خواص لگاریتم:

① $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$

② $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$

③ $\log_b^{a^n} = n \log_b^a$

④ $\log_b^1 = 0$

⑤ $\log_b^b = 1$

⑥ $\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$

⑦ $\log_b^a = \log_{b^n}^{a^n} = \log_{\sqrt[n]{b}}^{\sqrt[n]{a}} = \log_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}$

⑧ $x^{\log_b^a} = a^{\log_b^x}$

⑨ $b^{\log_b^a} = a^{\log_b^b} = a^1 = a$

⑩ $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ فرمول تغییر مبنا

⑪ $\log_b^a \cdot \log_a^b = 1 \rightarrow \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = 1$

$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

حاصل $P = \left[\log_{3}^{\sqrt{201}}\right] + \left[\log_{5}^{81}\right]$ ؟

٣	٤
٥	٦

$5^2 = 25 < 81 < 5^3 = 125 \longrightarrow \log_5^{(2)} < \log_5^{81} < \log_5^{(3)} \rightsquigarrow 2 < \log_5^{81} < 3$

$\left[\log_5^{81}\right] = 2$

$3^4 = 81 < 201 < 3^5 = 243 \longrightarrow 4 < \log_3^{201} < 5 \xrightarrow[\text{ضربه } \frac{1}{2}]{} 2 < \left(\frac{1}{2}\right)\log_3^{201} < \frac{5}{2} = 2{,}5$

$2 < \log_3^{\sqrt{201}} < 2{,}5$

$\left[\log_3^{\sqrt{201}}\right] = 2$ $\quad$ جواب $= 2 + 2 = 4$

٧	٢٧/
٢٥	٥

حاصل $\log_{\sqrt{٥}}^{٥} + \log_{\sqrt{٣}}^{٥}$ ؟

$\log_b^a = n \Leftarrow a = b^n$

$\log_{\sqrt{٣}=٣^{\frac{1}{٢}}}^{٣} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢ \log_٣^٣$ (١) ٢

$٥ = ٥$ $٢٥ = ٥^٢$

$\log_{\sqrt{٥}=٥^{\frac{١}{٢}}}^{٥} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} \log_٥^٥ = ٢$

جواب $= ٢ + ٢٥ = ٢٧$

معادله $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$ چند جواب دارد؟

صفر	✓ ۱
۲	بی‌شمار

$a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}$

$5^{\log x} + 5^{\log x} = 50 \rightsquigarrow 2(5^{\log x}) = 50 \rightsquigarrow 5^{\log x} = 25 = 5^2$

چون پایه‌ها برابرند توان‌ها هم برابرند.

$\log x = 2 \rightsquigarrow x = 10^2 = 100$

یک جواب دارد.

توان ۱ ← پایه ۱۰ ← $\log$

اگر $\log_{\mu}^{\mu} = a$ و $\log_{\delta}^{\mu} = b$ حاصل عبارت $\log_{\mu\cdot}^{\sqrt{\mu\vee}}$ چند است؟

$\log_{\mu\cdot}^{\sqrt{\mu\vee}} = \log_{\mu\cdot}^{\sqrt{\mu\vee=\mu^{\mu}}} = \mu^{\frac{\mu}{\mu}}$

$= \frac{\mu}{\mu}\log_{\mu\cdot}^{\mu}$ $\quad \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

$= \frac{\mu}{\mu}\left(\frac{1}{\log_{\mu}^{\mu\cdot} = \log_{\mu}^{\mu(\mu\cdot)} = \log_{\mu}^{\mu} + \log_{\mu}^{\mu\cdot=\mu(\delta)}}\right)$

$= \frac{\mu}{\mu}\left(\frac{1}{1 + \log_{\mu}^{\mu} + \log_{\mu}^{\delta}} = 1 + a + \frac{1}{b} = \frac{b+ab+1}{b}\right) = \frac{\mu}{\mu}\left(\frac{b}{ab+b+1}\right)$

$\log_{\mu}^{\delta} = \frac{1}{b}$

(۱ $\frac{\mu}{\mu}\left(\frac{b}{ab+b+1}\right)$

(۲ $\frac{\mu}{\mu}\left(\frac{b}{ab+b+1}\right)$

(۳ $\frac{\mu}{\mu}\left(\frac{a}{ab+a+1}\right)$

(۴ $\frac{\mu}{\mu}\left(\frac{a}{ab+a+1}\right)$

از معادله $3^x + \frac{8}{3^x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ حاصل عبارت $\log_9(x^2 - 20x + 7)$ کدام است؟

$3^x = t$ فرض

$3^x + \frac{8}{3^x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{1}{2}}\right)^{2x} = 3^{-x} = \frac{1}{3^x}$

$3^x + \frac{8}{3^x} = \frac{1}{3^x}$

$t + \frac{8}{t} = \frac{1}{t}$ طرفین ضرب در $3t$ ⟶ $3t^2 + 8t - 3 = 0$

$t^2 + 8t - 9 = 0$ ⟵ جمع ضرایب صفر

$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -9 \end{cases}$

$t_1 = \frac{1}{3}$ ⟵ $t_2 = \frac{-9}{3} = -3 = -3^x$ ⟵ تابع نمایی همواره مثبت و 3 نیست

$t = 3^x = \frac{1}{3} \rightarrow x = -1$

$x^2 - 20x + 7 = 27 = 3^3$

$\log_9 3^3 = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$

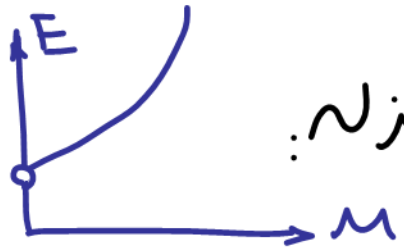
۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{1}{2}$

کاربرد لگاریتم در زلزله:



M : بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر

انرژی آزاد شده $= E =$ ؟

در زلزله برحسب ارگ erg

$$\log_{10} E = 1{,}5M + 11{,}8$$

انرژی آزاد شده در زلزله ۸ ریشتر چند برابر ۷ ریشتر است؟

$$\frac{E_8}{E_7} = \frac{10^{1{,}5(8)+11{,}8}}{10^{1{,}5(7)+11{,}8}} = \frac{10^{1{,}5(8)}\cdot 10^{11{,}8}}{10^{1{,}5(7)}\cdot 10^{11{,}8}} = 10^{8(1{,}5)-7(1{,}5)=1{,}5} = 10^{3/2}$$

$$\frac{E_8}{E_7} = \sqrt[2]{10^3} = \sqrt{1000} \approx 31{,}6$$

① واحد تغییر در شدت زمین لرزه برحسب ریشتر تقریبا ۳۲ برابر انرژی بیشتر دارد.

زلزله‌ای به بزرگی M_A ۶٫۶ ریشتر، منطقه A و زلزله M_B ۸٫۱ ریشتر، منطقه B را خراب کرده است.

انرژی آزاد شده در منطقه B چند برابر منطقه A است؟

۱) ۱۰۰

۲) ۱۰۰۰

۳) ۱۰ ۰۰۰

۴) ۱۰۰ ۰۰۰

$$\log_{10} E = 1{,}5M + 11{,}8 \longrightarrow E = 10^{1{,}5M + 11{,}8}$$

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{10^{1{,}5M_B \; 11{,}8}}{10^{1{,}5M_A \; 11{,}8}} = 10^{1{,}5(M_B - M_A)} = 10^{1{,}5(2)} = 10^3 = 1000$$

تست: اگر نمودار $f(x)=a(b^x)-1$ از $A\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\ 11\end{matrix}\right.$ بگذرد. $f(-1)=?$

$f(-\frac{1}{2})=a\,b^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{2}\longrightarrow \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\longrightarrow a=\frac{3}{2}\sqrt{b}$ *

$f(1)=ab-1=11\longrightarrow ab=12\xrightarrow{*}\frac{3}{2}\sqrt{b}\,b=12$

$b=4$: طرفین را حساب بزن $\quad a=\frac{3}{2}\sqrt{b=4}=3$

$f(x)=3(2^x)-1\longrightarrow f(-1)=\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{2}$

۱) $-\frac{3}{4}$

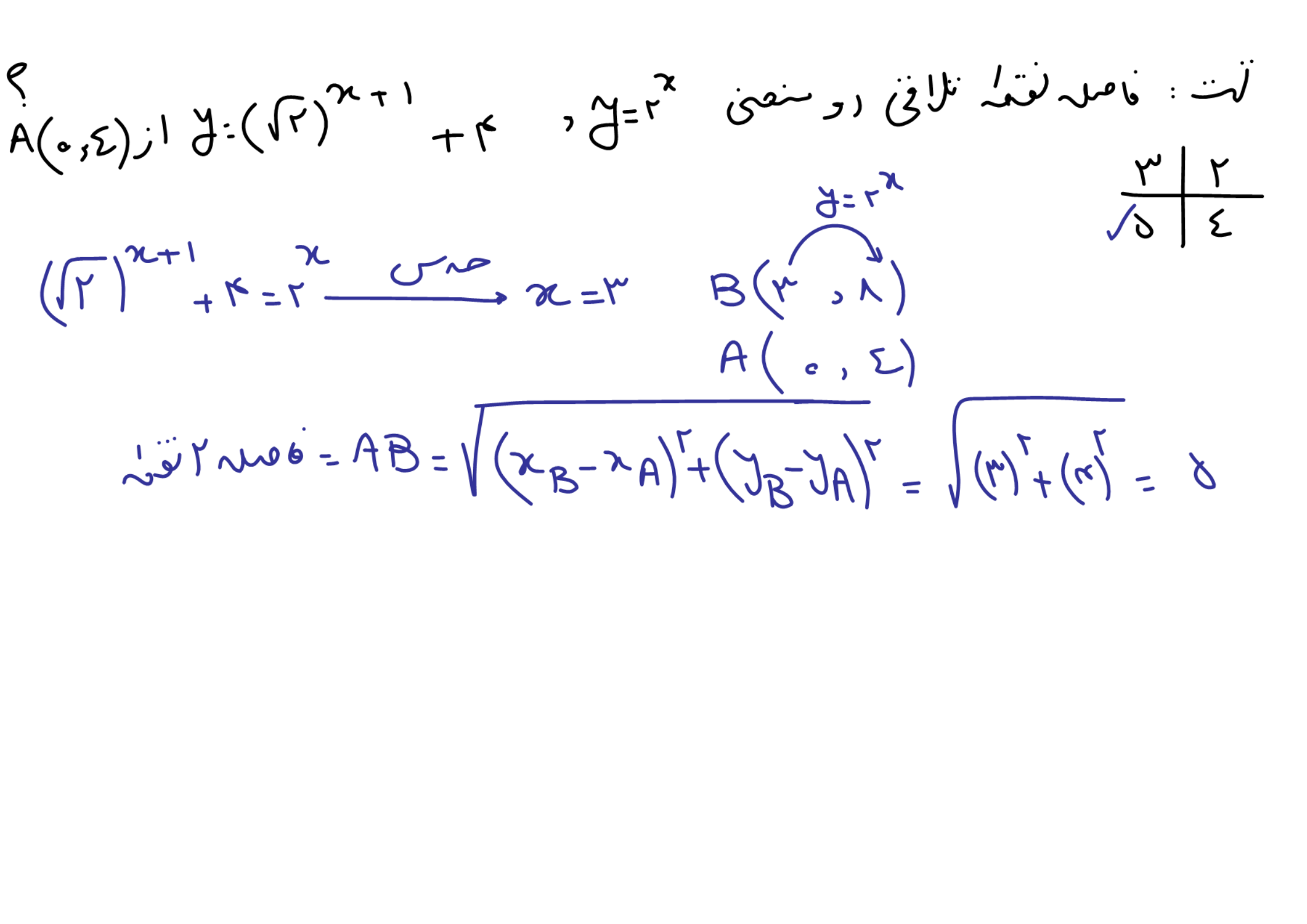
۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{4}$ ✓

۴) $\frac{3}{4}$

تست: فاصله نقطه تلاقی دو سهمی $y=2^x$ ، $y=(\sqrt{2})^{x+1}+4$ از $A(0,4)$ ؟

۳	۲
$\sqrt{5}$	۴



$(\sqrt{2})^{x+1}+4=2^x \xrightarrow{\text{حدس}} x=3$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3)^2+(4)^2}=5$ واحد

مجموعه جواب نامعادله $(3+2\sqrt{2})^{2x+1} > (3-2\sqrt{2})^{x+2}$

۱) $(-1,+\infty)$

۲) $(-\infty,-1)$

۳) $(0,+\infty)$

۴) $(-\infty,0)$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9-8=1 \rightarrow 3+2\sqrt{2} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

مزدوج

$\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = (3-2\sqrt{2})^{-1}\right)^{2x+1} = (3-2\sqrt{2})^{-2x-1} > (3-2\sqrt{2})^{x+2}$

$0 < 3-2\sqrt{2} < 1$ (چون $3-2\sqrt{2} = 3-2.8 = 0.2$ و $\sqrt{2} = 1.4$)

$-2x-1 < x+2 \rightarrow -3 < 3x \Rightarrow -1 < x$

پاسخ: $x > -1$

نکته: اعداد بین صفر و یک برعکس، هر چه به توان بیشتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

نکته :

if $0<a<1$: $a > a^2 > a^3 \dots > a^n$

if $0<a<1$: $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots < \sqrt[n]{a}$

نیمه عمر ماده‌ای ۲۰۰ سال و جفتار اولیه آن ۵۰۰ گرم است. پس

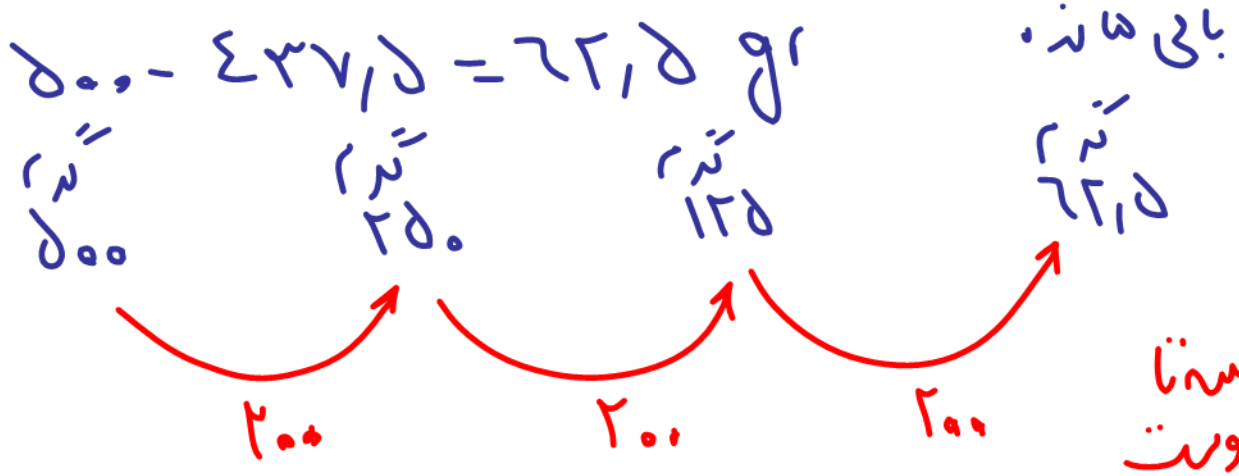
از چند سال ۴۳۷٫۵ گرم از این ماده از بین می‌رود؟

۱) ۶۶٫۶۶

۲) ۴۸۰

۳) ۶۰۰

۴) ۲۳۳٫۳



جواب: سه تا دوبیت سال

$$m_{\text{باقی مانده}} = \frac{m_0}{2^{\frac{t_{\text{زمان}}}{\text{نیمه عمر}}}} \qquad \text{جرم اولیه}$$

$$۶۲٫۵ = \frac{۵۰۰}{۲^{\frac{t}{۲۰۰}}} \longrightarrow ۲^{\frac{t}{۲۰۰}} = \frac{۵۰۰}{۶۲٫۵} = ۸ = ۲^{۳}$$

$$\frac{t}{۲۰۰} = ۳ \rightarrow t = ۶۰۰$$

نکته :

$$\text{جرم باقی‌مانده} = \frac{\text{جرم اولیه}}{2^{\frac{\text{زمان}}{T}}}$$

T دوره تناوب

مثال

$$\log_2 \log_2 \log_3 \sqrt{x} = 0$$

چند جواب دارد؟

صفر	۱
۲	۳

به تعداد لگاریتم‌ها، تعریف لگاریتم بزن:

$$\log_2 \left(\log_2 \log_3 \sqrt{x} \right) = 0 \rightsquigarrow 2^0 = \log_2 \log_3 \sqrt{x}$$

به توان

$$\log_2 \left(\log_2 \log_3 \sqrt{x} \right) = 1 \rightarrow \log_2 \log_3 \sqrt{x} = 2^1 = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 3^2 = 9 \rightarrow x = 81$$

به توان

حاصل $M = \log_5^2 + \log_2^5$ دقیقا در کدام بازه است؟

نکته:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} \geq 2 & a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \leq -2 & a < 0 \end{cases}$$

$a = 1$, $a = -1$

$a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1$

$a + \frac{1}{a} = -2 \Leftrightarrow a = -1$

$M = \log_5^2 + \log_2^5 > 2$

۱) $M \geq 2$

۲) $M < -2$

۳) $M \leq -2$

۴) $M > 2$

$\log_5^5 = 1$ $\log_2^2 = 1$

$\log_5^2 > 1$ $\log_2^5 < 1$

$\log_5^2 \neq 1$ $\log_2^5 \neq 1$: می دانیم

$\log_5^2 = \frac{1}{\log_2^5}$ عکس هم $\log_2^5$, $\log_5^2$

نکته: $\log_{\bigcirc}^{\bigcirc}$: اگر هردو $\bigcirc$ بیشتر از یک یا هردو $\bigcirc$ بین صفر و یک باشند حاصل مثبت ولی اگر یکی از $\bigcirc$ ها بیش از یک و دیگری بین صفر و یک باشند حاصل منفی است.

$\log_{6}^{5} > 0$ $\quad \log_{0.6}^{0.5} > 0$ $\quad \log_{0.3}^{1.7} < 0$ $\quad \log_{1.3}^{0.7} < 0$

اگر x در دامنه تابع $f(x)=\log\frac{1}{|\cos x|}$ تغییر کند، آن‌گاه $f(x)$ ...

از کدام بازه تغییر می‌کند؟ برد f کدام است؟

$$-1\le\cos x\le 1 \longrightarrow 0\le|\cos x|\le 1 \longrightarrow \frac{1}{|\cos x|}\ge 1$$

$$\log\frac{1}{|\cos x|}\ge 1$$

$$10 > 1$$

$$\log\frac{1}{|\cos x|}\ge 0$$

۱) $(0,+\infty)$

۲) $[0,+\infty)$

۳) $(1,+\infty)$

۴) $\mathbb{R}$