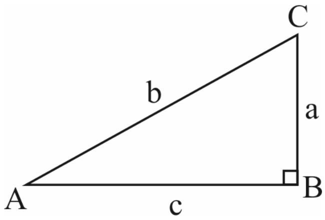
مثلثات پایهٔ یازدهم رشتهٔ تجربی

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}$، ۲) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}$، ۳) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$ و ۴) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.

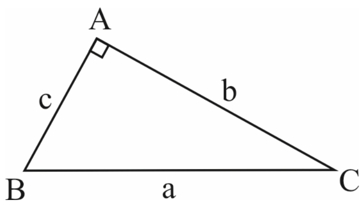


$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست ۱: در شکل مقابل $a+c=۱۸$ و $\cos\hat{B}=\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$

۲) $\frac{۱۲}{۵}$

۳) $\frac{۱۳}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{۵}{۱۳}a$$

از رابطهٔ $a+c=۱۸$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=۱۸ \Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow a=۱۳ \Rightarrow c=۵$$

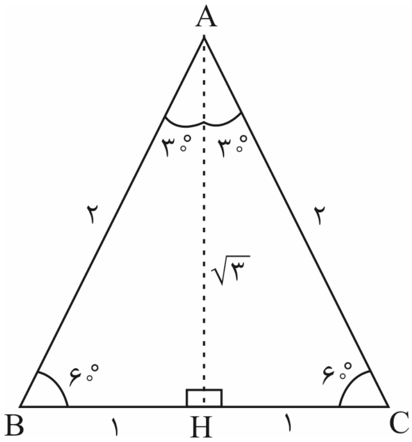
حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۳^۲=b^۲+۵^۲ \Rightarrow b^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \xrightarrow{\sqrt{\ }} b=۱۲$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

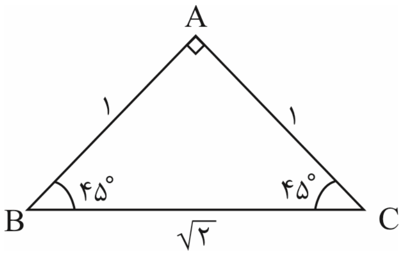
$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \cos ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \tan ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\\ \cot ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{cases},\quad\begin{cases}\sin ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \tan ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\\ \cot ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال **B**) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad \cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{AC}{AB}=۱\qquad \cot ۴۵^\circ=\frac{AB}{AC}=۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

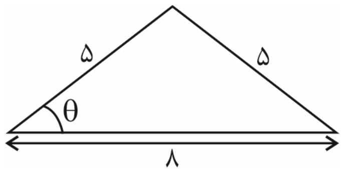
تست ۲: مقدار x در تساوی $x\cos ۶۰^\circ=\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ-۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ+\cot ۴۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳   ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}-۴\times\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\frac{۳-۲}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times۲}x=\frac{۲}{۳}$$

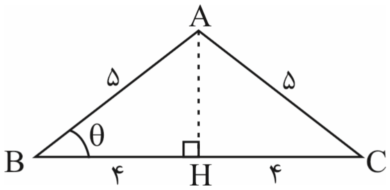
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $۲\cos\theta + \sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۲۵ = AH^۲ + ۱۶ \Rightarrow AH^۲ = ۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH = ۳$$

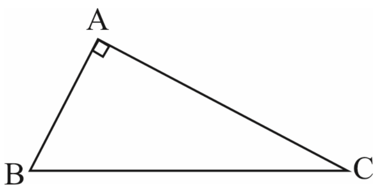
$$\sin\theta = \frac{AH}{AB} = \frac{۳}{۵} \ , \ \cos\theta = \frac{BH}{AB} = \frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta + \sin\theta = \frac{۸}{۵} + \frac{۳}{۵} = \frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \cos\hat{C} \ , \ \sin\hat{C} = \frac{AB}{BC} = \cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \cot\hat{C} \ , \ \tan\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \cot\hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P = \frac{۵\sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ \times \tan ۷۶^\circ}{۸\cot ۱۴^\circ \times \cos ۸۸^\circ \times \tan ۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

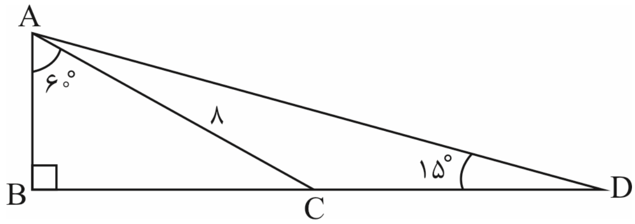
$$۷۶^\circ + ۱۴^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \tan ۷۶^\circ = \cot ۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ + ۷^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۸۳^\circ = \tan ۷^\circ$$

$$۲^\circ + ۸۸^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۲^\circ = \cos ۸۸^\circ$$

$$P = \frac{۵\sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ \times \tan ۷۶^\circ}{۸\tan ۷۶^\circ \times \sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ} = \frac{۵}{۸}$$

تست ۵: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



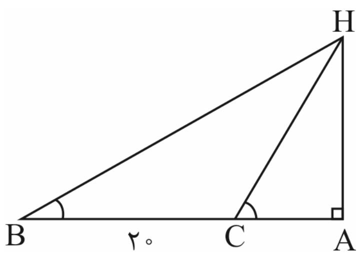
۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

۴) ۱۶

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



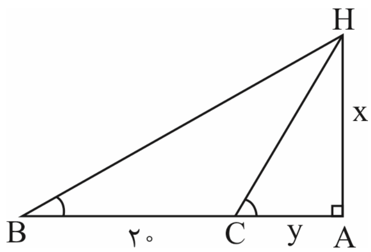
۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH=x$ و $AC=y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:



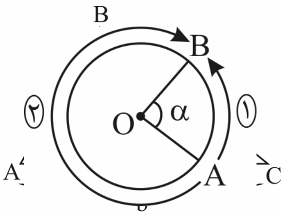
$$\begin{cases}\tan\hat{B}=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{x}{۲۰+y}\Rightarrow \tan۳۰^\circ=\dfrac{x}{y+۲۰}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\quad (*)\\ \tan\hat{C}=\dfrac{AH}{AC}\Rightarrow \tan۶۰^\circ=\dfrac{x}{y}\Rightarrow \sqrt{۳}=\dfrac{x}{y}\end{cases}$$

$$x=y\sqrt{۳}\xrightarrow{(*)}\dfrac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow ۳y=y+۲۰\Rightarrow y=۱۰\Rightarrow x=۱۰\sqrt{۳}\Rightarrow AH=۱۰\sqrt{۳}$$

تست ۷: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A}=۹۰^\circ$، حاصل $\dfrac{۱}{۱+\tan\hat{C}}+\dfrac{۱}{۱+\tan\hat{B}}$ کدام است؟

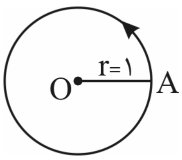
۱) ۱ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

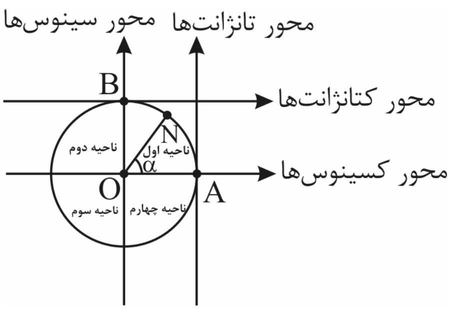
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

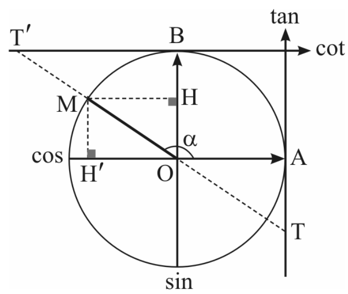
نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

نقطه‌ی B : مبدأ محور $\cot$

نقطه‌ی A : مبدأ محور $\tan$

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای $\sin$ و $\cos$

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی



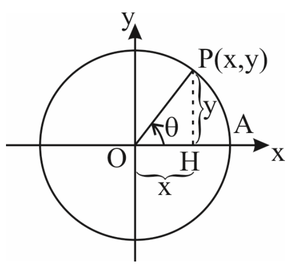
فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

در این صورت از انتهای کمان بر محور $\sin$ و $\cos$ عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور $\tan$ و $\cot$ قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha}$$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

مثال ۸: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:

$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:
$$x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرفی:
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

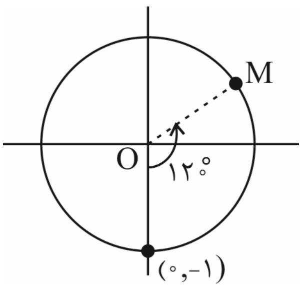
تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

۱) -۲۴۰° ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°

تست ۹: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.

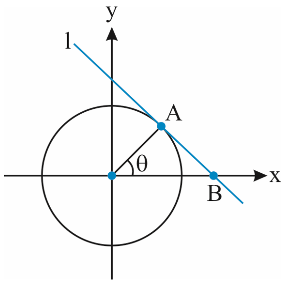


OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تست ۱۰: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



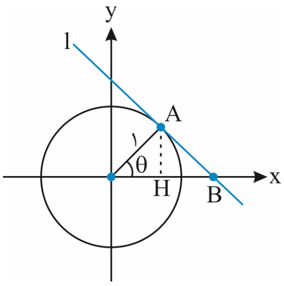
۱) $\cos\theta$

۲) $\frac{۱}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\frac{۱}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



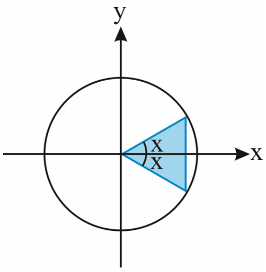
$$(۱)^۲ = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} ۱ = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{۱}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^۲ = (۱)^۲ + AB^۲ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} - ۱ = \frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \tan^۲\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تست ۱۱: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A\times(\tan x + \cot x)$ کدام است؟



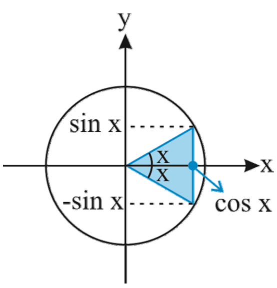
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $۲\sin x$ است. پس داریم:



$$A = \frac{۱}{۲} \times (۲\sin x)\cos x = \sin x \cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x\cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱}}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \sin x\cos x\left(\frac{۱}{\sin x\cos x}\right) = ۱$$

تست ۱۲: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ *(سراسری)*

۱) $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$

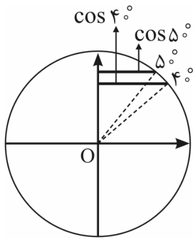
۲) $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳) $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$

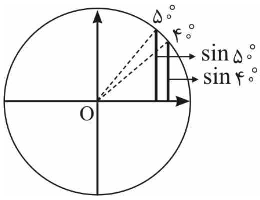
۴) $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

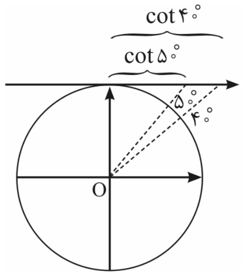
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



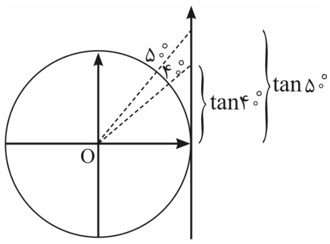
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow$ $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow$ $\sin 50^\circ > \sin 40^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow$ $\cot 40^\circ > \cot 50^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow$ $\tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x) = \sin x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin 50^\circ > \sin 40^\circ$

$f(x) = \cos x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

$f(x) = \tan x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

$f(x) = \cot x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \cot 50^\circ < \cot 40^\circ$

تست ۱۳: اگر $\cos\alpha . \sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha . \tan\alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

تست ۱۴: حاصل عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{۲}+\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}$ که در آن $x \in [۰ , \frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x+\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰ , \frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y = x$)، $\cos x > \sin x$:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}+\frac{\sin x+\cos x}{۲}=\frac{-(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{۲}=\cos x$$

تست ۱۵: اگر $a \in \mathbb{R}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}} \ge ۰ \quad \Rightarrow \quad \cos x \ge ۰ \quad \Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x > ۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot x \le ۰ \\ \cot x-a^۲ < ۰\end{cases} \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x-a^۲} \ge ۰$$

تست ۱۶: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ < \sin ۴۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$ ۲) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۴۰^\circ < \cos ۲۰^\circ$

۳) $\sin ۴۰^\circ < \sin ۹۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۷۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

تست ۱۷: اگر $\sin\theta+\tan\theta > ۰$ و $\sin\theta \times \tan\theta < \frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست ۱۸: اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود **m** کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۲) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}]$ ۳) $(\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۴) $[۰,\frac{۲}{۵}]$

تست ۱۹: اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار **m** برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

تست ۲۰: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۲+\cos\alpha}$ کدام است؟

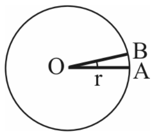
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تست ۲۱: بیشترین مقدار عبارت $۴+\cos^۲ x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

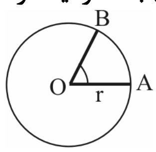
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل بـه آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ $\qquad$ $A\hat{O}B$ = ۱ درجه

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = r$ $\qquad$ $A\hat{O}B$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و ۲π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی ۲π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان است.

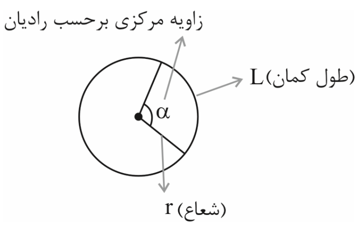
رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}}$$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و **D** اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R = ۱$ فرض شود، داریم:

$$D = \frac{۱۸۰}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۴} D \simeq ۵۷^\circ, ۳$$

هر یک رادیان، تقریباً ۵۷° است.



$L = r\alpha$

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد **L** ، شعاع دایره را با **r** و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تست ۲۲: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = ۵۰^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

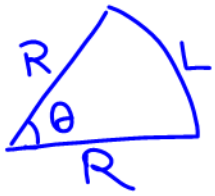
۱) $\frac{۱}{۵۰}$ $\qquad$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ $\qquad$ ۳) $\frac{۱۸}{\pi}$ ✓ $\qquad$ ۴) $\frac{۳۶}{\pi}$

$$L = r\theta$$
$$۱۰ = r\left(۵۰\,\frac{\pi}{۱۸۰}\right) \rightarrow \boxed{r = \frac{۱۸۰}{۵\pi}} \rightarrow \frac{S = \pi r^۲}{P = ۲\pi r} = \frac{۱}{۲}r = \frac{۱۸}{\pi}$$

تست ۲۳: دایره‌ای به مساحت 4π مفروض است. قطاعی به محیط ۷/۱۴ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi \simeq 3/14)$

$S = 4\pi = \pi R^2 \longrightarrow R = 2$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ✓ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰



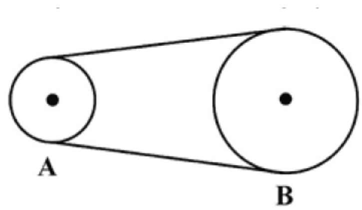
$L = R\theta$

محیط قطاع $= R + R + R\theta = 2R + R\theta = 7/14$

$4 + 2\theta = 7/14 \longrightarrow 2\theta = 3/14 = \pi$

$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

تست ۲۴: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های **A** و **B** توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی **A**، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی **B** برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی **B** به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی **A** چند دور می‌زند؟



۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵ ✓
۴) ۱۰

$L_A = L_B$

$R_A \theta_A = R_B \cdot \theta_B$

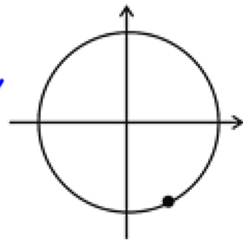
$20\ \theta_A = 100\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

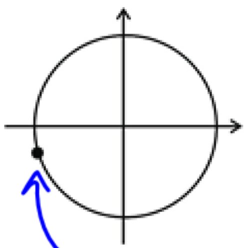
$\theta_A = 5\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$

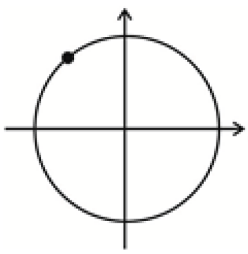
یک دور دایره	2π
?	$\frac{15\pi}{2}$

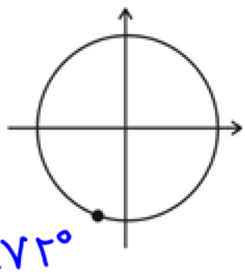
$? = \frac{\frac{15\pi}{2}}{2\pi} = \frac{15}{4} = 3/75$ دور

تست ۲۵: مجموعه دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با **x** درجه باشد، زاویه‌ی $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟

۱) 

۲) ✓ 

۳) 

۴) 

$$+\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{15} = \frac{180}{15} = 12^\circ \end{cases}$$

$2x = 84^\circ \to x = 42^\circ$

$5(x = 42^\circ) - 10^\circ = 200^\circ$

تست ۲۶: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{11\pi}{3}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

$\frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$ فاصله‌ی کابین‌ها

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵ ✓

$\frac{11(\pi = 180)}{3} = 660^\circ \xrightarrow[\text{یک دور}]{-360^\circ} 300^\circ$

$\frac{300^\circ}{10^\circ} = 30$ کابین به جلو بردم

$35 = 30 + 5$

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

دقیقه ساعت

$\theta=\left|\frac{11m}{2}-30h\right| = \left|30h-\frac{11}{2}m\right|$

تست ۲۷: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

۱) یک ساعت ۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه

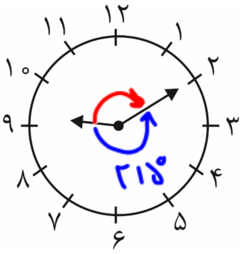
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه ۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

رادیان	
2π	$60'$
$\frac{8\pi}{3}$	?

$? = \frac{\left(\frac{8\pi}{3}\right)(60')}{2\pi} = \frac{240}{3} = 80' = 60' + 20'$

یک ساعت و بیست دقیقه

تست ۲۸: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟



۱) $\frac{9\pi}{5}$ ۲) $\frac{29\pi}{30}$

۳) $\frac{29\pi}{36}$ ۴) $\frac{145\pi}{36}$

$360° - 215° = 145°$

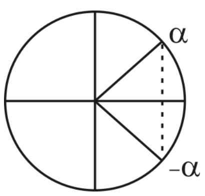
$145° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$

$\theta = \left|30h - \frac{11}{2}m\right| = \left|30(9) - \frac{11}{2}(10)\right| = |270 - 55| = 215°$ تبدیل به رادیان

$215\,\frac{\pi}{180} = \frac{43\pi}{36}$ ← زاویه بزرگتر بین عقربه ها

چون در گزینه ها نیست زاویه کوچکتر را پیدا کردم

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



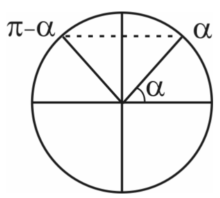
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi-\alpha)$



$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان ۱۸۰° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۲۹:

$\sin ۱۵۰ = \sin(\pi - ۳۰) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$\cos ۱۵۰ = \cos(\pi - ۳۰) = \rightarrow \cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan ۱۵۰ = \tan(\pi - ۳۰) = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

$\cot ۱۵۰ = \cot(\pi - ۳۰) = -\sqrt{۳}$

$\sin ۱۲۰ = \sin(\pi - ۶۰) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos ۱۲۰ = \cos(\pi - ۶۰) = -\frac{۱}{۲}$

$\tan ۱۲۰ = \tan(\pi - ۶۰) = -\sqrt{۳}$

$\cot ۱۲۰ = \cot(\pi - ۶۰) = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۱۲۰° ۶۰°

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$$\boxed{\sin\alpha = +\sin\beta \quad ، \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad ، \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad ، \quad \cot\alpha = -\cot\beta}$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۳۰: حاصل $\left(\overbrace{\tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷}}^{\text{صفر}}\right) + \left(\overbrace{\cos\frac{\pi}{۵} + \cos\frac{۴\pi}{۵}}^{\text{صفر}}\right)$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{۷} + \frac{۶\pi}{۷} = \pi \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷} = ۰ \qquad , \qquad \frac{\pi}{۵} + \frac{۴\pi}{۵} = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{۵} + \cos\frac{۴\pi}{۵} = ۰$$

$\pi - \theta$  θ

تست ۳۱: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{۲\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-۱)\pi}{n}$ با فرض فردبودن n کدام است؟

$\frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{n\pi - \pi}{n} \rightarrow \pi - \frac{\pi}{n}$

۱) ۱ ۲) صفر ۳) n ۴) $-n$

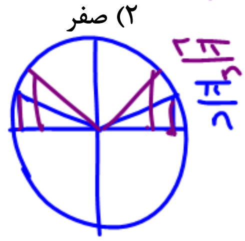
را، تستی اینو که n=۳ بدی میشه

$\cos\frac{\pi}{۳} + \cos\frac{۲\pi}{۳} = ۰$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\cos\boxed{\frac{\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{۲\pi}{n}} + \cdots + \cos\boxed{\frac{(n-۲)\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{(n-۱)\pi}{n}}$$

$\pi - \frac{۲\pi}{n}$ $\pi - \frac{\pi}{n}$ $\frac{۲\pi}{n}$ $\frac{\pi}{n}$



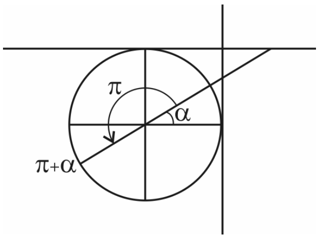
توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$\frac{۲\pi}{n} + \frac{(n-۲)\pi}{n} = \frac{۲\pi}{n} + \frac{n\pi - ۲\pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha, \pi+\alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π، در تانژانت و کتانژانت

$$\begin{cases} \sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(k\pi+\alpha) = \tan\alpha \\ \cot(k\pi+\alpha) = \cot\alpha \end{cases}$$

مثال ۳۲: از همه مضارب π (چه فرد، چه زوج) صرف نظر کن

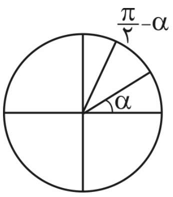
$$\sin 210^\circ = \sin(\pi+30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(\pi+30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \tan(\pi+30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 210^\circ = \cot(\pi+30^\circ) = \sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{2}$)



$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

یادت باشه:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشـه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسـی کنیـد و حفـظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه اسـت. $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ یعنـی در جهـت مثبـت مثلثـاتی (خـلاف جهـت عقربـه‌هـای سـاعت) بـه اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیـل وجود فرد $\frac{\pi}{۲}$ $(\frac{۳\pi}{۲})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۶}$، $\frac{k\pi}{۴}$ و $\frac{k\pi}{۳}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{۶}$ یا $\frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{\pi}{۳}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۶})=\sin(\underbrace{۷\times\frac{\pi}{۶}}_{\text{ربع سوم}})=-\sin(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cot(-\frac{۵\pi}{۳})=-\cot(\underbrace{۵\times\frac{\pi}{۳}}_{\text{ربع چهارم}})=-\left(-\cot(\frac{\pi}{۳})\right)=-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{۷\pi}{۶}$ یا $\frac{۵\pi}{۳}$، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$۷\times\frac{\pi}{۶}=۷\times۳۰^\circ=۲۱۰^\circ \qquad \text{یا} \qquad ۵\times\frac{\pi}{۳}=۵\times۶۰^\circ=۳۰۰^\circ$$

تست ۳۳: حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ=۰/۲۸$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ✓
۲) $-\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۱۶}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۱۶}$

$\cos(۲۸۵^\circ=۲۷۰^\circ+۱۵^\circ=۳\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)=\sin ۱۵$

$\sin(۲۵۵^\circ=۲۷۰^\circ-۱۵^\circ=\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)=-\cos ۱۵$

$\sin(۵۲۵^\circ=۵۴۰^\circ-۱۵^\circ=۳\pi-۱۵^\circ=\cancel{۲\pi}+\pi+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵$

در سینوس ۲π: مضارب زوج π هیچ نقشی ندارد.

$\sin(۱۰۵^\circ=۹۰^\circ+۱۵^\circ=\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)=\cos ۱۵$

$$\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{-\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵}$$

برای تولید $\tan ۱۵$ هر جمله‌ای صورت و مخرج را بر $\cos ۱۵$ تقسیم کن

$$\frac{\overset{۰٫۲۸}{\tan ۱۵}+۱}{-\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۱٫۲۸}{-۰٫۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

$\tan 89^\circ = \cot 1^\circ$
$\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$

در ۲ زاویه جمع ۹۰: تانژانت این = کتانژانت متمم خودشه

$\tan 45 = 1$

تست ۳۴: حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ . \tan 2^\circ ..... \tan 88^\circ . \tan 89^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

$\tan 1 \cdot \tan 2 \ldots \cot 2 \cdot \cot 1^\circ = 1$

$\tan\theta . \cot\theta = 1$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha = \cot\beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$، $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$\tan\alpha . \tan\beta = 1$

تست ۳۵: اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3\cos 165^\circ - 2\sin 285^\circ}{3\sin 345^\circ - 4\cos 255^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{a}$ ✓ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{2}{a}$ ۴) $-2a$

$\cos(165 = 180 - 15) = -\cos 15$

$\sin(285 = 270 + 15 = \frac{3\pi}{2} + 15) = -\cos 15$

$\sin(345^\circ = 360 - 15) = \sin(-15) = -\sin 15$

$\cos(255 = 270 - 15 = \frac{3\pi}{2} - 15) = -\sin 15$

$$\frac{-3\cos 15 + 2\cos 15}{-3\sin 15 + 4\sin 15} = \frac{-\cos 15}{\sin 15} = -\cot 15 = -\frac{1}{\tan 15} = -\frac{1}{a}$$

تست ۳۶: مقدار عبارت $\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ) + \cot(750^\circ) + \tan(-840^\circ)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

۱) ۱ ۲) $2\sqrt{3}$ ✓ ۳) صفر ۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos(300 = 270 + 30 = \frac{3\pi}{2} + 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$\sin(330 = \cancel{360} - 30) = \sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

$\cot(750 = 720 + 30 = \cancel{4\pi} + 30) = \sqrt{3}$

$\tan(-840) = -\tan 840 = -\tan(\cancel{5\pi} - 60) = \tan 60 = \sqrt{3}$

اگه جمع دو زاویه ۱۸۰ باشه هم‌سینوسند

$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\frac{۸\pi}{۸}=\pi$ $\quad \sin\frac{\pi}{۷}=\sin\frac{۷\pi}{۸}$

$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\frac{۸\pi}{۸}=\pi$ $\quad \sin\frac{۳\pi}{۸}=\sin\frac{۵\pi}{۸}$

تست ۳۷: حاصل عبارت $\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۷\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

$\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{\pi}{۸}=۲\sin^۲\frac{\pi}{۸}+۲\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}=$

$=۲(\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\cancel{\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}}^{\cos^۲\frac{\pi}{۸}})=۲$

اگه جمع ۲ زاویه ۹۰ باشه سینوس یکی کسینوس اون یکیه

$\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۴\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$

$\sin\frac{۳\pi}{۸}=\cos\frac{\pi}{۸}$

تست ۳۸: حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳}=\frac{۱۸\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\cancel{۶\pi}-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶}=\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=۳\pi-\frac{\pi}{۶}=\cancel{۲\pi}+\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ضرب $\frac{۳}{۴}$

$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴}=\frac{۲۰\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=\cancel{۵\pi}-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$

$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin(\frac{۱۱\pi}{۶}=\frac{۱۲\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin(-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ضرب $-\frac{۱}{۲}$

تست ۳۹: حاصل عبارت $\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^۲(۱۵^\circ)$ ۲) $\cos^۲(۱۵^\circ)$ ۳) $-\sin^۲(۱۵^\circ)$ -۱ ۴) $-\cos^۲(۱۵^\circ)$

$\tan(۲۸۵^\circ=۲۷۰^\circ+۱۵=\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)=-\cot ۱۵^\circ$

$\tan(-۱۶۵^\circ)=-\tan(۱۶۵=\cancel{۱۸۰}^{\pi}-۱۵^\circ)=-\tan(-۱۵)=\tan ۱۵^\circ$

ضرب

$\tan\theta.\cot\theta=۱$

$\sin(۱۰۹۵^\circ=\cancel{۶\pi}+۱۵)=\sin ۱۵^\circ$

$\cos(۲۵۵^\circ=۲۷۰^\circ-۱۵=\frac{۳\pi}{۲}-۱۵)=-\sin ۱۵^\circ$

ضرب $-\sin^۲ ۱۵^\circ$

$=-۱+\sin^۲ ۱۵^\circ=$

$=-(۱-\sin^۲ ۱۵^\circ)=-\cos^۲ ۱۵^\circ$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

۱) $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta}\\ \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

۲) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta=\frac{۱}{\cot\theta}$

۵) $\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}$

۶) $\tan\theta\times\cot\theta=۱$

۷) $\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta$

۸) $\frac{۱}{\sin^۲\theta}=۱+\cot^۲\theta$

۹) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{۱}{\sin\theta.\cos\theta}$

۱۰) $(\sin\theta+\cos\theta)^۲=۱+۲\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$(\div\cos^2\theta)$

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

تست ۴۰: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۲}{۴۵}$ ۲) $\frac{۴۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۴۵}{۳۱}$

$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$

$\tan\alpha=\frac{4}{3}$

$$\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{4}{5}+\frac{4}{3}=\frac{-12+20}{15}=\frac{8}{15}}=\frac{15(3)}{4(8)}=\frac{45}{32}$$

تست ۴۱: اگر $\cos\theta=-\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۲}{۷}$ ۲) $-\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱۲}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

$\tan\theta=\frac{4}{3}$

$$\frac{\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2=1-\frac{16}{9}=\frac{-7}{9}}=\frac{4(\cancel{9}\,3)}{\cancel{3}(-7)}=-\frac{12}{7}$$

تست ۴۲: حاصل $\frac{\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{\cot^۲\alpha}{۱+\cot^۲\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $۲\sin^۲\alpha$ ۲) $\cos^۲\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱

$\frac{1}{1+\cot^2\theta}=\sin^2\theta$

$\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$

$\sin^2\theta\cot^2\theta+\cos^2\theta\tan^2\theta$

$\cancel{\sin^2\theta}\frac{\cos^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}}+\cancel{\cos^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}=$ یک

تست ۴۳: اگر $\tan\theta=\frac{۳}{۴}$، حاصل $(\tan\theta-\cot\theta)^{۲}-\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ✓
۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$
۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$
۴) $\frac{۱۶}{۹}$

$$\tan^2\theta+\cot^2\theta-2\boxed{\cancel{\tan\theta\cdot\cot\theta}}-(1+\tan^2\theta)= \qquad \cot\theta=\frac{4}{3}$$

$$\cot^2\theta-2-1=\cot^2\theta-3=\left(\frac{4}{3}\right)^2-3=\frac{16}{9}-3=\frac{-11}{9}$$

تست ۴۴: اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x+\cot x$ کدام است؟

طرفین به توان ۲

$$\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $-\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $-\frac{۸}{۳}$ ✓

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x=-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$$

تست ۴۵: اگر $\sin x\cos x=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^{۳}x-\cos^{۳}x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$
۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^{۳}x-\cos^{۳}x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^{۳}x-\cos^{۳}x=(\sin x-\cos x)(\sin^{۲}x+\sin x\cos x+\cos^{۲}x)=(\sin x-\cos x)(۱+\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۳}(\sin x-\cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x-\cos x)^{۲}=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x-۲\sin x\cos x=۱-۲(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\sin x-\cos x)^{۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\sin x-\cos x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^{۳}x-\cos^{۳}x=\frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}=\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تست ۴۶: اگر $\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۶۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم sin و هم cos داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش tan بسازید:

$$\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x + ۲\cos x = ۲\sin x - ۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x = \sin x \xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div \cos x} ۸ = \tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$$

$$۸ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{۶۵}{۸}$$

تست ۴۷: اگر $۲\sin\alpha = ۳\cos\alpha$، حاصل $\frac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۶

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۳}{۲}$

$\tan = \frac{۳}{۲}$

$\frac{۱+\frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳}}{۱+\frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۳}$

تست ۴۸: مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} - \frac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

$\cos^۲\alpha$

$\frac{(۱-\sin^۲\alpha) - \cos^۲\alpha}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)} = \text{صفر} = ۰$

تست ۴۹: حاصل $\cot^۴\theta - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{۱}{\sin^۴\theta}$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

$\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$

$\cos^۲\theta$

$\frac{(۱-\sin^۲\theta) - \cos^۴\theta}{\sin^۴\theta} = \frac{\cos^۲\theta(\cancel{۱-\cos^۲\theta})}{\cancel{\sin^۴\theta} = \sin^۲\theta} = \cot^۲\theta$

تست ۵۰: اگر $\dfrac{1+\cot x}{\tan x+1}=2$، حاصل $\dfrac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+\cos^3 x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{2}{5}$ ۲) $\dfrac{1}{10}$ ۳) $\dfrac{2}{13}$ ۴) $\dfrac{5}{13}$

تست ۵۱: حاصل $\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{1+\cot^2\alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$

تست ۵۲: حاصل $\sqrt{1+\cos x\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ و $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1+\cos x\sqrt{\underbrace{(1-\sin x)(1+\sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{1-\sin^2 x}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$=\sqrt{1+\cos x\,|\cos x|}\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}\sqrt{1+\cos x(-\cos x)}=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}-\sin x$$

تست ۵۳: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})+\dfrac{1}{\tan^2\hat{C}+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\ \Rightarrow\ 90^\circ+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\ \Rightarrow\ \hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\dfrac{1}{1+\tan^2\bigcirc}=\cos^2\bigcirc$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\bigcirc)=\cos^2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و همچنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت: $\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$

روش دوم: دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{2}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$$

تست ۵۴: با فرض $2\sin^2x+3\cos^2x=5\sin x\cos x$، مقدار $\cos^2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{4}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\sin^2x+3\cos^2x=5\sin x\cos x\xrightarrow{\div\cos^2x}2\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+3\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2x+3=5\tan x\Rightarrow 2\tan^2x-5\tan x+3=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ داریم:

حالت اول : $\tan x=1\Rightarrow 1+(1)^2=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow 2=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\cos^2x=\frac{1}{2}$

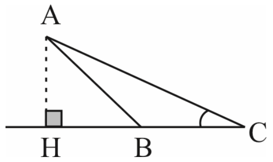
حالت دوم : $\tan x=\frac{3}{2}\Rightarrow 1+(\frac{3}{2})^2=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow 1+\frac{9}{4}=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\frac{13}{4}=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\cos^2x=\frac{4}{13}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2x=\frac{4}{13}$ است.

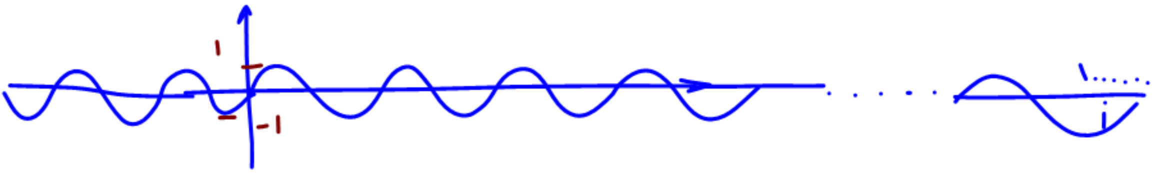
تست ۵۵: اگر $2\sin^2x+\cos^2x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۱)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

تست ۵۶: در شکل زیر، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{5}{13}$ و $CH=9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ *(ریاضی ۹۹)*



۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵
۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵



$\sin(1000000) =$ داریم
عددی بین ۱ و ۱- است.

توابع مثلثاتی

$\boxed{y = \sin x}$

۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-1,1]$ است. (چون $-1 \le \sin x \le 1$)

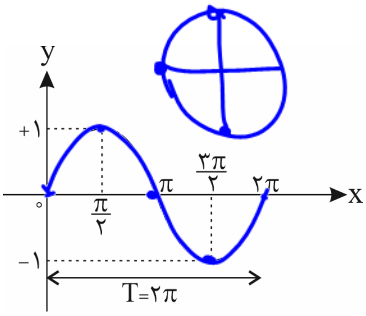
به ازای هر x ولی y محدوده

۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{2k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi} + \alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y = \sin x$ را در $[0, 2\pi]$

$-1 \le y = \sin(\text{هرچی}) \le 1$

یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس 2π تا 2π تا تکرارش می‌کنیم.

نمودار $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:



x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۰	۱	۰	-1	۰

π را زمانی ۱۸۰ بذار که می‌خوای را با نمودار رسم کنی

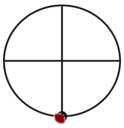
(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T = 2\pi$ می‌باشد.)

$\pi = 3.14 \qquad 2\pi = 6.28\ldots \qquad \frac{\pi}{2} = 1.57\ldots$

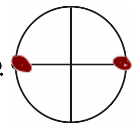
$2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{2}$، $\frac{9\pi}{2}$ یا $\frac{-3\pi}{2}$، $\frac{-7\pi}{2}$ و ...) رخ می‌دهد.

لب راست دایره: $2k\pi$ = یعنی مضارب زوج π

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -1 است که در  یعنی کمان $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\frac{3\pi}{2}$، $\frac{7\pi}{2}$ یا $\frac{-\pi}{2}$، $\frac{-5\pi}{2}$ و ...) رخ می‌دهد.

$2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۶) تابع $y = \sin x$ در  یعنی کمان $x = \underbrace{k\pi}_{\text{دو لب دایره}}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm 2\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال در مورد توابع مثلثاتی نیز برقرار است یعنی اگر $\alpha > 0$ و $k > 0$

برای رسم $y = \sin(x - \alpha)$، نمودار $y = \sin x$ را α تا به سمت راست انتقال می‌دهیم.

برای رسم $y = \sin(x + \alpha)$، نمودار $y = \sin x$ را α تا به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

برای رسم $y = \sin x + k$، نمودار $y = \sin x$ را k واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

برای رسم $y = \sin x - k$، نمودار $y = \sin x$ را k واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم.

تذکر: هم‌چنین در $y = a\sin x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ است، عرض نقاط a برابر می‌شود و در نتیجه ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $|a|$ و $-|a|$ خواهد بود.

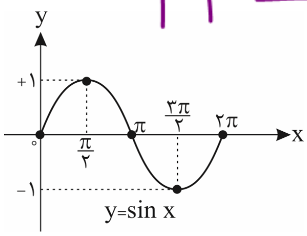
نکته

یا یک یا منفی یک

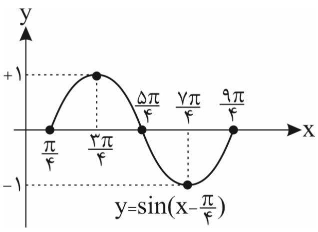
$$y_{min} = -|a|+d \le a\boxed{\sin(bx+c)}+d \le |a|+d = y_{Max}$$

$|a| = \frac{Max - Min}{2}$

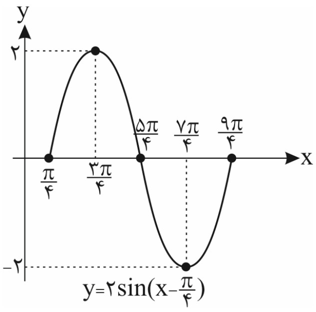
به طور مثال نمودار تابع $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1$ را در یک دوره‌ی تناوب به صورت زیر است:



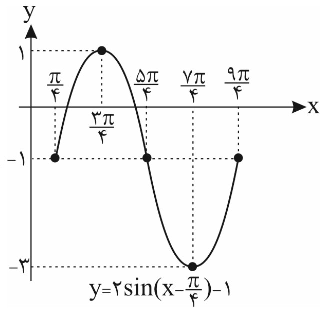
انتقال $\frac{\pi}{4}$ واحدی به راست



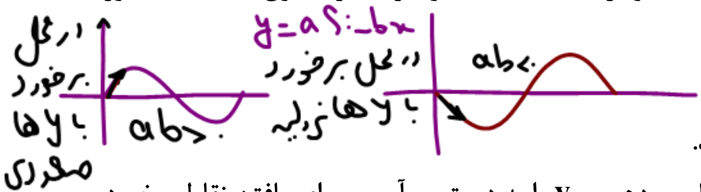
عرض نقاط دو برابر



انتقال یک واحدی به پایین



تذکر: در واقع در رسم $y = a\sin bx$، نمودار $y = \sin x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود (اگر $ab < 0$، یعنی یا $a < 0$ یا $b < 0$ باشد، نمودار $y = \sin x$ علاوه بر تغییرات فوق، نسبت به محور xها نیز قرینه می‌شود چون در مورد $b < 0$ داریم: $(\sin(-\alpha) = -\sin\alpha)$



در حالت کلی، در تابع $y = a\sin(bx+c)+d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

تست ۵۷: اگر بیشترین مقدار تابع $y = 2\cancel{\sin 5x} - 3c$ برابر (-7) باشد، c کدام است؟

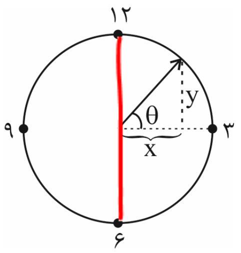
۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۵- ۴) ۱

$2 - 3c = -7$

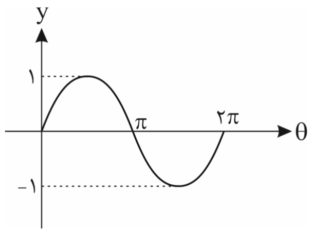
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$y_{max} = 2 - 3c = -7 \Rightarrow -3c = -9 \Rightarrow c = 3$

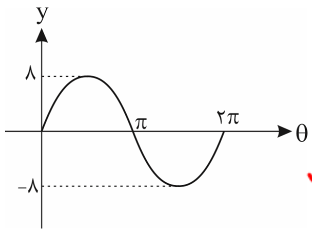
تست ۵۸: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)

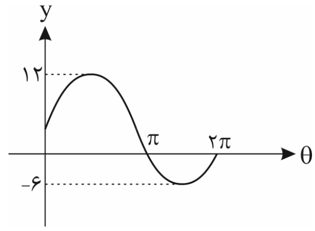


۲)

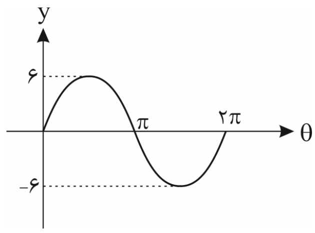


۱)





۳)



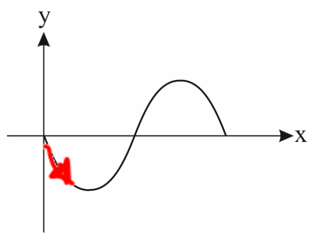
۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۸\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} T = ۲\pi \\ y_{max} = ۸ \\ y_{min} = -۸ \end{cases}$$

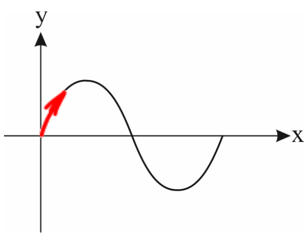
مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y = ۸\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T = ۲\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۳» درسته.

حالت ۲



$y = a\sin bx$
$a \times b < ۰$

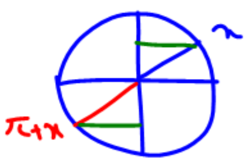
حالت ۱



$y = a\sin bx$
$a \times b > ۰$

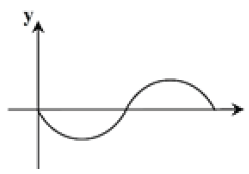
$y = a\, Sin(bx)$
باید به شکل در محل برخورد با محورها نگاه کنیم نه صعودیه یا این نه نزولیه

تست ۵۹: نمودار تابع $f(x) = -\sin(\pi + x)$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به کدام شکل است؟

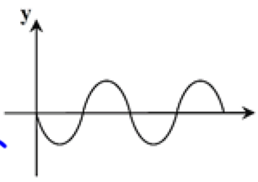


$y = -\underbrace{Sin(\pi + x)}_{-Sin\, x} = Sin\, x$

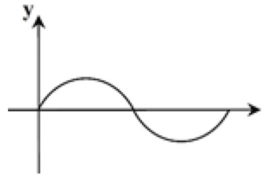
همون نمودار $Sin\, x$ است.



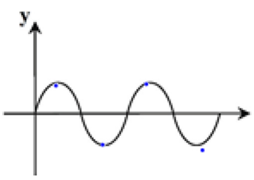
۱)



۲)



۳) ✓

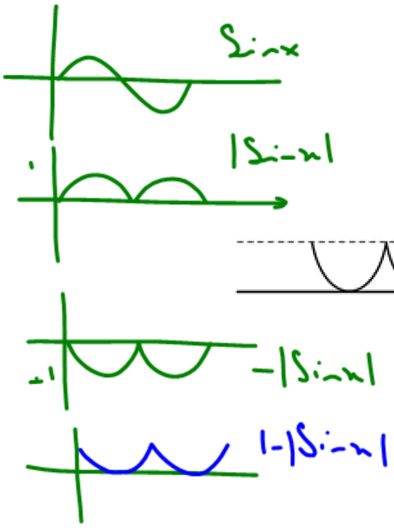


۴)

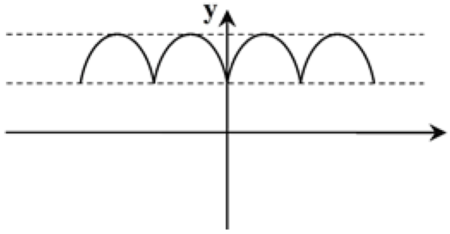
$y = Sin\, x$ در بازه $[۰, ۲\pi]$ یک دوره تناوب یک Max، یک Min داره.

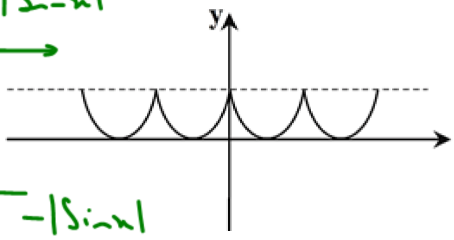
$f(0)=1 \longrightarrow$ ۳، ۴ غلط

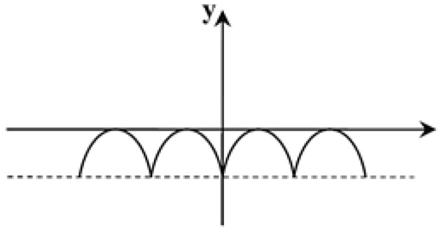
$f(\frac{\pi}{2})=0 \longrightarrow$ ۲ درسته

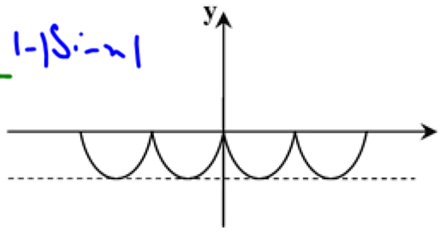


تست ۶۰: نمودار $f(x)=1-|\sin x|$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

$-|a|+d \le y=a\sin(bx+c)+d \le |a|+d$

$Min=-|-2|+1=-1$

$|-2|+1=3=Max$

تست ۶۱: برد تابع $y=-2\sin x+1$ بازهٔ $[a,b]$ است. حاصل b^2-a^3 کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ۱۱

حداکثر یک

حداقل ۱-

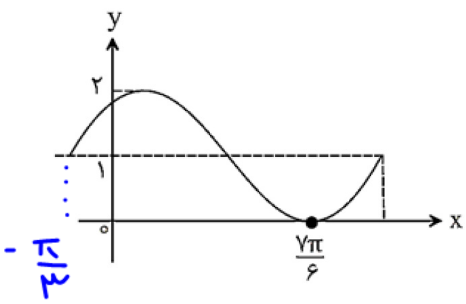
$\sin x=1 \longrightarrow y=-2(1)+1=-1$

$\sin x=-1 \longrightarrow y=-2(-1)+1=3$

$a=-1 \le y \le 3=b$

$(b^2=9)-(a=-1)^3=10$

تست ۶۲: ضابطهٔ تابع نشان‌داده‌شده در شکل برابر با کدام گزینه زیر می‌تواند باشد؟



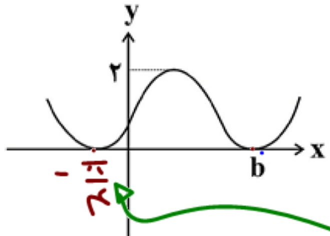
۱) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})-1$

۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})+1$

۳) $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})+1$

۴) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{3})+1$

تست ۶۳: اگر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ به صورت زیر باشد، $a.b$ کدام است؟



۱) $\frac{3\pi}{4}$

۲) $\frac{3\pi}{2}$

۳) $\frac{7\pi}{4}$ ✓

۴) $\frac{7\pi}{2}$

می بینیم Max تابع ۲ است پس:

$y_{max} = |-1| + a = 2 \to \boxed{a=1}$

می بینیم در $x=b$ تابع صفر شده پس:

$y = 1 - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$

$0 = 1 - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$

$\sin(\underbrace{x + \frac{3\pi}{4}}) = 1$

کمانی باشه که سینوس یک بشه

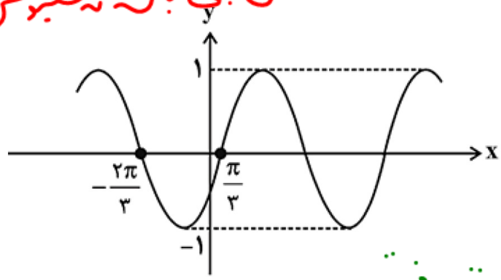
b توی xهای مثبته

$x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \to x = -\frac{\pi}{4}$ با شکل سازگار نیست

یا

$x + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \to x = 2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \boxed{\frac{7\pi}{4} = b}$

تست ۶۴: نمودار شکل زیر مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟



۱) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

۲) $y = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$

۳) $y = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

۴) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ✓

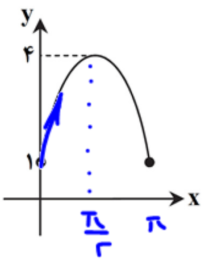
چون sin این است

$\frac{\pi}{3}$ به راست رفته

$4: Max = |a| + \cancel{b}^{1}$

$3 = |a| \leftarrow$ $a>0$ پس $a=3$

تست ۶۵: نمودار تابع $f(x) = a\sin x + b$ در بازهٔ $[0, \pi]$ به شکل زیر است. مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟



۱) ۱۰ ✓

۲) ۲

۳) ۵

۴) ۱۳

می بینیم در $x=0$ برابر یک شده

$f(0) = 1$

$f(0) = a\sin 0 + b = 1 \to b = 1$

می بینیم در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر ۴ شده:

$f(\frac{\pi}{2}) = a\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} + (b=1) = a + 1 = 4$

$\boxed{a = 3}$

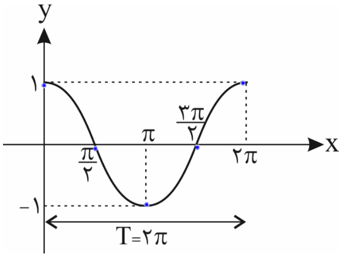
$a^2 + b^2 = 10$

$\boxed{y = \cos x}$

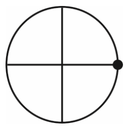
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

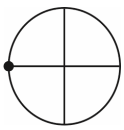
۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است (چون $-۱ \le \cos x \le ۱$).

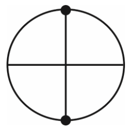
۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi} + \alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = ۲\pi$ است، ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱

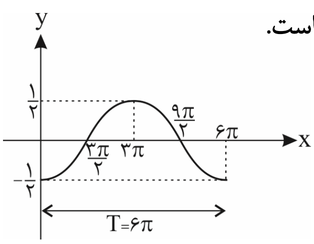
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x = ۲k\pi , k \in \mathbb{Z}$ (مثل ۰ ، $\pm ۲\pi$، $\pm ۴\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x = (۲k+۱)\pi , k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm\pi$، $\pm ۳\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y = \cos x$ در  یعنی کمان $x = k\pi + \frac{\pi}{۲} , k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm\frac{\pi}{۲}$، $\pm\frac{۳\pi}{۲}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

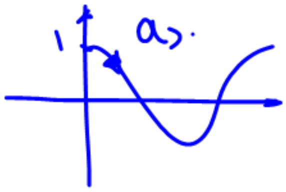
قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y = \cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y = a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T = \frac{۲\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{x}{۳})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{۲\pi}{|-\frac{۱}{۳}|} = ۶\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



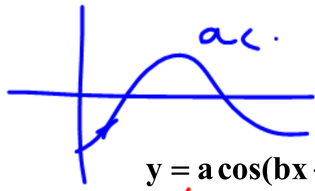
(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$، $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{x}{۳})$ همان $y = -\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۳}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y = a\cos bx$، نمودار $y = \cos x$ با ضریب $\frac{۱}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)



$y = a\,C(b\,x)$

می‌تواند + یا - باشد
چون کسینوس منفی خورده
و منفی ردی خورده



اگر نمودار در محل برخورد با yها نزولی باشد: $a>0$
و اگر صعودی بود $a<0$

حالت کلی، در تابع $y = a\cos(bx+c)+d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

$|a| = \frac{Max - Min}{2}$

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

تست ۶۶: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x) = -a\cos\frac{\pi x}{3} + 1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

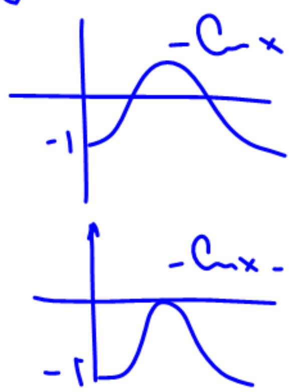
$$-|-a|+1 = \frac{2}{3} \Rightarrow -|a| = \frac{2}{3}-1 \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.)

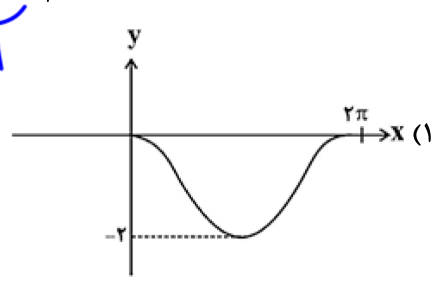
تست ۶۷: بخشی از نمودار تابع $y = \sin(\frac{7\pi}{2}+x) - 1$ شبیه کدام است؟

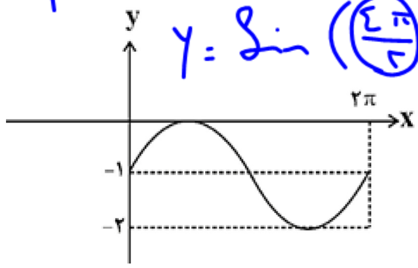
ارمغان بفرمود $\frac{\pi}{2}$ تا ثابت عوض شه

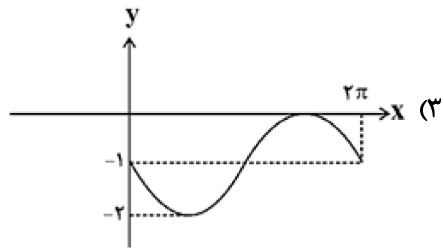
$y = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + x\right) + 1$

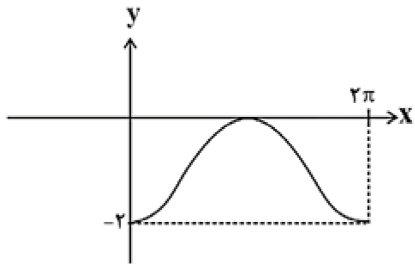
$y = -\cos x - 1$



۱)


۲)


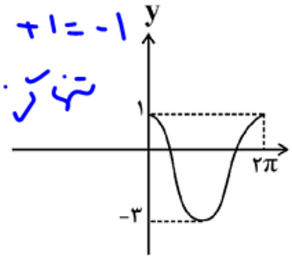
۳)


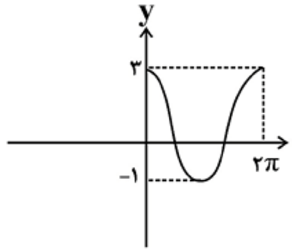
۴)


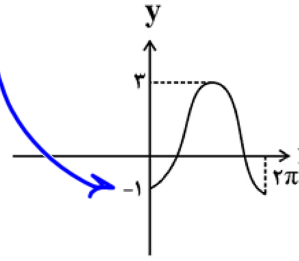
تست ۶۸: نمودار تابع $y = -2\cos x + 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

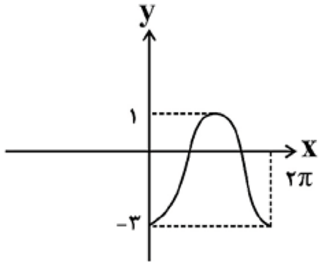
$f(0) = -2\cancel{\cos 0}^{\,1} + 1 = -1$

تنها گزینه‌ای که از $A(0,-1)$ عبور می‌کند

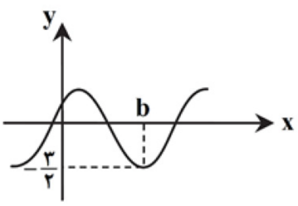
۱) 

۲) 

۳)  ✓

۴) 

تست ۶۹: اگر نمودار تابع $y = a + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ به صورت زیر باشد، مقدار ab کدام است؟



۱) $-\frac{7\pi}{6}$

۲) $-\frac{7\pi}{12}$ ✓

۳) $\frac{7\pi}{6}$

۴) $\frac{7\pi}{12}$

می‌بینیم Min تابع برابر $-\frac{3}{2}$ است پس

$y_{Min} = -|1| + a = -\frac{3}{2}$

$a = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2} + \cos(x - \frac{\pi}{6})$

$-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \cos(x - \frac{\pi}{6})$

$-1 = \cos(\boxed{x - \frac{\pi}{6}})$

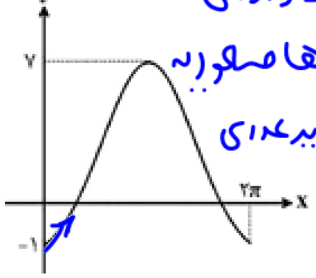
طول = b

$x - \frac{\pi}{6} = \pi$

$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{7\pi}{6} = b}$

$(a = -\frac{1}{2})(b = \frac{7\pi}{6})$

تست ۷۰: شکل تابع $y = a\cos(\pi - x) + b$ به صورت زیر است. حاصل ab چه‌قدر است؟



$y = -a\cos x + b$

نمودار در اول برخورد با y ها صعودیه
پس ضریب کسینوس باید منفی باشد: $-a < 0$
$a > 0$

۱) ۶

۲) ۹

۳) ۸

۴) ۱۲

$a > 0$

$$\begin{cases} Max = |-a| + b = 7 \rightarrow |a| + b = 7 \\ Min = -|-a| + b = -1 \rightarrow -|a| + b = -1 \end{cases}$$

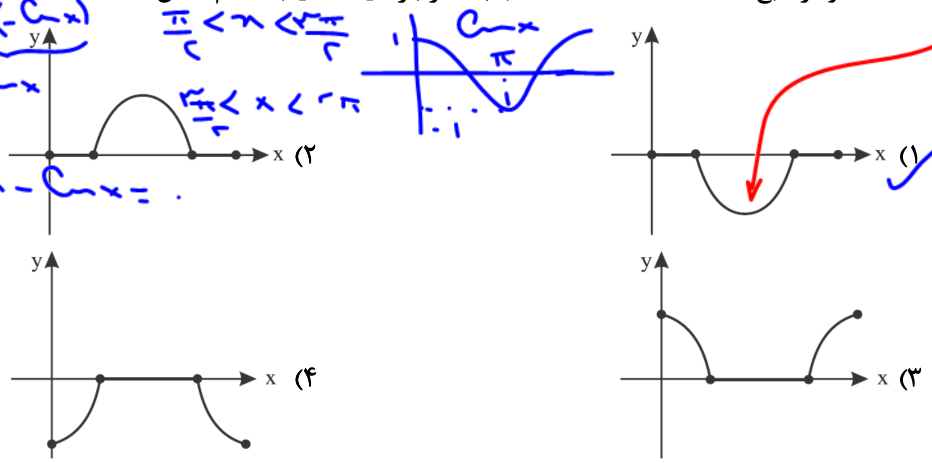
$$\begin{cases} a + b = 7 \\ -a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = 6 \rightarrow b = 3 \rightarrow a = 4$$

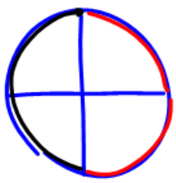
وسط بازه $x=\pi$

وسط بازه $f(x=\pi)=-2$ ، ۰ و ۱ رو سریع

$y=\cos x-|\cos x|:\begin{cases}\cos x-\cos x=0 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos x-(-\cos x)=2\cos x & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\\ \cos x-\cos x=0 & \frac{3\pi}{2}<x<2\pi\end{cases}$

تست ۷۱: نمودار تابع $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos^{2} x}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به کدام شکل است؟





$f(0)=1-1=0$ ، ② ،۰

پس گزینه ۲ ، ۳ و ۴ غلطند.

$f(\pi)=-1-1=-2$

تنها گزینه‌ای که در وسط بازه برابر (-2) است گزینه ① است.

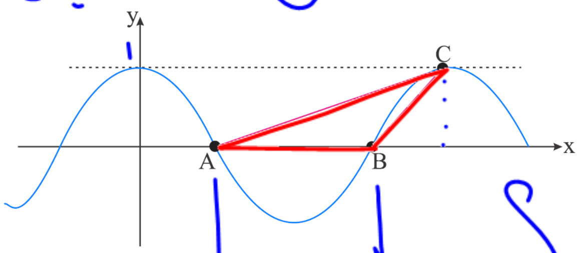
تست ۷۲: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\cos x$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) π

۴) $\frac{3\pi}{2}$

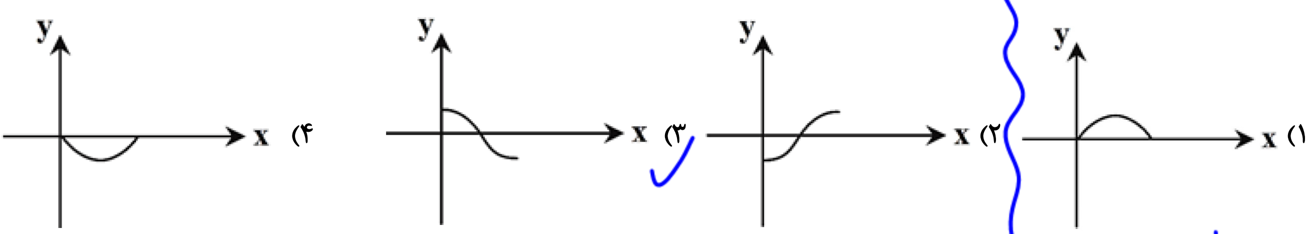


$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$

$S_{\Delta}=\frac{(\text{قاعده}=\pi)(\text{ارتفاع}=1)}{2}=\frac{\pi}{2}$

تست ۷۳: نمودار تابع $f(x)=a+b\cos x$ از نقطهٔ $(\pi,0)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=\frac{a}{b}\cos x$ در بازهٔ $[0,\pi]$ به کدام شکل است؟

$(b\neq 0)$



$f(\pi)=a+b\cos\pi=0$

$a-b=0$

$a=b$

$\frac{a}{b}=1$

$g(x)=\cos x$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید

معرفی تابع نمایی و لگاریتمی:

۸ چه توانی از ۲ است؟ ۳

$2^3 = 8$

$\log_2 8 = 3 \longleftrightarrow 2^3 = 8$

به توان =

لگاریتم $\log_{A} B = ?$

A به چه توانی B میشه؟

تعریف لگاریتم:

$\log_b x = y \longrightarrow b^y = x$

b: base: پایه

* اگر پایه لگاریتم را ننویسیم یعنی ۱۰ بوده است.

دامنه تابع لگاریتمی:

$y = \log_b u$

$\left.\begin{array}{l} u > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}}$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \log_x (4 - x^2)$ ؟

$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$4 > x^2$

$2 > |x|$

$-2 < x < 2$

$x \in (0,2) - \{1\} = (0,1) \cup (1,2) = D_f$

مثال: وارون تابع $f(x) = \log_b x$ ؟ تابع را برابر y می‌گیریم، x را برحسب y یافته و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم

$y = \log_b x$

به توان =

$b^y = x \xleftrightarrow{\text{تعویض جای } x, y} y = b^x = f^{-1}(x)$

تابع نمایی وارون تابع لگاریتمی است و برعکس

تابع نمایی متغیرش در (نما) است.

نما = توان = قوه = Power

مثال: حاصل موارد زیر:

الف) $\log_2 256 = 8$ ب) $\log 1000 = 3$

ج) $\log 1000000 = 6$ لگاریتم در پایه ۱۰ اعداد را کوچک می‌کند

د) $\log 1891 = 3/\ldots$ $1000 < 1891 < 10000$

اگه ۱۰۰۰ بود ۳ میشد

اگه ۱۰۰۰۰ بود ۴ می‌شد

$\log 1000 = 3 < \log 1891 < \log 10000 = 4$

تعریف تابع نمایی:

دقت: تابع نمایی که متغیرش در توان است باید پایه باش:

$f(x) = b^x$

$b > 0$ ، $b \neq 1$

رسم تابع نمایی:

$y = b^x$

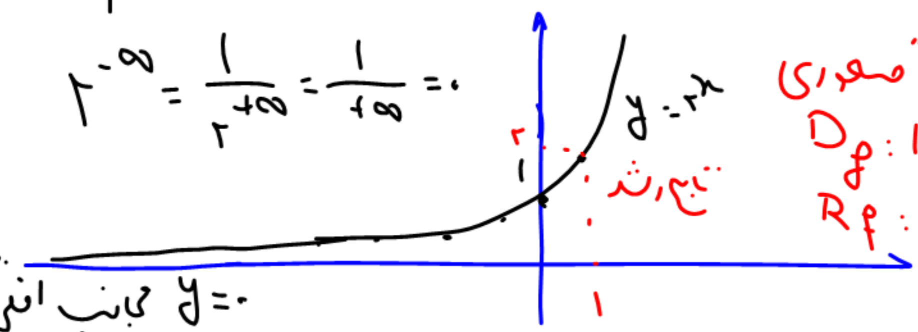
$b > 0$ و $b \neq 1 \rightarrow b \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

الف) اگر $b > 1$ مثال) $y = 2^x$

x	$-\infty$	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$	$+\infty$
$f(x) = 2^x$	$2^{-\infty} = 0$	$\ldots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4		$2^{+\infty} = +\infty$

هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان ولی مثبت.

$2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$



تابع اکیداً صعودی

$D_f: \mathbb{R}: (-\infty, +\infty)$

$R_f: (0, +\infty)$

$y = 2^x$ همواره مثبت و به محور x ها برخورد نمی‌کند

ب) اگر $0 < b < 1$ مثال) $f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

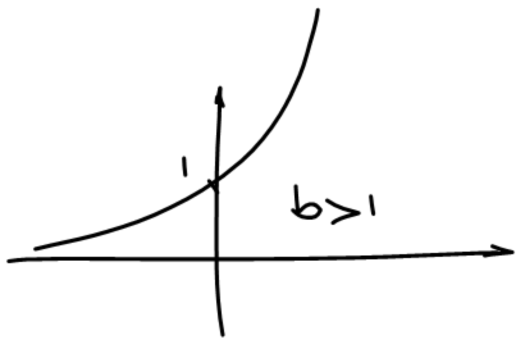
x	$-\infty$	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	3	$\ldots +\infty$
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$2^{+\infty} = +\infty$		4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

اکیداً نزولی

تابع مثبت بالای محور x ها

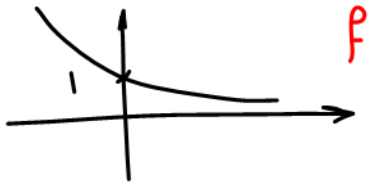
و به محور x ها برخورد نمی‌کند

$f(x)=b^x$



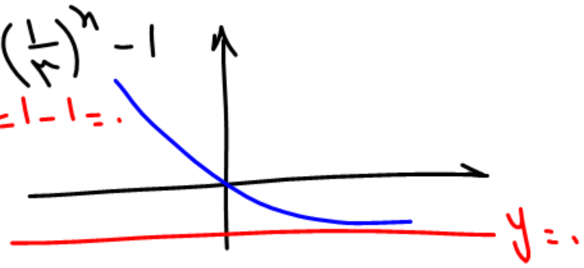
مثال: تابع $f(x)=3^{-x}-1$ را رسم کنید.

$y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$

$f(0)=1-1=0$



مثال: حدود k را چنان تعیین کنید که $f(x)=\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^x$ اکیداً صعودی باشد.

مبنا $=\frac{1+k}{1-k}\neq 0 \longrightarrow 1+k\neq 0 \longrightarrow k\neq -1$

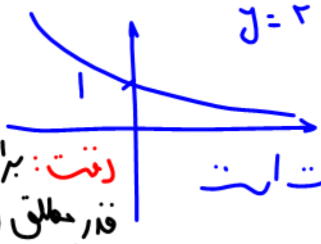
$\frac{1+k}{1-k}>1 \qquad \frac{1+k}{1-k}-1>0 \qquad \frac{\cancel{1}+k-\cancel{1}+k}{1-k}>0 \qquad \frac{2k}{1-k}>0$

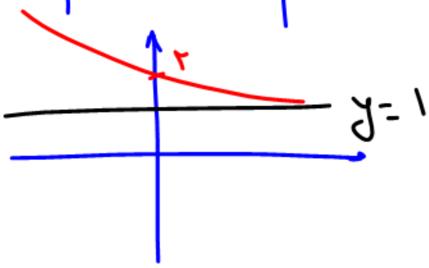
k	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\frac{2k}{1-k}>0$		$-$	0	$+$	ت.ن	$-$	

جواب: $0<k<1$

مثال: مطلوبست رسم $f(x)=\left|2^{-x}\right|+1$

$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$





چون تابع 2^{-x} همواره بالای محور xها و مثبت است

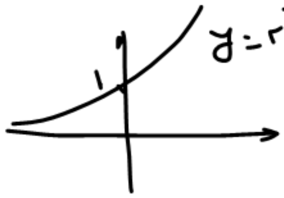
$y=2^{-x}=\left|2^{-x}\right|$

دقت: برای قدر مطلق زیر xها هرچی بود پاک کن نسبت به xها قرینه کن

سوال: رسم تابع

$y=\left|-(۲^{x+1})+1\right|$

$y=۲^x$

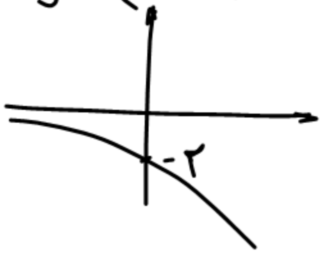


$\xrightarrow{x \to x+1}$

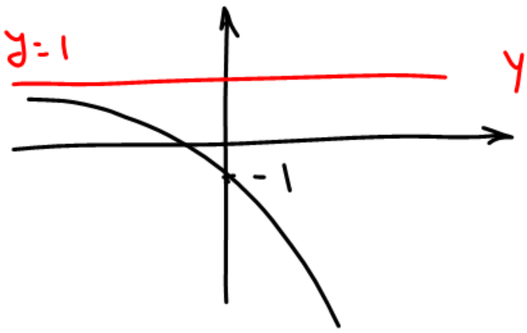
یک واحد به چپ

$y=۲^{x+1}$

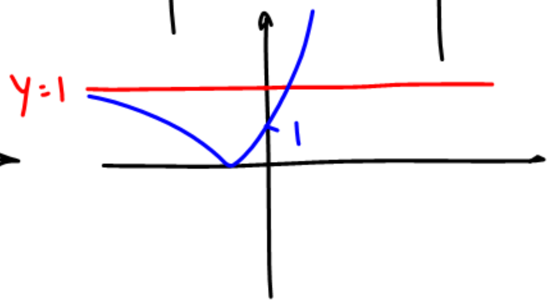
$y=-(۲^{x+1})$



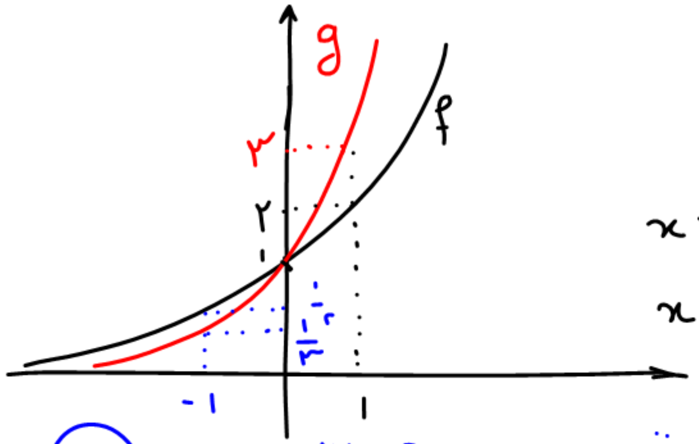
$y=-(۲^{x+1})+1$



$y=\left|-(۲^{x+1})+1\right|$



مثال: $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$

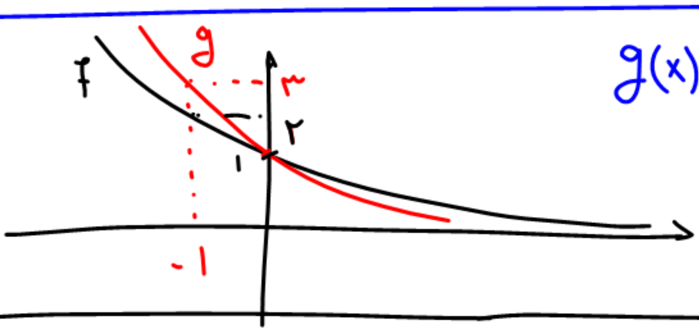


$x>0 \qquad g>f$

$x<0 \qquad g<f$

هر تابعی توی ⊖ ها پایین‌تره در $x>0$ بالاتره! ☺

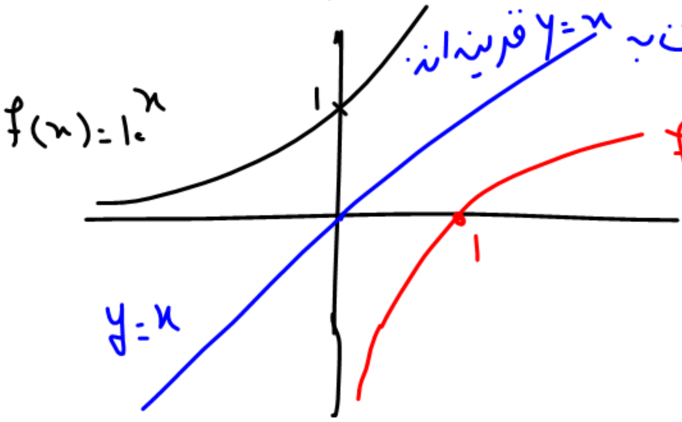
مثال: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



نکته: تابع $f(x)=b^x$ الزاماً یکنواست پس یک به یک و وارون‌پذیره.
تابع وارون آن هم لگاریتمی است.

به کمک رسم $f(x)=10^x$ تابع وارون آن را رسم کنید.

نکته: f و f^{-1} از نظر محوری نزدیکی عین همند و نسبت به $y=x$ قرینه‌اند.



$f^{-1}(x)=\log x \longrightarrow y=\log_{10} x$

$x=10^y$

$f(x)=y=10^x$

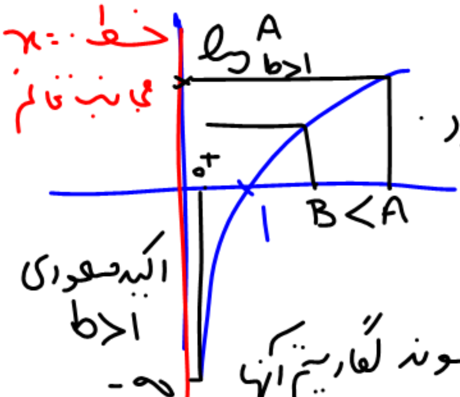
معرفی تابع $f(x)=\log_b^x$

دامنه : $\left.\begin{matrix} x>0 \\ b>0 \\ b\neq 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}}$

$D_f:(0,+\infty)$

$b>0$: 0 , 1

$0<b<1$ $\qquad$ $b>1$



نکات :

① اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند. نمودار در قسمت $x<0$ رسم نشد. نمونه: $f(0)=$ ن . ت

② خود صفر لگاریتم ندارد.

③ اعداد هر چه بیشتر می‌شوند لگاریتم آنها بیشتر می‌شود به شرطی که مبنا بیش از یک باشد

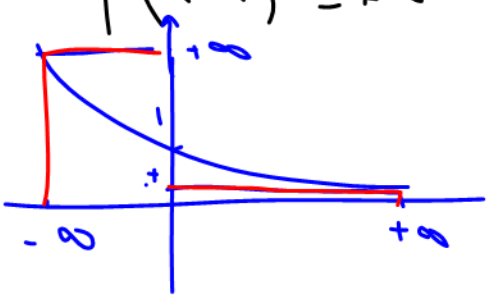
$\log_{0<b<1}^{0^+}=+\infty$ $\qquad$ $\log_{b>1}^{0^+}=-\infty$

نکته :

$\begin{cases}(b>1)^{+\infty}=+\infty \\ (0<b<1)^{+\infty}=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}(b>1)^{-\infty}=0 \\ (0<b<1)^{-\infty}=+\infty\end{cases}$

$2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}=2^{+\infty}=+\infty$

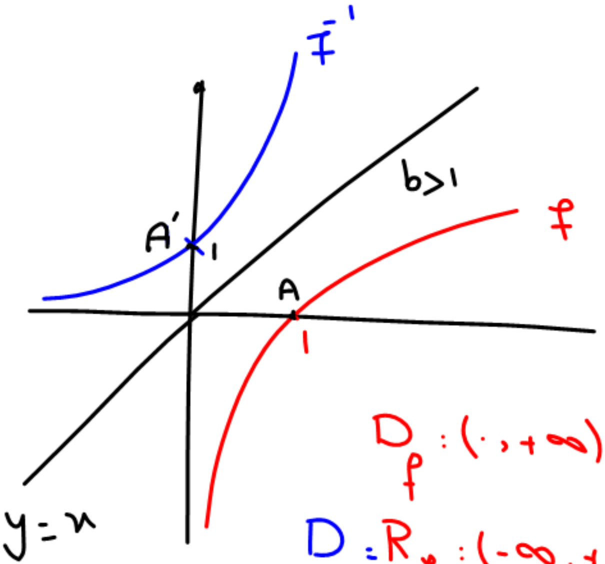


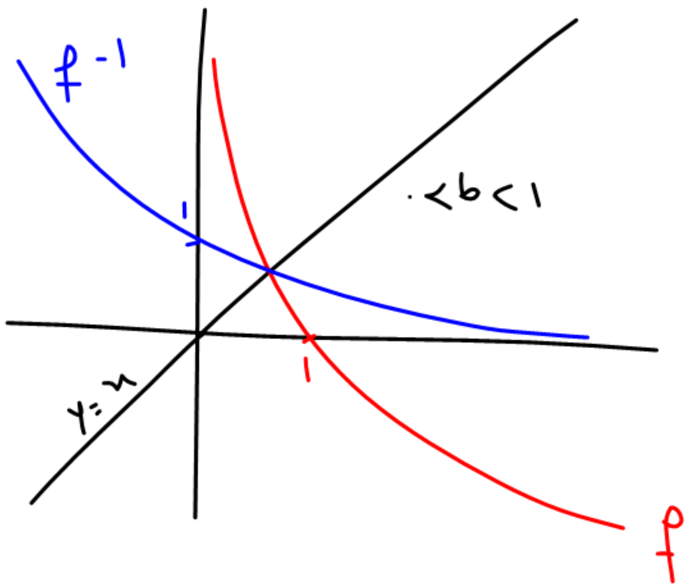
$y=b^x$ $\quad b>1$

④ $\log_b^b=1$ لگاریتم هر عدد در پایه خودش یک است.

⑤ $\log_b^1=0$

$f^{-1}(x)=b^x \qquad f(x)=\log_b x$





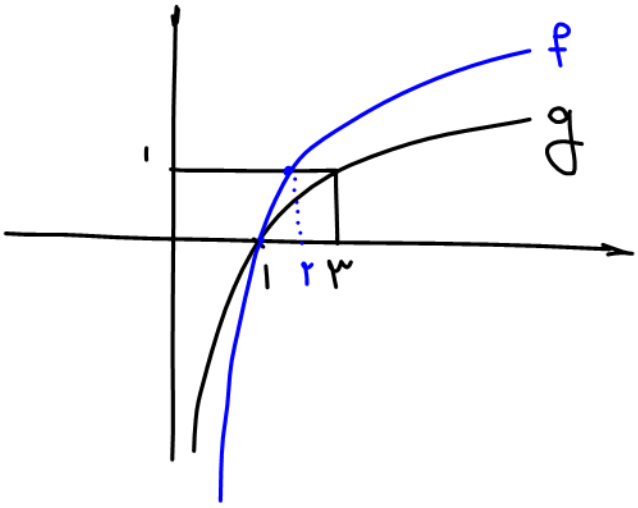
$D_f:(0,+\infty)=R_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}}=R_f:(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

اگر $0<b<1$ ، f و f^{-1} روی $y=x$ برخورد دارند.

فاصله ریشه f تا نقطه متناظرش روی f^{-1} چقدره؟ $\sqrt{2}$

مثال $\quad f(x)=\log_2 x \;,\; g(x)=\log_3 x$



$f(2)=\log_2 2=1$

$g(3)=\log_3 3=1$

مثال $\quad f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x \quad g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$