

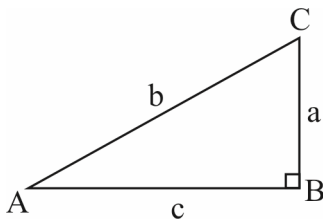
مثلثات پایه یازدهم رشته تجربی

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویه حاده معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

$$(1) \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}, (2) \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}, (3) \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{وتر}}, (4) \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{وتر}}$$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویه A مهم است و اندازه اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر \hat{A} است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویه A ، هر یک از آن‌ها را به ترتیب (1) تانژانت زاویه A ، (2) کتانژانت زاویه A ، (3) سینوس زاویه A و (4) کسینوس زاویه A می‌نامیم.



$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

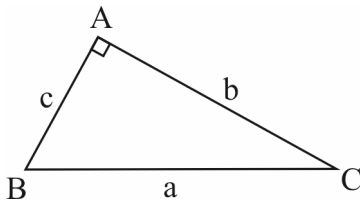
$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\cot \hat{A} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست 1: در شکل مقابل $a + c = 18$ و $\cos \hat{B} = \frac{5}{13}$ ، مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟



$$\frac{12}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{12} \quad (1)$$

$$\frac{5}{13} \quad (4)$$

$$\frac{13}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «1» - با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{13} = \frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c = \frac{5}{13}a$$

از رابطه $a + c = 18$ استفاده می‌کنیم:

$$a + c = 18 \Rightarrow a + \frac{5}{13}a = 18 \Rightarrow \frac{18}{13}a = 18 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow c = 5$$

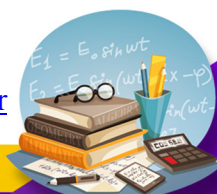
حال به کمک رابطه فیثاغورس اندازه b را محاسبه می‌کنیم:

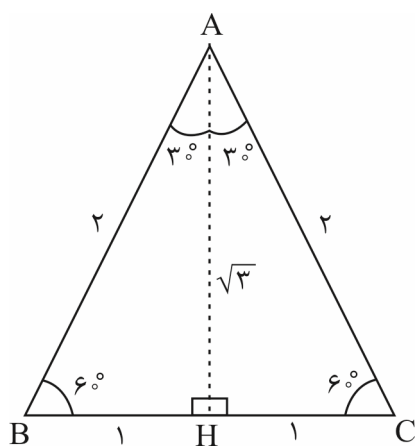
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b^2 = 169 - 25 = 144 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} b = 12$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

$$\tan \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \tan \hat{C} = \frac{5}{12}$$

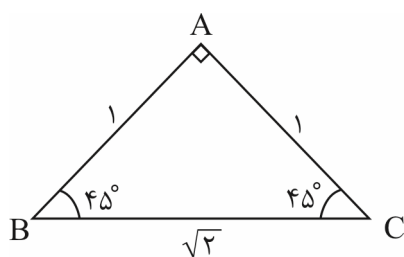
نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 2 واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 60° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.





$$\Delta ABH : \begin{cases} \sin 3^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \cos 3^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 3^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 3^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} \sin 6^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 6^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \tan 6^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3} \\ \cot 6^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° (به عنوان مثال B) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 45^\circ &= \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^\circ &= \frac{AC}{AB} = 1 & \cot 45^\circ &= \frac{AB}{AC} = 1 \end{aligned}$$

خلاصه نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف ($6^\circ, 45^\circ, 3^\circ$)

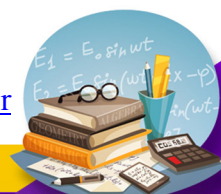
| مقدار زاویه θ / مقدار نسبت مثلثاتی | 3° | 45° | 6° |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ۱ | $\sqrt{3}$ |
| $\cot \theta$ | $\sqrt{3}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

تست ۲: مقدار x در تساوی $x \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{3} \tan 6^\circ - 4 \sin 3^\circ}{2\sqrt{2} \cos 45^\circ + \cot 45^\circ}$ کدام است؟

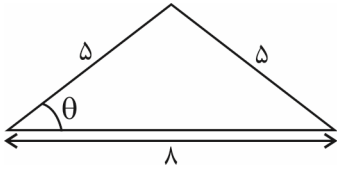
$$\frac{3}{2} \quad (4) \qquad 3 \quad (3) \qquad \frac{2}{3} \quad (2) \qquad \frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» - کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای گذاری کنیم:

$$x \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3 - 2}{2 + 1} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} x = \frac{2}{3}$$



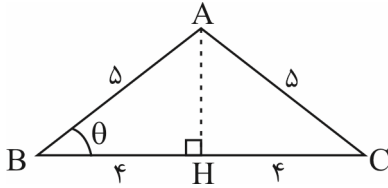
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $2 \cos \theta + \sin \theta$ کدام است؟



(۲) $\frac{9}{5}$
(۴) $\frac{12}{5}$

(۱) $\frac{8}{5}$
(۳) $\frac{11}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» - مثلث رسم شده، متساوی الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می کنیم:



$$\Delta ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 25 = AH^2 + 16 \Rightarrow AH^2 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} AH = 3$$

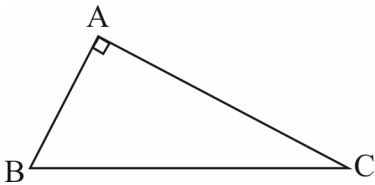
$$\sin \theta = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5}$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$2 \cos \theta + \sin \theta = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان 90° باشد)، آن گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \cos \hat{C}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \cos \hat{B}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \cot \hat{C}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \cot \hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P = \frac{\Delta \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ \times \tan 76^\circ}{8 \cot 14^\circ \times \cos 88^\circ \times \tan 7^\circ}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{8}{5}$

(۳) $\frac{8}{5}$

(۲) $-\frac{5}{8}$

(۱) $\frac{5}{8}$

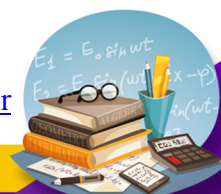
پاسخ: گزینه «۱» - از روابط نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم استفاده می کنیم:

$$76^\circ + 14^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$$

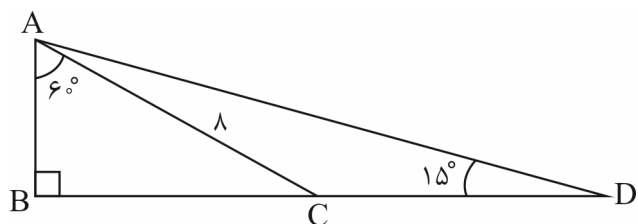
$$83^\circ + 7^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 83^\circ = \tan 7^\circ$$

$$2^\circ + 88^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 2^\circ = \cos 88^\circ$$

$$P = \frac{\Delta \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ \times \tan 76^\circ}{8 \tan 76^\circ \times \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ} = \frac{\Delta}{8}$$

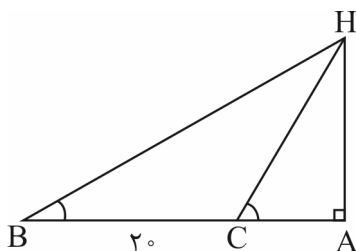


تست ۵: در شکل مقابل اندازه پاره خط BD برابر است با:



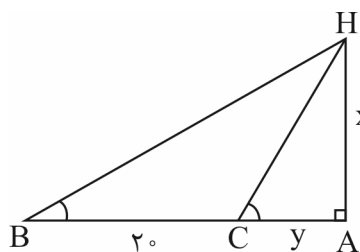
- (۱) $4\sqrt{3} + 4$
- (۲) $4\sqrt{3} + 8$
- (۳) $4\sqrt{3} + 12$
- (۴) ۱۶

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B} = 3^\circ$ و $\hat{C} = 6^\circ$ ، اندازه AH کدام است؟



- (۱) ۱۰
- (۲) $20\sqrt{3}$
- (۳) $10\sqrt{3}$
- (۴) ۲۰

پاسخ: گزینه «۳» - اگر فرض کنیم $AH = x$ و $AC = y$ ، آن گاه در شکل مقابل داریم:

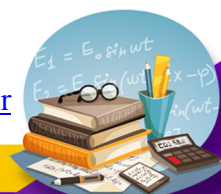


$$\begin{cases} \tan \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{x}{20+y} \Rightarrow \tan 3^\circ = \frac{x}{y+20} = \frac{\sqrt{3}}{3} (*) \\ \tan \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \tan 6^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$x = y\sqrt{3} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{3}}{y+20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3y = y+20 \Rightarrow y=10 \Rightarrow x=10\sqrt{3} \Rightarrow AH=10\sqrt{3}$$

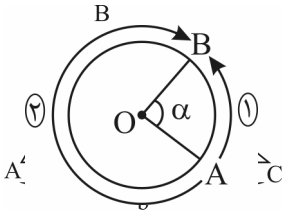
تست ۷: در مثلث قائم الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ ، حاصل $\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \frac{1}{1+\tan \hat{C}}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۴



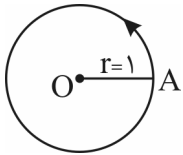
تعریف جهت مثلثاتی

شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.



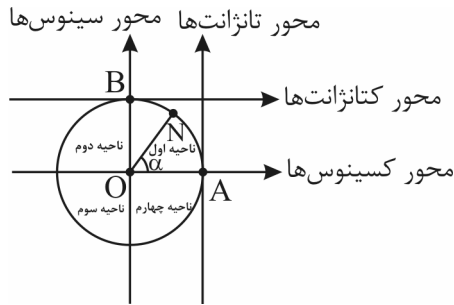
تعریف دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).



محورهای مثلثاتی

- ۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.
- ۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.
- ۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.
- ۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



- این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:
- نقطه‌ی N: انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α
 - نقطه‌ی B: مبدأ محور \cot
 - نقطه‌ی A: مبدأ محور \tan
 - نقطه‌ی O: مبدأ محورهای \sin و \cos

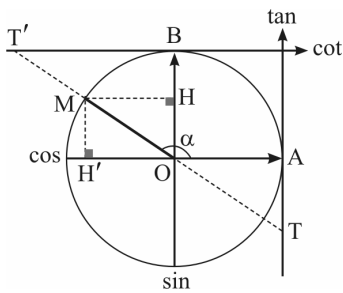
روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی

فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم. در این صورت از انتهای کمان بر محور \sin و \cos عمود می‌کنیم. داریم:

$$OH = \sin \alpha \quad , \quad OH' = -\cos \alpha$$

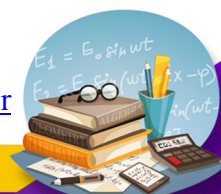
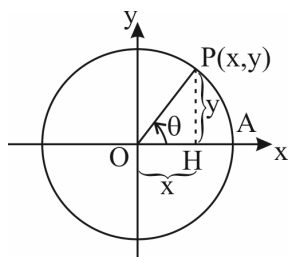
حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور \tan و \cot قطع شود، داریم:

$$AT = -\tan \alpha \quad , \quad BT' = -\cot \alpha$$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی P(x,y) در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$



مثال ۸: اگر زاویه θ ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.
پاسخ:

$$P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$x = \cos \theta = \frac{1}{3}, \quad y = \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 2\sqrt{2}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

پس:

از طرفی:

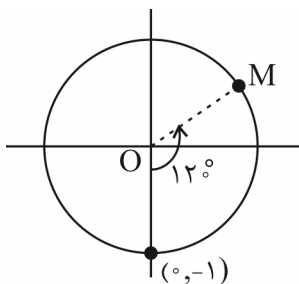
تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را 180° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

- (۱) -24° (۲) 24° (۳) 135° (۴) -12°

تست ۹: نقطه‌ی $(0, -1)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

- (۱) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$ (۳) $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$

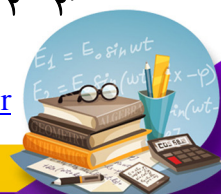
پاسخ: گزینه‌ی «۱» - نقطه‌ی $(0, -1)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را 120° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.



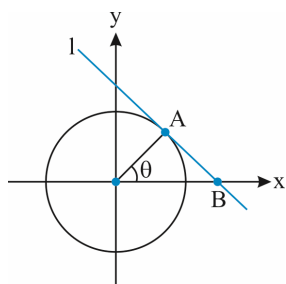
OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی 30° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M = \cos \theta \Rightarrow x_M = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_M = \sin \theta \Rightarrow y_M = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



تست ۱۰: در دایره مثلثاتی زیر، اندازه AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است).



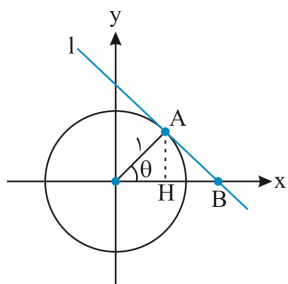
(۱) $\cos \theta$

(۲) $\frac{1}{\cos \theta}$

(۳) $\tan \theta$

(۴) $\frac{1}{\tan \theta}$

پاسخ: گزینه «۳» - خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطه A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



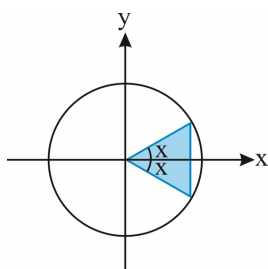
$$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH = \cos \theta} 1 = \cos \theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos \theta}$$

پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \Rightarrow AB = \tan \theta$$

تست ۱۱: در دایره مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیه رنگی برابر با A باشد، $A \times (\tan x + \cot x)$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» - با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعده $2 \sin x$ است. پس داریم:

$$A = \frac{1}{2} \times (2 \sin x) \cos x = \sin x \cos x$$

در نتیجه برای محاسبه $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right) = \sin x \cos x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1$$

(سراسری)

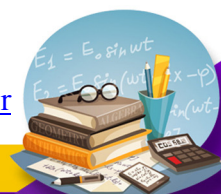
تست ۱۲: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟

(۲) $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

(۱) $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$

(۴) $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

(۳) $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$



(سراسری)

تست ۱۴: حاصل عبارت $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$ که در آن $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

(۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $\sin x + \cos x$ (۴) $\cos x - \sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[0, \frac{\pi}{4}]$ (زیر خط $y = x$)، $\cos x > \sin x$:

$$\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{-(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{2} = \cos x$$

تست ۱۵: اگر $a \in \mathbb{R}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ ، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}} \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow \text{انتهای کمان } x \text{ در ناحیه‌ی اول یا چهارم}$$

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x > 0$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ a^2 می‌تواند زیر رادیکال منفی شود و در نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases} \cot x \leq 0 \\ \cot x - a^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \geq 0$$

تست ۱۶: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

(۲) $\cos 100^\circ < \cos 40^\circ < \cos 20^\circ$

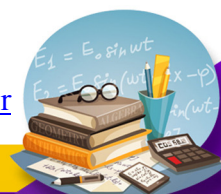
(۱) $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ < \sin 100^\circ$

(۴) $\cos 100^\circ < \cos 70^\circ < \cos 40^\circ$

(۳) $\sin 40^\circ < \sin 90^\circ < \sin 100^\circ$

تست ۱۷: اگر $\sin \theta + \tan \theta > 0$ و $\frac{1}{\cos \theta} < \sin \theta \times \tan \theta$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم



تست ۱۸: اگر $45^\circ < \alpha < 180^\circ$ باشد و $\sin \alpha = \frac{5m+1}{3}$ ، آن گاه حدود m کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (۲) $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$ (۳) $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (۴) $[0, \frac{2}{5}]$

تست ۱۹: اگر $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{3m+2}{4}$ ، آن گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

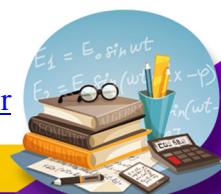
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

تست ۲۰: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

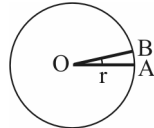
تست ۲۱: بیشترین مقدار عبارت $4 + \cos^2 x + 2 \cos x$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳



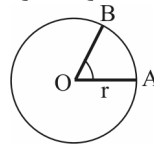
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{360} \quad \angle AOB = 1 \text{ درجه}$$

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$$\widehat{AB} = r \quad \angle AOB = 1 \text{ رادیان}$$

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و 2π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی 2π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا 2π رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

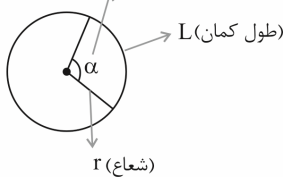
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و D اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R = 1$ فرض شود، داریم:

$$D = \frac{180}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx 3.14} D \approx 57.3$$

هر یک رادیان، تقریباً 57° است.

زاویه مرکزی برحسب رادیان



$$L = r\alpha$$

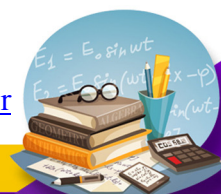
اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد L، شعاع دایره را با r و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تست ۲۲: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50^\circ$ برابر 10 سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

$$\frac{36}{\pi} \quad (4) \quad \frac{18}{\pi} \quad (3) \quad \frac{1}{10} \quad (2) \quad \frac{1}{50} \quad (1)$$

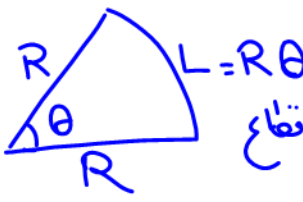
$$L = r\theta \quad 10 = r \left(50 \cdot \frac{\pi}{180} \right) \rightarrow r = \frac{180}{5\pi} \rightarrow \frac{S = \pi r^2}{P = 2\pi r} = \frac{1}{2} r = \frac{18}{\pi}$$



تست ۲۳: دایره‌ای به مساحت 4π مفروض است. قطاعی به محیط $7/14$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ ($\pi = 3/14$)

$S = 4\pi = \pi R^2 \rightarrow R = 2$

۱۲۰ (۴) ۴۵ (۳) ۹۰ (۲) ✓ ۱۸۰ (۱)

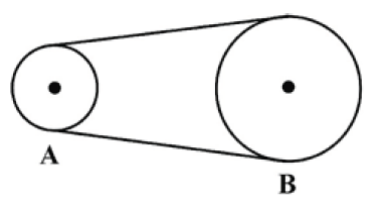


محیط قطاع = $R + R + R\theta = 2R + R\theta = 7/14$

$2 + 2\theta = 7/14 \rightarrow 2\theta = 3/14 = \pi$

$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

تست ۲۴: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی A، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی B برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی B به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی A چند دور می‌زند؟



$L_A = L_B$

$R_A \theta_A = R_B \cdot \theta_B$

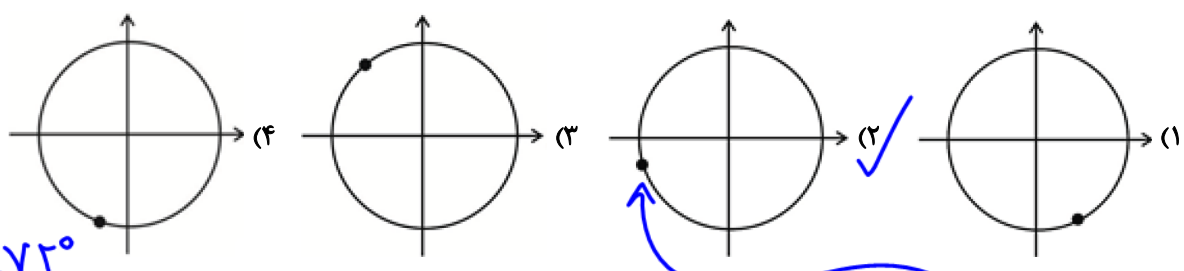
$20 \cdot \theta_A = 100 \left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\theta_A = 5 \left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$

| | | |
|-----------|--------------|------------|
| 2π | به دور دایره | ۲/۵ (۱) |
| $15\pi/2$ | ? | ۵ (۲) |
| | | ۳/۷۵ (۳) ✓ |
| | | ۱۰ (۴) |

$? = \frac{15\pi/2}{2\pi} = \frac{15}{4} = 3,75$ دور

تست ۲۵: مجموعه دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با x درجه باشد، زاویه‌ی $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



$\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{15} = 12^\circ \end{cases}$

$2x = 84^\circ \rightarrow x = 42^\circ$

$5(x = 42^\circ) - 10^\circ = 20^\circ$

تست ۲۶: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{11\pi}{3}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

فاصله کابین $10^\circ = \frac{360^\circ}{36}$

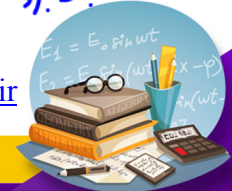
$\frac{11(\pi = 180^\circ)}{3} = 77^\circ$

$\frac{360^\circ}{10^\circ} = 36$ کابین

$36 - 77 = -41$ به دور

$36 = 30 + 6$

۳۵ (۴) ✓ ۳۴ (۳) ۳۰ (۲) ۲۵ (۱)



نکات ساعت

- الف) عقربه دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.
- ب) عقربه ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.
- پ) عقربه ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.
- ت) زاویه بین عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

ساعت
دقیقه

$$\theta = \left| \frac{11m}{2} - 3 \cdot h \right| = \left| 3 \cdot h - \frac{11m}{2} \right|$$

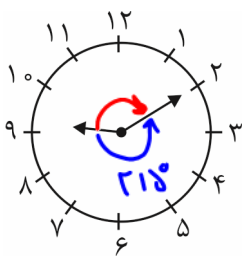
| | |
|------------------|-----|
| زاویه رادیان | ۷۰° |
| $\frac{8\pi}{3}$ | ? |

تست ۲۷: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

(۱) یک ساعت
(۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
(۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه ✓
(۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

$$? = \frac{\left(\frac{8\pi}{3}\right)(70)}{2\pi} = \frac{240}{3} = 80 = 70 + 10$$

یک ساعت و ده دقیقه



تست ۲۸: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۹:۱۰ چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{9\pi}{5}$
(۲) $\frac{29\pi}{30}$
(۳) $\frac{29\pi}{36}$ ✓
(۴) $\frac{145\pi}{36}$
- Handwritten calculations:
 $370 - 315 = 155$
 $155 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$

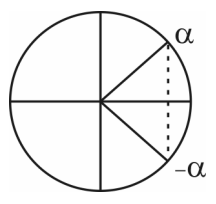
تبدیل به رادیان

$$\theta = \left| 3 \cdot h - \frac{11m}{2} \right| = \left| 3 \cdot (9) - \frac{11}{2} (10) \right| = \left| 27 - 55 \right| = 28$$

زاویه بزرگتر بین عقربه‌ها

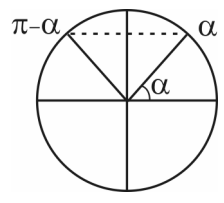
$$28 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{36}$$

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)
چون در آن‌ها نه هائیت را و نه کوجنس را تغییر می‌دهیم

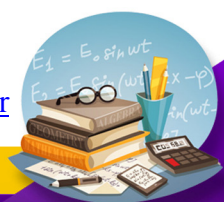


- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi - \alpha)$

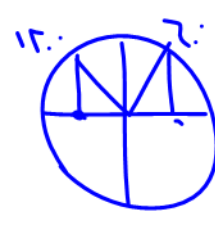


- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۲۹:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(\pi - 3^\circ) = \frac{1}{2} \\ \cos 15^\circ &= \cos(\pi - 3^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 15^\circ &= \tan(\pi - 3^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot 15^\circ &= \cot(\pi - 3^\circ) = -\sqrt{3} \\ \sin 12^\circ &= \sin(\pi - 6^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 12^\circ &= \cos(\pi - 6^\circ) = -\frac{1}{2} \\ \tan 12^\circ &= \tan(\pi - 6^\circ) = -\sqrt{3} \\ \cot 12^\circ &= \cot(\pi - 6^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$


زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$$\sin \alpha = +\sin \beta \quad , \quad \cos \alpha = -\cos \beta \quad , \quad \tan \alpha = -\tan \beta \quad , \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

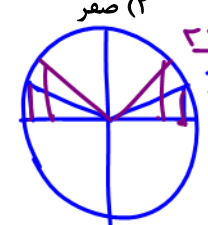
مثال ۳۰: حاصل $(\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{6\pi}{5}) + (\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5})$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5} = \pi \Rightarrow \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{6\pi}{5} = 0 \quad , \quad \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

تست ۳۱: حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$ با فرض فرد بودن n کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

راستی اینجور که $n=3$ بدی سینه

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$$


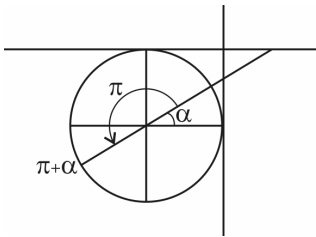
توی این مدل از سوالات اولی و آخری رو با هم بگیرد و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} &= \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi \\ \frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{n} &= \frac{2\pi}{n} + \frac{n\pi - 2\pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi \end{aligned}$$

پس جواب صفر است.



نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha, \pi + \alpha)$



$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از معنای زوج π در تانژانت و کتانژانت

$$\begin{cases} \sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha \end{cases}$$

مثال ۳۲: از همه معنای π (چه فرد، چه زوج) صرف نظر کن

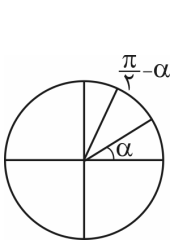
$$\sin 21^\circ = \sin(\pi + 3^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 21^\circ = \cos(\pi + 3^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 21^\circ = \tan(\pi + 3^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 21^\circ = \cot(\pi + 3^\circ) = \sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم $(\frac{\pi}{2})$ جمع



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \end{aligned}$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\tan \Leftrightarrow \cot$ و $\sin \Leftrightarrow \cos$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

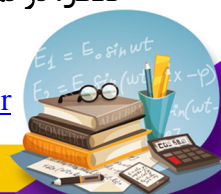
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

یادت باشه:

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حاد در نظر گرفتیم.



یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{3\pi}{4} + \alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حاد است. $\frac{3\pi}{4} + \alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{4}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون α داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{3\pi}{4}$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{6}$ ، $\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{3}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{3}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(7 \times \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

ربع سوم

$$\cot(-\frac{5\pi}{3}) = -\cot(5 \times \frac{\pi}{3}) = -(-\cot(\frac{\pi}{3})) = -(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ربع چهارم

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{3}$ ، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهن‌تان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7 \times \frac{\pi}{6} = 7 \times 30^\circ = 210^\circ \quad \text{یا} \quad 5 \times \frac{\pi}{3} = 5 \times 60^\circ = 300^\circ$$

(تجربی ۹۴)

تست ۳۳: حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ کدام است؟

$$\frac{9}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{16}{9} \quad (۳)$$

$$-\frac{9}{16} \quad (۲)$$

$$-\frac{16}{9} \quad (۱) \checkmark$$

$$\cos(285^\circ = 270^\circ + 15^\circ = 3\pi + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$



$$\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{-\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

$$\sin(255^\circ = 270^\circ - 15^\circ = 3\pi - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$



برای تولید $\tan 15^\circ$ همه جمله‌های صورت را منهای برابر $\cos 15^\circ$ تقسیم کن

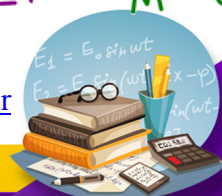
$$\sin(525^\circ = 540^\circ - 15^\circ = 3\pi - 15^\circ = 2\pi + \pi - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

در سینوس از معادله زوج π همیشه منهای نظر کن



$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{-\tan 15^\circ - 1} = \frac{1/2 + 1}{-1/2 - 1} = \frac{3/2}{-3/2} = -1$$

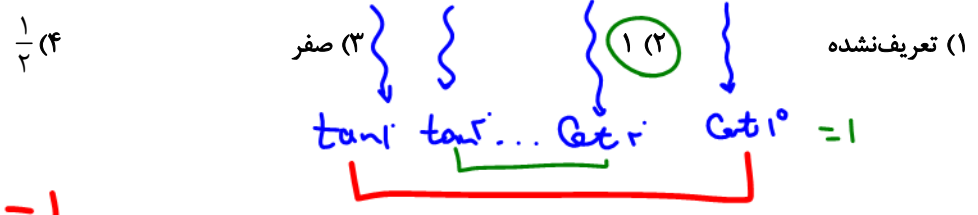
$$\sin(105^\circ = 90^\circ + 15^\circ = \pi/2 + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$



$\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$
 $\tan 11^\circ = \cot 79^\circ$

در زاویه جمع ۹ تنازات این که تنازات ختم شوند $\tan 45^\circ = 1$

تست ۳۴: حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ کدام است؟



$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تنازات و کتانزاتشان برابر است. $\tan \alpha = \cot \beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$

به عنوان مثال: $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$ ، $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستند، داریم:

$\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$

تست ۳۵: اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ}$ کدام است؟

$\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ}$

$\frac{-3 \cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ}{-3 \sin 15^\circ + 4 \cos 15^\circ} = \frac{-3 \cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ}{-3 \sin 15^\circ + 4 \cos 15^\circ} = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{a}$

۱ (✓) $-\frac{1}{a}$ (۱) $-a$ (۲) $-\frac{2}{a}$ (۳) $-2a$ (۴)

تست ۳۶: مقدار عبارت $\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ) + \cot(75^\circ) + \tan(-14^\circ)$ کدام است؟

$\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ) + \cot(75^\circ) + \tan(-14^\circ)$

$\cos(300^\circ) = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin(330^\circ) = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cot(75^\circ) = \cot(90^\circ - 15^\circ) = \tan 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(-14^\circ) = -\tan 14^\circ = -\tan(45^\circ - 31^\circ) = \tan 31^\circ = \sqrt{3}$

صفر (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) 1 (۱) $2\sqrt{3}$ (۲)



آنچه روزاویه ۱۸۰ باشد هم سینوس

$$\frac{\pi}{\lambda} + \frac{6\pi}{\lambda} = \frac{7\pi}{\lambda} = \pi \quad \sin \frac{\pi}{\lambda} = \sin \frac{6\pi}{\lambda}$$

$$\frac{3\pi}{\lambda} + \frac{5\pi}{\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda} = \pi \quad \sin \frac{3\pi}{\lambda} = \sin \frac{5\pi}{\lambda}$$

تست ۳۷: حاصل عبارت $\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{5\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{7\pi}{\lambda}$ کدام است؟

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{5\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{7\pi}{\lambda} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} = 2$$

آنچه جمع آزادیه نه باشد سینوس یکی کیوس اند

تست ۳۸: حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(-\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(-\frac{11\pi}{6})$ کدام است؟

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-\frac{17\pi}{3}) = \sin(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6}) = \cos(\frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4}) = \tan(\frac{20\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

تست ۳۹: حاصل عبارت $\tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ)$ کدام است؟

$$-\cos^2(15^\circ) - \sin^2(15^\circ) - 1 + \cos^2(15^\circ) = -1$$

$$\tan(285^\circ = 270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan(165^\circ = 180^\circ - 15^\circ) = -\tan(-15^\circ) = \tan 15^\circ$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$\sin(1095^\circ = 7\pi + 15^\circ) = \sin(-15^\circ)$$

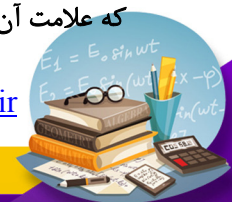
$$\cos(255^\circ = 240^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

۱) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases}$$

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از: اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin \theta$ یا $\cos \theta$ را بر حسب دیگری بیابیم، داریم:

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.



۲) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

۴) $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$

۶) $\tan \theta \times \cot \theta = 1$

۸) $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$

۱۰) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

۳) $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

۵) $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

۷) $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$

۹) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 1$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
 $(\div \cos^2 \theta)$
 $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta$

تست ۴۰: اگر α در ناحیه سوم بوده و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha + \tan \alpha}$ کدام است؟

$\frac{45}{31}$ (۴)

$\frac{31}{45}$ (۳)

$\frac{45}{32}$ (۲)

$\frac{32}{45}$ (۱)



$\sin \alpha = -\frac{4}{5}$
 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

$$\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{4}{5} + \frac{4}{3}} = \frac{15(3) - 45}{4(1)} = \frac{45 - 45}{4} = 0$$

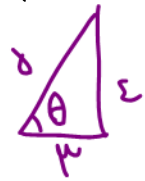
تست ۴۱: اگر $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ کدام است؟

$\frac{3}{7}$ (۴)

$\frac{12}{7}$ (۳)

$-\frac{3}{7}$ (۲)

$-\frac{12}{7}$ (۱)



$\tan \theta = \frac{4}{3}$

$$\frac{\frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4(3)}{3(-7)} = -\frac{12}{7}$$

تست ۴۲: حاصل $\frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

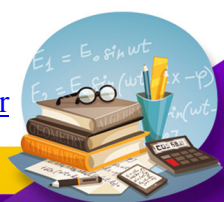
صفر (۳)

$\cos^2 \alpha$ (۲)

$2 \sin^2 \alpha$ (۱)

$\frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \sin^2 \theta$
 $\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \cos^2 \theta$

$\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta$
 $\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$



تست ۴۳: اگر $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، حاصل $(\tan \theta - \cot \theta)^2 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ کدام است؟

$\frac{16}{9}$ (۴) $\frac{16}{25}$ (۳) $-\frac{12}{25}$ (۲) $-\frac{11}{9}$ (۱) ✓

$$\tan^2 \theta + \cot^2 \theta - \cancel{2 \tan \theta \cot \theta} - (1 + \tan^2 \theta) = \cot^2 \theta = \frac{9}{16}$$

$$\cot^2 \theta - 2 - 1 = \cot^2 \theta - 3 = \left(\frac{9}{16}\right)^2 - 3 = \frac{81}{256} - 3 = \frac{81 - 768}{256} = -\frac{687}{256}$$

تست ۴۴: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$-\frac{1}{3}$ (۴) ✓ $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۱)

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{8}{3}$$

تست ۴۵: اگر $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

$\pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$ (۴) $\pm \frac{9}{4\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴» را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}(\sin x - \cos x)$$

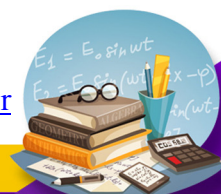
حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{4}{3}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

پس:



تست ۴۶: اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{65}{8}$ (۲) $-\frac{65}{8}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) $-\frac{17}{4}$

پاسخ: گزینه ی «۱» - طرفین وسطین می کنیم، یادتون باشه هر وقت صورت و مخرج یک کسر هم زمان هم \sin و هم \cos داشت، طرفین

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2 \Rightarrow \sin x + 2 \cos x = 2 \sin x - 6 \cos x$$

وسطین کنید و بعدش \tan بسازید:

$$\Rightarrow 8 \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x \text{ تانژانت سازی}} 8 = \tan x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

از طرفی همیشه داریم:

$$8 + \frac{1}{8} = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{65}{8}$$

تست ۴۷: اگر $2 \sin \alpha = 3 \cos \alpha$ حاصل $\frac{1 + \cot \alpha}{1 + \tan \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{6}{4}$

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

تست ۴۸: مقدار عبارت $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ به ازای $\alpha = 15^\circ$ کدام است؟

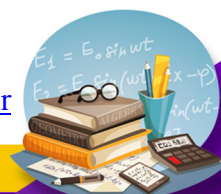
(۱) صفر (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\frac{\cos \alpha}{(1 - \sin \alpha) - \cos \alpha} = \frac{\text{صفر}}{2}$$

تست ۴۹: حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

(۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\tan^2 \theta$ (۴) $\cot^2 \theta$

$$\frac{\cos^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cancel{\sin^2 \theta} = \sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$$



تست ۵۰: اگر $\frac{1 + \cot x}{\tan x + 1} = 2$ ، حاصل $\frac{2 \cos x - 3 \sin x}{\sin x + \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{2}{13}$ (۴) $\frac{5}{13}$

تست ۵۱: حاصل $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

(۱) $\tan \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۳) $\cot \alpha$ (۴) $-\cot \alpha$

تست ۵۲: حاصل $\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

- (۱) $\sin x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینه «۲» - با استفاده از روابط $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ و $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \sqrt{1 + \cos x} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 + \cos x} \sqrt{\cos^2 x}$$

اتحاد مزدوج

$$= \sqrt{1 + \cos x} |\cos x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} \sqrt{1 + \cos x} (-\cos x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} -\sin x$$

تست ۵۳: در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس \hat{A} قائم است، حاصل $\frac{1}{\tan^2 \hat{C} + 1} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» - روش اول: در مثلث ABC زاویه $A = 90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

پس دو زاویه B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{O}} = \cos^2 \hat{O}$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{O}) = \cos^2 \hat{O}$ است، پس می‌توان

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B}) = \cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B}$$

نوشت:



از طرفی با توجه به این که دو زاویه B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$ و همچنین $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطه $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$ می‌توان نوشت:

$$\cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B} = \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$$

روش دوم: دو زاویه B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ ، پس $\hat{B} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \hat{B} \right) = \frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C} = 1$$

تست ۵۴: با فرض $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x$ مقدار $\cos^2 x$ کدام است؟

$$\frac{4}{13} \quad (۴) \qquad 4 \quad (۳) \qquad \frac{13}{4} \quad (۲) \qquad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» - طرفین معادله داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 5 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x + 3 = 5 \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\text{حالت اول: } \tan x = 1 \Rightarrow 1 + (1)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{حالت دوم: } \tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$$

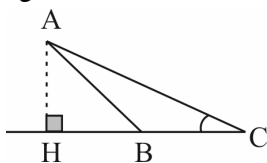
که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2 x = \frac{4}{13}$ است.

(سراسری تیرگی ۱۴۰۱)

تست ۵۵: اگر $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

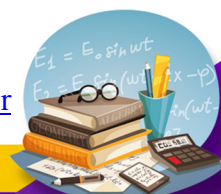
$$\frac{1}{4} \quad (۴) \qquad \frac{1}{2} \quad (۳) \qquad \frac{2}{3} \quad (۲) \qquad \frac{3}{2} \quad (۱)$$

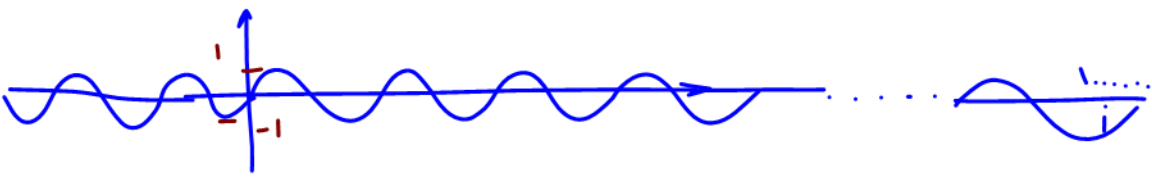
(ریاضی ۹۹)



تست ۵۶: در شکل زیر، فرض کنید $\sin \hat{C} = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۲) \qquad \frac{3}{25} \quad (۱) \\ \frac{3}{75} \quad (۴) \qquad \frac{3}{6} \quad (۳)$$





توابع مثلثاتی

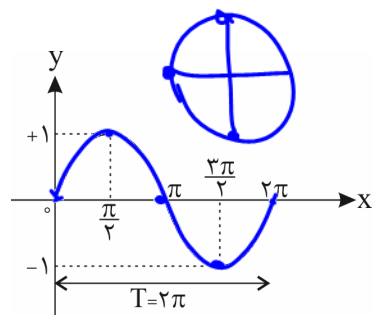
$y = \sin x$

(۱) دامنه‌ی این تابع \mathbb{R} است. $\sin x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد.
 (۲) برد این تابع $[-1, 1]$ است. (چون $-1 \leq \sin x \leq 1$)

دایره $(1000000) = 2\pi$
 دایره‌ی بین ۱- است.

(۳) از آن جایی که کمان $(\frac{2k\pi}{2} + \alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y = \sin x$ را در $[0, 2\pi]$ بررسی می‌کنیم.
 یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس 2π تا 2π تکرار می‌کنیم.

نمودار $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:



| | | | | | |
|---|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| y | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |



دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T = 2\pi$ می‌باشد.
 $\pi = 3.14$ $2\pi = 6.28$ $\frac{\pi}{2} = 1.57$

(۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر ۱ است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$ در دایره‌ی مثلثاتی رخ می‌دهد.

لب راست دایره = $2k\pi$ = مقدار زوج π

(۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -۱ است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان $(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ در دایره‌ی مثلثاتی رخ می‌دهد.

$2k\pi - \frac{\pi}{2}$

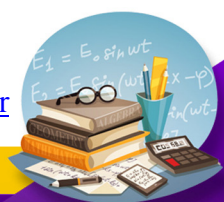
(۶) تابع $y = \sin x$ در $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

دو لب دایره

قوانین انتقال در مورد توابع مثلثاتی نیز برقرار است یعنی اگر $\alpha > 0$ و $k > 0$

- برای رسم $y = \sin(x - \alpha)$ ، نمودار $y = \sin x$ را α تا به سمت راست انتقال می‌دهیم.
- برای رسم $y = \sin(x + \alpha)$ ، نمودار $y = \sin x$ را α تا به سمت چپ انتقال می‌دهیم.
- برای رسم $y = \sin x + k$ ، نمودار $y = \sin x$ را k واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.
- برای رسم $y = \sin x - k$ ، نمودار $y = \sin x$ را k واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم.

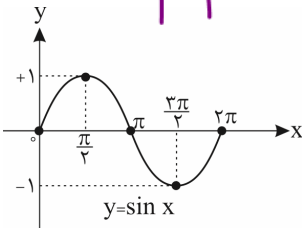
تذکر: هم‌چنین در $y = a \sin x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ است، عرض نقاط a برابر می‌شود و در نتیجه ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $|a|$ و $-|a|$ خواهد بود.



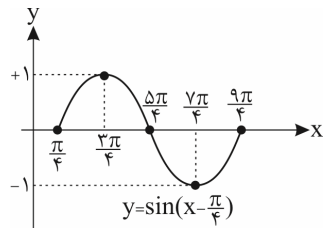
یا یک با سین یک

$$y_{min} = -|a| + d \leq a \sin(bx+c) + d \leq |a| + d = y_{Max}$$

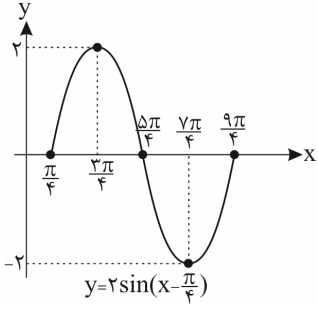
به طور مثال نمودار تابع $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1$ را در یک دوره تناوب به صورت زیر است: $|a| = \frac{Max - Min}{2}$



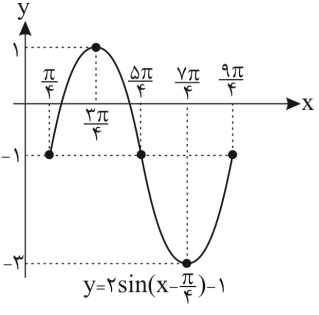
انتقال $\frac{\pi}{4}$ واحدی به راست



عرض نقاط دو برابر



انتقال یک واحدی به پایین



تذکر: در واقع در رسم $y = a \sin bx$ نمودار $y = \sin x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انقباض طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط

یا انقباض عرضی (عمودی) می شود (اگر $ab < 0$ ، یعنی یا $a < 0$ یا $b < 0$ باشد، نمودار $y = \sin x$ علاوه بر تغییرات فوق، نسبت به محور

x ها نیز قرینه می شود چون در مورد $b < 0$ داریم: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$)

در حالت کلی، در تابع $y = a \sin(bx+c)+d$:

(۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ می باشد.

(۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور y ها، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می دهیم و y را به دست می آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور x ها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ قرار می دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می کنیم.

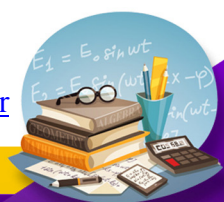
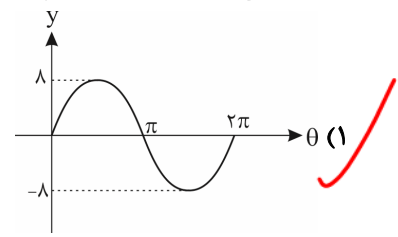
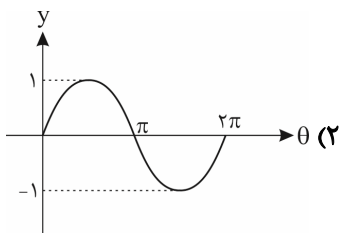
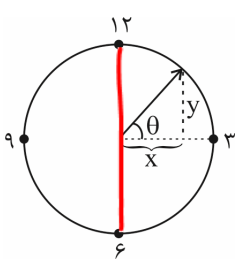
(۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

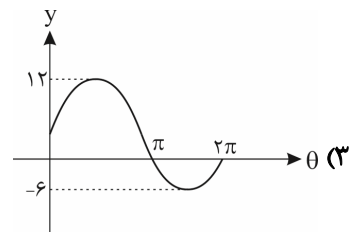
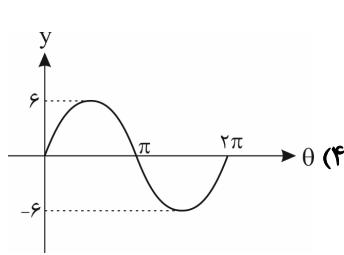
تست ۵۷: اگر بیشترین مقدار تابع $y = 2 \sin 5x - 3c$ برابر (-7) باشد، کدام است؟

- ۱) ۳
 - ۲) -۲
 - ۳) -۵
 - ۴) ۱
- پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$y_{max} = 2 - 3c = -7 \Rightarrow -3c = -9 \Rightarrow c = 3$$

تست ۵۸: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y بر حسب θ کدام است؟ (θ بر حسب رادیان است.)

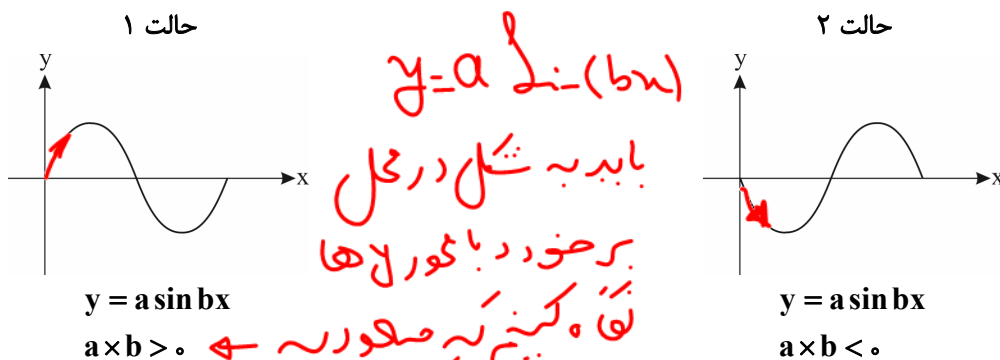




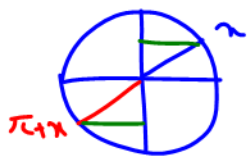
پاسخ: گزینه‌ی «۱» - طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{\lambda} \Rightarrow y = \lambda \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} T = 2\pi \\ y_{\max} = \lambda \\ y_{\min} = -\lambda \end{cases}$$

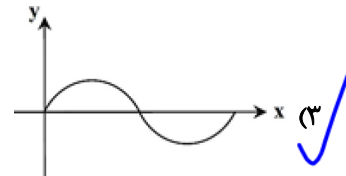
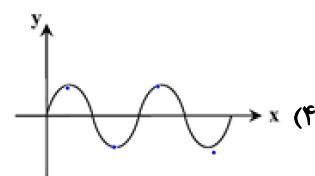
مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y = \lambda \sin \theta$ برابر λ و کم‌ترین مقدار این تابع $-\lambda$ و دوره‌ی تناوبش هم $T = 2\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۳» درسته.



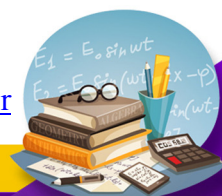
تست ۵۹: نمودار تابع $f(x) = -\sin(\pi + x)$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کدام شکل است؟



$$y = -\sin(\pi + x) = -\sin x$$

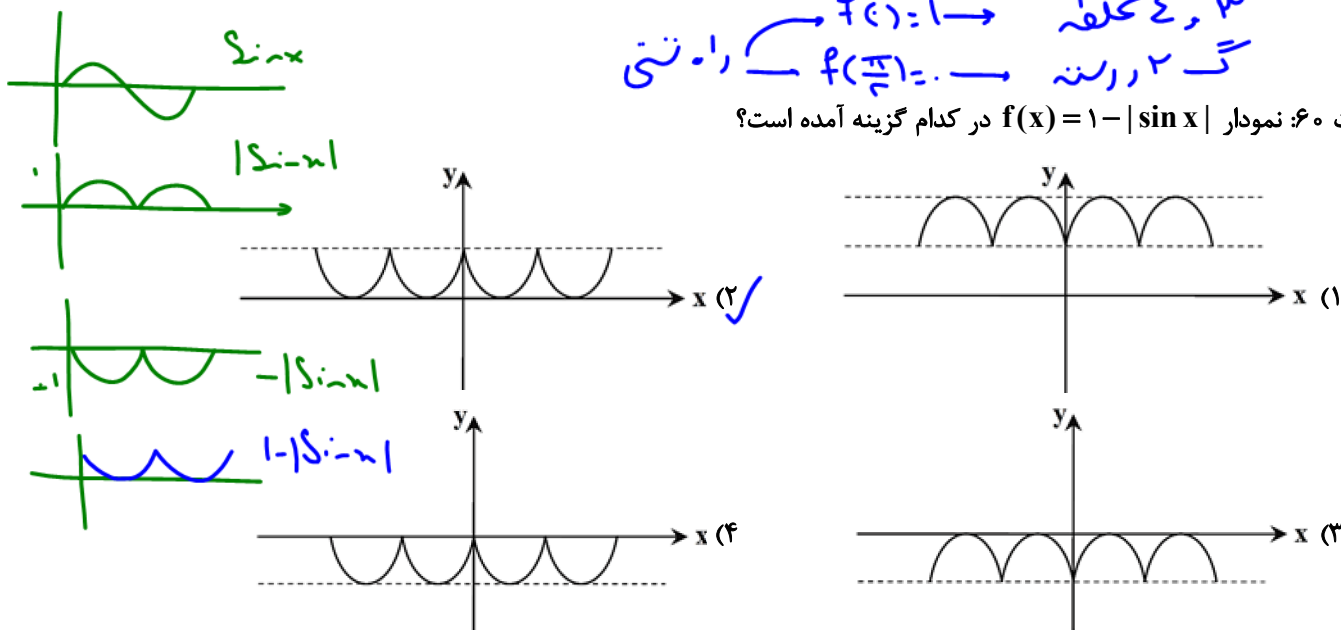


$y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ یب Max را، و یب Min را دارد. یب اوج و تنادب



۳ و ۴ مختلفه $f(x) = 1 \rightarrow$
 ۲ و ۱ رسته $f(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow$ راه رستی

تست ۶۰: نمودار $f(x) = 1 - |\sin x|$ در کدام گزینه آمده است؟



$$-|a| + d \leq y = a \sin(bx + c) + d \leq |a| + d$$

$$Min = -|-2| + 1 = -1 \qquad 1 - |-2| + 1 = 3 = Max$$

تست ۶۱: برد تابع $y = -2 \sin x + 1$ بازه $[a, b]$ است. حاصل $b^2 - a^2$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۷ (۳)

۱۰ (۲) ✓

۸ (۱)

$$\sin x = 1 \rightarrow y = -2(1) + 1 = -1$$

$$\sin x = -1 \rightarrow y = -2(-1) + 1 = 3$$

$$a = -1 \leq y \leq 3 = b$$

$$(b^2 - a^2) = (9 - 1) = 8$$

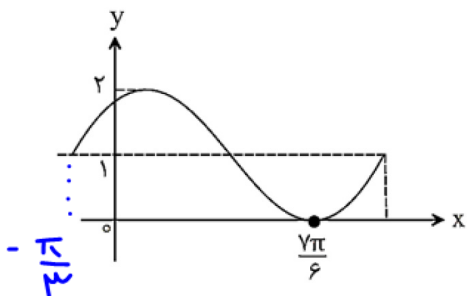
تست ۶۲: ضابطه تابع نشان داده شده در شکل برابر با کدام گزینه زیر می تواند باشد؟

(۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$

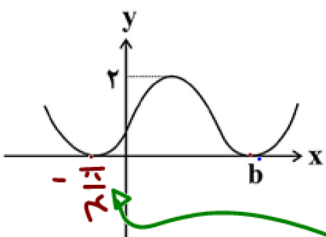
(۱) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

(۴) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$

(۳) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$ ✓



تست ۶۳: اگر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ به صورت زیر باشد، کدام a, b کدام است؟



می بینیم Max تابع است پس:
 $y_{\text{max}} = |-1| + a = 2 \rightarrow a = 1$
 می بینیم در $x = b$ تابع صفر شده پس:

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$
- (۲) $\frac{3\pi}{2}$
- (۳) $\frac{7\pi}{4}$ ✓
- (۴) $\frac{7\pi}{2}$

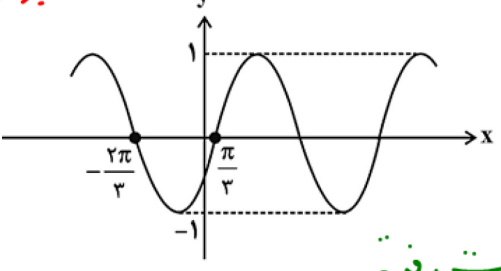
$y = 1 - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$
 $0 = 1 - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$

طوتی x های مثبت
 باشن از نا رنج $x = -\frac{\pi}{4}$

$\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = 1$



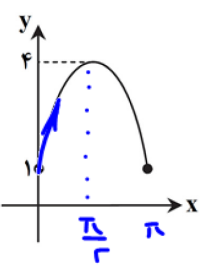
$x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$
 $x + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 $x = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$
 $x = \frac{7\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{14\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$
 تست ۶۴: نمودار شکل زیر مربوط به کدام تابع می تواند باشد؟



هون
 است
 به راست رفته

- (۱) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$
- (۲) $y = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$
- (۳) $y = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$
- (۴) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ✓

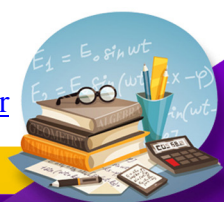
تست ۶۵: نمودار تابع $f(x) = a \sin x + b$ در بازه $[0, \pi]$ به شکل زیر است. مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟
 $\leftarrow r = |a|$
 $r = \text{Max} = |a| + |b|$
 $a > 0$ پس $a = 3$



می بینیم در $x = 0$ برابر یک شده.
 $f(0) = 1$
 $f(0) = a \sin 0 + b = 1 \rightarrow b = 1$

- (۱) ۱۰ ✓
- (۲) ۲
- (۳) ۵
- (۴) ۱۳

می بینیم در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر ۴ شده.
 $f(\frac{\pi}{2}) = a \sin \frac{\pi}{2} + (b = 1) = 0 + 1 = 4$
 $a = 3$
 $a^2 + b^2 = 10$

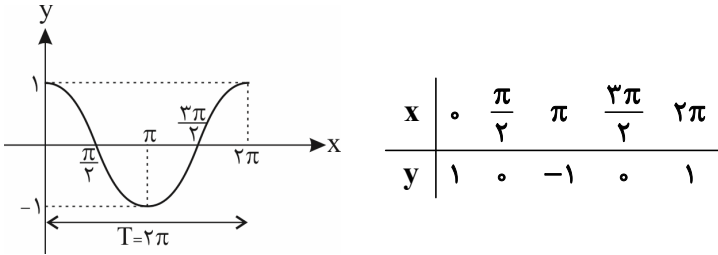


y = cos x

(۱) دامنه‌ی این تابع \mathbb{R} است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

(۲) برد این تابع $[-1, 1]$ است (چون $-1 \leq \cos x \leq 1$).

(۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(2k\pi + \alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = 2\pi$ است، تا 2π تا تکرارش می‌کنیم.
مضرب π زوج



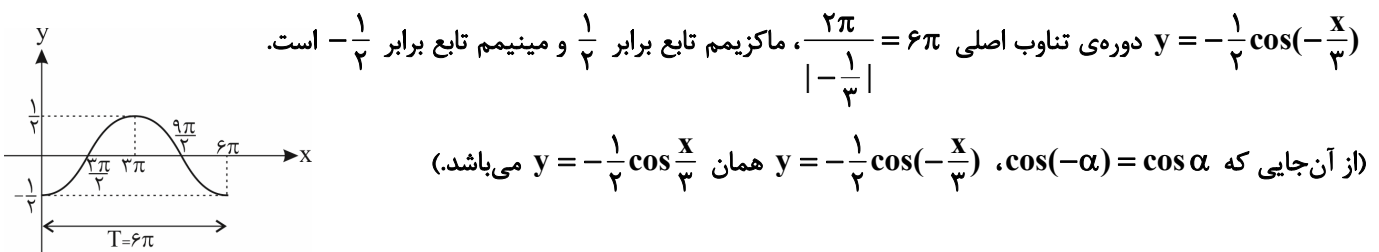
(۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان (مثل $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$) رخ می‌دهد.

(۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان (مثل $\pm \pi, \pm 3\pi, \dots$) رخ می‌دهد.

(۶) تابع $y = \cos x$ در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

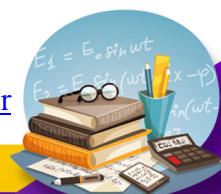
قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف گفته شد) در مورد $y = \cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y = a \cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در



تذکر: در واقع در رسم $y = a \cos bx$ ، نمودار $y = \cos x$ با ضرب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضرب a دچار

انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی خور است).



حالت کلی، در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$

(۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ است.

(۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور y ها، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور x ها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

(۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

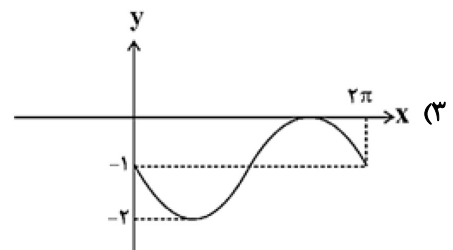
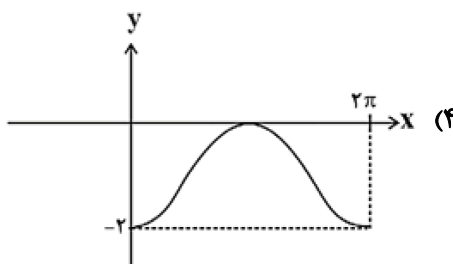
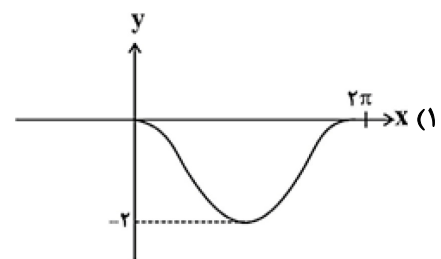
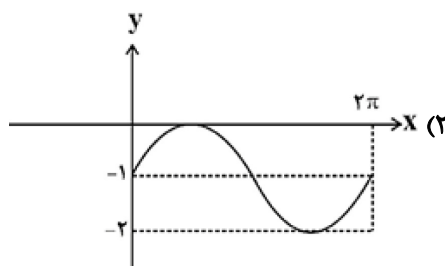
تست ۶۶: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x) = -a \cos \frac{\pi x}{3} + 1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

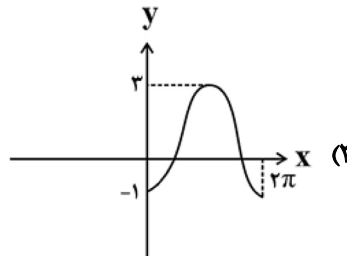
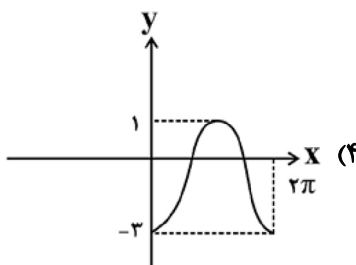
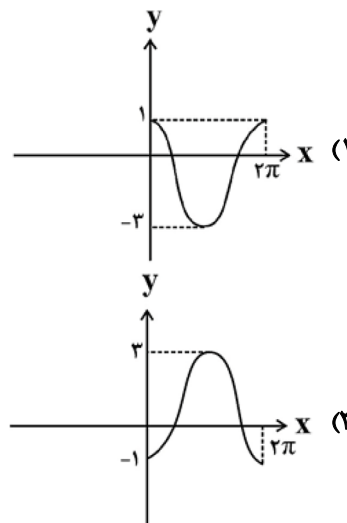
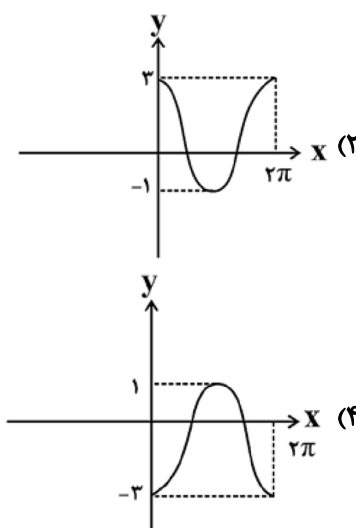
پاسخ: گزینه‌ی «۴»

(در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.) $-|-a| + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow -|a| = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3}$

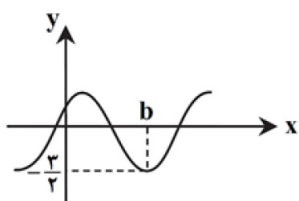
تست ۶۷: بخشی از نمودار تابع $y = \sin(\frac{\sqrt{\pi}}{3} + x) - 1$ شبیه کدام است؟



تست ۶۸: نمودار تابع $y = -2 \cos x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

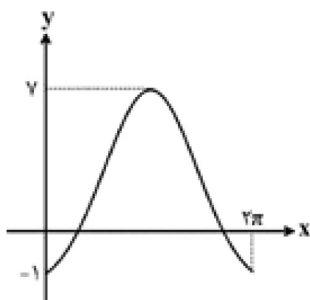


تست ۶۹: اگر نمودار تابع $y = a + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ به صورت زیر باشد، مقدار ab کدام است؟



- (۱) $-\frac{7\pi}{6}$
- (۲) $-\frac{7\pi}{12}$
- (۳) $\frac{7\pi}{6}$
- (۴) $\frac{7\pi}{12}$

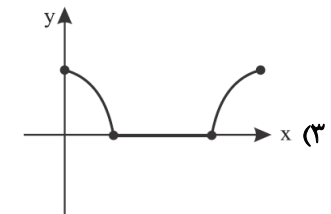
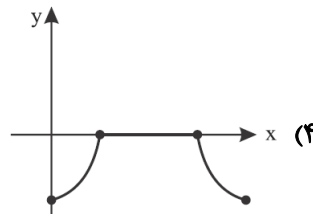
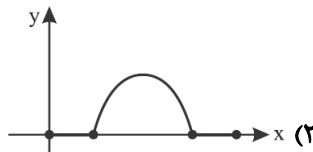
تست ۷۰: شکل تابع $y = a \cos(\pi - x) + b$ به صورت زیر است. حاصل ab چه قدر است؟



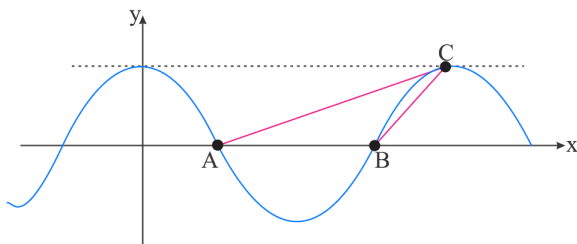
- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲



تست ۷۱: نمودار تابع $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کدام شکل است؟



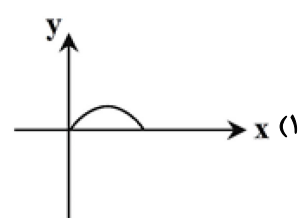
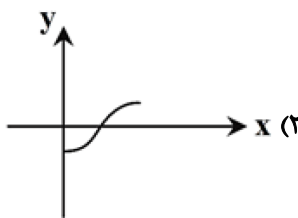
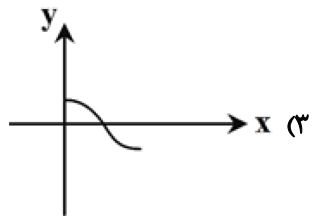
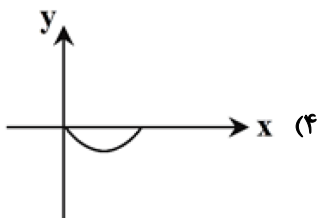
تست ۷۲: شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \cos x$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) π
- (۴) $\frac{3\pi}{2}$

تست ۷۳: نمودار تابع $f(x) = a + b \cos x$ از نقطه $(\pi, 0)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x) = \frac{a}{b} \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ به کدام شکل است؟

$(b \neq 0)$



توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید

