌دهد که رابطه‌ی بین هر دو ریشه، یکسان باشد)

$$S = \frac{-(-۳)}{۱} = ۳ \qquad P = \frac{c}{a} = ۱$$

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های معادله‌ی $y = x^{۲} - ۳x + ۱$ باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \alpha^۲ \\ \beta' = \beta^۲ \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} S' = \alpha' + \beta' = \alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = ۹ - ۲ = ۷ \\ P' = \alpha' . \beta' = \alpha^۲\beta^۲ = (P)^۲ = ۱ \end{array}$$

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \longrightarrow x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$$

مثال: معادله‌ای را بیابید که ریشه‌های آن دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $y = x^{۲} - ۴x + ۲$ باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = ۲\alpha \\ \beta' = ۲\beta \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} S' = \alpha' + \beta' = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha+\beta) = ۲S = ۲\left(\frac{-b}{a}\right) = ۲(۴) = ۸ \\ P' = \alpha'\beta' = ۲\alpha \times ۲\beta = ۴(\alpha\beta) = ۴P = ۴\left(\frac{c}{a}\right) = ۴\left(\frac{۲}{۱}\right) = ۸ \end{array}$$

$$x^۲ - ۸x + ۸ = ۰$$

نکات تشکیل معادله‌ی جدید:

اگر معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌هایش:

۱- معکوس ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، جای a و c را عوض کرده و یا $x \to \frac{1}{y}$

۲- قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، علامت b را قرینه کرده و یا $x \to -y$

۳- عکس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، جای a و c را عوض کرده و علامت b را قرینه می‌کنیم.

۴- K واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، $x \to y-K$

۵- K واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، $x \to y+K$

۶- K برابر ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد، $x \to \frac{y}{K}$

$-3x^2-2x+1=0 \xrightarrow{\times(-1)} \boxed{3x^2+2x-1=0}$

مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $y=x^2-2x-3$ باشد.

$y=1x^2-2x-3$

$\left.\begin{array}{l}\alpha'=\frac{1}{\alpha}\\ \beta'=\frac{1}{\beta}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$S'=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{-(-2)}{(-3)}=-\frac{2}{3}$

$P'=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{P}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}=\frac{1}{-3}$

$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0 \xrightarrow{\times 3} \boxed{3x^2+2x-1=0}$

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-ax+b=0$ نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ $2ax^2+ax-6=0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۲)

α, β α', β' $P'=\frac{-6}{2a}$ $S'=\frac{-1}{2}$

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

$\begin{cases}\alpha=\alpha'+\frac{1}{2}\\ \beta=\beta'+\frac{1}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} \alpha\beta=(\alpha'+\frac{1}{2})(\beta'+\frac{1}{2})$

$+$

$(\alpha+\beta)=(\alpha'+\beta')+1$

$S=S'+1 \Rightarrow$

$\frac{a}{2}=\frac{-1}{2}+1 \xrightarrow{\times 2}$

$a=-1+2 \to a=1$

$P=\alpha'\beta'+\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')+\frac{1}{4}$

$P=P'+\frac{1}{2}S'+\frac{1}{4} \longrightarrow$

$\frac{b}{2}=(-3)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \longrightarrow$

$\boxed{b=-6}$

$\left[\frac{ab}{4}\right]=\left[\frac{1(-6)}{4}\right]=[-1/5]=-2$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشد، به ازای ~~چند~~ کدام مقدار k، مجموعه جواب‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

$5x^2+3x-2=0$

$-1=\alpha \longrightarrow \frac{1}{\alpha^2}=1=\alpha'$

$\frac{2}{5}=\beta \longrightarrow \frac{1}{\beta^2}=\frac{25}{4}=\beta'$

$S'=\alpha'+\beta'=1+\frac{25}{4}=\frac{29}{4}$

$P'=\alpha'\beta'=1\times\frac{25}{4}=\frac{25}{4}$

$\longrightarrow x^2-\frac{29}{4}x+\frac{25}{4}=0 \xrightarrow{\times 4}$

$4x^2-29x+25=0$ $\quad k=29$

مثال: به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ می‌باشد؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

مثال: ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$

۲) $x^2+3x+1=0$

۳) $x^2-5x+2=0$

۴) $x^2+5x+2=0$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1 \ , \ \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$

۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$

۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

مثال: فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x = x^2 - 4$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$ است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $4x^2 = 51x + 221$

۲) $4x^2 + 51x = 221$

۳) $4x^2 = 51x + 197$

۴) $4x^2 + 51x = 197$

مثال: فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x = 5 - x^2$ باشند. $\underbrace{\dfrac{1}{(x_2+1)^3}}^{\beta'}$ و $\overbrace{\dfrac{1}{(x_1+1)^3}}^{\alpha'}$،

$x^2+x-5=0 \to \alpha, \beta$

$S=-1 \;,\; P=-5$

ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

$S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-16}{125}$

۱) $125x^2 + 16x = 1$

۲) $125x^2 = 16x + 1$

۳) $125x^2 = 12x + 1$

۴) $125x^2 + 12x = 1$

جوابی S':

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{(\alpha+1)^3} + \frac{1}{(\beta+1)^3} = \frac{(\alpha+1)^3 + (\beta+1)^3}{\left((\alpha+1)(\beta+1)\right)^3} =$$

$$\frac{\underbrace{\alpha^3+\beta^3}_{S^3-3SP} + \underbrace{3\alpha^2+3\beta^2}_{3(S^2-2P)} + \underbrace{3\alpha+3\beta}_{3S} + \underbrace{1+1}_{+2}}{\left(\underbrace{\alpha\beta}_{P} + \underbrace{\alpha+\beta}_{S} + 1\right)^3} = \frac{-16 + 3(11) - 3 + 2}{-125} = -\frac{16}{125}$$

$-5 + \cancel{(-1)} + \cancel{1}$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش $\left(\alpha + \dfrac{2}{\beta}\right)^2$ و $\left(\beta + \dfrac{2}{\alpha}\right)^2$ است، کدام است؟ (خلی سنج ۱۴۰۱)

۱) $x^2 + 84x + 64 = 0$

۲) $x^2 - 84x + 64 = 0$

۳) $x^2 - 84x - 64 = 0$

۴) $x^2 + 84x - 64 = 0$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 7x + 3 = 0$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش $\alpha^2 - 8\alpha + 4$ و $\beta^2 - 8\beta + 4$ است، کدام است؟ (خلی سنج ۱۴۰۱)

۱) $x^2 - 5x + 3 = 0$

۲) $x^2 + 5x - 3 = 0$

۳) $x^2 + 5x + 3 = 0$

۴) $x^2 - 5x - 3 = 0$

مثال: α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۹x + ۶ = ۰$ هستند. اگر $\beta < \alpha$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش $\left(\beta^۲ + ۳\right)$ و $\left(\alpha + \frac{۳}{\beta}\right)$ باشد، به صورت $۸x^۲ - \left(a + b\sqrt{۳۳}\right)x + c = ۰$ است، حاصل $\frac{c}{a+b}$ کدام است؟

۱) $۲/۲۵$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۲۱۶}{۱۱۷}$ ۴) $\frac{۱۰۸}{۶۱}$

مثال: اگر مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ به صورت $\{\alpha + ۱ , \beta + ۱\}$ باشد، مجموعه جواب کدام معادله $\{\alpha^۲\beta^۲ , \alpha^۲ + \beta^۲\}$ است؟ (کاج ۱۴۰۱)

۱) $x^۲ + ۵x + ۶ = ۰$

۲) $x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$

۳) $x^۲ - ۴x + ۳ = ۰$

۴) $x^۲ + ۴x + ۳ = ۰$

عبارات گویا

عبارت کسری را که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، یک عبارت گویا می‌نامند.

دامنه‌ی عبارت گویا

برای تعیین دامنه‌ی عبارت گویا، ابتدا مخرج کسر را تجزیه کرده و ریشه‌های مخرج را تعیین می‌کنیم.
دامنه‌ی عبارت گویا، تمامی اعدادی هستند که مخرج کسر را صفر نکرده باشند.

حل معادلات گویا

۱- دامنه‌ی عبارت گویا را تعیین می‌کنیم.

۲- همه عبارات را به یک سمت معادله انتقال می‌دهیم و مخرج مشترک می‌گیریم.

۳- صورت عبارت را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های صورت را تعیین می‌کنیم.

۴- ریشه‌هایی از صورت را که جزو دامنه‌ی عبارت گویا باشند، به‌عنوان جواب معادله معرفی می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی $\frac{x+۱}{۲x-۲} = \frac{۱}{x-۱} + \frac{x}{۱۰}$ را حل کنید.

$$\frac{x}{۲\times۵} + \frac{۱}{(x-۱)} = \frac{(x+۱)}{۲(x-۱)}$$

ک.م.م $= ۲\times۵\times(x-۱)$

$$x(x-۱) + ۱(۱۰) = (x+۱)(۵)$$

$$x^۲ - x + ۱۰ = ۵x + ۵$$

$$x^۲ - ۶x + ۵ = ۰$$

$$(x-۵)(x-۱) = ۰$$

$\boxed{x=۵}$ $\quad x=۱$ غ ق ق

مثال: پاسخ معادله‌ی $\frac{x+۲}{x^۲-۳x} = \frac{۳}{۲x}$ را بیابید.

مثال: به ازای چه مقداری از k معادله‌ی $\frac{x-۵}{x^۲-۴x} = \frac{k}{۳x}$ دارای مجموعه جواب $\{۵\}$ است؟

عبارات گنگ

عبارتی که گویا نباشد را گنگ می‌نامند. نکته مهم این است که در عبارت گنگ الزاماً باید متغیر زیر رادیکال باشد و اگر اعداد زیر رادیکال باشند، عبارت را تبدیل به عبارت گنگ نمی‌کنند.

دامنه‌ی عبارات گنگ

هر گاه یک عبارت جبری گنگ حاوی رادیکال با فرجه‌ی فرد باشد، در تعیین دامنه، رادیکال فرجه‌ی فرد هیچ‌گونه تأثیری ندارد.

$$p(x) = \sqrt[2n-1]{f(x)} \Rightarrow D_p = D_f$$

ولی اگر عبارت گنگ حاوی عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج باشد، برای تعیین دامنه، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$p(x) = \sqrt[2n]{f(x)} \Rightarrow D_p = \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

حل معادلات گنگ

۱- ابتدا دامنه‌ی عبارت گنگ را می‌یابیم.

۲- عبارت رادیکالی را به یک سمت معادله و بقیه‌ی عبارات را به سمت دیگر منتقل می‌کنیم.

۳- طرفین را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم تا رادیکال در معادله از بین برود.

۴- معادله‌ی به‌دست آمده را حل می‌کنیم.

۵- ریشه‌هایی را مورد قبول قرار می‌دهیم که اولاً در دامنه‌ی عبارات رادیکالی قرار داشته باشند، ثانیاً با جایگذاری در معادله، برابری طرفین معادله بر هم نخورد (ریشه در معادله صدق کند).

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$5 - 2\sqrt{2x-1} = 1 \longrightarrow 4 = 2\sqrt{2x-1} \xrightarrow{\div 2} 2 = \sqrt{2x-1} \xrightarrow{(\ )^2} 4 = 2x - 1 \longrightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}} \quad 1 = 1$$

$$5 + \sqrt{x-2} = 2 \longrightarrow \sqrt{x-2} = -3 \longrightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \longrightarrow (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \longrightarrow x = 36 - 12x + x^2 \Longrightarrow$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \longrightarrow (x-9)(x-4) = 0$$

$$\cancel{x = 9} \ , \ \boxed{x = 4} \quad 6 = 6$$

مثال: معادلات زیر چند ریشه دارند؟

$$۳x - ۲ = ۲\sqrt{۱ - ۴x^۲}$$

هر ۲ همزمان صفر

$$\underbrace{\sqrt[۴]{x^۲ - ۴}}_{\geq ۰} + \underbrace{\sqrt{x^۲ - x - ۲}}_{\geq ۰} = ۰$$

$x^۲ - ۴ = ۰$ $\quad$ $x^۲ - x - ۲ = ۰$

$(x-۲)(x+۲) = ۰$ $\quad$ $(x-۲)(x+۱) = ۰$

$+۲ \checkmark$ $\quad -۲$ $\quad\quad$ $+۲ \checkmark$ $\quad -۱$

$$(x^۲ - x)\sqrt{x - ۲} = ۰$$

$x - ۲ \geq ۰$

$\boxed{x \geq ۲}$

$(x)(x-۱)\sqrt{x-۲} = ۰$

غ ق ق $\underbrace{x = ۰ \quad x = ۱}_{\ngeq ۲}$ $\quad x = ۲$ ق ق

$$۲x + \sqrt{۲x - ۳} = ۳$$

$(\sqrt{۲x - ۳})^۲ = (۳ - ۲x)^۲ \longrightarrow$

$۲x - ۳ = ۹ - ۱۲x + ۴x^۲ \longrightarrow$

$۴x^۲ - ۱۴x + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲}$

$۲x^۲ - ۷x + ۶ = ۰$

$x^۲ - ۷x + ۱۲ = ۰$

$(x-۳)(x-۴) = ۰ \begin{cases} x = ۳/۲ \\ x = ۴/۲ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \boxed{x = ۱/۵} \quad (۳ = ۳) \\ x = ۲ \text{ غ ق ق } \quad ۵ \neq ۳ \end{cases}$

مثال: تنها ریشهٔ معادلهٔ $x-\sqrt{x+1}=1$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)

۱) -1 ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) صفر

$-1 \neq 1$ $\quad 5 \neq 1$ $\quad 1=1$ $\quad -1 \neq 1$, $x+1 \geq 0$, $\boxed{x \geq -1}$

$(x-1)^2=(\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x^2-2x+1=x+1$

$x^2-3x=0 \Rightarrow x=0$: $-1 \neq 1$, $\boxed{x=3}$: $1=1$

مثال: اگر $x=2$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\dfrac{x^2}{2-x^2}=\dfrac{1-mx}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+x}$ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

$1-7x$ $\quad x \neq \pm\sqrt{2}$ $\quad x \neq 1,\ x \neq -1,\ x \neq 0$ $\quad \dfrac{4}{-2}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -2 ۴) ندارد

$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1-2m}{2}=\dfrac{4}{-2} \xrightarrow{\times 6} 1+1-2m=-12 \Rightarrow 14=2m \Rightarrow m=7$

$x=-2 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{-6}}=\dfrac{-2}{1}$

$-2=\dfrac{-12}{6}=\dfrac{3-15}{6}$

$-2=-2$ $\quad x=-2$

مثال: اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{5x-x^2}=x+a$ باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟ (تجربی ۸۷)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ندارد

$4+a=\sqrt{20-16} \rightarrow \boxed{a=-2}$

$(x-2)^2=(\sqrt{5x-x^2})^2 \Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2 \rightarrow 2x^2-9x+4=0$

$\Delta=49$ $\quad \dfrac{9\pm7}{4}$: 4, $\dfrac{1}{2}$ غ ق ق

$-\dfrac{3}{2} \neq +\dfrac{3}{2}$

مثال: اگر $\sqrt{2a^2+4a}+3a=2$ باشد، عدد $\dfrac{a+1}{a}$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $1/5$ ۲) $2/5$ ۳) $3/5$ ۴) $4/5$

$\dfrac{a+1}{a}=\dfrac{7}{2} \Rightarrow 7a=2a+1$, $\boxed{a=\dfrac{1}{5}}$

$(\sqrt{2a^2+4a})^2=(2-3a)^2 \Rightarrow 2a^2+4a=4-12a+9a^2$

$0=7a^2-16a+4$ $\quad a^2-16a+28=0$ $\quad 2=\dfrac{14}{7}$, $\dfrac{2}{7}$

$a=\dfrac{2}{7} \rightarrow \dfrac{a+1}{a}=\dfrac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}}=\dfrac{9}{2}=4/5$

مثال: اگر $2a + \sqrt{3a+16} = 1$ باشد، عدد $4a + 9$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

$(\sqrt{3a+16})^2 = (1-2a)^2 \Rightarrow 3a+16 = 1-4a+4a^2 \Rightarrow 4a^2-7a-15=0$

$\Delta = 289 \longrightarrow \sqrt{\Delta} = 17$

$\frac{7\pm 17}{8}$ → 3 ✗ ، $-\frac{5}{4}$

مثال: اگر α ریشهٔ معادلهٔ $1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+4}$ باشد، مقدار عبارت $\sqrt{\frac{\alpha}{3}+4}$ برابر با چه عددی است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{2}$

مثال: تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۹)

$x(x+1)$

۱) صفر ✓ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}\right) \times x(x+1)$

$x+1+x = 1$ جواب ندارد

$x=0$ غ ق ق

مثال: معادلهٔ $\frac{1}{(x+2)} - \frac{x^2-9x-2}{x^3+8} = \frac{6x}{(x^2-2x+4)}$ دارای چند جواب مثبت است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

$(x+2)(x^2-2x+4)$

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ ✓

$(\cancel{x^2}-2x+4) - (\cancel{x^2}-9x-2) = (6x)(x+2)$

$7x+6 = 6x^2+12x$

$0 = 6x^2+5x-6$ ، $-\frac{9}{6}$ ، $\frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3}$ ✓ ، $-\frac{3}{2}$ ✗

$0 = x^2+5x-36 \Rightarrow (x+9)(x-4)=0$

مثال: کدام گزینه دربارهٔ ریشه یا ریشه‌های معادلهٔ گویای $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-4}=\frac{12}{-x^2+2x+8}$، درست است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

۱) فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.
۲) فقط یک ریشهٔ منفی دارد.
۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.
۴) دو یک ریشهٔ مثبت دارد.

مثال: معادلهٔ $\frac{-x^2+3x+3}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{m}{x-1}$ جواب حقیقی ندارد. مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴/۵
۳) صفر
۴) ۵/۲۵

مثال: به ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $\frac{x+3}{x} = \frac{7+x}{x^2-2x} - \frac{a}{x-2}$ جواب حقیقی ندارد؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

۱) $(0\,,\,4)$ ۲) $(0\,,\,2)$ ۳) $(2\,,\,4)$ ۴) $(-1\,,\,1)$

مثال: به ازای چند مقدار a، معادلهٔ $\frac{x}{x^2-9} = \frac{a}{x^2+3x} + \frac{a}{x^2-3x}$ هیچ ریشهٔ قابل قبولی برای x ندارد؟

$(x-3)(x+3)$ $x(x+3)$ $x(x-3)$ $\boxed{\text{ک.م.م} = x(x-3)(x+3)}$

$2a+3=0$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ✓

$a(x+3) + a(x-3) = x(x)$

$x^2 - 2ax = 0 \longrightarrow (x)(x-2a) = 0$ ⟨ $x = 0$ غ ق ، $\boxed{x = 2a}$

$2a = 0 \longrightarrow a = 0$

$2a - 3 = 0 \longrightarrow a = 3/2$

$2a + 3 = 0 \longrightarrow a = -3/2$

مثال: به ازای جمیع مقادیر حقیقی a، معادلهٔ $\dfrac{۲}{x+۲} = \dfrac{۲}{\dfrac{۱-a^{۲}}{۲}} + \dfrac{۲}{x}$ دو جواب متمایز دارد، به جز ....

۱) سه مقدار برای a ✓

۲) هیچ مقدار برای a

۳) چهار مقدار برای a

۴) یک مقدار برای a

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-a^2} = \dfrac{1}{x+2} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} (x)(x+2)(1-a^2)$

$(x+2)(1-a^2) + 2x(x+2) = x(1-a^2) \Longrightarrow$

$\cancel{x} - \cancel{a^2x} + 2 - 2a^2 + 2x^2 + 4x = \cancel{x} - \cancel{a^2x}$

$2x^2 + 4x + 2(1-a^2) = 0 \xrightarrow{\div 2}$

$x^2 + 2x + 1 - a^2 = 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow (4) - 4(1)(1-a^2) > 0 \longrightarrow$

$1 - a^2 < 1 \longrightarrow a^2 > 0$

$a \neq 0$

$x \neq 0 \longrightarrow 1 - a^2 \neq 0 \longrightarrow a \neq \pm 1$

$x = -2 \longrightarrow 1 - a^2 \neq 0 \longrightarrow a \neq \pm 1$

مثال: معادلهٔ $x^{۲} + ۲x + ۳ = \dfrac{x^{۲} + ۲x + ۷}{x^{۲} + ۲x + ۴}$ چه نوع ریشه‌هایی دارد؟ (IQ گاج)

۱) ریشه ندارد

۲) دو ریشهٔ متمایز

۳) یک ریشهٔ ساده

۴) یک ریشهٔ مضاعف

$a+\frac{1}{a}\geq ۲ \ (a>۰) \quad , \quad a+\frac{1}{a}\leq -۲ \ (a<۰)$

یادآوری: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -۲ \ \vee \ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

مثال: معادلهٔ $\underbrace{\frac{x^۲+۱}{x^۳+۲x}}_{\frac{b}{a}}+\underbrace{\frac{x^۳+۲x}{x^۲+۱}}_{\frac{a}{b}}=۱$ چند جواب دارد؟ (مبتکران ۹۹)

$\neq ۲ \quad \neq -۲$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -۲$

مثال: اگر $\frac{1}{a^۳-۱}+\frac{1}{a^۳+۱}=۲$ باشد، حاصل $\left(\frac{1}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{1}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}\right)^{۱۴۰۱}$ چقدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

$a^۳\geq ۰$

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

$a^۳=t \Rightarrow \frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}=۲ \xrightarrow{(t+1)(t-1)} t-1+t+1=۲(t^۲-1) \longrightarrow ۲t=۲t^۲-۲ \longrightarrow ۲t^۲-۲t-۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} t^۲-t-1=۰$

$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{۲}$: $\frac{1+\sqrt{5}}{۲}>۰ \ \checkmark \ (۱{,}۶)$ ، $\frac{1-\sqrt{5}}{۲}<۰ \ \times$

$a^۳\simeq ۱{,}۶$

$\left(\frac{1}{۱{,}۶-\underbrace{\sqrt{۱{,}۶۹}}_{۱{,}۳}+۱}+\frac{1}{۱{,}۶+\underbrace{\sqrt{۱{,}۶۹}}_{۱{,}۳}+۱}\right)^{۱۴۰۱}=\left(\frac{1}{۱{,}۳}+\frac{1}{۳{,}۹}\right)^{۱۴۰۱}=۱^{۱۴۰۱}=۱$

چرا $\left(\frac{۱۰}{۱۳}+\frac{۱۰}{۳۹}\right)=\left(\frac{۴۰}{۳۹}\right)\simeq ۱$

مثال: اگر $\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}=2a$ باشد، حاصل $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2-a+1}+\dfrac{1}{a^2+a+1}}$، چقدر است؟

(ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

۱) -1
۲) 1
۳) $\sqrt[3]{2}$
۴) $-\sqrt[3]{2}$

مثال: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\dfrac{160}{9}=\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{x^2}$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۲)

۱) 1
۲) $1/75$
۳) 2
۴) $2/25$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{160}{9}\xrightarrow{\text{ک.م.م}=9x^2(x-1)^2}$$

$$9(x-1)^2+9x^2=160x^2(x-1)^2\Longrightarrow$$

$$18x^2-18x+9=160\big((x)(x-1)\big)^2$$

$$18(x^2-x)+9=160(x^2-x)^2\xrightarrow{x^2-x=t}$$

$$18t+9=160t^2\Longrightarrow 160t^2-18t-9=0$$

$$t^2-18t-9\times160=0 \quad (\div 3,\ \div 9)$$

$$t^2-6t-160=0$$

$$(t-16)(t+10)=0 \qquad 16\times3=48,\quad -10\times3=-30$$

$$\xrightarrow{\div160}\quad \frac{48}{160}=\frac{3}{10},\qquad -\frac{30}{160}=-\frac{3}{16}$$

$$x^2-x=\frac{3}{10}\quad,\quad x^2-x=-\frac{3}{16}$$

$$x^2-x-\frac{3}{10}=0\quad,\quad x^2-x+\frac{3}{16}=0$$

$$\Delta>0 \qquad \Delta=(1)^2-4(1)\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}>0$$

$$S=-\frac{b}{a}=1 \qquad S=-\frac{b}{a}=1$$

$$\text{کل}\ S=2$$

مثال: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۴۰}{۹} = \frac{۱}{(۲-x)^۲} + \frac{۱}{x^۲}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۲ ‏ ‏ ۲) ۲/۵ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ۴) ۴/۵

مثال: معادلهٔ $\sqrt{۴x-۳} + ۳x - ۲ = ۰$ از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

۱) یک جواب دارد. ‏ ‏ ۲) دو جواب هم‌علامت دارد.

۳) دو جواب غیر هم‌علامت دارد. ‏ ‏ ۴) جواب ندارد. ✓

$$(\sqrt{4x-3})^2 = (2-3x)^2 \Rightarrow$$

$$4x-3 = 9x^2-12x+4$$

$$9x^2-16x+7=0$$

$$x^2-16x+63=0 \quad x=7/9 \qquad \frac{3}{9}+\frac{1}{3}\neq 0$$

$$x=9/9=1 \qquad 2\neq 0$$

مثال: اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{۲x+۳} - \sqrt{x+۱} = ۱$ چقدر است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

۱) ۱ ‏ ‏ ۲) ۲ ‏ ‏ ۳) ۳ ‏ ‏ ۴) ۴

$$(\sqrt{2x+3})^2 = (\sqrt{x+1}+1)^2 \Rightarrow 2x+3 = x+1+1+2\sqrt{x+1}$$

$$(x+1)^2 = (2\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow$$

$$x^2+2x+1 = 4(x+1) \Rightarrow$$

$$x^2-2x-3=0 \longrightarrow \boxed{x=-1} \quad (1=1) \qquad \boxed{x=3} \quad \boxed{1=1}$$

۰, ۱, ۲, ..., ۹

مثال: برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a، جواب معادلهٔ $\underbrace{\sqrt{x}}_{+} + \underbrace{\sqrt{x-a}}_{+} = \underbrace{a}_{+}$، عددی صحیح است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ✓ ۳) ۶ ۴) ۷

$(\sqrt{x-a})^2 = (a-\sqrt{x})^2 \Rightarrow$

$\cancel{x} - a = a^2 - 2a\sqrt{x} + \cancel{x}$

$2a\sqrt{x} = a^2 + a \xrightarrow{\div a}$

$2\sqrt{x} = a+1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2} \xRightarrow{()^2} x = \frac{(a+1)^2}{4}$

$a=1 \rightarrow x=1$

$a=3 \rightarrow x=4$

$a=7 \rightarrow x=16$

$a=9 \rightarrow x=25$

$a=5 \rightarrow x=9$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$ ✓

$\sqrt{x^2} = \sqrt{2y} \rightarrow$

$|x| = \sqrt{2y} \rightarrow$

$\boxed{x = \pm\sqrt{2y}}$

$\left(\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{2y}\right)^2 \Rightarrow$

$\cancel{y} + \cancel{3} + \cancel{y} - \cancel{3} - 2\sqrt{y^2-9} = \cancel{2y} \Rightarrow$

$y^2 - 9 = 0 \rightarrow y = \pm 3$ — $y=-3$ غ‌ق‌ق — $y=3$, $x=\sqrt{6}$

$A\,|\,\begin{smallmatrix}\sqrt{6}\\3\end{smallmatrix}$ $O\,|\,\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$

$|OA| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (3)^2} = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$

حالت خاص: عباراتی که تکرار می‌شوند را عموماً تغییرمتغیّر می‌دهیم.

مثال: حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{\underbrace{x^2+4x+5}_{t+2}} = \underbrace{x^2+4x+3}_{t}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

$t = \sqrt{t+2} \rightarrow t^2 = t+2 \rightarrow t^2 - t - 2 = 0$

$t = -1$ ✗ $-1 \neq 1$

$t = 2$ $(2=2)$

✗ $x^2+4x+3 = -1 \rightarrow x^2+4x+4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$

✓ $x^2+4x+3 = 2 \rightarrow x^2+4x+1 = 0 \rightarrow P = \frac{c}{a} = 1$

$\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2} = -2\pm\sqrt{3}$

مثال: مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x+1)^{۲} = ۲\sqrt{x^{۲}+۲x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۹)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

مثال: تعداد جواب‌های مثبت معادلهٔ $۳x - x^{۲} = \sqrt{۲x^{۲} - ۶x + ۸}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال: معادلهٔ $۳ = \dfrac{۴}{\sqrt{x-۲}+۱} + \sqrt{x-۲}$ چند ریشه دارد؟ (IQ گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

t

t

$\frac{t}{1} + \frac{4}{t+1} = \frac{3}{1} \xrightarrow{\times(t+1)}$

$t(t+1)+4 = 3(t+1) \longrightarrow$

$t^2+t+4 = 3t+3$

$t^2-2t+1=0 \longrightarrow (t-1)^2=0 \longrightarrow t=1$

$\sqrt{x-2}=1 \longrightarrow$

$x-2=1$

$\boxed{x=3}$

یک ریشه داریم

مثال: معادلهٔ $\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}+2}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته: در سؤالاتی که مجموع چند عبارت رادیکالی فرجهٔ زوج برابر صفر شده باشد، تک‌تک رادیکال‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشهٔ مشترک تمام آن‌ها را به‌عنوان جواب اعلام می‌کنیم.

مثال: تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^4 - x} + \sqrt[4]{x^3 - 1} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ کدام است؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳

$x(x^3-1)=0$

$0 , 1$

$x=1$

$x=-1$

$x=1$

۱ و صفر $+1$

$x(x-1)$

مثال: تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^4 + x^2 - 2} + |x^2 - x| + (x^3 + 4x - 5)^2 = 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

$=0$

$x=1$

$x^4+x^2-2=0 \xrightarrow{x^2=A}$

$A^2+A-2=0$

$A=1 \longrightarrow x^2=1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

$A=-2 \longrightarrow x^2=-2$ ✗

نکته: در صورت وجود تعداد زیادی رادیکال‌های تو در تو، قبل از هر کاری دامنهٔ رادیکال‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{2-x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

$2-x\geq 0$ $\boxed{x\leq 2}$

$x-2\geq 0$ $\boxed{x\geq 2}$

$2x-3\geq 0$ $\boxed{x\geq \frac{3}{2}}$

$D_f=\{2\}$

$x+\sqrt{x-2}\geq 0$

بررسی $(x=2)$ $1\neq\sqrt{2}$

جواب ندارد

مثال: معادلهٔ $2\sqrt{7x+8}-\sqrt{8-2x}=4\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-12}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$x\geq 4$ $x\leq 4$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

بررسی $x=4\in D_f \Rightarrow 8\sqrt{2}\neq 12$

مثال: تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

نکته: در رادیکال‌های فرجهٔ ۳ سراغ اتحاد چاق و لاغر می‌رویم.

مثال: فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)}_{(\sqrt[3]{x})^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2+ab}=2\sqrt[3]{x}$، باشند. مقدار x_1+x_2، کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)=2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$2\sqrt[3]{x^2}-2$$

$$\left(\cancel{\sqrt[3]{x^2}-1}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=2\left(\cancel{\sqrt[3]{x^2}-1}\right)\to x-\frac{1}{x}=2\xrightarrow{\times x}$$

$$x^2-1=2x\to x^2-2x-1=0$$

$$\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{(-2)}{1}=2$$

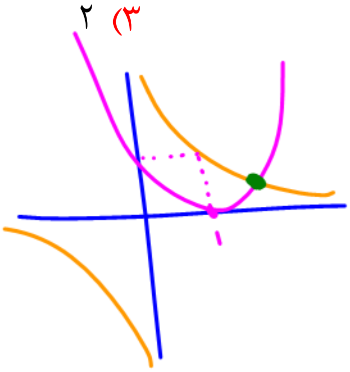
نکته: در معادلاتی که طرفین علامت تساوی، غیرهم‌جنس هستند، بهترین راه رسم توابع در یک دستگاه مختصات و یافتن نقاط برخورد می‌باشد. عموماً در مواردی که تعداد جواب می‌خواهد و یا معادلات رادیکالی که با تغییرمتغیّر حل نمی‌شوند، رسم بهترین راه حل مسأله است.

مثال: معادلهٔ $\frac{1}{x}=x^2-2x+1$ چند جواب حقیقی دارد؟

(مدارس برتر ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

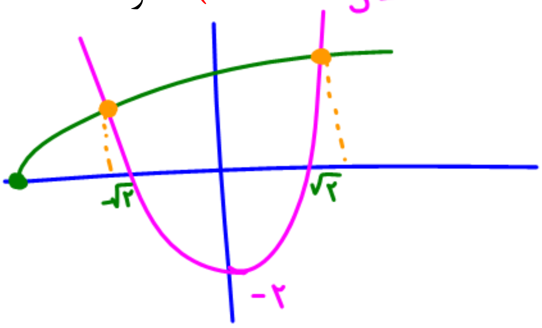
$$(x-1)^2=\frac{1}{x}$$



مثال: معادلهٔ $\sqrt{x+3} = x^2 - 2$ چند جواب دارد؟ (حلی‌سنج ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$y = x^2 - 2$



مثال: معادلهٔ $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \dfrac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

$\sqrt{x-1}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

$(x-1) = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x-1}$

ک.م.م $= (3+\sqrt{x-1})(3-\sqrt{x-1}) = \overset{9-(x-1)}{10-x}$

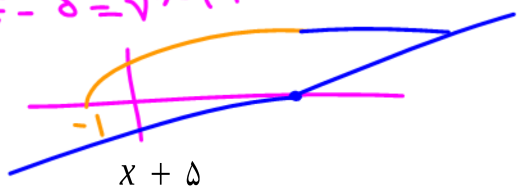
$\sqrt{x+1}\,(3-\sqrt{x-1}) - \sqrt{x+1}\,(3+\sqrt{x-1}) = \sqrt{x-1}\,(10-x)$

$-2\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,(10-x)$

$-2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}\,(10-x) \xrightarrow{x \neq 1}$

$-2\sqrt{x+1} = 10 - x \xrightarrow{(\ )^2} 4(x+1) = 100 + x^2 - 20x$

$\frac{x}{2} - 5 = \sqrt{x+1}$



مثال: معادلهٔ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+2x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2+2x}} = \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}}$،

دارای چند جواب است؟ (تجربی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

معادلات کاربردی

مثال: مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پول‌های باقیماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اوّلیّهٔ اکرم، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

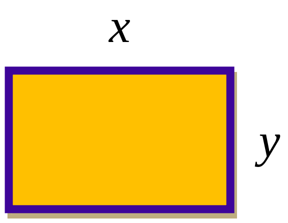
۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۸۵ ۴) ۹۱

پول علی $= x$
پول اکرم $= y$ $\Rightarrow$
$\boxed{y = ?}$

$x + y = ۱۰۰$
$(x - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵$
$۵ \times ۹۵ = ۴۷۵$

$y = ۸۵$
$x = ۱۵$

مسائل مستطیل طلایی و عدد طلایی



$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۲} = \frac{x + y}{x}$$

مثال: نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۲)

۱) $۰/۳ + \sqrt{۵}$ ۲) $۰/۲\left(۱ + \sqrt{۵}\right)$ ۳) $۰/۶ + ۰/۲\sqrt{۵}$ ۴) $۰/۴\left(۱ + \sqrt{۵}\right)$

مثال: از تقسیم اندازهٔ قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}$

مسائل غلظت

غلظت یک ماده، برابر است با میزان خلوص یک ماده به کل ماده (مثلاً مقدار نمک به کل محلول)

$$C=\frac{x}{T}\Rightarrow C(\%)=\frac{Salt}{Salt+Water}$$

مثال: در یک محلول آب و نمک، x کیلوگرم نمک و $۶x+۱۰$ کیلوگرم آب وجود دارد. اگر غلظت نمک ۰/۱۲۵ باشد، با افزودن ۱۰ کیلوگرم آب و ۱۰ کیلوگرم نمک، غلظت نمک چند درصد خواهد بود؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۵

(گاج ۱۴۰۰)

مثال: ۱۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۸ درصدی در ظرفی موجود است. برای آن‌که غلظت محلول را به ۱۰ درصد افزایش دهیم، ۲/۵ کیلوگرم نمک به آن اضافه کرده‌ایم. چه تغییری باید در آب درون محلول انجام دهیم؟

۱) ۷/۵ کیلوگرم آب تبخیر کنیم.
۲) ۰/۸ کیلوگرم آب تبخیر کنیم.
۳) ۷/۵ کیلوگرم آب به آن اضافه کنیم.
۴) ۰/۸ کیلوگرم آب به آن اضافه کنیم.

مثال: جسمی به جرم ۲۰۰ گرم، از جنس آلیاژ طلا و نقره است. اگر خلوص طلای آن ۴۵ % باشد و بخواهیم درصد خلوص طلا را به ۳۰ % برسانیم، چند گرم نقره باید به آن اضافه کنیم؟ (مدارس برتر ۱۴۰۱)

۱) ۱۲۰
۲) ۱۵۰
۳) ۱۶۷
۴) ۱۰۰

مثال: یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد، با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد، مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

مسائل سرعت

عموماً این مسائل را بر حسب زمان حل می‌کنیم.

$$V = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

مثال: فاصلهٔ دو شهر A و B برابر با ۴۵۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B می‌رود و برمی‌گردد. سرعت رفت پنج کیلومتر بر ساعت کمتر از سرعت برگشت است و زمان رفت، یک ساعت بیشتر از زمان برگشت است. سرعت رفت چند کیلومتر بر ساعت است؟ (موج آزمون الگو)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

مثال: پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر بر ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر بر ساعت است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

مثال: سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

مسائل همکاری

توان هر فرد را در یک واحد زمانی در نظر می‌گیریم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال: دو حسابدار مشغول حسابرسی در یک اداره می‌باشند. اگر حسابدار اول به تنهایی این کار را در ۱۲ روز و حسابدار دوم در ۶ روز انجام دهد، این دو با هم در چند روز این کار را انجام می‌دهند؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

مثال: یک مخزن آب توسط دو شیر آب پُر می‌شود، شیر A به تنهایی در ۵ ساعت می‌تواند این مخزن را پُرکند و شیر B به تنهایی در ۱۰ ساعت این مخزن را پر می‌کند. در ابتدا مخزن خالی است، شیر A را ۲ ساعت باز می‌کنیم، از این لحظه به بعد اگر شیر B را نیز باز کنیم، چه مقدار طول می‌کشد که مخزن آب پر شود؟

۱) یک ساعت. ۲) یک ساعت و ۳۰ دقیقه.

۳) دو ساعت. ۴) یک ساعت و ۴۵ دقیقه.

مثال: یک شیر آب، یک استخر را در ۶ ساعت و شیر آب دیگری همان استخر را در t ساعت پر می‌کند. اگر دو شیر آب هم‌زمان باز شوند، استخر در ۵ ساعت پُر می‌شود. شیر آب دوم، به تنهایی استخر را در چند ساعت پُر می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

مثال: دو نفر با هم یک خانه را ۱۵ روزه رنگ می‌کنند، اگر سرعت نقّاش اوّل ۳ برابر سرعت نقّاش دوم باشد، مدّت زمانی که لازم است تا نقّاش دوم به تنهایی خانه را رنگ کند، چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰

مثال: بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

مثال: دو نفر کاری را با هم انجام می‌دهند. نفر اول به تنهایی نیم ساعت زودتر از نفر دوم کار را انجام می‌دهد. اگر هر دو نفر با هم کار کنند، کار ۱۰ دقیقه زودتر از موقعی انجام می‌شود که نفر اول کار را انجام می‌داد. نفر دوم به تنهایی در چه زمانی کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۱۰دقیقه ۲) نیم ساعت ۳) ۴۵دقیقه ۴) یک ساعت

قدرمطلق

تعریف قدرمطلق

قدرمطلق به معنی فاصله‌ی بین دو پارامتر می‌باشد.

دو نقطه روی محور طول‌ها فرض می‌کنیم که نسبت به مبدأ (نقطه‌ی با طول صفر) قرینه باشند. $A'(-x,0)$ و $A(x,0)$ که نسبت به مبدأ و محور عمودی قرینه‌ی یکدیگرند.

فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی مذکور نسبت به مبدأ مختصات به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |OA'| = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(-x-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2} \\ |OA| = \sqrt{(x_{A'} - x_O)^2 + (y_{A'} - y_O)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2} \end{cases}$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ A روی خط $y = 2x$ با طول مثبت تا مبدأ مختصات برابر $2\sqrt{5}$ و فاصلهٔ آن تا نقطهٔ $B(m,0)$ برابر $\sqrt{17}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟ (کاج ۱۴۰۰)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی مورد نظر نسبت به مبدأ مختصات با یکدیگر برابر هستند، لذا تابعی نیاز است که این فاصله‌ی برابر که عددی مثبت می‌باشد را بیان کند. به همین منظور تابع قدرمطلق برای بیان فاصله به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

زمانی مجاز به برداشتن علامت قدرمطلق هستیم که علامت عبارت داخل قدرمطلق را بطول قطع بتوانیم تعیین نماییم. یعنی اگر علامت عبارت داخل قدرمطلق مثبت باشد، خود عبارت را می‌نویسیم و اگر علامت عبارت داخل قدرمطلق منفی باشد، برای آن‌که مثبت شود، قرینه‌ی عدد را می‌نویسیم.

مثال: عبارت زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

$$f(x) = |\cos x - ۳| =$$

$$g(x) = |x^{۲} - ۱| =$$

$$|-x| =$$

$$|\sqrt{۲} - \sqrt{۳}| =$$

$$|x^{۲} + ۱| =$$

$$|x - ۲| =$$

$$|x^{۳}| =$$

مثال: اگر $۳ < x < ۴$ باشد، عبارت $|x - ۴| + |۲x - ۱| - |-۲x - ۴|$ را ساده نمایید.

ویژگی‌های قدرمطلق

۱) $\forall x \in \mathbb{R} \,;\, |x| \geq 0$

۲) $\forall x \in \mathbb{R} \,;\, |x| \geq x$

۳) $\forall x \in \mathbb{R} \,;\, x \geq -|x|$

۴) $\forall x \in \mathbb{R} \,;\, |x| = |-x|$

۵) $\sqrt{x^2} = |x|$

۶) $-|x| \leq x \leq |x|$

۷) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

۸) $|xy| = |x| \times |y|$

۹) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad , \quad y \neq 0$

۱۰) $|x|^{2n} = |x^{2n}| = x^{2n}$

۱۱) $|x|^{2n-1} = |x^{2n-1}|$

۱۲) $|x| = k \xrightarrow{k>0} x = \pm k$

۱۳) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

۱۴) $|x| = \max\{x , -x\}$

۱۵) $\max\{a , b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$

۱۶) $\min\{a , b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$

۱۷) $|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$

۱۸) $|x| \geq k \Rightarrow x \geq k \quad \vee \quad x \leq -k$

۱۹) $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

۲۰) $|x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \Rightarrow |x + y| = |x| + |y| \\ xy < 0 \Rightarrow |x + y| < |x| + |y| \end{cases}$

۲۱) $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

۲۲) $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$

مثال: اگر $x < ۰$ باشد، معادله‌ی $x\sqrt{x^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x^{۳}} = ۱$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

مثال: اگر $x < ۰$ باشد، حاصل $A = \Big| ۶x + |۸x| \Big|$ را بیابید.

مثال: اگر $x \in \left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ باشد، مقدار عبارت $A = \cos x + |\cos x|$ را بیابید.

مثال: نامعادله‌ی $|x^{۲} + x - ۱| < x^{۲} + |x - ۱|$ را حل کنید.

مثال: اگر $x^{۲} + ۲x < ۰$ حاصل عبارت $A = |۲ + x| + |x - ۱| + ۲$ را بیابید.

مثال: خلاصه شده‌ی عبارت $|x^{۴}||x^{۹}|$ کدام گزینه است؟

۱) $x^{۱۳}$ ۲) $\frac{|x^{۱۴}|}{x}$ ۳) $|x|x^{۱۲}$ ۴) $|x^{۱۲}|x$

حل معادلات قدرمطلق

۱) حالات خاص معادلات قدرمطلق

۱) $\left| f(x) \right| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

۲) $\left| f(x) \right| = k \xrightarrow{k>0} f(x) = \pm k$

۳) $\left| f(x) \right| = k \xrightarrow{k<0} \varnothing$

۴) $\left| f(x) \right| = \left| g(x) \right| \Rightarrow \left| f(x) \right| = \pm g(x)$

۵) $\left| f(x) \right| = g(x) \Rightarrow \left| f(x) \right| = \pm g(x) \quad , \quad D = \{ x \mid g(x) \geq 0 \}$

۶) $\left| f(x) \right| = f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0$

۷) $\left| f(x) \right| = -f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$

۸) $\left| f(x) \right| + \left| g(x) \right| + \left| h(x) \right| + \cdots = \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \\ \quad \vdots \end{cases}$

۹) $\left| x-a \right| + \left| x-b \right| = k \quad , \quad k>0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$

a) $\left| a-b \right| > k \Rightarrow \varnothing$

b) $\left| a-b \right| < k \Rightarrow x = \dfrac{a+b \pm k}{2}$

c) $\left| a-b \right| = k \Rightarrow x \in [a, b]$

مثال: معادله‌ی $(x-1)^2 - 5\left| x-1 \right| + 4 = 0$ را حل کنید.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\left|1+3\sqrt{x}\right| = -5$$

$$|x-1| + |x^2-1| + |x^3-1| = 0$$

$$|x^2-2x| + |x^5-x^4-8x| = 0$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$|x-1| + |x-8| = 2$$

$$|x+3| + |x-4| = 9$$

$$|x+2| + |x-5| = 7$$

مثال: معادله‌ی $|x+8|+|x+3|=5$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

مثال: معادله‌ی $|81-x^2|=81-x^2$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۲- معادلات قدرمطلقی (روش کلی)

ابتدا عبارت داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و پس از ناحیه‌بندی، معادله را در حل ناحیه حل کرده و جواب‌هایی را قابل قبول می‌دانیم که در محدودهٔ مورد نظر قرار داشته باشند.

مثال: معادله‌ی $|x-3|+|2x|=6$ را حل کنید.

حل نامعادلات قدرمطلق

۱- نامعادلات قدرمطلقی (حالت‌های خاص)

$۱)\ |f(x)| \le k \xrightarrow{k>۰} -k \le f(x) \le k$

$۲)\ |f(x)| \le k \xrightarrow{k<۰} \varnothing$

$۳)\ |f(x)| < ۰ \to \varnothing$

$۴)\ |f(x)| \le ۰ \to f(x) = ۰$

$۵)\ |f(x)| \ge k \xrightarrow{k>۰} f(x) \ge k \ \vee\ f(x) \le -k$

$۶)\ |f(x)| \ge k \xrightarrow{k<۰} x \in D_{f(x)}$

$۷)\ |f(x)| \ge ۰ \to x \in D_{f(x)}$

$۸)\ |f(x)| > ۰ \to x \in D_{f(x)} - \{x \mid f(x) = ۰\}$

$۹)\ |f(x)| \ge |g(x)| \to f^{۲}(x) \ge g^{۲}(x)$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$|x^{۲} + x| < ۲$$

$$|۳x^{۲} - ۶x| \le ۰$$

$$\left|\frac{x+۱}{۲x-۱}\right| \ge ۱$$

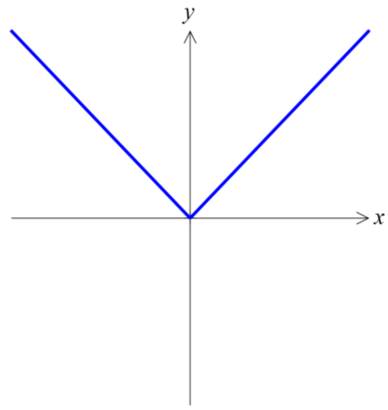
مثال: در چه بازه‌ای تابع $f(x) = x^{۲}$ بالاتر از تابع $y = |۳x - ۴|$ قرار نمی‌گیرد؟

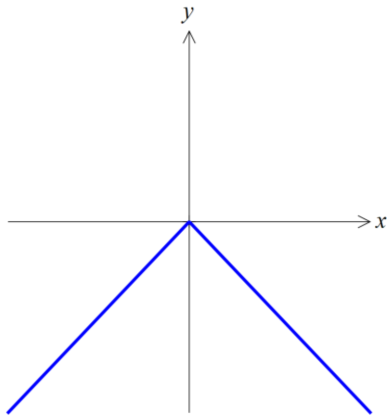
۲- نامعادلات قدرمطلقی (روش کلی)

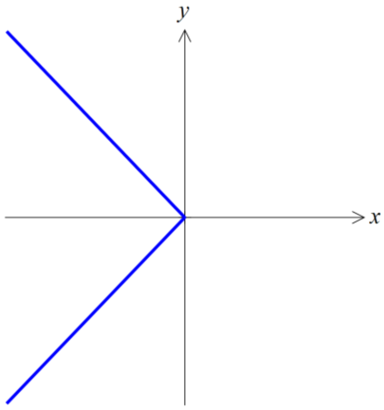
ابتدا عبارت داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و پس از ناحیه‌بندی، نامعادله را در حل ناحیه حل کرده و جواب‌های هر ناحیه را با محدودهٔ مورد نظر آن اشتراک گرفته و در نهایت اجتماع بین جواب‌های مراحل مختلف را به‌عنوان جواب کلی نامعادله قبول می‌کنیم.

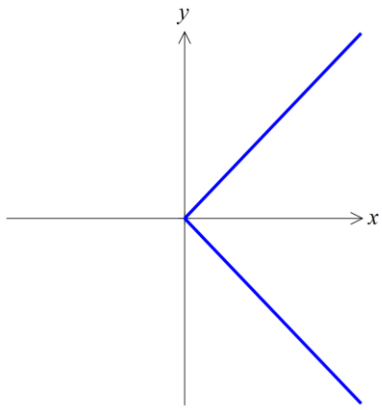
مثال: نامعادله‌ی $|x - ۳| + |x - ۱| > ۲x$ را حل کنید.

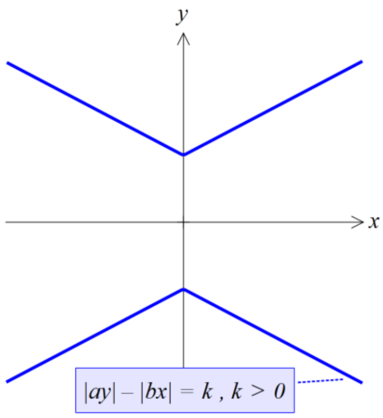
نمودارهای خاص

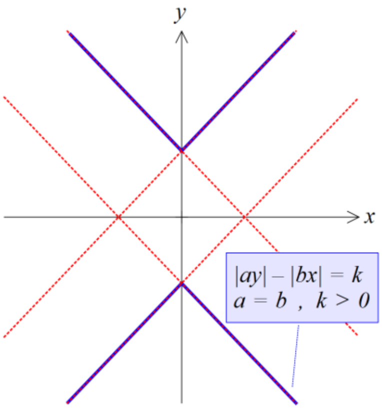


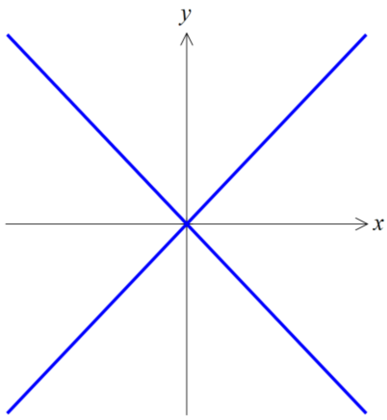


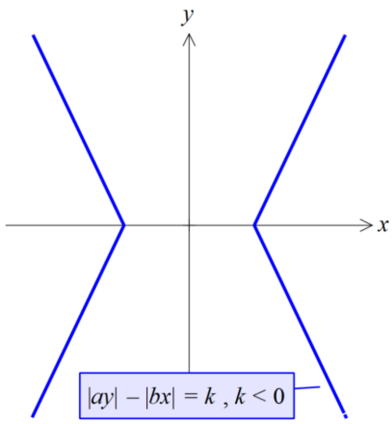


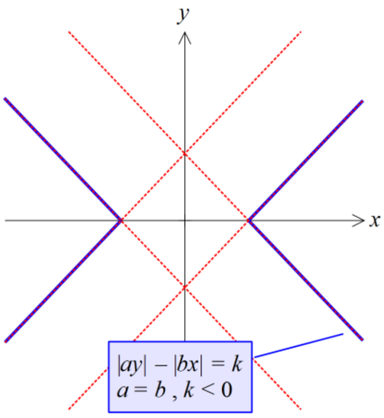


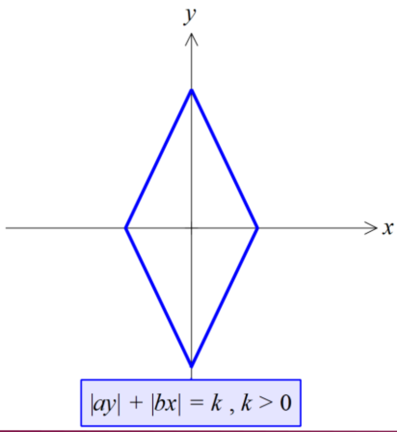


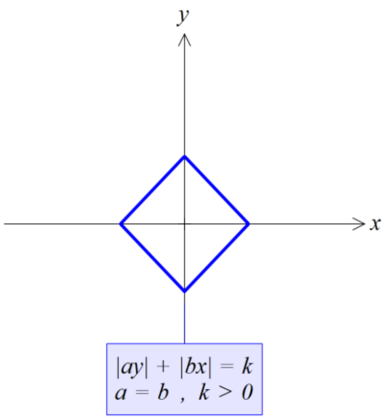




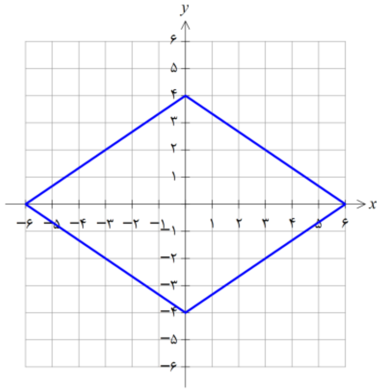




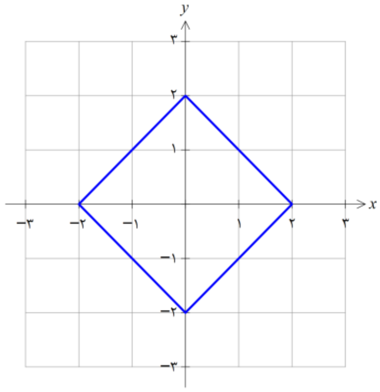




مثال: نمودار تابع $|2x| + |3y| = 12$ را رسم کنید و مساحت آن را بیابید.



مثال: نمودار تابع $|2x| + |2y| = 4$ را رسم کنید و بیان کنید که شکل حاصل بیانگر کدام شکل هندسی می‌باشد و مساحت آن را بیابید.

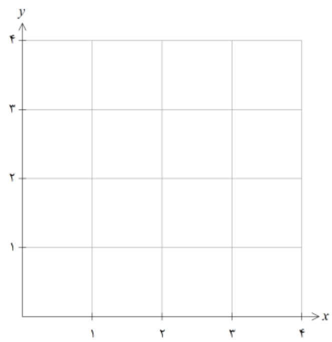


مثال: نمودار تابع $|x+1| + |y-2| = 0$ چه شکلی را بیان می‌کند؟

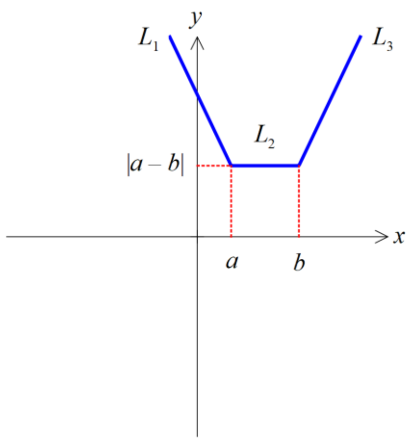
رسم نمودار تابع قدرمطلق $y = a + b|cx + d| \quad b, c \neq 0$

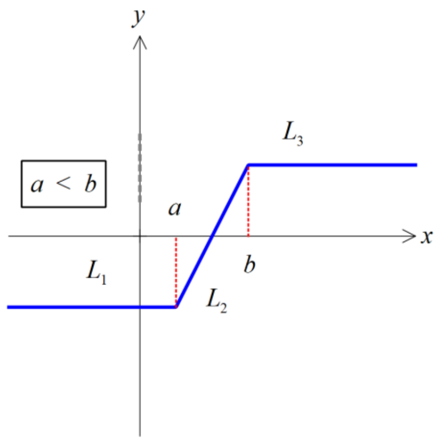
ابتدا نقطه‌ی S که در آن $x_S = \frac{-d}{c}$ می‌باشد را به عنوان رأس تابع قدرمطلق در نظر گرفته و با در نظر گرفتن دو نقطه (یکی سمت چپ و دیگری در سمت راست)، تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.

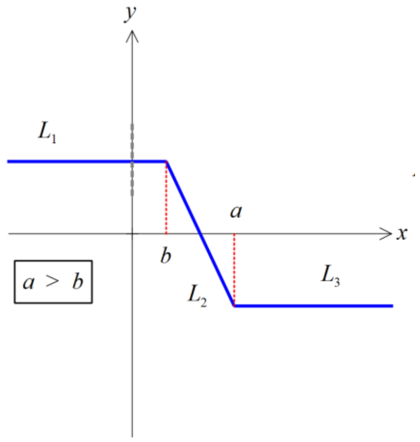
مثال: نمودار تابع $y = 3|2x - 4| + 1$ را رسم نمایید.



توابع گُلدانی و آبشاری (سُرسُره‌ای):







$y = |x-a| + |x-b|$

$L_۱ : y = -۲x + a + b$

$L_۲ : y = |a-b|$

$L_۳ : y = ۲x - a - b$

$R_f = [\,|a-b|, +\infty)$

$x = \frac{a+b}{۲}$

$y = |x-a| - |x-b|$

$L_۱ : y = -|a-b|$

$L_۲ : y = ۲x - a - b$

$L_۳ : y = |a-b|$

$R_f = [-|a-b|, |a-b|]$

$w = \left(\frac{a+b}{۲}, ۰\right)$

$y = |x-a| - |x-b|$

$L_۱ : y = |a-b|$

$L_۲ : y = -۲x + a + b$

$L_۳ : y = -|a-b|$

$R_f = [-|a-b|, |a-b|]$

$w = \left(\frac{a+b}{۲}, ۰\right)$

تابع $a_i \, , x_i \in \mathbb{R}$ $\quad y = a_۱|x-x_۱| + a_۲|x-x_۲| + \cdots + a_n|x-x_n|$

برای رسم تابع قدرمطلقی شامل مجموع چند قدرمطلق، ابتدا ریشه‌ی تمام قدرمطلق‌ها را یافته و در سمت چپ کوچکترین ریشه و سمت راست بزرگترین ریشه، دو عدد دیگر به عنوان نقاط کمکی در نظر گرفته و در نهایت با رسم تمامی نقاط مذکور، تابع را رسم می‌کنیم.

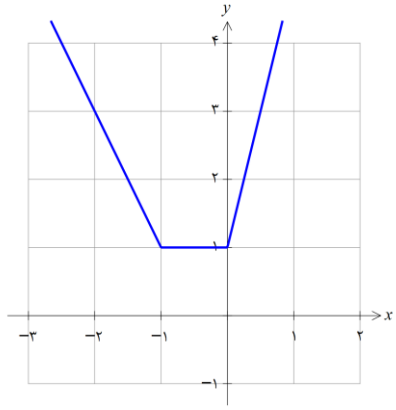
تابع $y = |f(x)|$

ابتدا تابع $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس قسمتی از نمودار را که بالای محور افقی می‌باشد، دست نزده و قسمتی از نمودار که زیر محور افقی ترسیم شده است را به بالای محور افقی متقارن می‌کنیم.

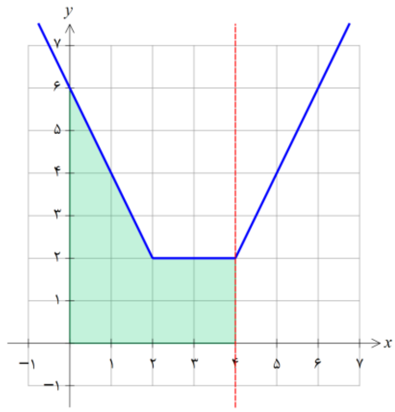
تابع $y = f(|x|)$

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس قسمت چپ محور قائم را حذف کرده و قرینه‌ی قسمت راست محور قائم را به سمت چپ منعکس می‌کنیم.

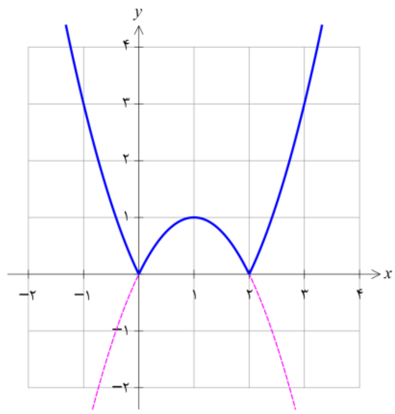
مثال: تابع $y = 2|x| + |x+1| + x$ را رسم کنید.

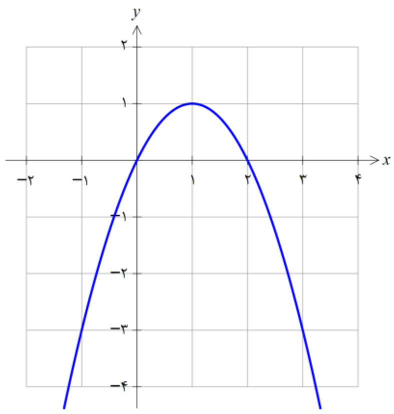


مثال: تابع $y = |x-2| + |x-4|$ را رسم کرده و مساحت محدود به این تابع و محورها و خط $x = 4$ را بیابید.

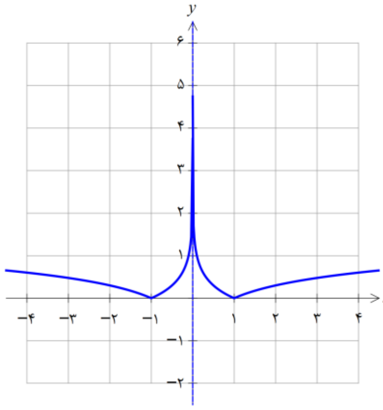


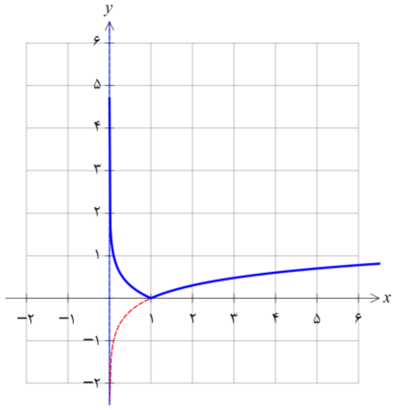
مثال: تابع $y = |2x - x^2|$ را رسم کنید.

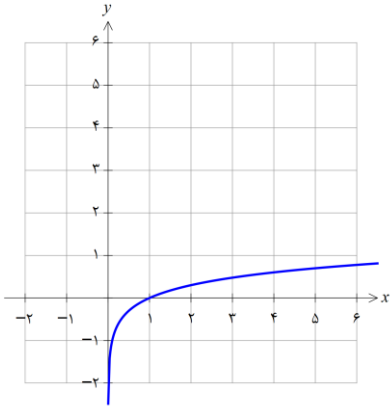




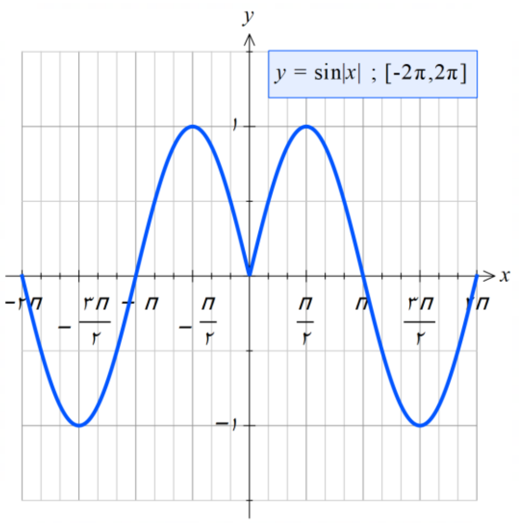
مثال: تابع $y = \left| \log |x| \right|$ را رسم کنید و برد آن را بیابید.

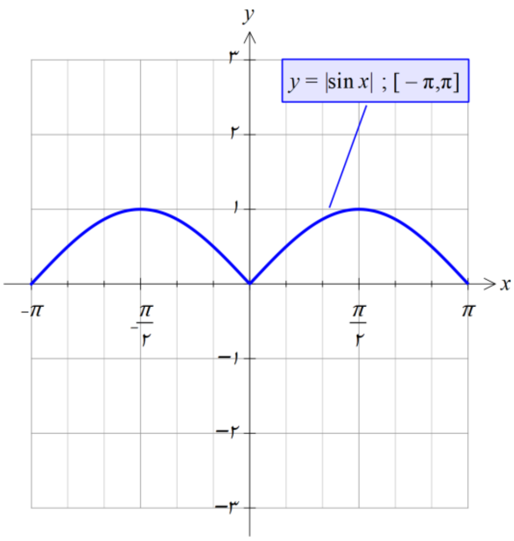






مثال: توابع $y = \sin |x|$ و $y = |\sin x|$ را رسم نمایید.

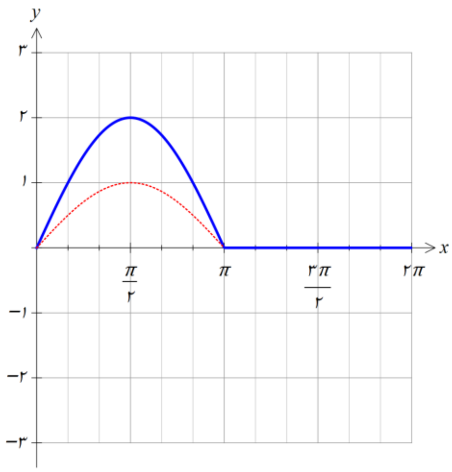




رسم توابع قدرمطلق در حالت کلی

ابتدا باید عبارات داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کرده و پس از ناحیه‌بندی و تبدیل تابع به یک تابع چندضابطه‌ای، تابع مورد نظر را رسم نماییم.

مثال: تابع $y = \sin x + |\sin x|$ را در بازه‌ی $[\circ , ۲\pi]$ رسم نمایید.



حل معادله و نامعادله به کمک رسم:

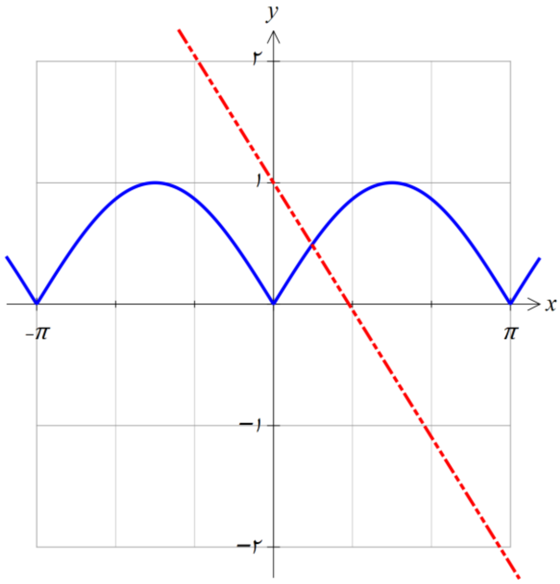
برای حل معادلات و نامعادلات به روش ترسیمی (هندسی) ابتدا دو تابع سمت چپ و راست تساوی را در یک دستگاه ترسیم کرده و سپس:

الف) معادله‌ی $f(x) = g(x)$ یعنی طول نقاط برخورد توابع f و g.

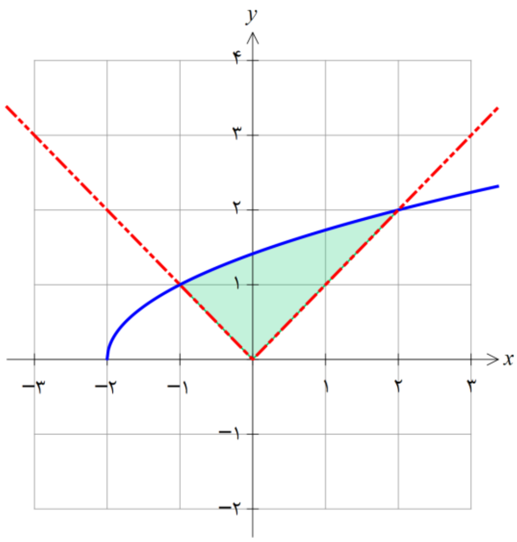
ب) نامعادله‌ی $f(x) > g(x)$ یعنی xهایی که نمودار f بالاتر از نمودار g قرار می‌گیرد.

ج) نامعادله‌ی $f(x) < g(x)$ یعنی xهایی که نمودار g بالاتر از نمودار f قرار می‌گیرد.

مثال: معادله‌ی $|\sin x| = -x + ۱$ چند ریشه دارد؟



مثال: نامعادله‌ی $|x| < \sqrt{x + ۲}$ را حل کنید.



جزء صحیح

تعریف تابع جزء صحیح:

جزء صحیح عدد x یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیحی که از عدد x بیشتر نباشد.

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$

معرفی جزء صحیح: اگر هر عدد حقیقی x را به صورت $x = n + p$ بنویسیم که در آن n قسمت صحیح عدد بوده و p قسمت اعشاری مثبت عدد باشد، آن‌گاه جزء صحیح عدد x که با نماد $[x]$ معرفی می‌گردد برابر است با:

$$x = n + p \xrightarrow{0 \le p < 1} [x] = n$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x] \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$x \notin \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n < x < n + 1 \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \le x < n + 1$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + k] = [x] + k$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \le nx - [nx] < 1$$

$$x - 1 < [x] \le x$$

$$\underbrace{\left[x + \left[x + [x + \cdots]\right]\right]}_{n} \le n[x]$$

مثال: مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

$$\left[2\sqrt{7}\right] + \left[3\sqrt{8}\right] =$$

$$\left[\log_3 5\right] =$$

$$\left[-\log_{۵} ۳ \right] =$$

$$\left[\frac{۱}{\sqrt{۷} - \sqrt{۵}} - \sqrt{۷} \right] =$$

$$\left[\log ۲۳۹۵۷ \right] + \left[\log ۰/۰۰۶۲۵ \right] =$$

مثال: اگر $x = \sqrt{۱۷}$ حاصل $\left[x + \left[x + [x] \right] \right]$ را بیابید.

مثال: برد تابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x - ۲۵\left[\frac{x}{۲۵} \right]}$$

حل معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\left[\frac{x+۲}{۳}\right]=-۱$$

$$\left[\frac{۲}{\sqrt{x}}\right]=۳$$

$$\left[\frac{۲x-۱}{۳}\right]<-۵$$

$$[x]\geq\sqrt{۳}$$

مثال: حدود متغیر x را از معادله‌ی زیر به‌دست آورید.

$$[x]-[-x]=۳$$

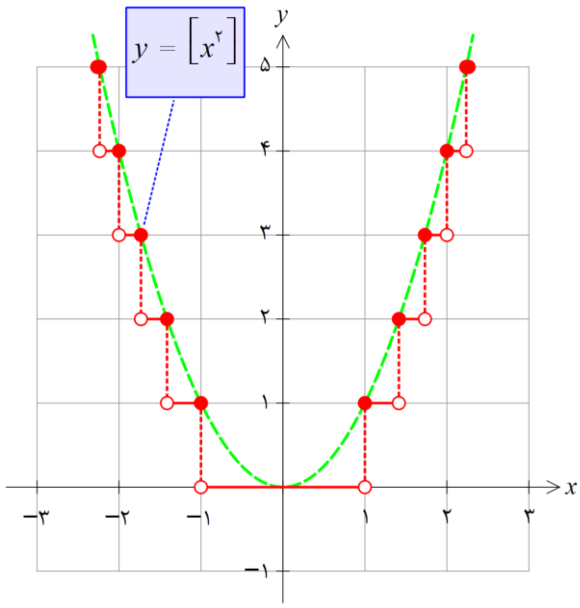
مثال: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\dfrac{3x+7}{4-2[-x]}$ را بیابید.

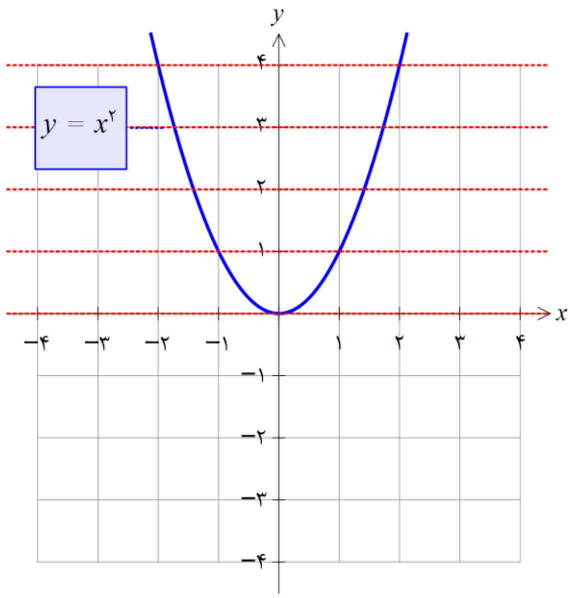
مثال: معادله‌ی $x^2=[x]+[-x]+1$ چند ریشه دارد؟

رسم تابع جزء صحیح:

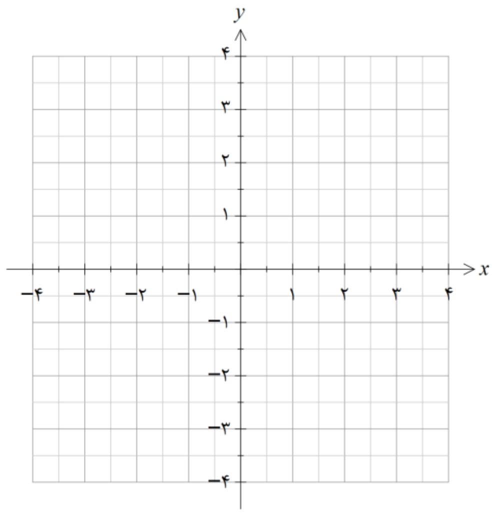
برای رسم تابع $f(x)=[g(x)]$ در دستگاه مختصات، ابتدا تابع $g(x)$ را رسم کرده و سپس خطوط افقی را که در آن‌ها عرض نقاط اعداد صحیح هستند رسم می‌کنیم (خطوطی را رسم می‌کنیم که تابع رسم شده را قطع کنند).

هر یک از نقاط تقاطع را ابتدا توپر کرده و سپس روی خط پایینی تصویر کرده و تصویر آن را توخالی در نظر می‌گیریم.

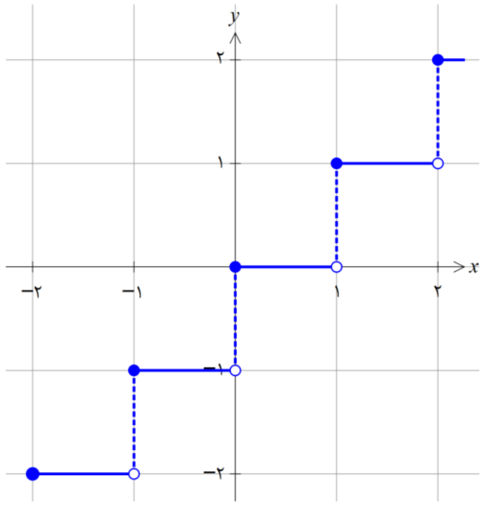


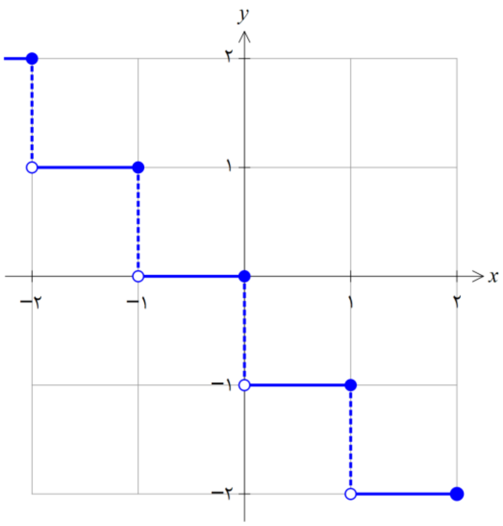


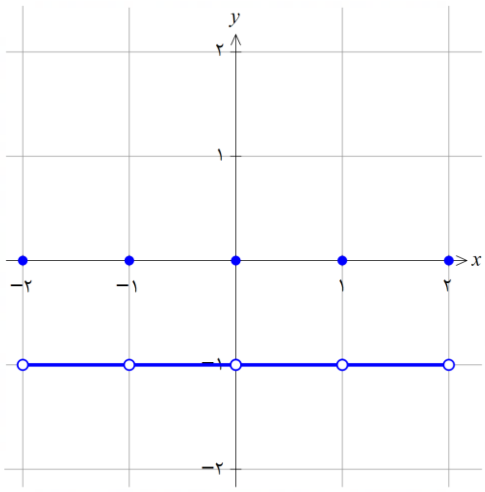
مثال: نمودار تابع $y = \dfrac{[\,x - ۲\,]}{[\,x\,]}$ در بازه‌ی $[\,-۲\,,\,۳\,]$ دارای n پاره‌خط و m نقطه می‌باشد.
دوتایی $(\,m\,,\,n\,)$ را بیابید.

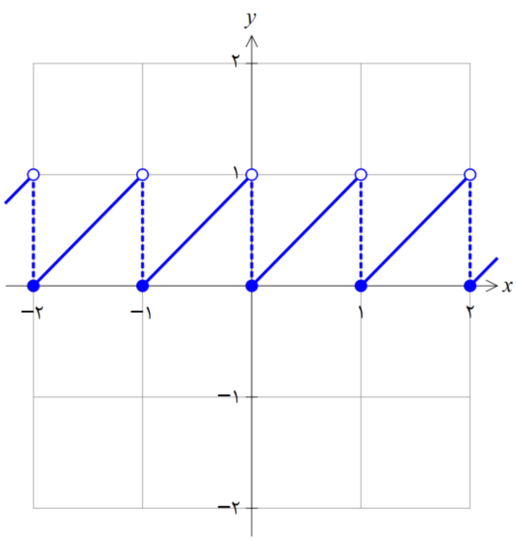


نمودار توابع خاص جزء صحیح









نمودارهای قدرمطلقی

مثال: مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $y=\frac{1}{2}x+2$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

مثال: مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=5-|x-1|$ و $y=|x|$، کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

مثال: اگر $[x-2]=1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-3|-|x-4|$ و $g(x)=x^2+x-17$، در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

مثال: مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+2|+|2x-1|=3$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

مثال: نمودارهای دو تابع $y=|x-2|+|x+1|$ و $y=x+7$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $10\sqrt{2}$

مثال: نمودارهای دو تابع $y=|x+2|+|x-1|$ و $3y+x=17$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $4\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{3}$

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

ریشه‌ی n ام (ریشه و توان)

ریشه‌ی n ام : اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه b را یک ریشه‌ی n ام عدد a می‌نامیم و داریم:

$$b^{n} = a$$

نکته ۱ : می‌دانیم توان زوج هر عدد حقیقی غیرصفر ، همواره مثبت است، پس برای اعداد منفی، ریشه‌های دوم، چهارم، ششم و ... تعریف نمی‌شوند. به عنوان مثال ، عدد ۹- را درنظر می‌گیریم. هیچ عدد حقیقی را نمی‌توان پیدا کرد که در خودش ضرب شده و حاصل ضرب ۹- شود پس عدد ۹- ریشهٔ مرتبه دوم ندارد.

نکته ۲ : هر عدد مثبت دو ریشه مرتبهٔ زوج دارد که یکی از آن‌ها حاصل رادیکال مورد نظر با فرجهٔ خواسته شده است و دیگری قرینهٔ آن عدد.

نکته ۳ : در عدد چه مثبت باشد و چه منفی، فقط و فقط یک‌ریشهٔ مرتبهٔ فرد (سوم ، پنجم ، هفتم و ...) دارد که اگر عدد مورد نظر منفی باشد، ریشهٔ مرتبهٔ فرد آن نیز منفی و در صورتی که عدد مورد نظر مثبت باشد، ریشهٔ مرتبهٔ فرد آن نیز مثبت خواهد بود.

مثال: اگر a ریشه‌ی سوم عدد ۳۴۳ و b ریشه‌ی پنجم عدد ۲۴۳ باشد، حاصل $a^{۲} - b^{۲}$ را بیابید.

یافتن مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a}$

اگر ریشه‌ی n ام عدد a ، عددی صحیح نباشد، برای یافتن مقدار تقریبی عبارت رادیکال a با فرجه‌ی n ابتدا اعداد طبیعی را با توان n محاسبه می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که عدد a بین کدام دو عدد طبیعی قرار می‌گیرد که به توان n رسیده باشند. آن دو عدد را b و c فرض می‌کنیم. حال یک عدد اعشاری با یک رقم اعشار بین b و c را فرض کرده و این عدد را n بار در خودش ضرب می‌کنیم، اگر حاصل بدست آمده از عدد a بیشتر شد، عدد فرض شده را کوچکتر در نظر گرفته و مجدداً بررسی می‌کنیم و اگر عدد مورد نظر از a کمتر شد، تلاش را با عددی بیشتر ادامه می‌دهیم.

مثال: مقدار تقریبی عدد $\sqrt[۳]{۱۰}$ را با یک رقم اعشار بیابید.

مقایسه‌ی عدد a با $\sqrt[n]{a}$ و a^n :

اگر عددی از ۱ بزرگ‌تر باشد، با افزایش توان حاصل بدست آمده از عدد a بزرگ‌تر خواهد بود و در ریشه‌گیری با افزایش فرجه‌ی رادیکال، حاصل بدست آمده از عدد a کوچکتر خواهد بود.

در صورتی که عدد از ۱ کوچکتر باشد، با افزایش توان، حاصل بدست آمده کوچک شده و با افزایش فرجه‌ی رادیکال حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

در مورد اعداد منفی، جواب در صورت وجود (اعداد منفی ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج ندارند) رفتاری دقیقاً برعکس خواهد داشت.

مثال: اگر $a > ۱$ و $۰ < b < ۱$ آنگاه عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید.

$\sqrt{a} \ \square \ \sqrt[۴]{a}$ $\qquad$ $\sqrt{b} \ \square \ \sqrt[۴]{b}$

اعمال جبری بر روی ریشه‌ی n ام یک عدد

اگر n زوج باشد، مقادیر a و b باید نامنفی باشند.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

با شرط $b \neq ۰$ (وقتی n زوج باشد، $a \geq ۰$ و $b > ۰$)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

اگر n زوج باشد، مقادیر a باید نامنفی باشند.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

همواره برای دو عبارت $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ و $\sqrt[n]{a^n}$ داریم:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \in Even \\ a & n \in Odd \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \begin{cases} a \geq ۰ & n \in Even \\ a & n \in Odd \end{cases}$$

مثال: اگر $a < b < ۰$، آنگاه حاصل عبارت $\sqrt[۵]{(|a| - b)^۵} + \sqrt[۴]{(a-b)^۴}$ کدام است؟

۱) $۲b$ $\qquad$ ۲) $-۲a$ $\qquad$ ۳) $۲(b-a)$ $\qquad$ ۴) $۲(a-b)$

توان‌های گویا

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را به صورت $a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$ تعریف می‌کنیم.

تذکر: بطورکلی عبارت $a^{\frac{۱}{n}}$ به ازای $a < ۰$ تعریف نمی‌شود بنابراین هرجا صحبت از $a^{\frac{۱}{n}}$ می‌شود، a عددی مثبت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین عبارت‌های $(-۲)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۱)^{\frac{۱}{۵}}$ تعریف نمی‌شوند.

در حالت کلی هر گاه $a > ۰$ باشد، آنگاه برای هر دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

توان‌های گویای منفی: وقتی توان گویا منفی است، با استفاده از قانون $a^{-r} = \frac{۱}{a^r}$ (r عدد گویای مثبت)، آن را به توان مثبت تبدیل می‌کنیم.

مثال: عدد $۵^{-۲/۵}$ را به صورت یک عدد رادیکالی بنویسید.

بطور کلی تمام قواعدی که برای توان‌های صحیح یک عدد غیرصفر a بکار می‌رود، برای توان‌های گویای آن نیز قابلیت استفاده دارد.

اگر $a > ۰$ و r و s دو عدد گویا باشند، قوانین زیر در توان‌های گویا برقرار است.

$$a^r \div a^s = a^{r-s} \qquad a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$a^{-r} = \frac{۱}{a^r} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

مثال: حاصل $۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{۱/۴}$ چند برابر $\sqrt[۱۵]{۳^{۱۱}}$ است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

مثال: معکوس عدد $۲۷^{-\frac{۲}{۳}} \times ۸۱^{-۰/۷۵}$ برابر است با:

۱) ۸۱ ۲) $\sqrt[۴]{۹}$ ۳) ۲۴۳ ۴) $\sqrt[۴]{۲۷}$

ساده‌سازی و توان‌رسانی رادیکال‌ها

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها با فرجه‌های نابرابر: برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها با فرجه‌های نابرابر، هر کدام از رادیکال‌ها را به توان گویا تبدیل کرده و با استفاده از قوانین ضرب و تقسیم توان‌های گویا، حاصل عبارت را یافته و مجدداً پاسخ نهایی را به‌صورت رادیکالی نمایش می‌دهیم.

مثال: حاصل عبارت $\sqrt[۷]{a} \times \sqrt[۵]{a^{۳}}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

ساده‌سازی فرجه و توان یک رادیکال: اگر توان و فرجه‌ی یک رادیکال دارای عامل‌های مشترک باشند، می‌توانیم با استفاده از تعریف توان گویا، عبارت رادیکالی معادلی برای آن عدد رادیکالی بیابیم و برای این کار عموماً عامل توان و فرجه را به آن عامل مشترک تقسیم می‌کنیم.

اگر $a > ۰$ و ($k\ ,\ n\ ,\ m \geq ۲$ اعداد طبیعی) $\qquad \sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^{n}}$

از رابطه‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عدد $a > ۰$ داریم: $\qquad \sqrt[n]{a^{kn}} = a^{k}$

عبارتی در زیر رادیکال که توانش با فرجه‌ی رادیکال برابر یا ضریبی از آن باشد، از زیر رادیکال بیرون می‌آید همچنین برای وارد کردن یک عدد به زیر رادیکال، باید آن عدد را به توان فرجه رسانده و در زیر رادیکال بنویسیم.

توجه: اگر فرجه‌ی رادیکال زوج باشد، فقط اعداد مثبت به زیر رادیکال می‌روند و در مورد فرجه‌های فرد هیچگونه محدودیتی وجود ندارد. یعنی در فرجه‌ی زوج، علامت منفی پشت رادیکال باقی می‌ماند.

مثال: عبارت $۲\sqrt[۳]{۲}$ را به شکل $\sqrt[۶]{a}$ نوشته‌ایم، ریشه‌ی هشتم عدد مثبت a کدام است؟

۱) ۴   ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) ۲   ۴) $\sqrt{۲۷}$

ریشه‌گیری‌های متوالی

اگر بخواهیم عبارتی مانند $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ که در آن $(a > 0)$ را به صورت یک رادیکال بنویسیم، از قوانین توان‌های گویا استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

مثال: عبارت $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید. $(a > 0)$

عبارت‌های جبری

اتحادها و تجزیه چندجمله‌ای‌ها

اگر دو طرف یک تساوی جبری به ازای هر مقدار قابل قبول از متغیرهایش همواره برابر باشند، آن تساوی را یک اتحاد می‌نامیم.

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$ را بیابید.

مثال: اگر $10a^2 + 4b^2 + 4ab - 6a + 1 = 0$، آن‌گاه مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{-1}{9}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{9}$

مثال: اگر $\frac{۱}{x} + ۲x = ۵$ آن‌گاه حاصل $۱۶x^{۴} + \frac{۱}{x^{۴}}$ کدام است؟

۱) ۳۸۰ ۲) ۳۸۹ ۳) ۴۴۹ ۴) ۴۳۳

مثال: اگر $x^{۲} + \frac{۱۰}{x^{۲}+۱} = ۹$ باشد، مقدار $\left(x^{۲}+۱\right)^{۲} + \frac{۱۰۰}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}$ کدام است؟

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) ۹۸ ۲) ۹۰ ۳) ۸۸ ۴) ۸۰

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، می‌توان اتحادهای فرعی زیر را نتیجه گرفت.

$$a^{۲} + b^{۲} = (a+b)^{۲} - ۲ab$$

$$(a+b)^{۲} - (a-b)^{۲} = ۴ab$$

$$(a+b)^{۲} + (a-b)^{۲} = ۲\left(a^{۲}+b^{۲}\right)$$

$$(a+b+c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲(ab+bc+ac)$$

نکته: عبارت‌هایی که شامل دوجمله‌ای $x^{۲} + ax$ هستند را می‌توان به یک عبارت شامل یک مربع کامل تبدیل کرد. برای این منظور، مربع نصف ضریب x را اضافه و کم می‌کنیم.

$$x^{۲} + ax + \frac{a^{۲}}{۴} - \frac{a^{۲}}{۴} = \left(x + \frac{a}{۲}\right)^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴}$$

مثال: اگر مجموع دو عدد برابر ۸ و مجموع مربعاتشان برابر ۳۴ باشد، آنگاه قدرمطلق تفاضلشان کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

مثال: هر گاه a و b اعداد طبیعی و $a^۲ - ۴b^۲ = ۵$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

مثال: حاصل عبارت $\sqrt[۴]{۷ - ۴\sqrt{۳}} \times \sqrt{۲ + \sqrt{۳}}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

مثال: مقدار عبارت $\sqrt{۲\sqrt{۲} - \sqrt{۶}} - \sqrt{۲\sqrt{۲} + \sqrt{۶}}$، برابر کدام عدد زیر است؟

۱) ۸ ۲) $\sqrt[۴]{۸}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۸}$

اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

اتحاد یک جمله‌ی مشترک

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

نکته: با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای و فاکتورگیری از $3ab$ در اتحاد داریم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

مثال: عبارت $(\sqrt{2}-1)^3$ را به شکل $a+b\sqrt{2}$ نوشته‌ایم. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۳−　　۳) ۲−　　۴) ۲

مثال: اگر $x+\frac{3}{x}=a$ آن‌گاه حاصل $x^3+\frac{27}{x^3}$، کدام است؟

۱) a^3-3a　　۲) a^3-9a　　۳) a^3　　۴) a^3-a

مثال: اگر $a+b+c=0$ آن‌گاه نشان دهید: $a^3+b^3+c^3=3abc$

اتحاد مجموع یا تفاضل دو مکعب (چاق و لاغر)

$$a^{3}+b^{3}=(a+b)(a^{2}-ab+b^{2})$$

$$a^{3}-b^{3}=(a-b)(a^{2}+ab+b^{2})$$

مثال: حاصل عبارت $(x-1)(x+1)(x^{4}+x^{2}+1)(x^{12}+x^{6}+1)$ به ازای $x=\sqrt[3]{2}$ کدام است؟

۱) ۶۳ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

تجزیه‌ی یک عبارت چندجمله‌ای

اگر بتوانیم یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند عبارت چندجمله‌ای (عامل) با درجه‌های کمتر از درجه‌ی اولیه بنویسیم، می‌گوییم آن چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم. تجزیه وقتی کامل است که هر یک از عامل‌های به‌دست آمده، دیگر قابل تجزیه نباشند. برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها از اتحادها، دسته‌بندی مناسب، تفکیک کردن عبارات ، اضافه و کم کردن عبارات و یا فاکتورگیری بهره می‌بریم.

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$x^{6}-1=$$

$$9x^{2}-6x-3=$$

$$3x^{2}+5x-2=$$

$$10x^{2}+3x-1=$$

$۸x^۲ + ۲x - ۱۵ =$

$x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۹y^۴ =$

$۳x^۲ + ۷x + ۲ =$

$x^۳ + x - ۱۰ =$

$x^۵ - x^۴ - ۴x + ۴ =$

عبارت‌های گویا و گویا کردن مخرج کسرها

عبارت‌های گویا

عبارتی کسری را که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، عبارت گویا می‌نامیم.

یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج کسر را صفر کنند، تعریف نمی‌شود و اصطلاحاً ریشه‌های مخرج یک عبارت گویا، جزو دامنه‌ی عبارت گویای مورد نظر قرار نمی‌گیرند.

مثلاً عبارت گویای $\frac{۲}{x - ۳}$ به ازای $x = ۳$ تعریف نمی‌شود و دامنه‌ی این عبارت گویا عبارت است از:

$D = \mathbb{R} - \{ ۳ \}$

ساده‌سازی عبارت‌های گویا

برای ساده کردن عبارت گویای $\frac{A}{B}$ باید هر یک از دو چند جمله‌ای A و B را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کرده و سپس عامل‌های مشترک را در صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

مثال: در عبارت $P=\frac{y^۴-۷y^۲+۱۲}{y^۲-۴y+۴}$ کدامیک از چند جمله‌ای‌های زیر وجود ندارد؟

۱) $y+۲$ ۲) $y^۲-۳$ ۳) $y-۲$ ۴) $y^۲+۳$

$$P=\frac{y^۴-۷y^۲+۱۲}{y^۲-۴y+۴}$$

مثال: حاصل عبارت گویای $P=\left(۱-\frac{۲}{x^۴+x^۲}\right)\left(۱+\frac{۲}{x^۲-۱}\right)-\frac{۲}{x^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x^۲}$ ۲) ۱ ۳) $۱+\frac{۱}{x^۲}$ ۴) صفر

مثال: اگر $\frac{B}{x^۲-۴}+\frac{A}{x-۲}=\frac{۳x}{x^۲-۴}$ باشد، آنگاه مقدار B کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) -۴ ۴) ۴

گویا کردن مخرج کسرها

گویا کردن مخرج کسرها به از بین بردن رادیکال ایجاد شده در مخرج کسر گفته می‌شود که در این حالت پس از از بین بردن رادیکال در مخرج کسر، در صورت کسر رادیکالی ظاهر خواهد شد. مهمترین حالات گویا کردن مخرج کسر، در موارد زیر بیان گردیده‌اند.

۱- مخرج کسر به صورت $\sqrt[m]{a^n}$ باشد ($n < m$)

به طور کلی برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن‌ها به صورت $\sqrt[m]{a^n}$ باشد، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\dfrac{۵}{\sqrt[۷]{x^۲}}$ را گویا کنید.

مثال: کسر $\dfrac{۳۰}{\sqrt{\sqrt{۴۵}+\sqrt{۵}}}$ چند برابر $\sqrt[۴]{۱۲۵}$ است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

۲- گویا کردن مخرج کسرها به کمک اتحاد مزدوج

برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن به صورت $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ یا $a \pm \sqrt{b}$ باشد، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\dfrac{۵}{\sqrt{x+۱}-۲}$ را گویا کنید.

$$\dfrac{۵}{\sqrt{x+۱}-۲}$$

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ را گویا کنید.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

نکته: گاهی لازم است بیش از یکبار از مزدوج ضرب کردن استفاده کنیم تا مخرج کسر از حالت گنگ رادیکالی خارج شود.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{2-\sqrt[4]{3}}$ را گویا کنید.

۳- گویا کردن مخرج کسرها با استفاده از اتحاد چاق و لاغر

برای گویا کردن مخرج کسرهایی با مخرج $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ از اتحاد چاق و لاغر استفاده کرده و صورت و مخرج را در قسمت چاق اتحاد چاق و لاغر یعنی $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{ab}$ ضرب می‌کنیم.

به‌طریق مشابه، برای گویاکردن مخرج‌کسرهایی بـا مخرج $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{ab}$ ، با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، صورت و مخرج کسر را در قسمت لاغر یعنی $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

رادیکال‌ها

مثال: حاصل عبارت $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}+\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $1+2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) 1

مثال: حاصل عبارت $\left(\sqrt[4]{9}-1\right)^{-1}-2\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $-1+\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

مثال: اگر $B = \dfrac{\dfrac{۲}{\sqrt{۲}} + \sqrt{۱۴}}{\dfrac{۸}{\sqrt{۲}} + \sqrt{۱۴}}$ باشد، حاصل $۳B + ۱$ کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۷}$

مثال: حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۸}}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}} \times ۱۶^{-\frac{۳}{۴}}}$ کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۳)

۱) $۱۶\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt[۳]{۲}$

مثال: حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۲۷}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}} \times ۸۱^{-\frac{۳}{۴}}}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۳)

۱) ۲۷ ۲) ۸۱ ۳) $۲۷\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $۸۱\sqrt[۳]{۳}$

مثال: حاصل عبارت $۲ - \dfrac{\sqrt{۱+\sqrt{۳}} - \sqrt{\sqrt{۳} - ۱}}{\sqrt{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}}$ کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) $-۲\sqrt{۳}$　　۲) $-\sqrt{۶}$　　۳) $۲\sqrt{۳}$　　۴) $\sqrt{۶}$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۲^۸}}} \times \sqrt[۴]{۱۶۲} \times \sqrt{۴\sqrt[۶]{۲}}$ چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۴)

۱) ۲　　۲) $۳\sqrt{۲}$　　۳) $۲\sqrt{۶}$　　۴) ۳