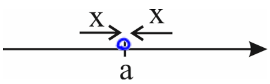
حد و پیوستگی یازدهم تجربی

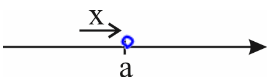
مفهوم حد

۱) وقتی می‌گوییم x میل می‌کند به سمت عدد a (و این‌جوی می‌نویسیمش: $x \to a$) منظورمان این است که x روی محور اعداد در یک همسایگی محذوف a بسیار به a نزدیک می‌شود، یعنی x تقریباً برابر a است؛ این شکلی:



$x \to a$ یعنی تا به a برو ولی به a دست نزن و به a نرس

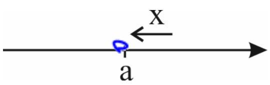
۲) وقتی می‌گوییم x از سمت چپ به a میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^-$) منظورمان این است که x روی محور اعداد از سمت اعداد کوچک‌تر از a به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



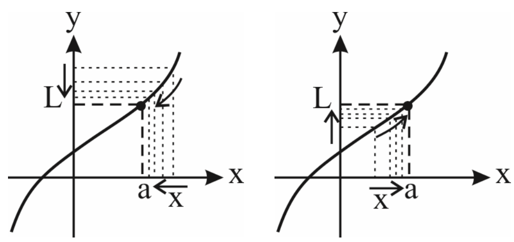
$x \to a^-$ چپ a

از مقادیر کمتر ~a میل کن

۳) وقتی می‌گوییم x از سمت راست به a میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^+$) منظورمان این است که x روی محور اعداد از سمت اعداد بزرگ‌تر از a به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



حالا بیایید حد را از روی نمودار تابع بررسی کنیم:

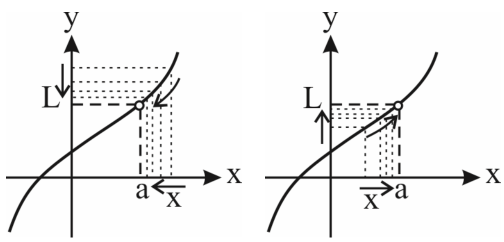


(الف)

تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد.

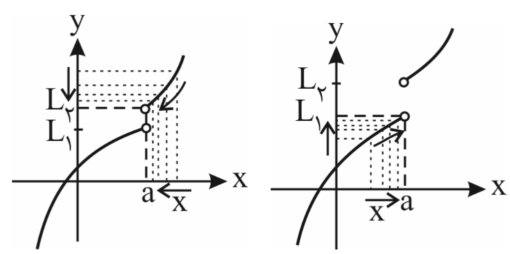


(ب)

تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد

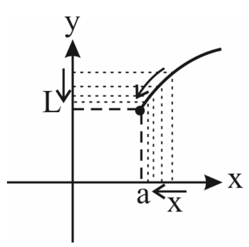


(پ)

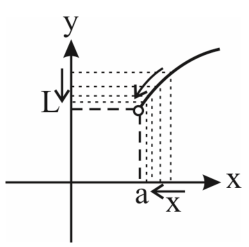
تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ ≠ حد راست

تابع در $x = a$ حد ندارد.



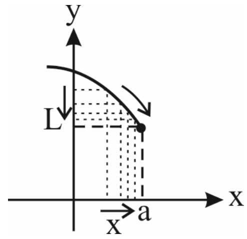
(ت)



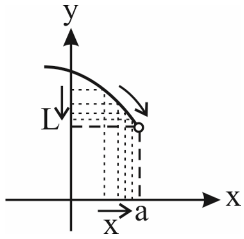
(ث)

تابع در همسایگی راست a تعریف شده

تابع در $x = a$ حد راست دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.



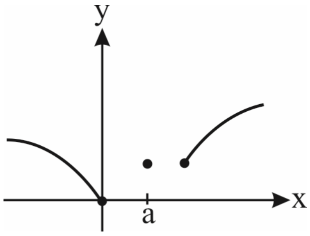
(ج)



(چ)

تابع در همسایگی چپ **a** تعریف شده

تابع در $\mathbf{x = a}$ حد چپ دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.



(ح)

تابع در هیچ همسایگی **a** تعریف نـشده و در $\mathbf{x = a}$ حد ندارد.

وقتی می‌خواهیم ببینیم یک تابع وقتی $\mathbf{x \to a}$ حد دارد یا نه، مهم‌ترین موضوع بررسی دامنه‌ی تابع است، البته لازم نیست تمـام دامنـه را پیدا کنیم. منظورمان این است که باید ببینیم آیا تابع در یک همسایگی راست یا چپ نقطه‌ی **a** تعریف شده یا نه، یعنی کافی است وضعیت تابع را در اطراف نقطه‌ی **a** بررسی کنیم.

اگر تابع در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $\mathbf{x = a}$ تعریف شده باشد وقتی حد دارد که حد راست تابع برابر حد چپ آن باشد.

سوال ۱: جواب حد از چپ و راست. حد بگو یعنی چی بگو ....

حد در نقطه‌ی $\mathbf{x_0}$ یعنی چی های دو طرف نقطه a را بگو و با خود a کاری نداریم ....

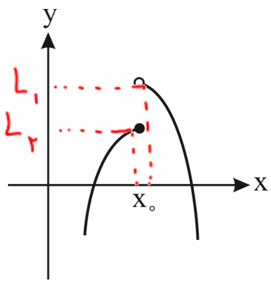
حد در صورت وجود باید یکتا و معین باشد ....

۲ تا عدد نشود

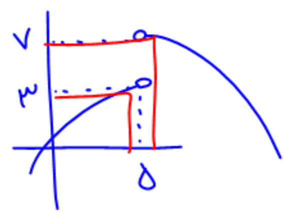
∞ نشود ∞ عدد معین نیست.

جهش تابع: $(\Delta L = |L_2 - L_1|)$

اگر $\mathbf{f(x)}$ در $\mathbf{x_0}$ حد نداشته باشد، در $\mathbf{x_0}$ دچار جهش می‌شود.

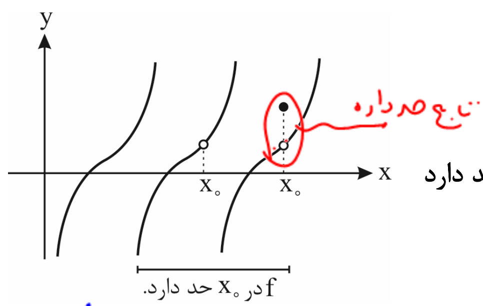


تابع در $\mathbf{x_0}$ جهش دارد $\equiv$ در $\mathbf{x_0}$ حد ندارد



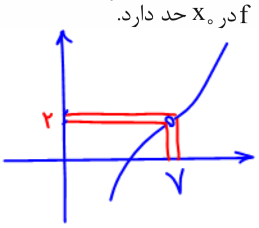
$\lim_{x \to 5} f(x) \begin{cases} x \to 5^+ & l_1 = 7 \\ x \to 5^- & l_2 = 3 \end{cases}$

$l_1 \neq l_2$ حد ندارد



تابع در $\mathbf{x_0}$ جهش ندارد $\equiv$ در $\mathbf{x_0}$ حد دارد

بالا یا پایین پریدن یک نقطه یا حذف یک نقطه، جهش محسوب نمی‌شود و تابع در آن نقطه حد دارد.



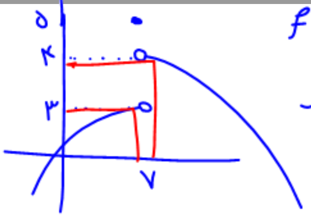
$\lim_{x \to 7} f(x) \begin{cases} x \to 7^+ & l_1 = 2 \\ x \to 7^- & l_2 = 2 \end{cases}$

$l_1 = l_2 = 2$ حد دارد جهش ندارد

تابع f در $x=7$ حد دارد و برابر ② است

تعریف نشده یا حفره ندارد برای ما مهم نیست و فقط $f(7)$ منظور از حد f در $x=7$ خود ۷ است ② است

نکته: حد چپ و حد راست و مقدار تابع در یک نقطه مثل x=۷ می‌تواند ۳ تا عدد مختلف باشد.

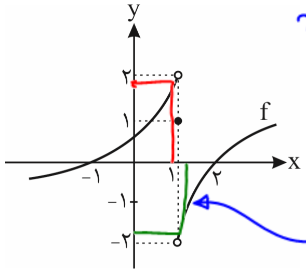


مقدار تابع در x=۷ : $f(۷)=۵$

$\lim_{x\to ۷} f(x)$ $\begin{cases} x\to ۷^+ & ۴=l_1 \\ x\to ۷^- & ۳=l_2 \end{cases}$ $\quad l_1 \neq l_2$ در x=۷ حد ندارد.

(۱) وقتی حد را از روی نمودار می‌پرسند، حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم.

تست ۲: در شکل روبه‌رو، حاصل $f(۱)+\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



مقدار تابع در x=۱

یک $+$ ۲ $-$ ($-$۲) $=$ ۵

۱) ۱

۲) ۳

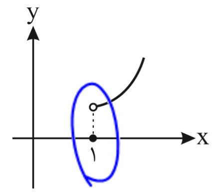
۳) ۵

۴) وجود ندارد.

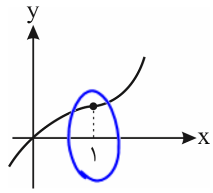
تابع f توی راست x=۱ زیر محور x هاست و پایینه و در چپ x=۱ بالای محور x هاست و بالائه

همه‌ی دو نیم تابع f در x=۱ حد ندارد ولی مسئله این رو نپرسیده به جمع و تفریق پرسیده

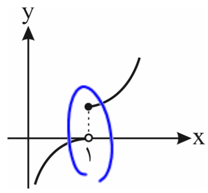
تست ۳: در کدام‌یک از نمودارهای زیر، تابع در یک همسایگی ۱ تعریف شده است و در این نقطه حد دارد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در $x=۱$ است؟

۱) 

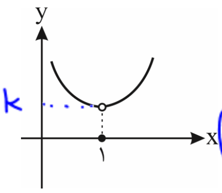
حد چپ ندارد

۲) 

حد دارد و با مقدار f در x=۱ برابر

۳) 

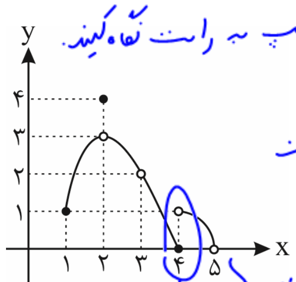
حد ندارد

۴) 

حد f در چپ و راست x=۱ برابر k است ولی مقدار تابع $f(۱)=۰$

تست ۴: نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد. تابع f در چند نقطه حد ندارد؟

همه نواحی را از سمت چپ به راست نگاه کنید.



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

در x=۲ ، f حد دارد و برابر ۳ است $\quad \lim_{x\to ۲} f$ $\begin{cases} x\to ۲^+ & l_1=۳ \\ x\to ۲^- & l_2=۳ \end{cases}$

در x=۳ ، f حد دارد و برابر ۲ است $\quad \lim_{x\to ۳} f$ $\begin{cases} x\to ۳^+ & l_1=۲ \\ x\to ۳^- & l_2=۲ \end{cases}$

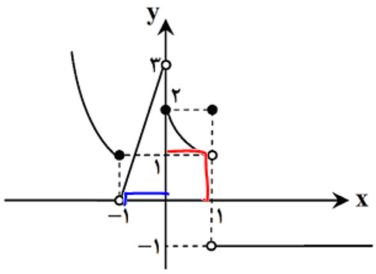
حد چپ ندارد پس حد ندارد

حد راست ندارد پس حد ندارد

در x=۴ حد ندارد چون $\lim_{x\to ۴} f(x)$ $\begin{cases} x\to ۴^+ & l_1=۱ \\ x\to ۴^- & l_2=۰ \end{cases}$ $\neq$

نکته: تابع در سر دو نقطه بازه یه طرف رها و ول هست حد ندارد چون از اون طرف ها یه ندارد

تست ۵: نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ کدام است؟

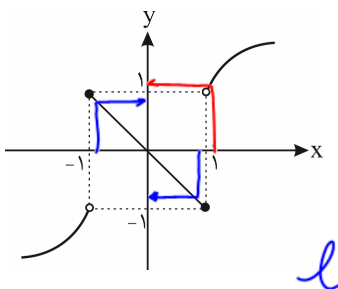


$1 + 0 = 1$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

نکته: اگه توی پرانتز جلوی f یه عبارت غیر از x بود اول حد توی پرانتز رو به صورت دقیق درست بیار و عرض یا x مناسب را با توجه به f بگو.

سوال ۶: با توجه به نمودار تابع f کدام حد درست محاسبه نشده است؟



۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2+1) = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(\frac{x}{2}) = 1$

۳) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(|x|) = 1$

۴) $\lim\limits_{x\to 1^-} (fof)(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2+1 = 1^+) = f(1^+) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(\frac{x}{2} = \frac{2^+}{2} = 1^+) = f(1^+) = 1$

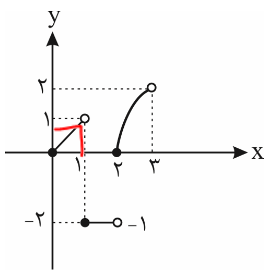
$\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(|x| = 1.1 = 1^+) = 1$ ، $x = -1-0.1 = -1.1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(f(x) = f(1^-) = (-1)^+) = f((-1)^+) = 1$ ← درستش اینه

غلط حساب شده

از منفی یک یه ذره بالاتر

تست ۷: نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+} f(\frac{1}{2x-3})$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

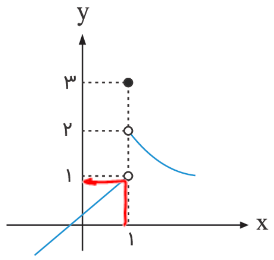
$\lim\limits_{x\to 2^+ = 2.1} f\left(\frac{1}{2(2^+) - 3 = 1^+ = 1.2} = \frac{1}{1^+} = 1^-\right) = f(1^-) = 1$

$4^+ = 4.2$

$\frac{1}{1^+} = 1^-$ است، ولی $\frac{1}{1} = 1$

همه می دونیم وقتی مخرج کسر یه ذره بزرگ میشه کسر یه ذره کم میشه

تست ۸: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(\frac{۱}{۲x-۷})$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

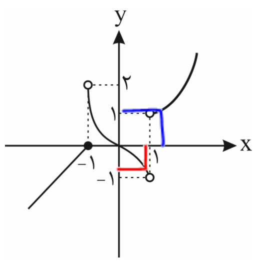
۳) ۳

۴) این حد وجود ندارد.

$\lim\limits_{x\to 4^+} f\left(\frac{1}{2x-7} = \frac{1}{\underbrace{2(4)^+}_{8^+} - 7 = 1^+} = 1^-\right) = f(1^-) = 1$

مخرج بزرگ‌تر از صورت

تست ۹: با توجه به نمودار f، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(|x|) + \lim\limits_{x\to ۰^-} f(۱-x)$ کدام است؟



$0{,}9 = 1^-$ $1-(-0{,}1) = 1{,}1 = 1^+$

$-0{,}9$ مثلاً $-0{,}1$ مثلاً

۱) صفر

۲) ۳

۳) ۱-

۴) ۱

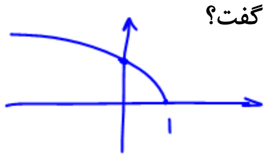
$\boxed{f(1^-) = -1}$

$\boxed{f(1^+) = 1}$

$\xrightarrow{\text{جمع}}$ صفر

تذکر مهم: اگر نقطه‌ای اول یا آخر دامنه باشد چون از یک طرف تعریف نشده از آن طرف حد ندارد.

سوال ۱۰: در مورد حد تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ در $x=۱$ چه می‌توان گفت؟



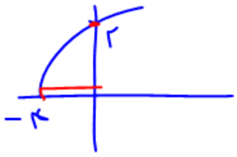
باید $1-x \geq 0$

$1 \geq x$

$D_f(-\infty, 1]$

تابع f در راست $x=1$ تعریف نشده پس در راست $x=1$ حد ندارد و کلاً f در $x=1$ حد ندارد.

نکته: تابع $y=\sqrt{u}$ در ریشه u (جایی که u را صفر می‌کند) حد ندارد مثلاً $\sqrt{1-x}$ در $x=1$ حد ندارد.



باید $x+4 \geq 0$

$x \geq -4$

$D_f\ [-4, +\infty)$

تست ۱۱ : با توجه به تابع $f(x)=\sqrt{x+4}$، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)=0$ درسته

ب) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=0$ غلطه غ

یعنی هم در راست ۴- هم در چپ ۴- حد صفره که غلطه چون f در چپ x=-4 حد نداره.

پ) $f(-4)=0$ درسته

ت) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ درسته

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

تست ۱۲ : تابع $f(x)=\sqrt{x-3+2b}$ در $x=a$ حد ندارد، ولی $f(a)=2-b$. مقدار $2a+3b$ کدام است؟

نکته $y=\sqrt{U}$ در ریشه U حد ندارد.

۱) صفر ۲) -2 ۳) ۶ ۴) ۴

طبق نکته، در ریشه زیر رادیکال a $\boxed{a-3+2b=0}$ (الف)

یعنی x=a زیر رادیکال رو صفر می‌کنه

$f(a)=\sqrt{a-3+2b}=2-b$

از الف می‌دانیم که $a-3+2b=0$ است

صفر $=2-b$

$\boxed{b=2} \longrightarrow a-3+2(2)=0$

$\boxed{a=-1}$

$2a+3b=2(-1)+3(2)=4$ گزینه ۴

(۲) وقتی حد در نقطهٔ مرزی (نقطهٔ تغییر ضابطه) پرسیده می‌شود، حد چپ و راست را در آن نقطه جداگانه پیدا می‌کنیم. به طور کلی در توابع دو و یا چند ضابطه‌ای همیشه به نقطهٔ مرزی توجه ویژه‌ای می‌کنیم چون تابع در این نقطه از لحاظ حددار بودن مشکوک است.

تست ۱۳ : به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-a & x\geq 1 \\ x^2+2x & x<1 \end{cases}$ در $x=1$ دارای حد است؟

حد چپ و راست در x=1 برابره

شرط حد داربودن: $l_1=l_2$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) صفر

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} x\to 1^+ & \text{ضابطه اول} = 2x-a=2(1)-a=2-a=l_1 \\ x\to 1^- & \text{ضابطه دوم} = x^2+2x=(1)^2+2(1)=3=l_2 \end{cases}$$

باید $l_1=l_2$

$2-a=3$

$\boxed{a=-1}$

تست ۱۴ : به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} (x+a)^2 & x\geq -1 \\ 2x+1 & x<-1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ حد دارد؟

یعنی حد چپ و راست برابره

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

$l_1=l_2$

$$\lim_{x\to(-1)} f \begin{cases} x\to(-1)^+ & \text{ضابطه اول} = (x+a)^2=(-1+a)^2=l_1 \\ x\to(-1)^- & \text{ضابطه دوم} = 2x+1=2(-1)+1=-1=l_2 \end{cases}$$

$(-1+a)^2=-1$

یه عبارت به توان ۲ هرگز برابر ۱- نمی‌شود پس هیچ a وجود ندارد $\longrightarrow a\in\varnothing$

تست ۱۵ : اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & x>۲\\ ax-b & x<۲\end{cases}$ در $x=۲$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۴$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

$l_1=l_2$

۱) $\frac{۲۶}{۳}$ ✓　　۲) -۴　　۳) ۱۱　　۴) $-\frac{۱۱}{۳}$

ضابطه (۱)

$a(-1)-b=4$

$-a-b=4$

$a+b=-4$

$\lim\limits_{x\to 2} f \begin{cases} x\to 2^+ & 3x^2-1=11=L_1\\ x\to 2^- & ax-b=2a-b=L_2\end{cases}$

$l_1=l_2 \longrightarrow \boxed{11=2a-b}$

$+\begin{cases}2a-\cancel{b}=11\\ a+\cancel{b}=-4\end{cases}$

$3a=7 \longrightarrow a=\frac{7}{3}$

$\frac{7}{3}+b=-4$

$b=-4-\frac{7}{3}=-\frac{19}{3}$

$a-b=\frac{7}{3}-\left(-\frac{19}{3}\right)=\frac{26}{3}$

تست ۱۶ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲-ax+۱ & |x|\le ۱\\ x+b & |x|>۱\end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد. مقدار $۲b-a$ کدام است؟

۱) -۵　　۲) -۴　　۳) ۵　　۴) ۴

(۳) در توابع چندجمله‌ای به شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c$ یا توابع مثلثاتی $f(x)=\sin^n x$ و $f(x)=\cos^n x$ و $y=a^x$ و توابعی به شکل $f(x)=|ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c|$ و $f(x)=\sqrt[2n+1]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c}$، تابع در تمام نقاط دامنه‌اش (یعنی $\mathbb{R}$) حد دارد و حد تابع برابر مقدار تابع است.

تعریف حددار بودن

اگر حد چپ و راست در x_0 متناهی و موجود و برابر باشد، تابع را در x_0 حددار گوییم (عدد برابر)، یعنی مثلاً اگر حد چپ و راست هر دو $+\infty$ شد، گوییم تابع در $x=0$ حد متناهی ندارد، بلکه حد نامتناهی دارد.

در محاسبه‌ی حد، عمل جاگذاری و عمل چپ و راست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

در حدهای معمولی (حد توابع پیوسته) مثل محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها در یک نقطه از عمل جاگذاری استفاده می‌شود:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{۳+|x|}{|۲-x|+۱}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\cos^۲ x=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۱} x^۳+۲x=۱+۲=۳$$

سوال ۱۷: حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} (\tan 2x + \sin 3x) =$

۲) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - \sin^2 x}{\cos x + 1} =$

تست ۱۸: حد تابع $y = \frac{\sin^2 x + 2\cos x}{2\sin^2 x - \cos x}$ وقتی $x \to -\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

تست ۱۹: اگر $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

تست ۲۰: اگر تابع f در نقطه‌ی $x = 1$ حد داشته و $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

تست ۲۱: حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2\sqrt[3]{7-x}}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

نکته: اگر حد تابع جزء صحیح را در نقطه‌ای بپرسند که داخل جزء صحیح، $\mathbb{Z}$ نشود، مثل موارد بالا کافی است فقط جاگذاری کنید.

تست ۲۲: اگر $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{3}}{2}]$ باشد، حد چپ در $x=3$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

(۴) توابع شامل جزء صحیح

هرگاه داخل جزء صحیح، $\mathbb{Z}$ شود باید حد چپ و راست را جداگانه پیدا کنیم مگر آن که خود طراح فقط حد چپ یا راست را بپرسد. جلوتر نیز در قسمت حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، به جزء صحیح برخورد می‌کنیم که بیشتر در موردش صحبت خواهیم کرد.

تست ۲۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0} [x]\frac{\cos x}{2+\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) موجود نیست.

تست ۲۴: حاصل $\lim\limits_{x\to (-2)^-} x[x][x^2]$ کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۲۴- ۴) ۲۴

تست ۲۵: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲+[x]}{[-x]}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۳-

تست ۲۶: حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x-۲}{[x]+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۲۷: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x+۸}}{[x]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

تست ۲۸: حاصل $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} \frac{x}{[x]}(x+[x])$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۶- ۴) ۸-

تست ۲۹: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(-1)^{[x]}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱− ۴) حد ندارد.

تست ۳۰: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[x^2-3x]$ کدام است؟

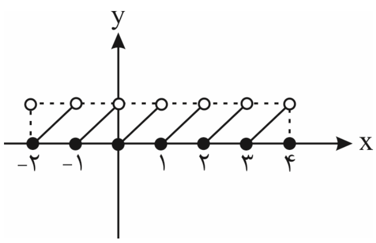
۱) صفر ۲) ۲− ۳) ۳− ۴) حد ندارد.

تست ۳۱: در تابع $y=[\frac{1}{x}]$ وقتی $x\to -\frac{1}{10}$ حد چپ کدام است؟

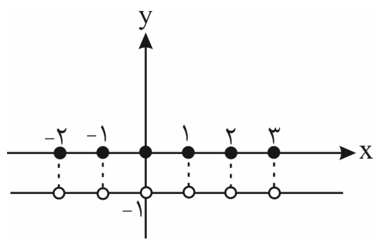
۱) ۱۱ ۲) ۹− ۳) ۱۰− ۴) ۱۱−

دو تابع مهم

با دو تابع از این تابع‌ها خیلی سروکار دارید:



(۱) $f(x)=x-[x]$



(۲) $f(x)=[x]+[-x]$

حالا به نمودار $f(x)=[x]+[-x]$ نگاه کنید. از روی نمودار معلوم است که در تمام نقاط $\mathbb{R}$، حد تابع برابر (-۱) است.

تست ۳۲: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}[x-[x]]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

تست ۳۳: حد چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax}{3x+[-x]}$ در نقطهٔ $x=1$، به اندازهٔ ۲ واحد از حد راست آن در این نقطه بیشتر است. مقدار a کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

هرگاه درون براکت صحیح شود و تابع داخل براکت $\max$ یا $\min$ نشود حد ندارد. مثلاً $y=[x]$ در $x=\dots,-2,-1,0,\dots$ حد نـدارد ولی در $x=-\sqrt{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2}$ حد دارد.

$y=[2x]$ در $x=-\frac{1}{2}$ و $x=1$ حد ندارد اما در $x=\frac{1}{3}$ حد دارد.

$y=[\sqrt{x}]$ در $x=1$ حد ندارد ولی در $x=2$ حد دارد.

$y=[\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{6}$ حد دارد اما در $x=\pi$ حد ندارد.

اگر درون براکت در نقطه‌ای صحیح شود و تابعِ درون براکت در آن نقطه $\max$ و یا $\min$ شود، تابع در آن‌جا حد دارد. مثلاً $[\sin x]$ در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ حد دارد و یا $[x^2]$ در نقطهٔ $x=0$ حد دارد.

تست ۳۴: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 3x][\cos 4x]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

تست ۳۵: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 2x]$ کدام است؟

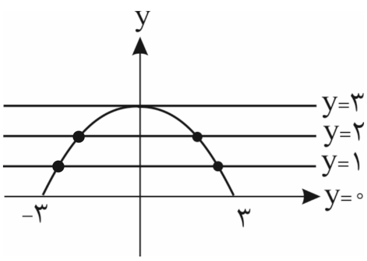
۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

تست ۳۶: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} [\frac{۱}{\sin ۳x}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) حد ندارد.

تست ۳۷: تابع $y=[\sqrt{۹-x^{۲}}]$ در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ به دنبال نقاطی هستیم که داخل براکت صحیح باشد و چون فقط به دنبال تعداد نقاط هستیم بهتر است نمودار عبارت داخل براکت را رسم کنیم. نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$ به صورت یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است. در $x=\pm ۳$ که در یک همسایگی تعریف نشده حد ندارد. $x=۰$ طول ماکزیمم نسبی است پس در آن حد دارد. در ۴ نقطه‌ی دیگر که داخل براکت صحیح می‌شود هم حد ندارد.

حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

به حالت‌هایی که در شرایط مشابه، جواب‌های مختلف یا هر عددی از آن‌ها به دست می‌آید، اصطلاحاً مبهم گفته می‌شود. مثلاً $\lim\limits_{x\to ۰} y=\frac{x}{x}=\frac{۰}{۰}=۱$ یا $\lim\limits_{x\to ۱} y=\frac{۲x-۲}{x-۱}=\frac{۰}{۰}=\frac{۲(x-۱)}{x-۱}=۲$.

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ برابر هر عددی می‌تواند باشد، زیرا اگر (هر عدد $=\frac{۰}{۰}$) را طرفین وسطین کنیم، (صفر = هر عدد × صفر) است. به یافتن جواب کسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عمل رفع ابهام گفته می‌شود.

رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$:

در ابتدا باید بدانیم هر $\frac{۰}{۰}$ مبهم نیست و تنها $\frac{\text{صفرنسبی(حدی)}}{\text{صفرنسبی(حدی)}}$ مبهم است و باید رفع ابهام شود. در این‌جا اشاره می‌کنیم که صفر نسبی (حدی) با صفر مطلق (خود صفر) فرق دارد. مثلاً در تابع $f(x)=x-۱$ وقتی مقدار تابع به ازای $x=۱$ را می‌یابیم جواب صفر مطلق می‌شود، اما حد تابع وقتی $x\to ۱$ برابر صفر نسبی است. چرا که $x\neq ۱$:

$$\lim_{x\to ۱} x-۱\begin{cases} x\to ۱^{+} & ۱^{+}-۱=۰^{+} \\ x\to ۱^{-} & ۱^{-}-۱=۰^{-}\end{cases}$$

$f(x)=x-۱ \xrightarrow{x=۱} f(۱)=۱-۱=۰$ صفر مطلق

توجه: $(1^-)^2 = 1^-$ $\qquad$ $(0^-)^2 = 0^+$

$$\lim_{x\to 0}[x^2]\begin{cases} x\to 0^+ & [0^+] = 0 = \text{صفرمطلق} \\ x\to 0^- & [(0^-)^2 = 0^+] = 0 = \text{صفرمطلق} \end{cases}$$

انواع $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

اگر مخرج صفر مطلق بود، حاصل تعریف نشده است و جواب وجود ندارد.

۱) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرنسبی}} =$ مبهم است ← رفع ابهام ← مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

۲) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرنسبی}} =$ صفر ← مبهم نیست ← مثال: $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x} = \frac{[0^+]}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0$

۳) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرمطلق}} =$ تعریف نشده (وجود ندارد) ← مثال: $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{[x]} = \frac{[0^+]}{[0^+]} = \frac{\text{خودصفر}}{\text{خودصفر}} =$ تعریف نشده

۴) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}} =$ تعریف نشده (وجود ندارد) ← مثال: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{[x]} = \frac{1}{\text{صفرمطلق}}$: تعریف نشده

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری:

با توجه به توضیحات درس‌نامه در این قسمت یاد می‌گیریم که با ابهام‌های $\frac{0}{0}$ چگونه برخورد و آن‌ها را رفع ابهام کنیم.

در ابتدای بخش با روش‌های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری آشنا می‌شویم که در زیر آمده است. فقط برای تأکید هم که شده، دوباره به شیپور زیر توجه کنید.

در محاسبه‌ی حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح، اول باید قدرمطلق را با تعیین علامت و جزء صحیح را با تعیین مقدار، حذف کنیم و سپس حد را محاسبه کنیم.

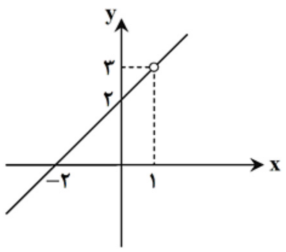
الف) حذف عامل صفرشونده: در این حالت با استفاده از تجزیه، فاکتورگیری یا اتحادهای مناسب، عامل صفرشونده‌ی یکسان از صورت و مخرج را حذف می‌کنیم و سپس مقدار حد را در آن نقطه می‌یابیم.

مثال ۳۸:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+8}$$

تست ۳۹ : شکل زیر، نمودار تابع خطی $y=f(x)$ است. حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{(x+۵)f(x)}{x^۲-۴}$ کدام است؟



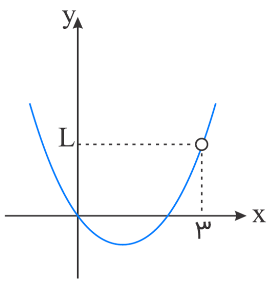
۱) $\dfrac{۶}{۵}$

۲) $\dfrac{۵}{۲}$

۳) $-\dfrac{۳}{۴}$

۴) صفر

تست ۴۰ : اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^۳+nx^۲+۶x}{x-۳}$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار $n+L$ کدام است؟



۱) ۳

۲) -۲

۳) -۵

۴) ۲

تست ۴۱: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲[x]-۸}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) وجود ندارد. ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ اول جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$x\to ۲^+ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow \text{حد}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x^۲)(۲)-۸}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x^۲-۸}{x^۲-۲x}$$

این حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد. برای رفع ابهام باید با استفاده از اتحادها و یا تجزیه، عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف کنیم (دقت کنید، با توجه به این که $x\to ۲^+$، عامل صفرشونده $(x-۲)$ است که باید از صورت و مخرج حذف شود):

$$\text{حد}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x^۲-۴)}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x+۲)}{x}=\frac{۲(۲+۲)}{۲}=۴$$

تست ۴۲ : حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲x^۲ - [۲x^۲]}{x^۲ - ۵x + ۶}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر　　۲) ۴-　　۳) ۸-　　۴) ۱۲-

ب) گویا کردن: گاهی در محاسبه‌ی حد توابع شامل رادیکال، برای رفع ابهام می‌توانیم از گویا کردن صورت یا مخرج کسر (یا هر دو) استفاده کنیم.

مثال ۴۳: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱ - x}{۱ - \sqrt{x}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است. برای رفع ابهام از گویاکردن استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱ - x}{۱ - \sqrt{x}} \times \frac{۱ + \sqrt{x}}{۱ + \sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to ۱} \frac{(۱ - x)(۱ + \sqrt{x})}{۱ - x} = \lim_{x\to ۱} ۱ + \sqrt{x} = ۱ + ۱ = ۲$$

تست ۴۴: حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۳ - \sqrt{۲x + ۱}}{۲ - \sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) $\frac{۴}{۳}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$

تست ۴۵: اگر $\lim \frac{ax + ۳a}{۱ - \sqrt{۵x + ۱۶}}$ وقتی $x \to -۳$ برابر ۲ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۳　　۳) ۳-　　۴) ۵-

(۵) توابع شامل قدرمطلق

در محاسبه‌ی حد توابعی که شامل قدرمطلق هستند، اگر داخل قدرمطلق صفر شده و حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

برای این کار ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. سپس عبارت‌ها را از قدرمطلق خارج کرده و حد تابع را می‌یابیم.

مثال ۴۶ :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\end{cases}$$

تست ۴۷: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) -1 ۳) ∞ ۴) حد ندارد.

سؤال ۴۸: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{|x^2-3x-4|}{x^2-1}=$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x-|x|}{|3x|+x}=$

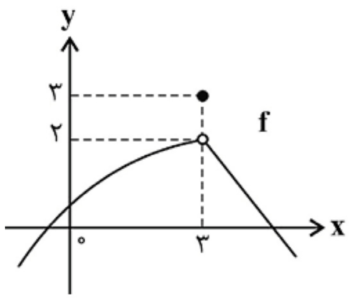
تست ۴۹: حد عبارت $\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲   ۴) ۳

تست ۵۰: حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطه‌ی $x=۳$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) موجود نیست.

تست ۵۱ : با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f^۳(x)-۸}{|f(x)-۲|}$ کدام است؟



۱) ۱۲

۲) -۴

۳) -۱۲

۴) ۴

ج) تغییر متغیر: در این‌جا با کمک تغییر متغیر مناسب، حد را به نقطه‌ی صفر منتقل می‌کنیم. پس برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ با فرض $x-a=t$ (با توجه به این که $x\to a$ بنابراین $x-a\to ۰$ و در نتیجه $t\to ۰$):

$$\begin{cases}x=a+t\\ x\to a \Rightarrow t\to ۰\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to ۰}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

مثال ۵۲: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{۲\sqrt{x-۱}+x-۱}{\sqrt{x-۱}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است. بنابراین از تغییر متغیر برای محاسبه‌ی حد کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases}x-۱=t \Rightarrow x=t+۱\\ x\to ۱^+ \Rightarrow t\to ۰^+\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}\frac{۲\sqrt{x-۱}+x-۱}{\sqrt{x-۱}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۲\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}}=\frac{۰}{۰}$$

حالا برای رفع ابهام از $\sqrt{t}$ در صورت فاکتور می‌گیریم و از حذف عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{۲\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\cancel{\sqrt{t}}(۲+\sqrt{t})}{\cancel{\sqrt{t}}}=\lim_{t\to ۰^+}(۲+\sqrt{t})=۲+۰=۲$$

د) استفاده از هم‌ارزی: حد یک چندجمله‌ای وقتی $x\to ۰$ برابر حد جمله‌ی با کم‌ترین توان آن چندجمله‌ای است.

روش تستی برای کنکور مدرسه نمونه‌دولتی

$f(x)=x^۲+x \xrightarrow[x\to ۰]{\text{کم توان}} x$

x مثلاً ۰٫۱ است

برای مثال $-3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^3 - 3x^2$ (علامت ~ به معنای هم‌ارز بودن است.)

مثال ۵۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x}$ را بیابید.

پاسخ: چون حد داده‌شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد، برای رفع ابهام از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. (دقت کنید که $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

سوال ۵۴: حاصل حدهای زیر را تعیین کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2-7x^3}{x^6-8x^2} = \dfrac{4x^2}{-8x^2} = -\dfrac{1}{2}$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{8x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}+\sqrt{x}} = \underset{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{8x}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

تست ۵۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \le 0 \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟ (سراسری ۱

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) موجود نیست.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x) \quad \underset{x\to 0^-}{\overset{\text{کم‌توان}}{\sim}} \quad -x = -(0^-) = 0^+$$

$$= f(0^+) = \sqrt{1-x} = \sqrt{1-0} = 1$$

از ضابطه اول می‌بریم زیرا f در 0^+ [illegible]

روش هوپیتال

در کلاس کنکور جمع سال بعدی میگم

اگر توابع f و g در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر باشند و $f(x_0)=0$ و $g(x_0)=0$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ (اگر f و g در نقطه‌ی x_0 یا وقتی x به $\pm\infty$ می‌رود، مشتق‌پذیر باشند) می‌توان از این روش استفاده کرد.

پس تسلط بر تمام فرمول‌های مشتق‌گیری برای استفاده از روش هوپیتال ضروری است.

تا آخر ص ۲۳ را بعد می‌گم.

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$: از صورت و مخرج جداگانه مشتق می‌گیریم و سپس حد را حساب می‌کنیم. اگر باز هم مبهم بود به عمل مشتق‌گیری مستقل ادامه می‌دهیم.

تابع	مشتق	مثال
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = 5x^8 \Rightarrow y' = 40x^7$ $y = \frac{7}{x^4} \Rightarrow y = 7x^{-4} \Rightarrow y' = -28x^{-5} = \frac{-28}{x^5}$ $y = \sqrt[5]{x^2} \Rightarrow y = x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow y' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ $y = \frac{3}{\sqrt[7]{x^4}} \Rightarrow y = 3x^{-\frac{4}{7}} \Rightarrow y' = -\frac{12}{7}x^{-\frac{11}{7}} = \frac{-12}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$
$y = au^n$	$y' = nau'u^{n-1}$	$y = 2(x^2+3x-1)^8 \Rightarrow y' = 16(2x+3)(x^2+3x-1)^7$ $y = \frac{5}{(x^3-x)^4} \Rightarrow y = 5(x^3-x)^{-4} \Rightarrow y' = -20(x^3-x)^{-5}(3x^2-1)$ $= \frac{-20(3x^2-1)}{(x^3-x)^5}$ $y = 3\sqrt[5]{x^2+3x} \Rightarrow y = 3(x^2+3x)^{\frac{1}{5}}$ $\Rightarrow y' = \frac{3}{5}(x^2+3x)^{-\frac{4}{5}}(2x+3) = \frac{3(2x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2+3x)^4}}$ $y = \frac{2}{3\sqrt[5]{4x^2+4x+1}} \Rightarrow y = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{5}}$ $\Rightarrow y' = \frac{-4}{15}(2x+1)^{-\frac{7}{5}}(2) = \frac{-8}{15\sqrt[5]{(2x+1)^7}}$

سوال ۵۶: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x+x^{۲}+x^{۳}+x^{۴}+\cdots+x^{n}-n}{x-۱}$$

تست ۵۷: حاصل $\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۳}+x^{۲}+۴}{x^{۲}-۴}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۳-

تست ۵۸: حاصل $\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^{۲}-۵x-۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۴۴}$

تست ۵۹: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۲a(\sqrt{x+۳}-۲)}{|x-۱|} & x<۱\\ [x-۱]+۱ & x\geq ۱\end{cases}$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a تابع f در $x=۱$ حد دارد؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

تست ۶۰: اگر $\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{ax+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲}=b$ ، ab کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۸}{۵}$

تست ۶۱ : به ازای کدام مقدار $\mathbf{a}$ تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}}{x} & x>۰\\ a[x]+\sqrt{۲} & x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

تست ۶۲ : اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{ax^{۲}+۲x+b}=۲$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

تست ۶۳ : حدّ عبارت $\dfrac{x^{۲}+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$، وقتی $x\to -۸$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

سال تجربی ۹۷

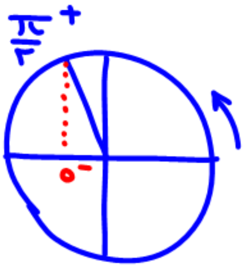
حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ در حدهای مثلثاتی

تست ۶۴ : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

اول براکتو برمی‌داری به جاش عددی ذاری

فرمول $1-\sin^2 x$

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) حد وجود ندارد.

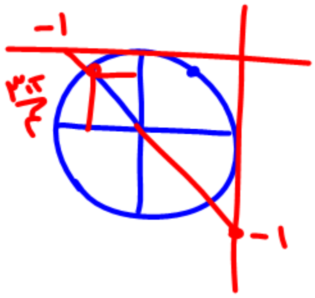


$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x+\overset{-1}{[0^-]}}{1-\sin^2 x} = \frac{-(1-\cancel{\sin x})}{(1-\cancel{\sin x})(1+\sin x)} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

مزدوج

تست ۶۵ : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \frac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

۱) -1 ✓ ۲) صفر ۳) 1 ۴) $+\infty$

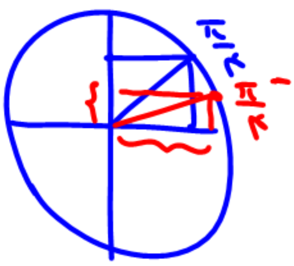


$$\frac{1+\cot x}{1+\tan} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim \frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\lim \frac{\frac{\cancel{\sin x+\cos x}}{\sin x}}{\frac{\cancel{\cos x+\sin x}}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

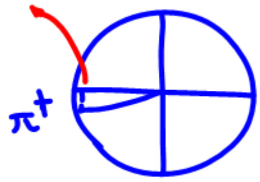
تست ۶۶ : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$



$$\frac{\overset{-}{|\sin x-\cos x|} = -(\cancel{\sin x-\cos x})}{\frac{\sin x}{\cos x}-1 = \frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\cos x}} = -\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{4}^-}{} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$(-1)^+ = -0.9$



اول توی قدر را تعیین علامت کن

تست ۶۷ : حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{|1+\cos x|}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ✓ ۳) ۱ ۴) -1

$$\frac{|1+\cos x| = \cancel{1+\cos x}}{1-\cos^2 x = (\cancel{1+\cos x})(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

تست ۶۸ : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^3 x}{1-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ✓ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

چاق و لاغر

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

مزدوج

پیوستگی

$l_1 = l_2 = f(a)$ شرط پیوستگی در نقطهٔ a

پیوستگی f در نقطه‌ی $x_\circ$

در فصل حد تابع در نقطه‌ی $x_\circ$ گفته شد، که عرض دو نقطه طرفین $x_\circ$ را پیدا می‌کنیم، در این فصل کلاً به اتصال نقطه $(x_\circ, f(x_\circ))$ به دو طرف آن توجه می‌کنیم.

تابع $y = f(x)$ را در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته گوییم هرگاه دو شرط زیر همواره و هم‌زمان برقرار باشد:

۱) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

۲) $a \in D_f$

به زبان ساده‌تر در نقطه‌ی **a** که در دامنه‌ی تابع است، حد تابع با مقدار تابع برابر شود.

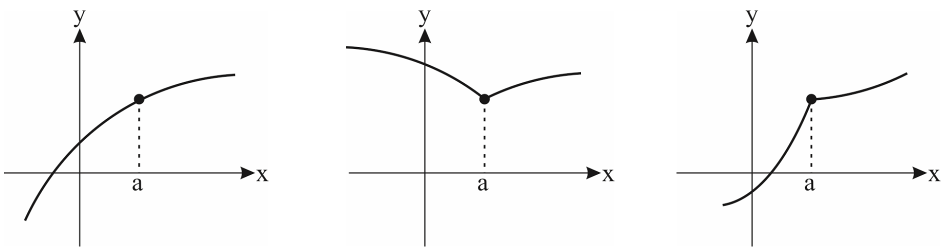
نکته: در مبحث حد مشاهده کردیم که در محاسبه‌ی حد توابع گاهی نیاز است، حد چپ و راست را به دست آوریم پس در این صورت تعریف پیوستگی نیز به صورت معادل به فرم زیر بیان می‌شود:

۱) $a \in D_f$

۲) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

مفهوم پیوستگی از روی نمودار

هر سه نمودار نشان‌دهنده‌ی پیوستگی تابع در $x = a$ می‌باشند.



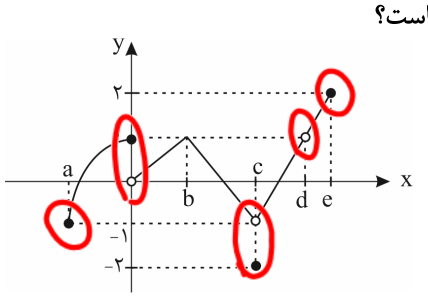
تست ۶۹: نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۵ ✓



x=a حد چپ نداره

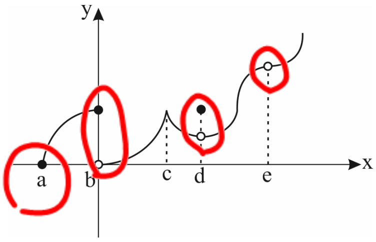
x=0 حد نداره

x = c مقدار با حد برابر نیست

x=d مقدار نداره

x=e حد راست نداره

تست ۷۰: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، تابع در چند نقطه از نقاط $\{a,b,c,d,e\}$ ناپیوسته است؟

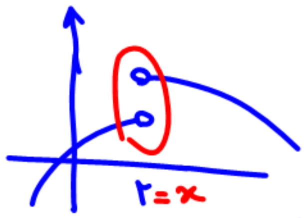


۱) ۲

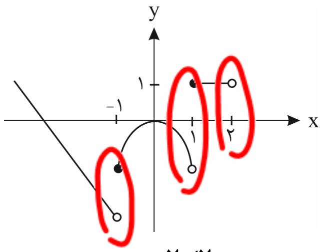
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵



f فقط در ① نقطه x=۲ ناپیوسته است

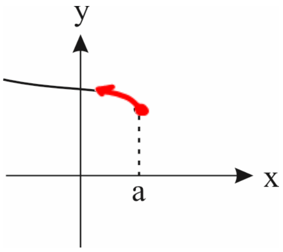
تست ۷۱: تابع با نمودار  در چند نقطه ناپیوسته است؟

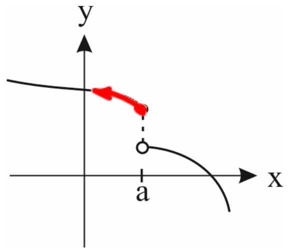
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پیوستگی یک طرفه

۱) پیوستگی چپ: تابع f در $x=a$ را از چپ پیوسته گوییم هرگاه:

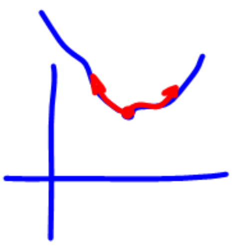
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a) \qquad (a\in D_f)$$

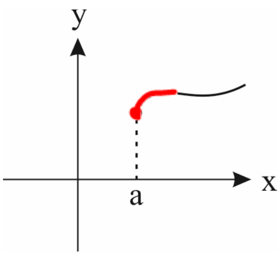


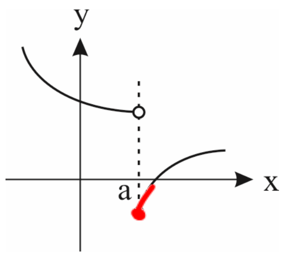


۲) پیوستگی راست: تابع f در $x=a$ را از راست پیوسته گوییم هرگاه:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \qquad (a\in D_f)$$







نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

نکته : پیوستگی فقط از یک طرف خودش ناپیوستگی است.

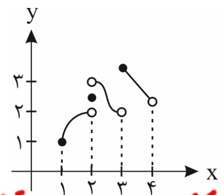
تست ۷۲: نمودار تابع f به صورت زیر است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) تابع در $x = ۲$ ناپیوسته است. T

۲) تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = f(۳)$ برقرار است. T

۳) تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$ برقرار است. ✓ F

۴) تابع مجموعاً در چهار نقطه ناپیوسته است. T



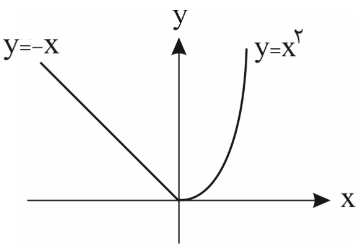
f در $x=۳$ ناپیوسته است در حالی که پیوستگی راست دارد. پیوستگی راست به تنهایی خود یک ناپیوستگی است.

منظور از $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ یعنی هم $x\to ۳^+$ و هم $x \to ۳^-$

تست ۷۳: تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$ در مبدأ .... است.

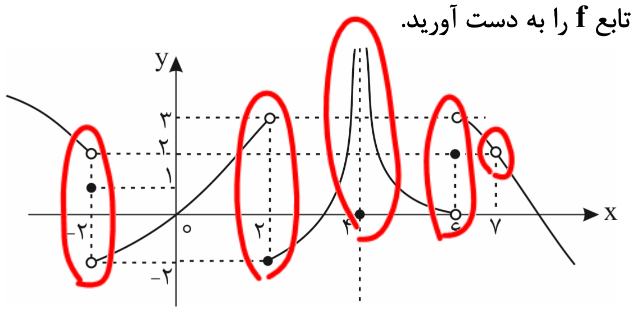
۱) پیوسته ۲) فقط پیوسته‌ی راست ۳) فقط پیوسته‌ی چپ ۴) ناپیوسته

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ واضح است که شکل به صورت یکپارچه به هم متصل است پس تابع در تمام نقاط به‌خصوص در صفر پیوسته است.



$$\begin{cases} ۰ \in D_f \\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} x^۲ = ۰ = f(۰) \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} (-x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

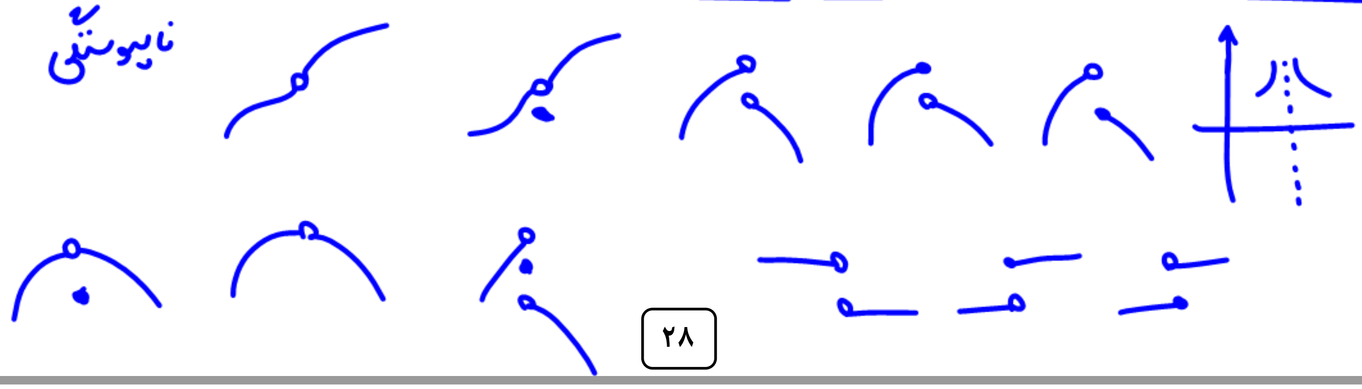
سوال ۷۴: در شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. نقاط ناپیوستگی تابع f را به دست آورید.



۵ نقطه

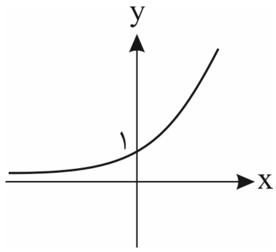
$x = -۲, ۲, ۴, ۶, ۷$

ناپیوستگی

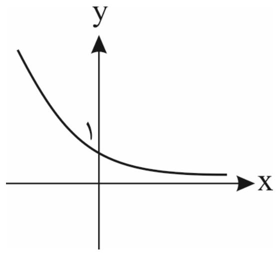


۱) توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته هستند و در کل $\mathbb{R}$ در تمام نقاط پیوستگی دارنـد. مـثلاً $f(x)=x^3-2x^2$، $f(x)=2$، $f(x)=2x^2-5$ و ... در تمام نقاط پیوسته هستند.

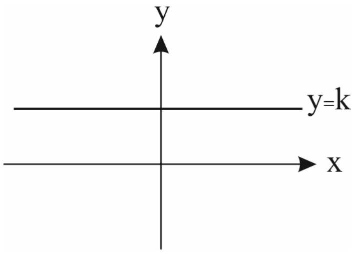
توابع به فرم $y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$، $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

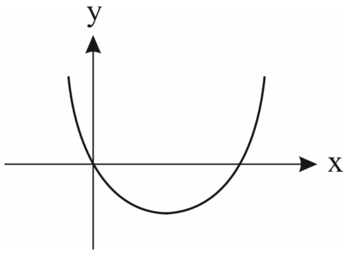


$y=2^x$

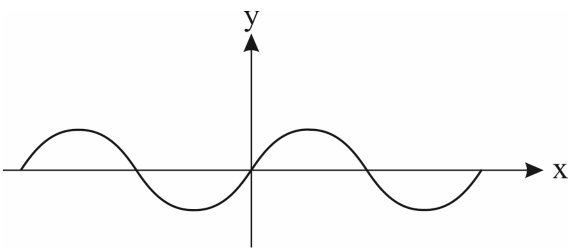


$y=(\frac{1}{2})^x$

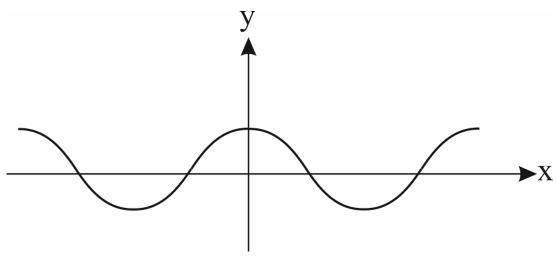




$y=x^2-x=x(x-1)$

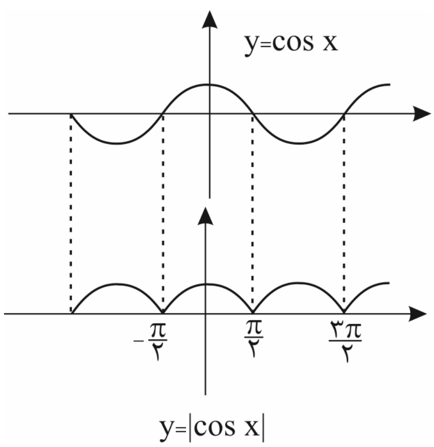


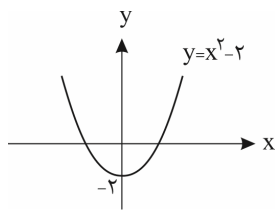
$y=\sin ax \ \ (a>0)$

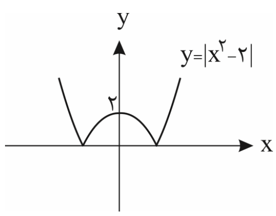


$y=\cos ax$

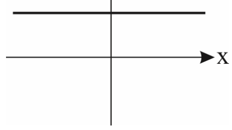
۲) اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد، $|f(x)|$ در x_0 پیوسته است، مـثلاً $y=\cos x$ و $y=x^4-2$ پیوسـته‌انـد، پـس $y=|\cos x|$ و $y=|x^4-2|$ نیز پیوسته‌اند.



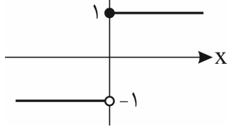




عکس مطلب فوق درست نیست، یعنـی اگـر $|f|$ در x_0 پیوسـته باشـد، نمـی‌تـوان گفـت کـه لزومـاً f در x_0 پیوسـته بـوده اسـت، مـثلاً



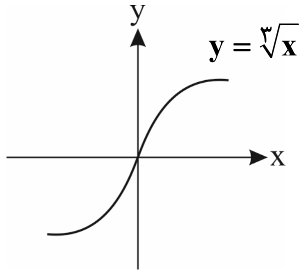
$y=|f(x)|=1$ در $x=0$ پیوسته است در حالی که $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$



در $x=0$

ناپیوسته است.

۳) اگر $f(x)$ پیوسته باشد، $f^n(x)$ و $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ نیز پیوسته است. مثلاً $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-7}$ و یا $f(x)=(x^2-6)^5$.



$x=1$ ناپیوسته زیرا حدچپ ندارد.

$D_f\ [1,+\infty)$

$x\geq 1$

۴) تابع $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ (f تابعی پیوسته) در هر نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی دامنه پیوسته است. برای مثال تابع $y=\sqrt{x-1}$ (دامنه‌ی تابع $x\geq 1$ است) در $x=2$ پیوسته است ولی در $x=1$ (نقطه‌ی انتهایی دامنه) ناپیوسته است، چون در همسایگی چپ $x=1$ تعریف نمی‌شود.

تست ۷۵ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است؟ (سراسری)

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ✓ ۴) ۱

پس

$a=f(2)=l_2=l_1$

$\lim\limits_{x\to 2} f=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-\sqrt{2x})}{2-x}\dfrac{(x+\sqrt{2x})}{(x+\sqrt{2x})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x=x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(2-x)}(x+\sqrt{2x})}$ (-1)

$=\dfrac{-2}{4}=\boxed{-\dfrac{1}{2}=f(2)=a}$

تست ۷۶ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۶)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

$l_1=l_2=f(0)=a$

$l_1=l_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}}{\underbrace{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}_{1-(1-x)=\cancel{x}}}(1+\sqrt{1-x})=1+\sqrt{1}=2=f(0)=a$

حدچپ و راست در $x=0$ از ضابطه اول بدست میاد.

تست ۷۷ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax-a+2 & x\leq 1\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

شرط پیوستگی در $x=1$: $l_1=l_2=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f=\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{x-1\overset{\text{مزدوج}}{=}\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\cancel{(\sqrt{x}-1)}}=\dfrac{1+1}{1}=2=l_1$

$l_2=\lim\limits_{x\to 1^-} f=ax-a+2=2=f(1)$; $\cancel{a}-\cancel{a}+2$

همواره $l_1=l_2=f(1)$ است

برای هر a پیوسته است.

$l_1=l_2=f(3)$

تست ۷۸ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+2^{x-3} & x<3 \\ a\log_2(1+x) & x\geq 3\end{cases}$ در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱/۵ ۳) ۱ ۴) صفر

$x\to 3^-$: $ax+2^{x-3}=3a+2^0=3a+1=l_1$

$x\to 3^+$: $a\log_2^{(x+1)}=a\log_2^4=2a=l_2=f(3)$

$l_1=l_2 \to 3a+1=2a$

$a=-1$

$f(2) \xrightarrow[2<3]{\text{ضابطه اول}} \cancel{a}x+2^{x-3}=-2+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}=-1/5$

تست ۷۹ : اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+3} & x<1\\ x^2+ax & x\geq 1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

$l_1=l_2=f(1)$

$\sqrt{ax+3}=x^2+ax$

$\sqrt{a+3}=1+a$

پس $a=1$

$f(-\frac{3}{4}=-0/75<1) \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} \sqrt{\cancel{a}x+3}$

$\sqrt{-\frac{3}{4}+3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1/5$

تست ۸۰: به ازای کدام مقدار A تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-2|x|} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

$\lim_{x\to 0} f \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-2|x|}$ کم توان $-\frac{1}{2}=f(0)=A$

۵) در توابع دو ضابطه‌ای یا چندضابطه‌ای نقاط مرزی (تغییر ضابطه) مشکوک به ناپیوستگی هستند و باید پیوستگی را در آن‌ها کنترل کنیم.

تست ۸۱: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-5 & x>2\\ ax-1 & x\leq 2\end{cases}$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟ (تجربی ۹۱)

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-2$ ۴) فقط $a=2$

$x=2,1$ هم باید پیوسته باشد

$x=2$ $l_1=l_2=f(2)$

$x^2+ax-5=ax-1$

$l_1=4+\cancel{2a}-5=\cancel{2a}-1=l_2$

$l_2-1=-1=l_2=f(1)$

همواره پیوسته است و به a بستگی ندارد هر مقدار a

تست ۸۲ : به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & 1\le x\le 6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & x>6\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟ (تجربی ۹۴)

$[1,+\infty)$

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

باید در عدد تغییر ضابطه یعنی $x=6$ پیوسته باشد

$l_1=l_2=f(6) \longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{x=6}\right)=a+\cos^2\left(\frac{\pi(x=6)}{36}=\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1}{2}=a+\frac{3}{4} \longrightarrow a=-\frac{1}{4}$

$y=-\frac{1}{x}$

۶) در توابع کسری ریشه‌های مخرج نقاط ناپیوستگی تابع هستند. مثلاً $y=\frac{-1}{x}$ در $x=0$ ناپیوسته است.

تست ۸۳: تابع $y=\frac{2x-3}{x^2-ax+9}$ به ازای چه مقادیری از a همواره پیوسته است؟

۱) $a>6$ ۲) $-6<a<6$ ۳) $a<-6$ ۴) $\varnothing$

مخرجش که درجه دوهست، ریشه ندارد

$\underbrace{\Delta}_{\text{مخرج}}<0 \longrightarrow (-a)^2-4(1)(9)<0$

$a^2<36$

$|a|<6 \longrightarrow -6<a<6$

۷) تابع $y=[ax]$ در نقاط توش $\mathbb{Z}$ کن دچار ناپیوستگی می‌شود. مثلاً $y=[\frac{x}{2}]$ در نقاط $\frac{x}{2}=k$ و در نتیجه $x=2k$ یعنی xهای زوج ناپیوسته است. نقطه‌ی $x=4$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^+}[\frac{x}{2}]=[\frac{4^+}{2}=2^+]=2\\ \lim\limits_{x\to 4^-}[\frac{x}{2}]=[\frac{4^-}{2}=2^-]=1\\ f(4)=[\frac{4}{2}]=2\end{cases}$$

در این نقطه حد چپ و راست نابرابر است پس تابع پیوسته نیست. (چون اصلاً حد ندارد.)

دقت کنید که در xهای توش $\mathbb{Z}$ کُنِ ضریب صفرکن، تابع پیوسته می‌باشد. مثلاً اگر $f(x)=(x-4)[\frac{x}{2}]$ باشد، تابع در $x=4$ پیوسته

است زیرا:

$$\lim_{x\to ۴^+} (x-۴)[\frac{x}{۲}] = (۴-۴)[\frac{۴^+}{۲} = ۲^+] = ۰\times ۲ = ۰$$

$$\lim_{x\to ۴^-} (x-۴)[\frac{x}{۲}] = (۴-۴)[\frac{۴^-}{۲} = ۲^-] = ۰\times ۱ = ۰$$

$$f(۴) = (۴-۴)[\frac{۴}{۲}] = ۰\times ۲ = ۰$$

یه دقتِ دیگه:

اگه xهایِ توش $\mathbb{Z}$ کن، طول نقطه‌ی **min** نسبی عبارت درون جزء صحیح باشند باز هم تابع در آن‌جا پیوسته خواهد بود. مثلاً $f(x) = [\sin x]$ در $x = \frac{۳\pi}{۲}$ توش $\mathbb{Z}$ می‌شود ولی باز هم پیوسته است چون:

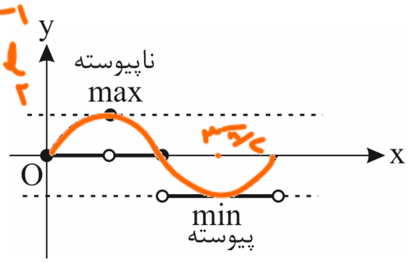
$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^+} [\sin x] = [-۱^+] = -۱$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-} [\sin x] = [-۱^+] = -۱$$

$$f(\frac{۳\pi}{۲}) = [\sin\frac{۳\pi}{۲}] = -۱$$

$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} [\sin x]$

$\begin{cases} x\to\frac{3\pi}{2}^+ & -1 = l_1 \\ x\to\frac{3\pi}{2}^- & -1 = l_2 \end{cases}$



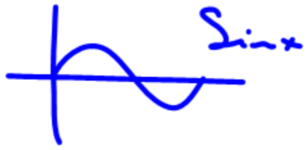
$l_1 = l_2 = -1 = f(\frac{3\pi}{2})$

تست ۸۴: تابع $f(x) = (-۱)^{[x]} \sin \pi x$ در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ *(ریاضی خارج ۹۳)*

۱) همواره پیوسته ✓
۲) فقط در اعداد فرد پیوسته
۳) فقط در اعداد زوج پیوسته
۴) از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته

تست ۸۵: پیوستگی تابع $f(x) = (x^۲ - ۹)[\frac{x}{۳}]$ در نقاط $x = ۳$ و $x = -۳$ به ترتیب چگونه است؟

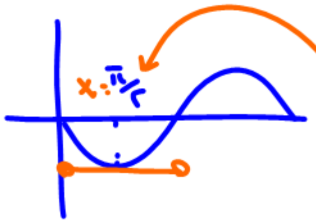
۱) در دو نقطه ناپیوسته است.
۲) در دو نقطه پیوسته است. ✓
۳) در نقطه‌ی $x = ۳$ پیوسته و در نقطه‌ی $x = -۳$ ناپیوسته است.
۴) در نقطه‌ی $x = ۳$ ناپیوسته و در نقطه‌ی $x = -۳$ پیوسته است.



تست ۸۶: تابع $f(x)=[-\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{۲}$، .... است.

۱) فقط پیوسته‌ی راست   ۲) فقط پیوسته‌ی چپ

۳) پیوسته   ۴) نه از راست و نه از چپ پیوسته

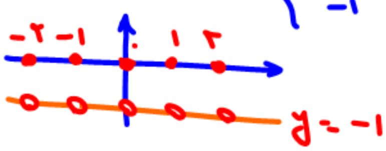


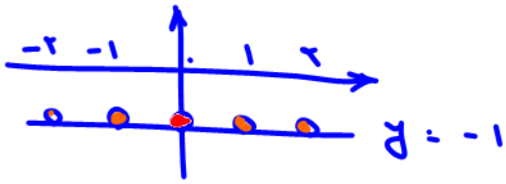
زیرا $x=\frac{\pi}{۲}$ برای $y=-\sin x$ طول مینیمم است.

تست ۸۷: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\overset{-۱}{\cancel{[x]+[-x]}} & x\notin\mathbb{Z}\\ a=-۱ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) -۱ ۲) ۱   ۳) صفر   ۴) همواره ناپیوسته

$y=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$





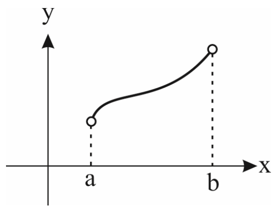
تست ۸۸: تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}\sin\frac{\pi x}{۲}$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) فقط در اعداد زوج پیوسته است.   ۲) فقط در اعداد فرد پیوسته است.

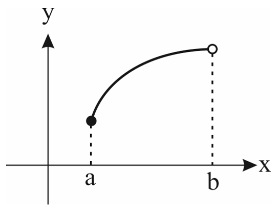
۳) همواره ناپیوسته است.   ۴) همواره پیوسته است.

پیوستگی در بازه

۱) تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه از بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد:



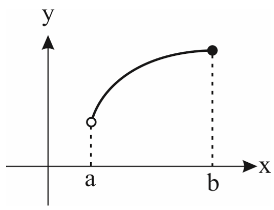
$$\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$



۲) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته است اگر دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:

در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. ۱) $\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

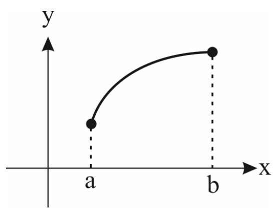
در a پیوسته از راست باشد. ۲) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$



۳) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته است اگر دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:

در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. ۱) $\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

در b پیوسته از چپ باشد. ۲) $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$



۴) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است اگر شرط‌های زیر همگی برقرار باشند:

در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. ۱) $\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

در b پیوسته از چپ باشد. ۲) $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

در a پیوسته از راست باشد. ۳) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

تست ۸۹: تابع $y = x^2[x] + 3x$ در بازه‌ی $[0,1]$ .... است.

۱) همواره پیوسته ۲) در یک نقطه ناپیوسته ۳) در دو نقطه ناپیوسته ۴) در بی‌شمار نقطه ناپیوسته

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ برای آن که f در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته باشد:

۱) باید در بازه‌ی $(0,1)$ پیوسته باشد. $[x]=0$ پس $y=3x$ که همواره پیوسته است.

۲) در $x=0$ پیوسته‌ی راست باشد.

۳) در $x=1$ پیوسته‌ی چپ باشد.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ در $x=0$ پیوسته‌ی راست است.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1[1^-] + 3(1) = 3 \\ f(1) = 1[1] + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$ در $x=1$ ناپیوسته است.

پس در بازه‌ی $[0,1]$ در کل ناپیوسته است. به بیان دیگر این تابع در بازه‌ی $[0,1)$ پیوسته است ولی در $x=1$ ناپیوسته است.

تست ۹۰: تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]^{۲}-[x]$ روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

فقط در $x=0$

۰ و ۱

$$\begin{cases} x\to 1^+ & 1-1=0 \\ x\to 1^- & 0-0=0 \end{cases} \quad \text{پیوسته}$$

$$\begin{cases} x\to 0^+ & 0 \\ x\to 0^- & (-1)^2-(-1)=2 \end{cases}$$

ناپیوسته

تست ۹۱: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۳)[\frac{۱}{۳}x-۱]$ روی بازه‌ی $(۰,۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

$x=6$

$x=3,6$

پیوسته است   ناپیوسته است

تست ۹۲ : به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۸+x^{۳}}{|x+۲|} & x\neq -۲\\ a & x=-۲\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲-   ۲) ۶-   ۳) ۶   ۴) ۱۲

حد چپ = مقدار تابع

$$f(-2)=a=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3=(\cancel{2+x})(4-2x+x^2)}{|x+2|=-(\cancel{x+2})}=-12$$

$-2{,}1$

$x\to -2$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.