

## مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های اعداد: در سال‌های گذشته با مجموعه اعداد مهمی مانند اعداد طبیعی، اعداد حسابی، اعداد صحیح و ... آشنا شدیم.

مجموعه‌های اعداد مهم به قرار زیر می‌باشند:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

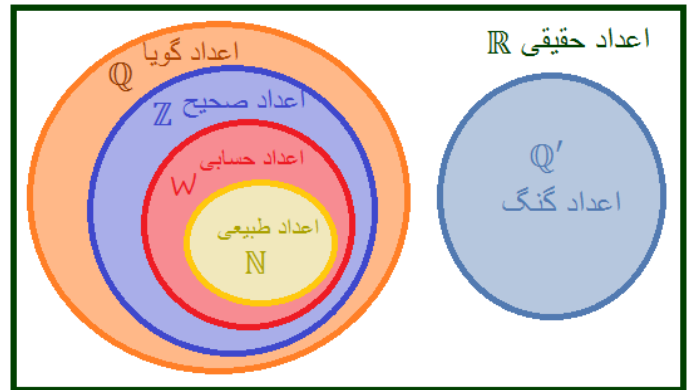
$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$



$$\mathbb{Q}'$$

$$\frac{\pi}{3/14} \quad (4)$$

$$\sqrt{2/25} \quad (3) \checkmark$$

$$1.5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2/5} \quad (1)$$

مثال: کدام یک از اعداد زیر به مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  تعلق ندارد؟

مثال: مجموعه  $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N}' - \mathbb{W}')$  با کدام مجموعه زیر برابر است؟

$$\mathbb{Z} - \{0\} \quad (4)$$

$$\mathbb{Z} \quad (3)$$

$$\mathbb{W} \quad (2)$$

$$\mathbb{N} \quad (1)$$



**مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌ی متناهی می‌نامند و اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامند. در مجموعه‌های نامتناهی، تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند؟ تعداد اعضای مجموعه‌های متناهی را بیان نمایید.

(الف) مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی

(ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد

(پ) مجموعه‌ی انسان‌های روی کره‌ی زمین

(ت) مجموعه‌ی سلول‌های عصبی مغز یک انسان

(ث) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰

(ج) مجموعه‌ی درختان جنگل‌های آمازون

**نکته:** اگر یک مجموعه متناهی باشد، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه نیز متناهی هستند.

**نکته:** اگر یکی از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه‌ی مورد نظر نیز نامتناهی خواهد بود.

**نکته:** اگر یکی از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای متناهی باشد، مجموعه‌ی مورد نظر می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۱) مجموعه‌ی اعداد گویا بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$ .

(۲) مجموعه‌ی کسرهای مثبت با صورت یک.

(۳) مجموعه‌ی تمام خط‌های گذرنده از یک نقطه.

(۴) مجموعه‌ی مولکول‌های موجود در یک صفحه‌ی کاغذ. ✓



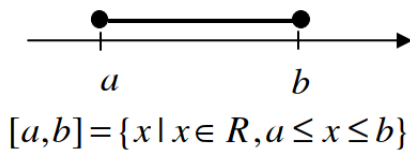
بازه ها:

در بسیاری از مفاهیم به کلیه اعداد حقیقی بین دو عدد خاص  $a$  و  $b$  اشاره داریم. هر قطعه از مجموعه‌ی اعداد حقیقی را یک فاصله یا بازه می‌نامند. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند که  $a < b$ ، بازه‌های زیر را می‌توان معرفی کرد.

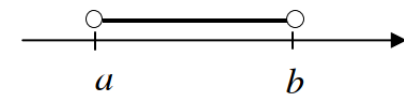
(۱) بازه های کران دار:

الف) بازه‌هایی که از دو طرف محدود می‌باشند.

بازه ی بسته

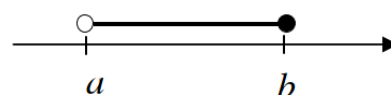
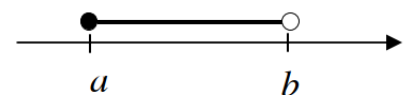


بازه ی باز



$$(a, b) = \{x \mid x \in R, a < x < b\}$$

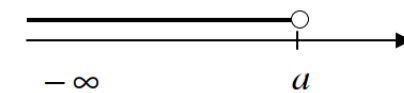
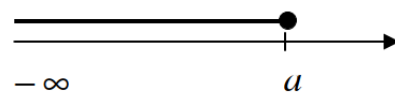
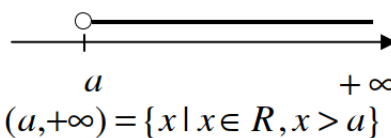
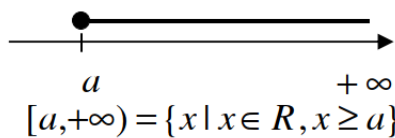
ب) بازه‌هایی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر باز می‌باشند. (نیم باز)



$$[a, b) = \{x \mid x \in R, a \leq x < b\}$$

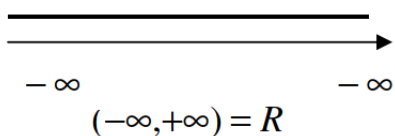
$$(a, b] = \{x \mid x \in R, a < x \leq b\}$$

(۲) بازه‌های بی کران که از یک طرف یا از هر دو طرف نامحدود می‌باشند.



$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\}$$



مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

۱)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$



۲)  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{\sqrt{2}}{3}\}$

۳)  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x + 6 > 0\}$

۴)  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$

مثال: هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف)  $A = [-2, 5]$

ب)  $B = (3, 7]$

ج)  $C = (-\infty, \sqrt{2})$



مثال: حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید.

ب)  $(2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, 9)$

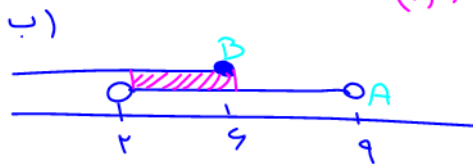
الف)  $(-3, 0) \cup (-2, 5]$

ت)  $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

پ)  $(3, +\infty) \cap (6, 10]$

ج)  $[2, 4) - (3, +\infty)$

ث)  $(3, +\infty) - [2, 4)$



$A - B = (6, 9)$

$B - A = (-\infty, 2]$



## اعمال روی مجموعه‌ها

متمم یک مجموعه و مجموعه‌ی مرجع: به طور کلی در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع یا مجموعه‌ی جهانی می‌نامیم و آن را با  $U$  یا  $M$  نمایش می‌دهیم. به مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اصلی یا عام نیز گفته می‌شود.

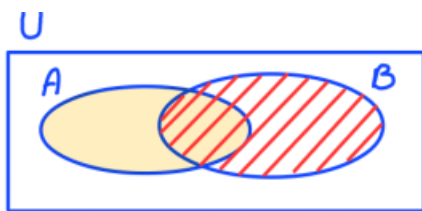
متمم یک مجموعه: اگر  $U$  مجموعه‌ی مرجع و  $A \subseteq U$  زیرمجموعه‌ای از این مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی  $A$  را با  $A'$  یا  $\bar{A}$  (یا  $A^c$ ) نمایش می‌دهیم و شامل اعضای می‌شود که در مجموعه‌ی  $U$  هستند ولی عضو مجموعه‌ی  $A$  نباشند.

مثال: اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی باشد، متمم اعداد زوج را بیابید.

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$E = \{2, 4, 6, 8\} \rightarrow E' = O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

اجتماع دو مجموعه  $A \cup B$ : اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، مجموعه‌ای است شامل اعضای که یا عضو مجموعه  $A$  باشند، یا عضو مجموعه  $B$  باشند و یا عضو هر دو مجموعه باشند.

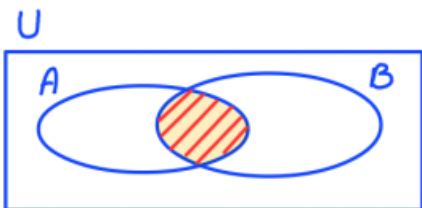


$$U \equiv \text{ماتل (یا)}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه  $A \cap B$ : مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو مجموعه‌ی  $A$  و هم عضو مجموعه‌ی  $B$  باشند.



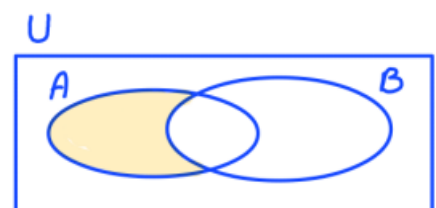
$$\cap \equiv \text{و (هر دو با هم)}$$

تفاضل دو مجموعه  $A - B$ : مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعه‌ی  $A$  باشند ولی عضو مجموعه‌ی  $B$  نباشند.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$$

$$n(A - B) = n(A \cap B')$$

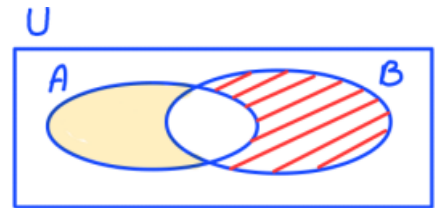


حالتی که از بین مجموعه‌های  $A$  و  $B$  دقیقاً یکی رخ دهد:

$$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

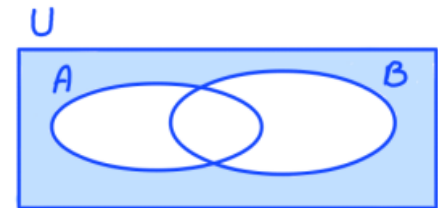
$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$



حالتی که در آن نه  $A$  رخ دهد و نه  $B$ :

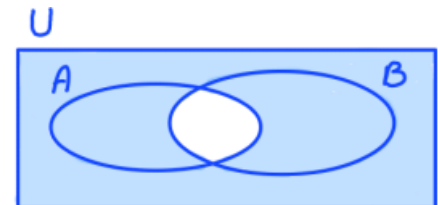
$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

(دموران)

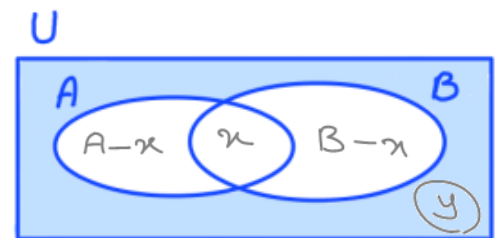
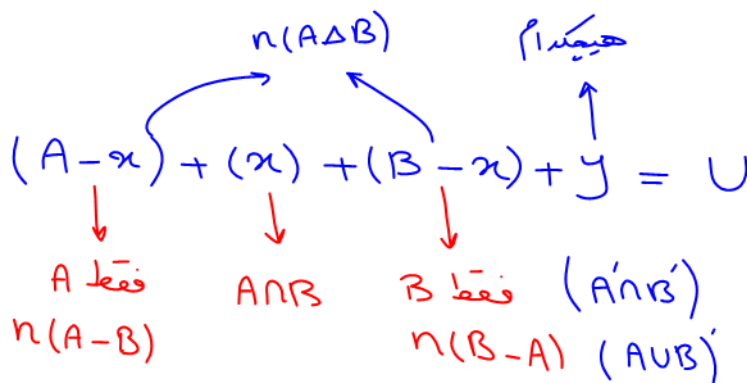


حالتی که در آن از  $A$  و  $B$  حداکثر یکی رخ دهد (هر دو باهم، رخ ندهند):

$$n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$$



روش حل سوالات اعمال روی مجموعه‌ها



مثال: در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

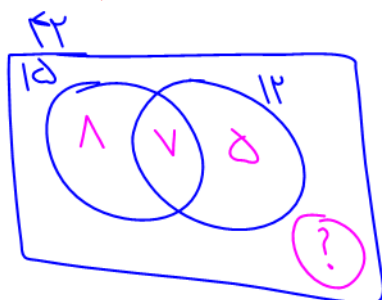
(ریاضی خارج ۹۱)

۲۲ (۴ ✓)

۲۱ (۳)

۱۸ (۲)

۱۵ (۱)



۴۲ = ؟  
نه

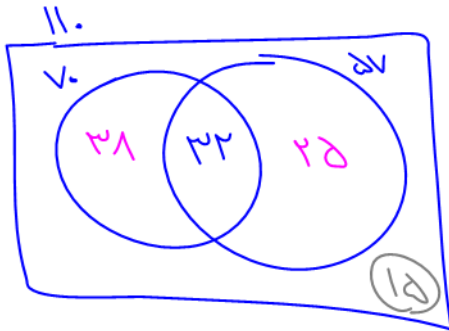
مثال: در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که در یک ماه گذشته ۷۰ نفر آن‌ها از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند؛ همچنین ۳۲ نفر آن‌ها اعلام کردند که از محصولات هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چند نفر از مشتریان دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟  
(قلم‌پی ۱۴۰۲)

۷۸ (۴)

۶۳ (۳)

۱۵ (۲)

۹۵ (۱)



$$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$70 + 25$$

$$(95)$$

مثال: در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟  
(ریاضی ۹۱)

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)



مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ مفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان کلاس عضو هیچ‌یک از این دو گروه نباشند، چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟  
(کتاب درسی)

۹ (۴) ✓

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)



$$(15 - x) + x + (11 - x) + 5 = 25$$

$$31 - x = 25$$

$$x = 6$$

$$15 - x = 9 \text{ جواب}$$



مثال: در یک کلاس ۲۰ نفری، تعداد ۸ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۴ نفر از آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۱۰ نفر از آنان نه عضو گروه سرود باشند و نه عضو گروه تئاتر، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو گروه هستند؟

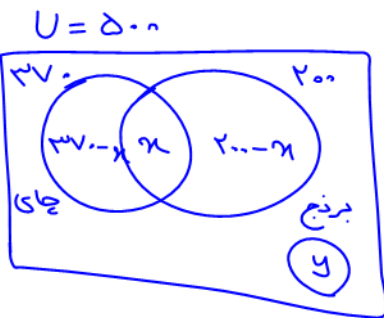
(قلم‌پی ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



مثال: در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه‌ی چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه‌ی چای دارند و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارد. چند کشاورز فقط مزرعه‌ی چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند)

(تبریزی دی ۱۴۰۱)



$$y = 200 - x$$

$$370 - x + x + 200 - x + (200 - x) = 500$$

$$270 = 2x \rightarrow x = 135$$

$$\text{فقط چای} = 370 - x = 235$$

۱۰۰ (۱)

۱۳۵ (۲)

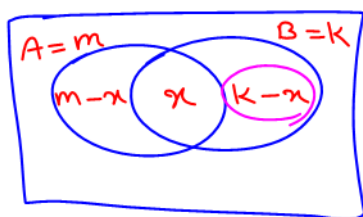
۲۳۵ (۳)

۲۷۰ (۴)

مثال: مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر  $m - k = 14$  و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A \cap B$  برابر ۲۰ باشد، مجموعه  $B - A$  چند عضو دارد؟

(تبریزی خرداد ۱۴۰۲)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = (m - x) + (k - x) = 20 \xrightarrow{-k + k}$$

$$(m - k) + 2k - 2x = 20$$

$$14 + 2(k - x) = 20$$

$$k - x = 3$$

مثال: مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر  $m - k = 5$  و تعداد اعضای مجموعه  $A \cup B$  برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام است؟

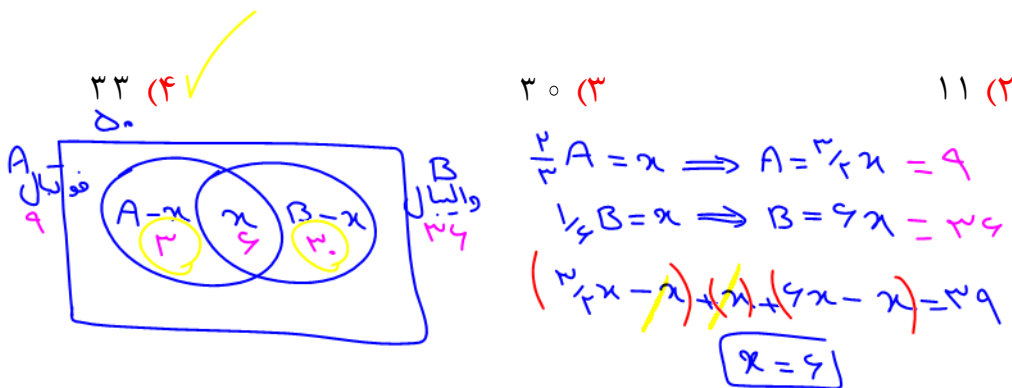
(تبریزی خرداد ۱۴۰۲)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)



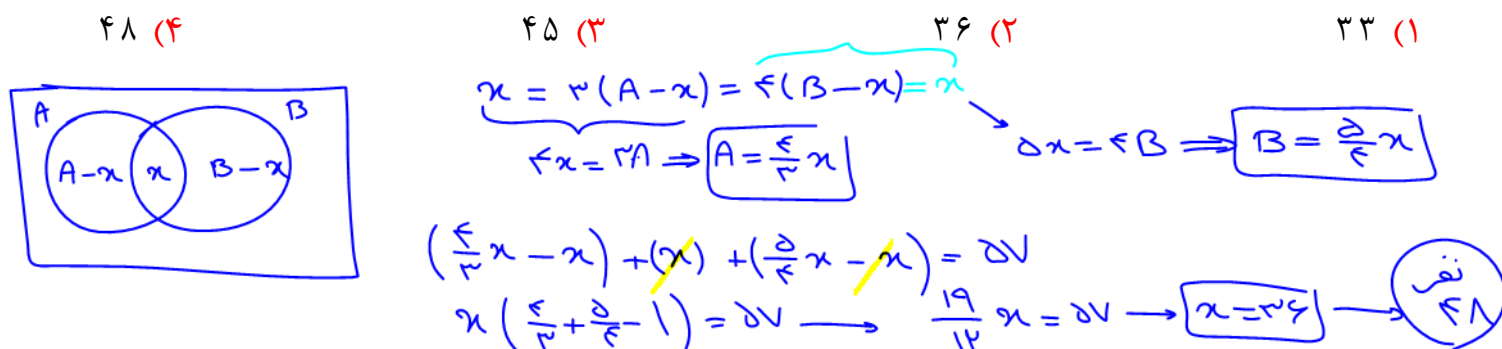


مثال: در یک کلاس ۵۰ نفری، تعداد ۳۹ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه فوتبال یا والیبال هستند.  $\frac{2}{3}$  از افرادی که عضو گروه فوتبال هستند، عضو گروه والیبال هم می‌باشند. از طرف دیگر،  $\frac{1}{6}$  از افرادی که عضو گروه والیبال هستند، عضو گروه فوتبال هم می‌باشند. چه تعداد از افراد این کلاس، فقط عضو یکی از گروه‌ها هستند؟



مثال: اگر  $n(A \cup B) = 57$  و  $n(A \cap B) = 3n(A - B) = 4n(B - A)$  باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)



مثال: در یک مدرسه ۴۵ نفر در رشته‌های والیبال و بسکتبال فعالیت می‌کنند، که از این تعداد ۲۱ نفر فقط والیبال و ۱۷ نفر فقط بسکتبال بازی می‌کنند. اگر به افراد هر رشته ۵ نفر اضافه کنیم، به تعداد افرادی که در هر دو رشته فعالیت می‌کنند، ۲ نفر اضافه می‌شود. پس از این تغییرات تعداد اعضای که در این دو رشته فعالیت می‌کنند، چند نفر است؟

۵۱ (۴) ۵۵ (۳) ۴۸ (۲) ۵۳ (۱)



مثال: اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های  $(A - B)$  و  $(B - A)$  به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

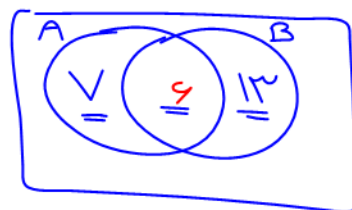
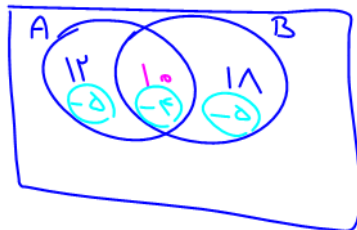
(قلم‌پی ۱۴۰۲)

(۱) ۲۲

(۲) ۲۳

(۳) ۲۴

(۴) ۲۶ ✓



$$7 + 6 + 13 = 26$$

مثال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۰ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۵ نفر عضو تیم والیبال هستند. تعداد افرادی که فقط عضو تیم فوتبال هستند، نصف تعداد افرادی است که فقط عضو تیم والیبال هستند. اگر ۲ نفر از تیم فوتبال و ۵ نفر از تیم والیبال حذف کنیم، از تعداد افرادی که عضو هر دو تیم هستند، فقط ۱ نفر حذف می‌شود. تعداد افرادی که پس از اعمال این تغییرات، فقط عضو یکی از این دو تیم هستند، کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۱۰



مثال: در یک کلاس ۳۱ نفری، ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

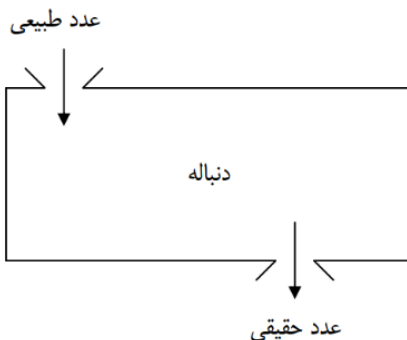
(کتاب درسی)

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.



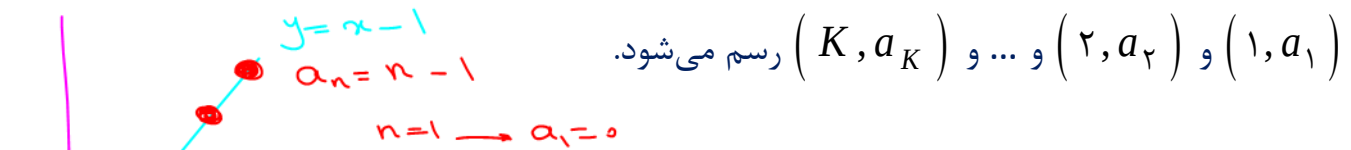
**دنباله:** دنباله تابعی است از اعداد طبیعی به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی. جمله‌ی عمومی هر دنباله را به صورت‌های  $a_n$  و  $\{a_n\}$  نمایش می‌دهیم.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را به ترتیب جملات دنباله می‌نامیم.



نمایش رشته‌ای دنباله: اگر دنباله را با جملات آن نمایش دهیم، نمایش مذکور را نمایش رشته‌ای دنباله می‌نامیم.

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

نمایش دنباله در دستگاه مختصات: دنباله‌ی  $a_n$  در  $N_K$  بر روی دستگاه مختصات به صورت  $K$  نقطه‌ی



دنباله خطی و غیرخطی: هر دنباله که به صورت  $a_n = An + B$  باشد را خطی می‌نامیم و در غیر این صورت دنباله را غیرخطی می‌نامیم.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$a_n = An + B$$

مثال: اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

(تقریبی ۱۴ تیر)

$$\begin{aligned} a_8 = 8 &\Rightarrow \begin{cases} 8A + B = 8 \\ 10A + B = 5 \end{cases} \\ a_{10} = 5 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$8A = -3 \rightarrow$$

$$A = -0.375 \quad B = 11$$

$$a_n = -0.375n + 11$$

$$a_{16} = 1.4$$

$$1/2 \quad (1)$$

$$1/6 \quad (2)$$

$$1/5 \quad (3)$$

$$1/4 \quad (4) \checkmark$$

نکته: الگوهای مهم زیر را به خاطر می‌سپاریم.

$$a_n = n^2 \quad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$$

$$a_n = n^3 \quad 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \dots$$

$$a_n = 2^n \quad 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$$

$$a_n = 3^n \quad 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots$$

$$a_n = 4^n \quad 4, 16, 64, 256, \dots$$

بدون کم داد

$$3, 9, 27, 81, \dots$$

$$3^{n+1}$$

$$a_n = 5^n \quad 5, 25, 125, 625, \dots$$

$$\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

$$3^{n-2}$$

۱/۳ اضافه

$$a_n = 6^n \quad 6, 36, 216, \dots$$

$$a_n = 7^n \quad 7, 49, 343, \dots$$

$$a_n = 8^n \quad 8, 64, 512, \dots$$

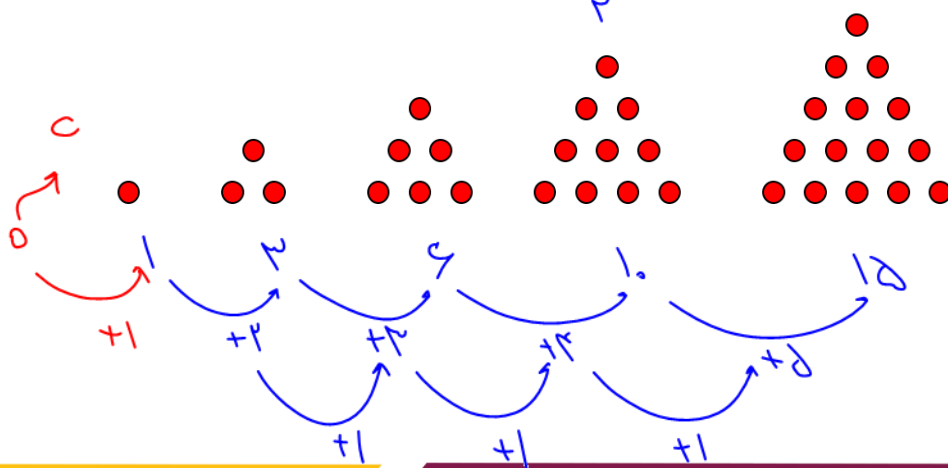
$$a_n = 9^n \quad 9, 81, 729, \dots$$

$$a_n = an^2 + bn + c$$

الگوی درجه دوم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الگوی اعداد مثلثی



$$y = ax^2 + bx + c$$

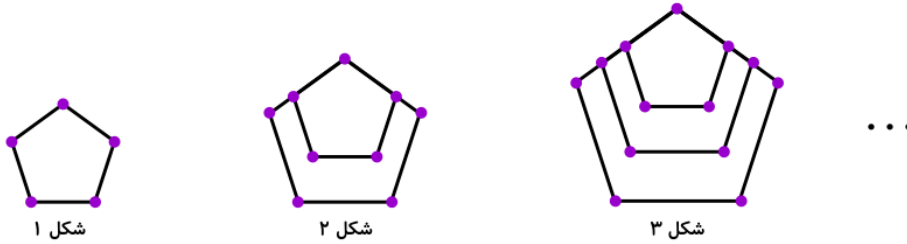
$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a \text{ (عدد)}$$

$$\frac{\text{اختلاف فواصل}}{2} = a$$

(موج آزمون الگو)

مثال: تعداد نقاط شکل دهم از الگوی زیر کدام است؟



- (۱) ۴۰
- (۲) ۴۱
- (۳) ۵۰
- (۴) ۵۱

Handwritten solution for the pentagon sequence:

$$5, 9, 13, \dots$$

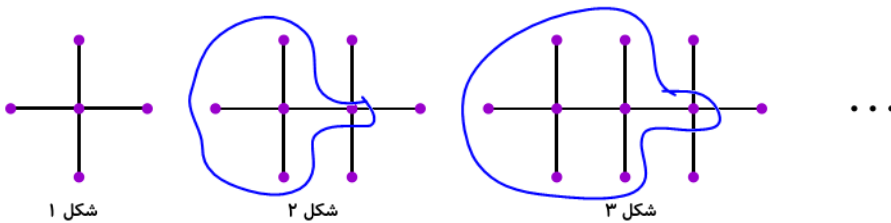
$$+4 \quad +4$$

$$a_n = 4n + 1$$

$$a_{10} = 41$$

(موج آزمون الگو)

مثال: تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چند تا است؟



- (۱) ۶۰
- (۲) ۶۱
- (۳) ۶۲
- (۴) ۶۴

Handwritten solution for the cross sequence:

$$5, 8, 11, \dots$$

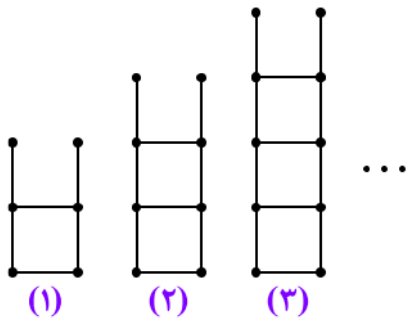
$$+3 \quad +3$$

$$a_n = 3n + 2$$

$$n=20 \rightarrow a_{20} = 62$$

(کتاب درسی)

مثال: با توجه به الگوی مقابل، تعداد پاره‌خط‌ها در کدام مرحله، برابر ۳۳ است؟

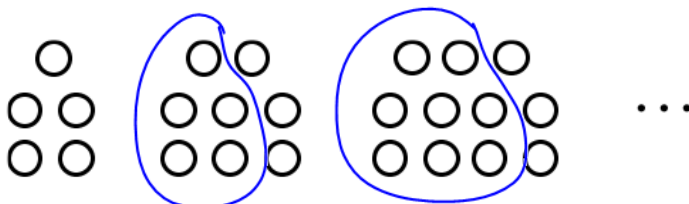


- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۱



(تقریبی فارح ۹۱)

مثال: در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل دوازدهم، کدام است؟



- (۱) ۳۴
- (۲) ۳۶
- (۳) ۳۸
- (۴) ۴۰

Handwritten solution for the triangle sequence:

$$5, 8, 11, \dots$$

$$+3 \quad +3$$

$$a_n = 3n + 2$$

$$a_{12} = 38$$

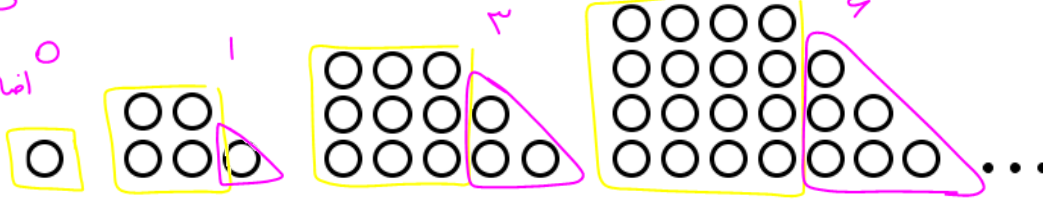


مثال: در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل نهم، کدام است؟

(تقریبی ۹۱)

مثلی: ۱, ۳, ۹, ۱۰, ...

اضافی دارد



(۱) ۱۱۷

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۲۳

(۴) ۱۲۵



$$n=1, a_1=1$$

$$\frac{1}{2}n^2 + b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \text{مثلی} + \text{مربعی} =$$

$$= n^2 + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}, c = 0, a_n = \frac{1}{2}n^2 + bn$$

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n, n=9 \rightarrow 114$$

$$n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{n=9} 114$$

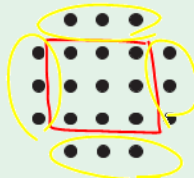
(تقریبی ۱۴۰۲ دی)

مثال: در الگوی هندسی شکل زیر، شکل دهم شامل چند نقطه است؟

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)



(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۳۰

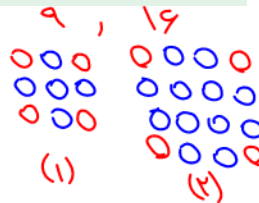
(۳) ۱۴۰

(۴) ۱۵۰

۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ...  $n^2$

$$a_n = n^2 + 4n \Rightarrow n=10$$

$$a_{10} = 140$$

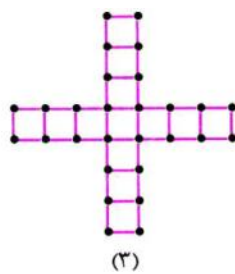
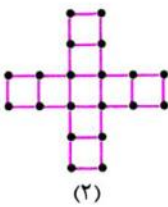
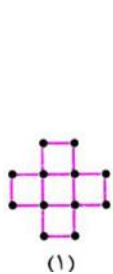


$$(n+2)^2 - 4 = a_n$$

$$n=10 \rightarrow a_{10} = 140$$

(نردبام فیلی سبز)

مثال: در الگوی مقابل، در شکلی که ۵۳ مربع وجود دارد، تعداد رأس‌ها کدام است؟



(۱) ۱۰۲

(۲) ۱۰۴

(۳) ۱۰۶

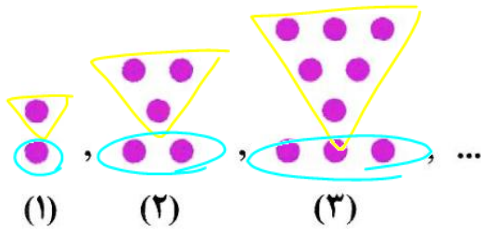
(۴) ۱۰۸

$$a_n = 4n + 1 = 53 \rightarrow 4n = 52 \rightarrow n = 13$$

$$b_n = 4n + 4 \xrightarrow{n=13} b_{13} = 104 + 4 = 108$$



مثال: با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در کدام مرحله برابر با ۲۷ است؟



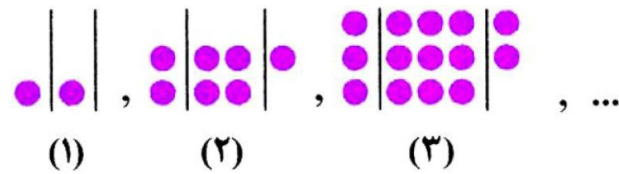
- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + n = 27 \xrightarrow{\times 2}$$

$$n^2 + 3n - 54 = 0 \rightarrow (n+9)(n-6) = 0$$

$\cancel{X}^{n=-9} \quad \textcircled{n=6}$

مثال: با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل دهم چند تا است؟

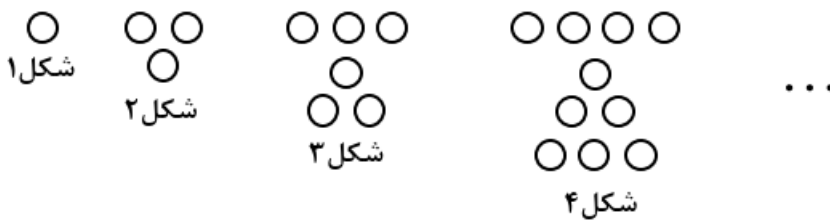


- (۱) ۱۲۱
- (۲) ۱۲۳
- (۳) ۱۱۷
- (۴) ۱۱۹



مثال: با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل دهم چند تا است؟

(آزمون قلم‌پی)

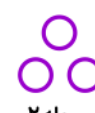


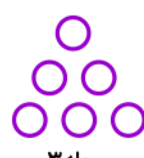
- (۱) ۵۵
- (۲) ۶۵
- (۳) ۴۵
- (۴) ۵۰

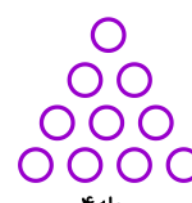


مثال: مطابق الگوی زیر با تعدادی سکه، اشکالی را می‌سازیم. با در اختیار داشتن ۶۶ سکه، شکل مرحله چندم ساخته می‌شود؟  
(آزمون گزینه دو)

  
مرحله ۱

  
مرحله ۲

  
مرحله ۳

  
مرحله ۴

...

(۱) دهم

(۲) یازدهم

(۳) دوازدهم

(۴) نهم

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad a_n = 66 \rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 66 \xrightarrow{\times 2} n(n+1) = 132$$

$n = 11$

مثال: در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با  $\frac{8}{17}$  است؟

  
شکل ۱

  
شکل ۲

  
شکل ۳

  
شکل ۴

...

(۱) ۱۸

(۲) ۱۷

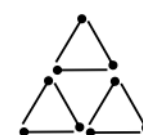
(۳) ۱۶

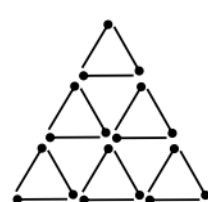
(۴) ۱۵



مثال: مطابق الگوی زیر برای ساخت ۱۰۰ مثلث کوچک، چند چوب کبریت لازم است؟ (آزمون گزینه دو)







...

(۱) ۱۶۵

(۲) ۱۹۸

(۳) ۲۰۰

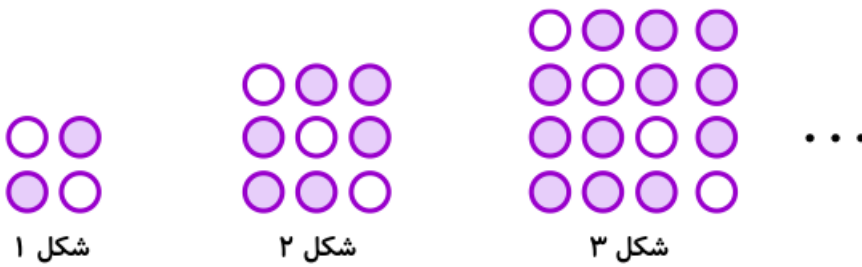
(۴) با این الگو ۱۰۰ مثلث نمی‌توان ساخت.





مثال: تعداد دایره‌های رنگی در شکل  $n$  ام در الگوی زیر کدام است؟

(موج آزمون آکو)



(۱)  $n^2 + 1$

(۲)  $2n^2$

(۳)  $3n^2 - 1$

(۴)  $n^2 + n$



مثال: جمله عمومی یک دنباله خطی به صورت  $t_n = (a+b)n^3 - (3-2a)n^2 + bn + a$  است.

(پیش‌کانون)

اختلاف جملات پنجم و هفدهم چقدر است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۸ ✓

(۲) ۲۴

(۱) ۳۰

$$3-2a=0 \rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$a+b=0 \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$$

$$t_n = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$$

$$a_5 \xrightarrow{+12d} a_{17}$$

$$12 \left(-\frac{3}{2}\right) = -18$$

$$a_8 - a_{17} = -18$$

$$a_{17} - a_8 = +18$$

مثال: اگر جمله عمومی یک دنباله به صورت  $t_n = an^2 + bn$  و جمله دوم و پنجم آن به ترتیب ۲ و ۲۵ - باشند، جمله هفتم این دنباله کدام است؟

۲۵ - باشند، جمله هفتم این دنباله کدام است؟

(۴) ۱۳۳

(۳) ۶۳

(۲) ۱۳۳ -

(۱) ۶۳ -

$$\begin{cases} a_2=2 \\ a_5=-25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \\ 25a+5b=-25 \end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases} 4a+2b=2 \\ 5a+b=-5 \end{cases}$$

$$3a=-6$$

$$a=-2$$

$$b=5$$

$$\Rightarrow a_n = -2n^2 + 5n$$

$$n=7 \rightarrow a_7 = -63$$

مثال: اعداد ۱۴ و  $17/2$  به ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر ضریب بزرگترین درجه جمله عمومی، برابر  $\frac{1}{7}$  قرینه جمله پنجم باشد، جمله پانزدهم چند برابر جمله اول

(تجربی فارغ ۱۴۰۱)

است؟

۵ (۴✓)

۴/۶ (۳)

۲/۴ (۲)

۲ (۱)

$$a_n = an^2 + bn + c = \frac{1}{5}n^2 + bn + c$$



$$a = \frac{1}{7}(-14) = -\frac{2}{1} = -\frac{1}{5}$$

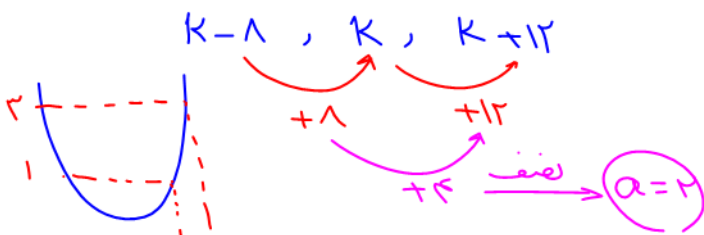
مثال: سه جمله متوالی الگوی درجه دوم  $t_n = an^2 + bn + 6$  به صورت  $k-8$ ,  $k$ ,  $k+12$  است. اگر جمله پنجم الگو برابر ۲۱ باشد، در کدام جمله، مقدار دنباله برابر شماره آن جمله است؟ (نردبام فیلی سبز)

۱ (۱✓) سوم

۲ (۲) چهارم

۳ (۳) دوم

۴ (۴) پنجم



$$t_n = 2n^2 + bn + 6$$

$$t_5 = 21 \Rightarrow 50 + 5b + 6 = 21$$

$$b = -7 \rightarrow t_n = 2n^2 - 7n + 6$$

$$2n^2 - 7n + 6 = 0 \rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \rightarrow n=1, n=3$$



مثال: مجموع بزرگترین جمله مثبت در دنباله طبیعی درجه ۲ با ضابطه  $a_n = -6n^2 + 51n + 17$ ، با

چهلمین جمله از یک دنباله خطی که شیب و عرض از مبدأ نمودار آن به ترتیب برابر کمترین و بیشترین

(سنش ۱۴۰۲)

مقدار عبارت  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(2\sin\frac{x}{2} - 3\right)}$  است، در کدام گزینه آمده است؟

۱۴۰۴ (۴)

۱۴۰۷ (۳)

۲۳۷ (۲)

۲۳۴ (۱)



دنباله فیبوناچی:  $a_1 = a_2 = 1$   $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$   $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

مثال: در دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = 3a_n + k$  اگر  $p-1, p-1, 3p-1$  و  $4p+8$  سه جمله متوالی دنباله باشند، حاصل  $p+k$  کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

$$\begin{cases} 3(p-1) + k = 3p-1 \rightarrow k=2 \\ 3(3p-1) + k = 4p+8 \rightarrow p=5 \end{cases} \rightarrow p+k=7$$



بازگشت بازگشت

$$a_1, \dots, a_6, a_7, a_8$$

بعی = ۱ + ۲ (فعلی)

مثال: در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله کدام است؟

(تقریبی ۹۵)

۲۵۵ (۴) ✓

۲۴۷ (۳)

۱۵۹ (۲)

۱۲۷ (۱)

$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \dots$

مثال: در یک دنباله اعداد  $t_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $t_n = 2t_{n-1} - 2$ ، حاصل  $t_8 - t_7$  کدام است؟

(تقریبی خارج ۹۵)

۶۴ (۴)

۵۶ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)

مثال: فرض کنید جمله  $n$ ام دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$  با شرط  $a_1 = 1$  برابر  $\frac{k}{m}$  باشد. جمله

(ریاضی ۱۴۰۰)

نود و هشتم دنباله کدام است؟

$$\frac{2m-k}{k-m} \quad (۴)$$

$$\frac{k-m}{k-2m} \quad (۳)$$

$$\frac{k-2m}{k-m} \quad (۲)$$

$$\frac{k-m}{2m-k} \quad (۱) \checkmark$$



$$(a_{n+1} - 1) = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$n=99 \Rightarrow a_{99} = \frac{1}{a_{100} - 1} = \frac{1}{\frac{k}{m} - 1} = \frac{m}{k-m}$$

$$n=98 \Rightarrow a_{98} = \frac{1}{a_{99} - 1}$$

$$a_{98} = \frac{1}{\frac{m}{k-m} - 1} = \frac{1}{\frac{2m-k}{k-m}} = \frac{k-m}{2m-k}$$

مثال: دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$  با شرط  $a_1 = -1$  را در نظر بگیرید. حاصل ضرب صد جمله

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

اول دنباله کدام است؟

$$197 \quad (۴)$$

$$-197 \quad (۳)$$

$$-199 \quad (۲)$$

$$-201 \quad (۱)$$

مثال: در دنباله  $a_n = \begin{cases} n^2 - n & n \leq 10 \\ 2n + 1 & n > 10 \end{cases}$  حاصل  $a_9 + a_{11}$  کدام است؟

$$94 \quad (۴)$$

$$95 \quad (۳)$$

$$96 \quad (۲)$$

$$97 \quad (۱)$$



مثال: جمله عمومی دنباله  $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$  کدام است؟

$$\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1} \quad (4)$$

$$\frac{(-1)^n n}{n^2+1} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{(-1)^n}{n^3+1} \quad (2)$$

$$\frac{-n}{n^2+1} \quad (1)$$



$(-1)^n$  یا  $\cos(n\pi)$ :  $-, +, -, +, \dots$

$(-1)^{n+1}$  یا  $\cos(n+1)\pi$ :  $+, -, +, -, \dots$

مثال: جمله  $\frac{2n+1}{n^2+3}$  ام یک دنبال بر حسب  $n$  به صورت  $\frac{2n+1}{n^2+3}$  است. جمله  $n$  ام این دنباله کدام است؟

$$n = \frac{a-1}{2}$$

$$\frac{4n-8}{n^2-2n-13} \quad (4)$$

$$\frac{4n}{n^2-2n+13} \quad (3)$$

$$\frac{4n}{n^2+2n+13} \quad (2)$$

$$\frac{4n+8}{n^2+2n+13} \quad (1)$$

$$a_{2n+1} = \frac{2n+1}{n^2+3} \xrightarrow{n=0} a_1 \checkmark$$

$$a_1 = ? = \frac{1}{3} \quad f(a) = \frac{2\left(\frac{a-1}{2}\right)+1}{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+3}$$

$n=1$

$$1) \frac{12}{19} = \frac{2}{2}$$

$$2) \frac{4}{19} = \frac{1}{4}$$

$$3) \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$4) \frac{-4}{-14} = \frac{2}{7}$$

مثال: چندمین جمله از دنباله  $t_n = \frac{2^{n^2-9n-10}-1}{n+7}$  برابر صفر است؟

(4) فاقد جمله صفر

(3) 10

(2) 9

(1) 1



مثال: اگر  $a_n = \frac{n}{n^2 + 5}$  و  $b_n = \frac{1}{n+1}$ ، دو دنباله باشند، چندمین جمله این دو دنباله با هم برابر می‌شوند؟

(۱) سوم

(۲) چهارم

(۳) پنجم

(۴) ششم



مثال: دنباله  $a_n = \begin{cases} n^2 + n - 2 & n < 5 \\ \cos\left(\frac{5\pi}{n}\right) & n \geq 5 \end{cases}$  چند جمله منفی دارد؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

مثال: دنباله  $t_n = \frac{12}{2n-1}$ ، چند جمله صحیح دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



مثال: دنباله  $t_n = \frac{4n + 12}{n + 1}$  چند جمله صحیح دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مثال: مجموع  $100$  جمله اول دنباله  $a_n = \left[ \frac{-4}{n} \right]$  کدام است؟ (  $a_n$  نماد جزء صحیح است.)

- ۱۰۶ (۴)

- ۱۰۴ (۳)

- ۱۰۵ (۲)

- ۱۰۰ (۱)



مثال: مجموع  $99$  جمله اول دنباله  $t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



مثال: دنباله  $a_n = \begin{cases} 2^k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ \left[ \frac{n}{k+4} \right] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$  به ازای اعداد حسابی  $n$  مفروض است. اگر

مجموع  $10$  جمله اول این دنباله  $19$  باشد، میانگین جملات بیست و نهم و سی‌ام دنباله، کدام است؟  
(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

(۱)  $\frac{-43}{6}$

(۲)  $-7$

(۳)  $505$

(۴)  $1024$



مثال: دنباله  $a_n = \begin{cases} 2^k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ \left[ \frac{n}{k+2} \right] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$  به ازای اعداد حسابی  $n$  مفروض است.

اگر مجموع  $10$  جمله اول این دنباله  $19$  باشد، حاصل عبارت  $a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29}$  کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۰)

(۱)  $-2$

(۲) صفر

(۳)  $2$

(۴)  $1$



**تصادد حسابی:** دنباله‌ای که تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی آن عددی ثابت باشد را دنباله‌ی حسابی گویند و این عدد ثابت را قدرنسبت نامیده و با  $d$  نمایش می‌دهند.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & , & a_1 + d & , & a_1 + 2d & , & \dots & , & (a_1 + (n-1)d) & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{جمله‌ی اول } (a_1) & & \text{جمله‌ی دوم } (a_2) & & \text{جمله‌ی سوم } (a_3) & & & & \text{جمله‌ی } n\text{ام } (a_n) & & \end{array}$$

نکته: اگر  $x, y, z$  سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی باشد، داریم:  $2y = x + z$

مثال: اعداد  $1-p, 3p+4, 3p+2$ ، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی عددی هستند. قدرنسبت این دنباله را کدام است؟

(ریاضی ۱۴)

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

**نکته:** سه جمله‌ی متوالی در تصاعد عددی را به صورت  $a-d, a, a+d$  فرض می‌کنیم.

مثال: اگر مجموع سه عدد که تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند ۲۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۸۴ باشد، آن سه عدد را بیابید.

**نکته:** در هر تصاعد عددی داریم:  $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d \Rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$

مثال: در یک تصاعد عددی جمله‌ی هفتم ۲۷ و جمله‌ی سوم ۱۱ می‌باشد. قدرنسبت این دنباله را بیابید.



مثال: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات نهم، سیزدهم و بیستم برابر ۷۸ است. جمله‌ی چهاردهم این دنباله را به دست آورید.



نکته: در هر تصاعد عددی داریم:  $m, n \in \mathbb{N}, m > n, \begin{cases} a_m = n \\ a_n = m \end{cases} \Rightarrow d = -1, a_{m+n} = 0$

مثال: اگر جمله‌ی پانزدهم یک تصاعد عددی برابر  $2^0$  و جمله‌ی بیستم آن برابر با ۱۵ باشد، قدرنسبت دنباله و جمله‌ی ۳۵ام آن را بدست آورید.



نکته (قاعده اول اندیس): در هر تصاعد عددی داریم:

$$p, n \in \mathbb{N}, n > p, \Rightarrow \forall a_n = a_{n+p} + a_{n-p}$$

مثال: در یک تصاعد عددی، جمله‌ی اول دو برابر جمله‌ی بیستم است. جمله‌ی سی و نهم این تصاعد چند است؟



نکته (قاعده دوم اندیس): در هر تصاعد عددی داریم:

$$m, n, p, k \in \mathbb{N}, m + n = p + k, \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_k$$

مثال: در یک تصاعد عددی، مجموع دو جمله‌ی نهم و بیست و نهم مساوی  $10^0$  است. اگر جمله‌ی پانزدهم ۳۲ باشد، جمله‌ی بیست و سوم این تصاعد چند است؟



نکته: مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک تصاعد عددی را  $S_n$  می‌نامیم.

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) , \quad S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n-1)d ]$$

مثال: در یک تصاعد عددی داریم  $a_7 + a_{14} = 100$ ، مجموع بیست جمله‌ی اول این تصاعد چند است؟



(ریاضی ۹۱)

مثال: مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷، کدام است؟

(۱) ۷۲۱

(۲) ۷۲۸

(۳) ۷۳۵

(۴) ۷۴۲

نکته: در هر تصاعد عددی داریم:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثال: در یک تصاعد عددی داریم:  $S_n = n(2n + 5)$ . جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مورد نظر  $(a_n)$  را بیابید.

مثال: در یک تصاعد عددی داریم:  $a_n = 5n - 2$ . مجموع  $n$  جمله‌ی اول این دنباله  $(S_n)$  را بیابید.



نکته: در هر تصاعد عددی داریم:  $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$

مثال: مجموع چهار جمله‌ی اول یک تصاعد عددی با مجموع شش جمله‌ی اول همان تصاعد برابر است. مجموع ده جمله‌ی اول این تصاعد عددی را بیابید.



نکته: اگر در یک تصاعد عددی، تعداد جمله‌ها فرد و جمله‌ی وسط  $(k)$  باشد، داریم:  $2k = a_1 + a_n$

نکته: اگر در یک تصاعد عددی، تعداد جمله‌ها فرد و جمله‌ی وسط  $(k)$  باشد، داریم:  $S_n = n \cdot k$

مثال: زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب، تشکیل تصاعد عددی می‌دهند. جمله‌ی سوم یا زاویه‌ی وسطی چند درجه است؟



نکته: اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  واسطه عددی درج کنیم، خواهیم داشت:  $d = \frac{b-a}{n+1}$

مثال: اگر بین دو عدد  $10$  و  $14$ ،  $399$  واسطه‌ی عددی درج کنیم، جمله‌ی  $299$  ام این تصاعد چند است؟

نکته: اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  واسطه عددی درج کنیم، خواهیم داشت:  $S_n = \frac{n}{2}(a+b)$

مثال: اگر بین دو عدد ۸ و ۲۲، ۲۰۰ واسطه عددی درج کنیم، مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟



توجه: در جمله‌ی عمومی یعنی در  $a_n$ ، ضریب  $(n)$  برابر  $(d)$  است زیرا  $a_n = a_1 + (n-1)d$  و در

عبارت  $S_n$ ، ضریب  $(n^2)$  برابر  $(\frac{d}{2})$  است، زیرا:  $S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n-1)d ]$ .

مثال: در یک تصاعد عددی  $S_n = 2n(3n-1)$ ، آن‌گاه حاصل  $(a_{n+5} - a_{n-5})$  چقدر است؟

نکته: اگر دو تصاعد عددی با قدرنسبت‌های  $d_1, d_2$  داشته باشیم، چنانچه بین آن‌ها جمله‌های مشترکی وجود داشته باشد، این جمله‌های مشترک تصاعد عددی جدیدی می‌سازند که قدرنسبت آن، کوچکترین مضرب مشترک  $d_1, d_2$  است.

مثال: در دو دنباله‌ی حسابی به صورت‌های  $2, 7, 12, \dots$  و  $8, 11, 14, \dots$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟  
(ریاضی فارغ ۹۴)

(۱) ۵۸

(۲) ۵۹

(۳) ۶۰

(۴) ۶۱

مثال: اگر هزینه ثابت ماهانه یک سیم کارت ۳۰۰۰ تومان و هزینه هر ۲ دقیقه مکالمه ۴۰ تومان باشد، هزینه ۵ ساعت مکالمه چقدر است؟

(کتاب درسی)

(۱) ۷۴۲۰

(۲) ۹۴۲۰

(۳) ۸۹۸۰

(۴) ۹۰۰۰

مثال: دنباله حسابی ...، ۱۶، ۱۰، ۴، چند جمله کوچکتر از ۱۲۰ دارد؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۲۰

(۴) ۲۱

جمله بیستم چقدر است؟

جمله چندم برابر با ۱۴۸ است؟



مثال: چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که باقیمانده تقسیم آنها بر ۱۱ برابر با ۴ باشد؟

(۱) ۸۰

(۲) ۸۱

(۳) ۸۲

(۴) ۸۳

مثال: جملات پنجم، نهم و سیزدهم دنباله حسابی ...، ۱۱، ۷، ۳، تشکیل یک دنباله حسابی جدید می‌دهند. در دنباله جدید، جمله دهم کدام است؟

(۱) ۱۴۳

(۲) ۱۵۳

(۳) ۱۶۳

(۴) ۱۷۳



مثال: در دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n = 4n - 3$ ، جملات با شماره‌های فرد را کنار هم می‌گذاریم. دنباله حاصل چگونه است؟

- (۱) دنباله حسابی با قدرنسبت ۶. (۲) دنباله هندسی با قدرنسبت ۴.  
(۳) دنباله حسابی با قدرنسبت ۸. (۴) دنباله هندسی با قدرنسبت ۶.

مثال: در دنباله حسابی  $\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 1, \frac{13}{4}$ ، جمله دوم را با ۳ و جمله سوم را با  $\frac{11}{4}$  و ... جمع می‌کنیم. جمله پنجاه و یکم دنباله جدید چند است؟

- (۱)  $27\frac{1}{4}$  (۲)  $28\frac{1}{4}$  (۳)  $29\frac{1}{4}$  (۴)  $30\frac{1}{4}$



مثال: اگر در یک دنباله حسابی به جمله اول، ۴ واحد و به قدرنسبت آن، ۵ واحد اضافه کنیم، جمله هشتم دنباله نسبت به قبل چقدر افزایش می‌یابد؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۳۸ (۳) ۳۹ (۴) ۴۰



مثال: از اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدیدی ساخته می‌شود. اختلاف جمله  $n$  ام دو دنباله کدام است؟

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴) ۶



مثال: سه زاویه مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌های این مثلث کدام است؟  
(موج آزمون الگو)

(۱)  $45^\circ$

(۲)  $60^\circ$

(۳)  $75^\circ$

(۴)  $90^\circ$



مثال: اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای با مساحت ۲۴ تشکیل دنباله حسابی دهند، ارتفاع وارد بر وتر این مثلث کدام است؟  
(قلم‌پی ۱۴۰۱)

(۱)  $4/2$

(۲)  $4/5$

(۳)  $4/6$

(۴)  $4/8$



مثال: در دنباله حسابی  $z, 48, y, x, 8$ ، حاصل  $\frac{x}{y}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{8}{13}$

(۲)  $\frac{13}{8}$

(۳)  $\frac{8}{15}$

(۴)  $\frac{15}{8}$

جمله اول ۸ و جمله چهارم ۴۸ است؟





مثال: بین دو عدد ۱۹ و ۸۹، چهار عدد قرار می‌دهیم تا یک دنباله حسابی ایجاد شود. بزرگ‌ترین عددی که بین ۱۹ و ۸۹ قرار داده‌ایم، کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۷۰ (۲)

۶۵ (۱)

اگر قدرنسبت منفی باشد چگونه؟

مثال: بین دو عدد ۱ و ۶۴، تعداد  $n$  واسطه حسابی درج کرده‌ایم. اگر قدرنسبت این دنباله حسابی برابر  $\frac{3}{5}$  باشد،  $n$  کدام است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۱۷ (۲)

۷ (۱)



مثال: اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

(تقریبی ۱۴۰)

۱/۴ (۴)

۲/۴ (۳)

۹/۶ (۲)

۱۱/۶ (۱)



مثال: جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنباله حسابی است؟  
(تجربی دی ۱۴۰۱)

(۱)  $\frac{6}{5}$

(۲)  $\frac{8}{5}$

(۳) ۳

(۴) ۴



مثال: تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی، ۵ و مجموع دو جمله دهم و دوازدهم، ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟

(۱) ۳۵

(۲) ۳۶

(۳) ۳۷/۵

(۴) ۳۸/۵



مثال: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $t_n$ ، رابطه  $t_{19}^2 - t_{13}^2 = 128d$  برقرار است. مجموع جملات پانزدهم و هفدهم کدام است؟

(۱)  $\frac{32}{3}$

(۲)  $\frac{64}{3}$

(۳)  $\frac{128}{3}$

(۴)  $\frac{256}{3}$



مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول برابر ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. جمله دهم این دنباله کدام است؟  
(کتاب درسی)

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۴

مثال: مجموع ۵ جمله متوالی یک دنباله حسابی برابر  $18^\circ$  است. جمله وسط این ۵ جمله کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

مثال: زوایای یک پنج ضلعی، تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. اگر بزرگ ترین زاویه آن،  $148^\circ$  باشد، اندازه دومین زاویه آن به لحاظ بزرگی، کدام است؟

- (۱) ۷۸ (۲) ۸۸ (۳) ۹۸ (۴) ۱۰۸



مثال: در یک دنباله حسابی، داریم  $t_1 + t_4 + t_7 + t_{12} = 16^\circ$ . جمله ششم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۳۸ (۲) ۳۹ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱



مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع جمله ششم و ۲ برابر جمله نهم برابر  $9^\circ$  است. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲)  $2^\circ$

(۳) ۲۵

(۴)  $3^\circ$



مثال: در یک دنباله حسابی، بین جملات اول، دوم و سوم، رابطه  $9a_1 + 5a_2 - 9a_3 = 1^\circ$  برقرار است، حاصل عبارت  $9a_1 - 5a_2 - 4a_3$  کدام است؟

(۱)  $-1^\circ$

(۲)  $1^\circ$

(۳) صفر

(۴)  $\frac{1}{1^\circ}$



مثال: در یک دنباله حسابی، بین جملات رابطه  $2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8$  برقرار است. حاصل عبارت  $10a_1 - 6a_2 - 4a_3$  کدام است؟

(۱)  $-8$

(۲)  $-16$

(۳) ۸

(۴) ۱۶



مثال: در یک دنباله حسابی  $t_1 + t_5 + t_9 = 18$  است. اگر  $t_2 + t_m = 12$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۴



مثال: در دنباله حسابی  $\dots, 5p - 1, 3p + 4, 2p + 3$ ، جمله دهم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۶۸ (۲) ۷۵ (۳) ۷۸ (۴) ۸۸



مثال: مقادیر  $a$ ،  $1 + 2a$  و  $5 - a$  به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر  $a$  جمله

نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- (۱) ۲/۷۵ (۲) ۴/۲۵ (۳) ۱۲/۲۵ (۴) ۱۴/۷۵

مثال: اعداد  $5x + 7y$ ،  $6x - 1$ ،  $3x + y$ ،  $2x$  جملات متوالی یک دنباله حسابی اند. حاصل عبارت

$|x - y|$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) صفر



مثال:  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - mx + 2 = 0$  هستند و اعداد  $x_1 + x_2$ ،  $x_1 x_2$ ،  $x_1$  تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹

مثال: در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازه زاویه بین دو ساق مثلث، کمتر از  $60^\circ$  است. اگر اندازه‌های نصف ضلع کوچک‌تر، ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر و ساق مثلث، تشکیل یک دنباله حسابی دهند، اندازه ضلع کوچک‌تر، چند برابر قدرنسبت دنباله است؟

(ریاضی مجید ۱۴۰۱)

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲



مثال: در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$  و قدرنسبت  $d$ ، تساوی  $6a_2^2 = 5a_3 a + 3a_2 a$  برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به  $d$ ، کدام می‌تواند باشد؟

(تبریزی ۱۴۰۲)

- (۱) ۱ (۲)  $1/5$  (۳)  $3/5$  (۴) ۴



مثال: در یک دنباله حسابی صعودی، مجموع سه جمله اول آن برابر ۳۹ و مجموع مربعات این سه جمله ۵۷۹ است. حاصل ضرب این سه جمله کدام است؟

- (۱) ۱۷۲۹ (۲) ۱۸۵۹ (۳) ۱۴۴۹ (۴) ۱۶۸۹



مثال: در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۲ و مجموع ۶ جمله اول، برابر  $\frac{1}{5}$  مجموع شش جمله بعدی است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۳



مثال: در یک دنباله خطی با جمله عمومی  $t_n$ ، می‌دانیم  $t_3 = 8$  و  $t_6$  و جمله هفتم، سه واحد بیشتر از نصف جمله دوم است. جمله بیست و سوم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶



مسائل معروف دسته‌بندی در دنباله حسابی

مثال: اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که در هر دسته، کوچک‌ترین عضو  $\frac{1}{3}$  بزرگ‌ترین عضو

دسته است. میانگین اعضای دسته پنجم، کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۳)

(۱) ۲۴۰

(۲) ۲۴۰/۵

(۳) ۲۴۲

(۴) ۲۴۲/۵

مثال: اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی  $\dots$ ،  $\{2, 3, 4\}$ ،  $\{1\}$ . در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

(۱) ۷۱

(۲) ۷۲

(۳) ۷۳

(۴) ۷۴

(تجربی ۹۹، مشابه ریاضی ۱۴)

مثال: اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی  $\dots$ ،  $\{5, 6, 7, 8\}$ ،  $\{3, 4\}$ ،  $\{1, 2\}$ ، میانه عضوهای دسته

سیزدهم، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

(۱) ۶۱۴۴/۵

(۲) ۶۱۴۵/۵

(۳) ۱۲۲۸۹/۵

(۴) ۱۲۲۸۸/۵





مثال: اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی  $\dots$ ،  $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ،  $\{4, 5, 6\}$ ،  $\{2, 3\}$ ،  $\{1\}$ ، میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱)  $2304/5$  (۲)  $3072/5$  (۳)  $4608/5$  (۴)  $6144/5$



مثال: اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی  $\dots$ ،  $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ،  $\{4, 5, 6\}$ ،  $\{2, 3\}$ ،  $\{1\}$ . میانه عضوهای دسته چهاردهم کدام است؟ (ریاضی مهر ۱۴۰۱)

- (۱)  $4608/5$  (۲)  $9216/5$  (۳)  $14806/5$  (۴)  $18432/5$



مثال: اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی می‌شوند که در هر دسته، بزرگ‌ترین شمارنده مشترک بزرگ‌ترین عضو دسته و عضو دیگری از دسته برابر ۳ است. اختلاف میانه و میانگین دسته ششم کدام است؟ (تجربی فارغ ۱۴۰۳)

- (۱)  $0/5$  (۲)  $0/75$  (۳) ۱ (۴) صفر



مثال: اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد؛ یعنی ... ،  $\{4, 5, 6\}$  ،  $\{2, 3\}$  ،  $\{1\}$  . مجموع اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟  
(ریاضی ۹۹، مشابه تهرانی خارج ۹۹)

(۱) ۴۱۲۰

(۲) ۴۰۲۰

(۳) ۴۰۱۰

(۴) ۳۹۸۰



مثال: اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد؛ یعنی ... ،  $\{7, 9, 11\}$  ،  $\{3, 5\}$  ،  $\{1\}$  ، در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟  
(ریاضی خارج ۹۹، مشابه ریاضی ۹۱ و تهرانی ۱۴)

(۱) ۱۵۶۳

(۲) ۱۵۸۹

(۳) ۱۶۳۹

(۴) ۱۶۵۱



مثال: اعداد طبیعی زوج را از کوچک به بزرگ، به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته باشد. واسطه هندسی مثبت هشتمین جمله دسته شانزدهم و نهمین جمله دسته هجدهم کدام است؟  
(قلم‌پی ۱۴۰۱)

(۱) ۲۵۶

(۲) ۲۷۲

(۳) ۲۸۸

(۴) ۳۲۴



**تصادد هندسی:** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن از جمله‌ی اول به بعد برابر است با: جمله‌ی قبل ضربدر عدد ثابت. این عدد ثابت را قدرنسبت تصاعد هندسی گوئیم و آن را با  $q$  نمایش می‌دهند.

مثلاً دنباله‌ی  $3, 6, 12, 24, 48, \dots$  را در نظر می‌گیریم. این دنباله را یک تصاعد هندسی گوئیم که در آن جمله‌ی اول دنباله برابر ۳ و قدرنسبت آن برابر ۲ می‌باشد.

در حالت کلی دنباله‌ی تصاعد هندسی را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & , & a_1 q & , & a_1 q^2 & , & \dots & , & a_1 q^{n-1} & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{جمله‌ی اول } (a_1) & & \text{جمله‌ی دوم } (a_2) & & \text{جمله‌ی سوم } (a_3) & & & & \text{جمله‌ی } n\text{ام } (a_n) & & \end{array}$$

با مقایسه فرمول‌های تصاعدهای عددی و هندسی در می‌یابیم که :

$$a_n = a_1 + (n-1)d \longrightarrow a_2 - a_1 = d$$

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \longrightarrow \frac{a_2}{a_1} = q$$

(۱) علامت + در تصاعد عددی به صورت علامت  $\times$  در تصاعد هندسی ظاهر می‌شود.

(۲) ضریب قدرنسبت در تصاعد عددی، به صورت توان قدرنسبت در تصاعد هندسی ظاهر می‌شود.

(۳) علامت - در تصاعد عددی به علامت  $\div$  در تصاعد هندسی تبدیل می‌شود.

به طور کلی برای یادگیری فرمول‌های تصاعد هندسی از روی تصاعد عددی، جدول زیر را به خاطر می‌سپاریم.

|            |                   |             |
|------------|-------------------|-------------|
| تصادد عددی | $\longrightarrow$ | تصادد هندسی |
| +          | $\longrightarrow$ | $\times$    |
| ضریب       | $\longrightarrow$ | توان        |
| -          | $\longrightarrow$ | $\div$      |

$$y^z = x \times z$$

**نکته:** اگر  $x, y, z$  سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشد، داریم:

$$7, t, 63, \dots$$

مثال: در دنباله‌ی هندسی زیر مقدار  $t$  را بیابید.

مثال: بین دو عدد  $2^5 \times 3^9$  و  $2^3 \times 3^7$  عددی قرار دهید که دنباله‌ی هندسی تشکیل شود.

نکته: جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی  $n$  ام:  $a_n = a_1 \times q^{n-1}$

مثال: در تصاعد هندسی  $\dots, \sqrt{2}, 2$ ، جمله‌ی نهم را بیابید.



نکته: در هر تصاعد هندسی داریم:  $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی پنجم ۱۶۲ و جمله‌ی دوم ۶ می‌باشد. قدرنسبت این دنباله را محاسبه نمایید.



مثال: در دنباله‌ی  $\dots, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$  چندمین جمله برابر  $\frac{1}{128}$  است؟

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی  $a_5 \times a_7 = 2a_6$  و جمله‌ی پنجم برابر  $\frac{81}{8}$  است. قدرنسبت دنباله را بیابید.



نکته (قاعده اول اندیس): در هر تصاعد هندسی داریم:

$$p, n \in \mathbb{N}, n > p, \Rightarrow (a_n)^2 = a_{n+p} \times a_{n-p}$$

مثال: در یک تصاعد هندسی، حاصلضرب دو جمله‌ی هفتم و هفدهم  $4\sqrt{2}$  است. جمله‌ی دوازدهم را بیابید.



نکته (قاعده‌ی دوم اندیس): در هر تصاعد هندسی داریم:

$$m, n, p, k \in \mathbb{N}, m + n = p + k \Rightarrow a_m \times a_n = a_p \times a_k$$

مثال: حاصلضرب دو جمله‌ی پنجم و بیست و پنجم در یک تصاعد هندسی،  $4\sqrt{2}$  است. اگر جمله‌ی هفدهم این تصاعد  $\sqrt[4]{2}$  باشد، جمله‌ی سیزدهم این تصاعد چقدر است؟



نکته: حاصلضرب  $n$  جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی را  $P_n$  می‌نامیم.

$$P_n = \left| a_1 \times a_n \right|^{\frac{n}{2}}, P_n = \left[ a_1^2 \times q^{n-1} \right]^{\frac{n}{2}}$$

مثال: در تصاعد هندسی ... ۲،  $\sqrt{2}$ ، حاصلضرب ۱۰ جمله‌ی اول را بیابید.



$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

نکته: در هر تصاعد هندسی داریم:

مثال: در یک تصاعد هندسی، حاصلضرب ۱۰ جمله‌ی اول، ۱۵ برابر حاصلضرب ۹ جمله‌ی اول است. جمله‌ی دهم این تصاعد را بیابید.



نکته: اگر در یک تصاعد هندسی، تعداد جمله‌ها فرد و جمله‌ی وسط ( $k$ ) باشد، داریم:

نکته: اگر در یک تصاعد هندسی، تعداد جمله‌ها فرد و جمله‌ی وسط ( $k$ ) باشد، داریم:

مثال: در یک تصاعد هندسی جمله‌ی پنجم برابر ۳ است. حاصلضرب ۹ جمله‌ی اول آن را بیابید.



نکته: اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  واسطه هندسی درج کنیم، خواهیم داشت:

مثال: بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(ریاضی ۹۱)



نکته: اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  واسطه هندسی درج کنیم، خواهیم داشت:

مثال: بین دو عدد  $\sqrt[4]{8}$  و  $\sqrt[4]{2}$ ، هشت واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. حاصلضرب این واسطه‌ها چقدر است؟



مثال: تویی طوری ساخته شده داست که وقتی به زمین بخورد،  $\frac{1}{3}$  ارتفاع قبلی اش بالا می‌رود. اگر این توپ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۸۱ متر رها شود، دنباله‌ی پایین آمدن‌های توپ را بنویسید و سپس جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنید.

نکته: مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی را  $S_n$  می‌نامیم.

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}$$

نکته ( مطالعه آزاد ) : حد مجموع جملات تصاعد هندسی: اگر  $|q| < 1$  باشد، در این صورت حد مجموع

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

جملات تصاعد هندسی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع هشت جمله‌ی اول،  $\frac{5}{4}$  برابر مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول می‌باشد؟

مثال: در دنباله‌ی هندسی غیرنزولی  $\dots, \frac{1}{4}, x, 2$ ، حد مجموع جملات چقدر است؟

مثال: یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم شده قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۲

مثال: جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه  $\frac{1}{10}$  جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از ۳ سال چند نفر در این روستا زندگی خواهند کرد؟

(کتاب درسی)

(۱) ۸۱۰

(۲) ۷۲۹

(۳) ۹۰۰

(۴) ۶۵۱

مثال: علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خریده است. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل کاهش یابد. اگر بعد از ۲ سال قصد فروش داشته باشد، آن را به چه قیمتی می‌تواند بفروشد؟

(کتاب درسی)

(۱) ۱۸۰ هزار تومان

(۲) ۲۴۰ هزار تومان

(۳) ۳۲۰ هزار تومان

(۴) ۴۸۰ هزار تومان





مثال: جمله عمومی یک دنباله هندسی  $t_n = \frac{3^{1+2n}}{4}$  است. قدر مطلق اختلاف قدر نسبت و جمله اول این دنباله کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{7}{4}$  (۳)

$\frac{9}{4}$  (۲)

$\frac{15}{4}$  (۱)



مثال: در دنباله  $\dots, \frac{1}{5}, -1, 5, -25, \dots$  چندمین جمله دنباله برابر  $\frac{1}{3125}$  است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



مثال: دنباله هندسی  $\frac{1}{729}, \dots, 27, 81, \dots$  چند جمله دارد؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)



مثال: دنباله‌های هندسی با قدرنسبتِ طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید، چه تعداد از این دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه  $\{1, 2, \dots, 100\}$  باشد؟  
(ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷



مثال: در دنباله هندسی غیرصعودی  $\dots, y, 4, x, 2$ ، مقدار  $y$  کدام است؟

- (۱)  $-4\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{2}$

مثال: بین دو عدد ۲ و ۷۲۹، چهار واسطه هندسی درج کرده‌ایم. مجموع این ۴ واسطه کدام است؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۴۸۰



مثال: بین دو عدد ۱ و ۶۴، پنج واسطه حسابی درج می‌کنیم و جمله وسط آن را  $A$  می‌نامیم، یک بار دیگر بین همین دو عدد، پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم و جمله وسط را  $B$  می‌نامیم. کدام گزینه زیر درست است؟

(۱)  $A + B = ۴۰/۵$  (۲)  $A - B = ۲۴$  (۳)  $A = B$  (۴)  $A = \sqrt{B}$



مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹ هستند. جمله دهم این دنباله کدام است؟

(۱)  $۳ \times ۲^۹$  (۲)  $۳ \times ۲^۷$  (۳)  $۲ \times ۳^۹$  (۴)  $۲ \times ۳^۷$



مثال: در یک دنباله هندسی، جمله اول ۸ برابر جمله چهارم است. جمله دوازدهم چند برابر جمله دهم است؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$



مثال: در یک دنباله هندسی داریم  $t_۳ t_۸ = k$ ، آنگاه حاصل  $t_۱۲ t_۲ - t_۸ t_۶$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



مثال: در یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{2}$  و قدرنسبت  $\sqrt[6]{2}$ ، حاصل عبارت

$$\frac{4}{t_1 t_{19}} + \frac{4}{t_2 t_{18}} + \frac{4}{t_3 t_{17}} + \dots + \frac{4}{t_9 t_{11}} + \frac{4}{t_{10} t_{10}}$$

۱۰ (۴)

۸۰ (۳)

۲۰ (۲)

۴۰ (۱)



مثال: در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴، حاصل  $\frac{t_2 t_9}{t_3}$  کدام است؟

۱۲۸ (۴)

۲۵۶ (۳)

۱۰۲۴ (۲)

۵۱۲ (۱)



مثال: در یک دنباله هندسی صعودی  $t_n$  داریم:  $\frac{t_2 t_4 t_8}{t_5} = 25$ . قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۲۵ (۴)

$\frac{1}{25}$  (۳)

۵ (۲)

$\frac{1}{5}$  (۱)



مثال: حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی ... ، ۸ ، ۴ ، ۲ کدام است؟

- (۱)  $2^{21}$  (۲)  $2^{18}$  (۳)  $2^{19}$  (۴)  $2^{32}$

مثال: اگر حاصل ضرب ۵ جمله اول یک دنباله هندسی برابر  $1024$  باشد، جمله سوم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $32$  (۳) ۴ (۴) ۸



مثال: اگر  $x+1$ ،  $x$ ،  $x-1$  و  $2-x$  به ترتیب جملات اول، دوم، چهارم و پنجم یک دنباله هندسی

باشند، مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

(ریاضی شارچ ۱۴۰۳)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $-\sqrt{5}$



مثال: اگر  $x + 1$ ،  $x - 1$ ،  $2x + 1$  و  $x$  به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲



مثال: در دنباله هندسی ...،  $x + 5$ ،  $x + 3$ ،  $x$ ، جمله دهم کدام است؟

- (۱)  $\frac{-256}{729}$  (۲)  $\frac{256}{729}$  (۳)  $\frac{-512}{2187}$  (۴)  $\frac{52}{2187}$



مثال: اگر  $y$ ،  $4$ ،  $x$  تشکیل یک دنباله حسابی و  $18$ ،  $y$ ،  $x$  تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، آن گاه حاصل  $|x - y|$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸



مثال: اعداد  $4^b$ ،  $8$ ،  $2\sqrt{2}$ ،  $2^{-a}$ ، جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. حاصل  $a + b$  کدام است؟

$\frac{11}{4}$  (۴)

$\frac{9}{4}$  (۳)

$\frac{7}{4}$  (۲)

$\frac{5}{4}$  (۱)



مثال: در یک دنباله هندسی با جمله اول  $a$ ، تساوی  $\frac{a_6}{a_3} + \frac{a_2}{a} = 2$  برقرار است. نسبت  $a^2$  به جمله

(تقریبی خارج ۱۴۰۲)

دوم کدام می تواند باشد؟

$-\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$2$  (۲)

$-2$  (۱)



مثال: در یک دنباله هندسی، جمله سوم، جذر جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله

(تقریبی تیر ۱۴۰۳)

چقدر از  $\frac{1}{2}$  کمتر است؟

$\frac{1}{6}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{5}{2}$  (۱)



مثال: در یک دنباله هندسی، جمله اول مربع جمله دوم و جمله چهارم برابر ۵ است. جمله اول کدام است؟  
(تبریزی خارج ۱۴۰۳)

(۱)  $\frac{1}{25}$

(۲)  $\frac{1}{5}$

(۳)  $\sqrt{5}$

(۴)  $2\sqrt{5}$



مثال: در یک دنباله هندسی، جمله ششم ۸۱ واحد بیشتر از جمله پنجم و جمله سوم سه واحد بیشتر از جمله دوم است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{9}$

(۲) ۹

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴) ۳



مثال: چهار عدد مثبت، جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۳ و مجموع دو عدد بزرگتر برابر ۷۵ است. بزرگترین عدد در بین این ۴ عدد کدام است؟

(۱) ۱۲۵

(۲)  $\frac{125}{2}$

(۳) ۷۵

(۴)  $\frac{75}{2}$





مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۵۲ و مجموع سه جمله دوم برابر ۵۱۳ است.  
(تقریبی مهرداد ۱۴۰۰)

جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶



مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟  
(تقریبی ۹۰)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷



مثال: در یک دنباله هندسی صعودی، مجموع دو جمله نخست برابر  $1 + \sqrt{3}$  و حاصل ضرب ۵ جمله اول برابر ۲۴۳ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۳ (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴) ۹



### ترکیبی دنباله حسابی و هندسی

نکته: اگر جملات  $a_m$  و  $a_n$  و  $a_p$  از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند: قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

مثال: جمله شانزدهم دنباله  $\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \dots$  با جمله چندم دنباله  $2, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \dots$  برابر است؟

(۱) پنجم

(۲) هشتم

(۳) نهم

(۴) شانزدهم

مثال: دنباله حسابی  $b_n$  و دنباله هندسی  $a_n$  با قدرنسبت  $m$  موجودند، به گونه‌ای که  $\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$  حاصل

$\frac{a_3}{b_3}$  کدام است؟

(تکمیلی فیلی سبز)

(۴)  $\frac{2m}{2m^2 - 1}$

(۳)  $\frac{2m^2}{2m - 1}$

(۲)  $\frac{m^2}{2m - 1}$

(۱)  $\frac{m}{2m^2 - 1}$



مثال: یک دنباله با جملات غیرصفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت  $d$  و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت  $r$  است. مقدار  $r + d$  کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۲)

(۱)  $\sqrt{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) صفر

مثال: اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $r$  را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت  $d$  خواهید داشت. مقدار  $r + d$  کدام است؟  
(ریاضی ۱۴۰۲)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$



مثال: اگر ریشه دوم جملات دوم، نهم و شانزدهم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟  
(انسانی دی ۱۴۰۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

مثال: جملات اول، نهم و چهل و نهم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟  
(ریاضی ۱۷)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



مثال: جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟  
(تقریبی ۹۲)

(۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{7}{4}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{7}{3}$



مثال: جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟  
(تقریبی خارج ۹۹)

(۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{9}{4}$



مثال: در یک دنباله عددی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟  
(تقریبی ۸۸)

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲



مثال: جملات دوم و چهارم و هشتم یک دنباله حسابی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهند. اگر جمله اول دنباله حسابی برابر ۲ باشد، حاصل جمع قدرنسبت‌های دو دنباله حسابی و هندسی کدام است؟  
(سنجش ۱۴۰۱)

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲



مثال: جملات چهارم، اول و هفتم از یک دنباله حسابی، به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی هستند. جمله سی و پنجم دنباله حسابی، چند برابر قدرنسبت آن است؟

(۱)  $-2$  (۲)  $2$  (۳)  $32$  (۴)  $34$



مثال: در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم، می توانند سه جمله متوالی از دنباله حسابی باشند، بزرگ ترین این سه عدد چند برابر کوچک ترین آن ها است؟

(۱)  $2 + \sqrt{3}$  (۲)  $5 + 2\sqrt{3}$  (۳)  $5 + 4\sqrt{3}$  (۴)  $7 + 4\sqrt{3}$



مثال: با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می آید. اگر مجموع مربعات سه جمله دنباله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

(۱)  $\frac{32}{7}$  (۲)  $\frac{64}{7}$  (۳)  $\frac{24}{5}$  (۴)  $\frac{48}{5}$

