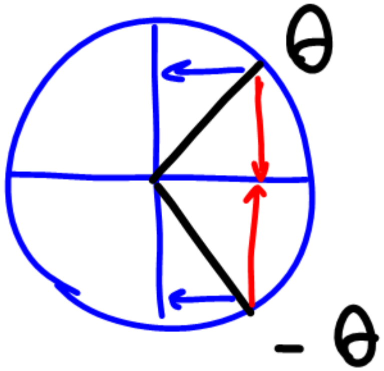
روابط تکمیلی در مثلثات



دو زاویه قرینه هم کسینوسند

و قرینهٔ السایر النسبتها

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

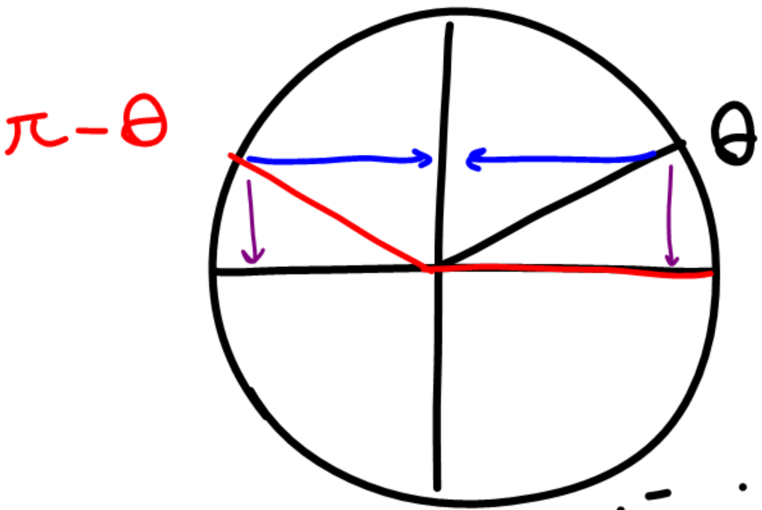
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\begin{cases} \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

کسینوس منفی خوره منفی رو می خوره

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$



$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

دو زاویه $\pi-\theta$ و θ

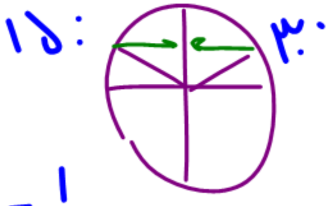
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

مجموعشون $\pi=۱۸۰$

مکملند. همسینوسند و قرینه السایرالنسبته

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

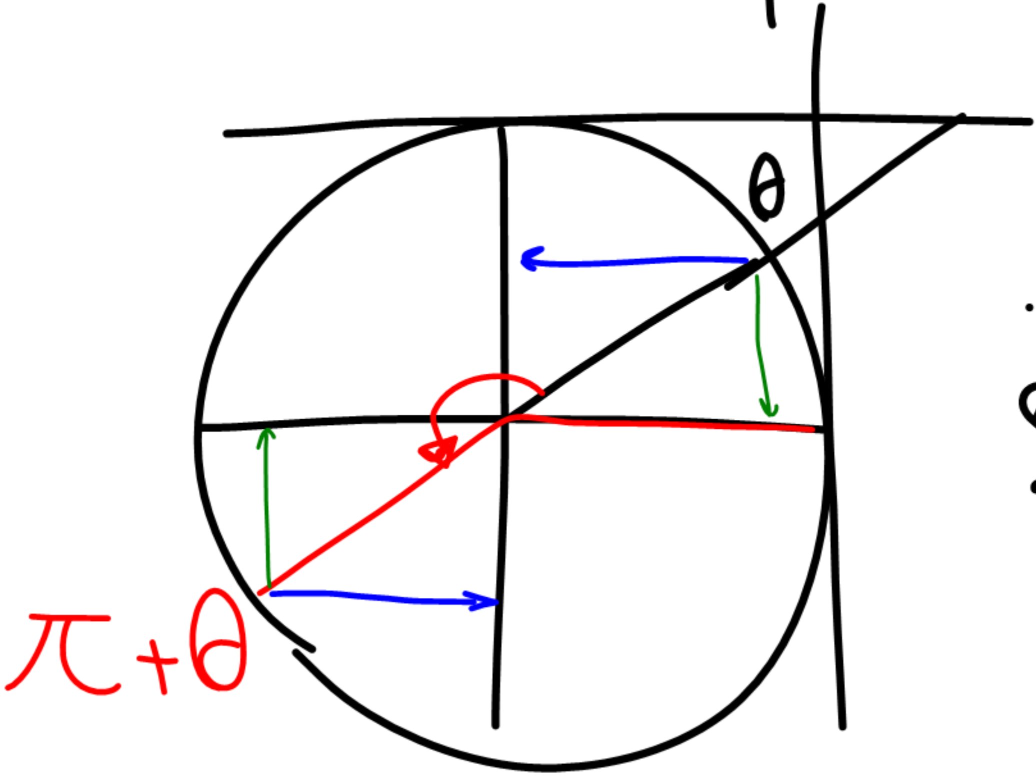
$$\text{Cotan}(\pi-\theta)=-\text{Cotan}\,\theta$$



$$\sin 150^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه کنیم: سینوس و کسینوس قرینه می‌شوند ولی تانژانت و کتانژانت عوض نمی‌شوند:

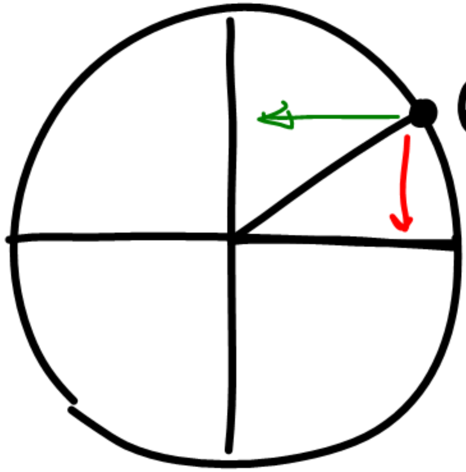


$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$

$$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$$



$\theta,\ 2\pi+\theta,\ 4\pi+\theta,\ \dots,\ 2k\pi+\theta$

$$\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$$

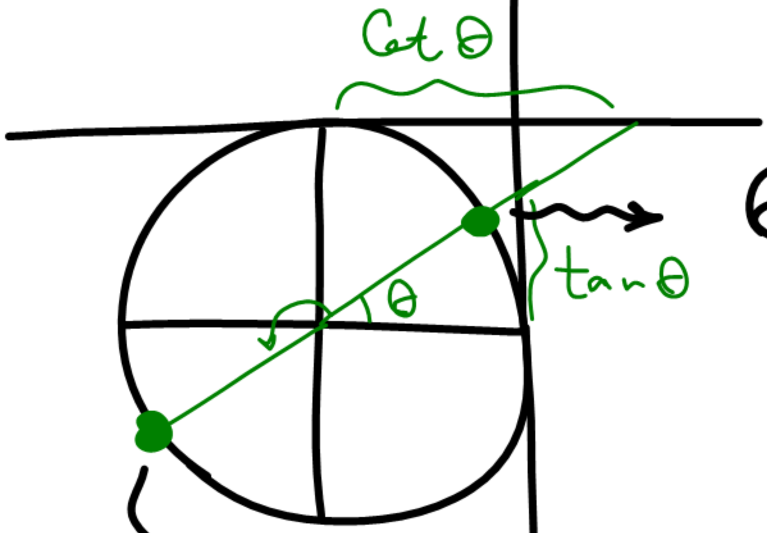
$$\cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta$$

در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π صرف نظر می‌کنیم

$$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(20\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

در تانژانت و کتانژانت از هر مضرب π صرف نظر می‌کنیم:



$\pi+\theta$

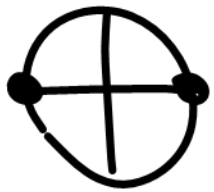
$3\pi+\theta$

$5\pi+\theta$

θ یا $2\pi+\theta$ یا $4\pi+\theta$ یا $\dots\dots\ 2k\pi+\theta$

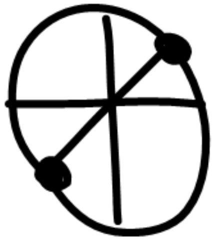
$$\tan(k\pi+\theta)=\tan\theta$$

$$\text{Cotan}(k\pi+\theta)=\text{Cotan}\,\theta$$



$k\pi$

ضرب π



$k\pi+\theta$

$$\tan\left(17\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\tan\left(22\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

۱) استثنا

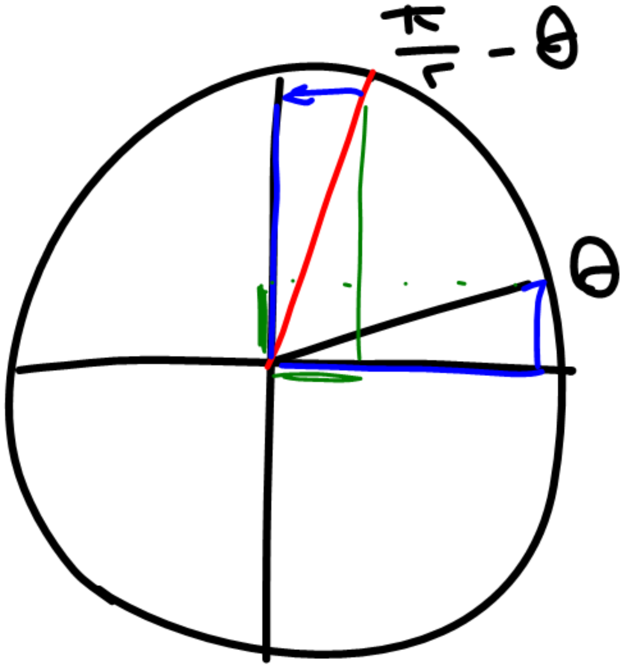
بی خیالی :

$$\sin\left(\cancel{2k\pi}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos\left(\cancel{2k\pi}+\theta\right)=\cos\theta$$

$$\tan\left(\underbrace{\cancel{k\pi}}_{\text{چه فرد چه زوج}}+\theta\right)=\tan\theta$$

$$\cot\left(\cancel{k\pi}+\theta\right)=\cot\theta$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\text{an}\,\theta$$

$$\cot\text{an}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

دو زاویه جمع ۹۰: یا متمم یا θ و $\frac{\pi}{2}-\theta$ به هم میگن:

سینوسم کسینوسته

کسینوسم سینوسته

تانژانتم کتانژانته

کتانژانتم تانژانته

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ=\cot\text{an}\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\text{an}\,30^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض میشه

$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$

$\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$

$\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$

$\cot 37^\circ = \tan 53^\circ$

$\underbrace{\tan 1^\circ \; \tan 2^\circ \; \cancel{\tan 88^\circ}}_{\text{یک}} \; \cancel{\tan 89^\circ} = 1$

$\cot 2^\circ \qquad \cot 1^\circ$

$\tan\theta \cdot \cot\theta = \text{یک}$

$\sin(\text{فرد}\ \frac{\pi}{2} \pm \quad)$

$\cos(\text{فرد}\ \frac{\pi}{2} \pm \quad)$

$\tan(\text{فرد}\ \frac{\pi}{2} \pm \quad)$

$\cot(\text{فرد}\ \frac{\pi}{2} \pm \quad)$

از انتهای کمان می فهمیم که علامتش چیه؟

$$\cos\left(117\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\ ?$$

$$\frac{116\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

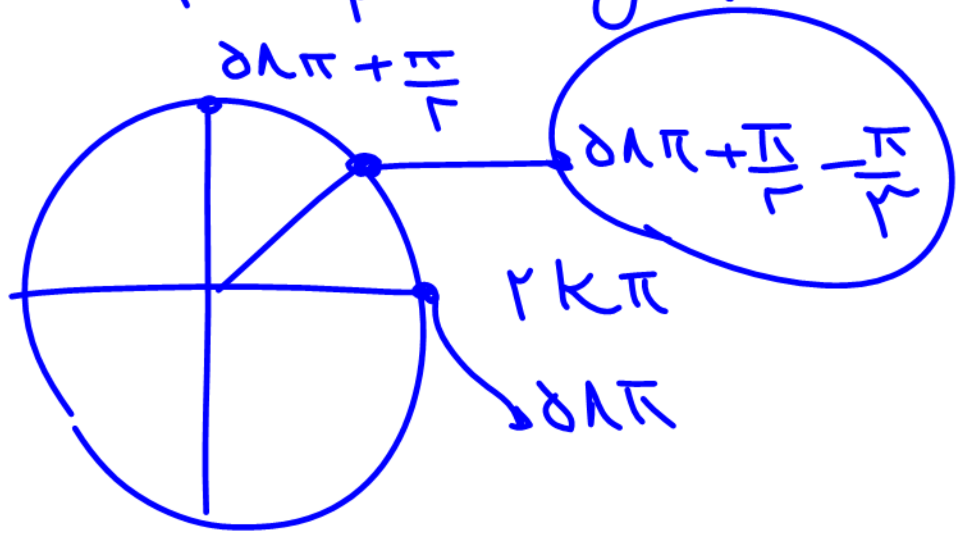
$$58\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

کسینوس توی ناحیه اول

مثبته ازا :

$$=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



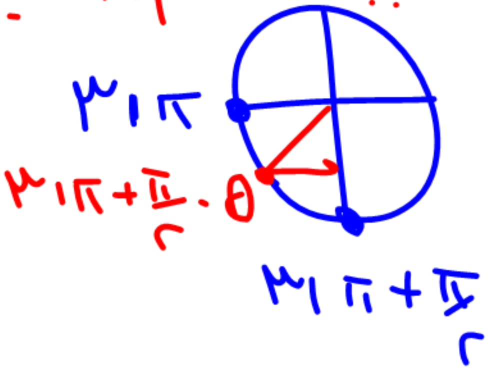
$\sin(\frac{۶۳\pi}{۲} - \theta) = ?$

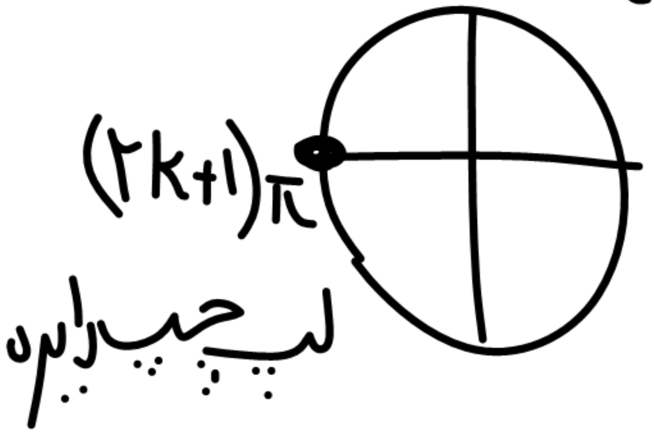
$\frac{۶۲\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} - \theta$

$۳۱\pi + \frac{\pi}{۲} - \theta$

ناحیه سوم که سینوس منفی هست لذا

جواب: $\cos\theta$ $= -$





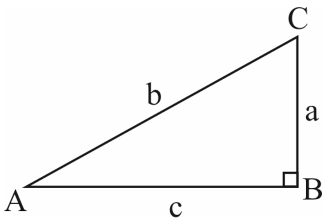
مثلثات پایهٔ یازدهم رشتهٔ تجربی

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}$ ، ۲) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}$ ، ۳) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$ و ۴) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.

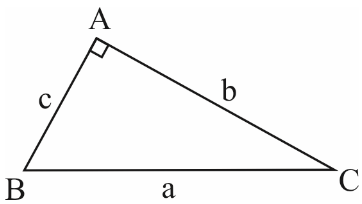


$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست ۱: در شکل مقابل $a+c=۱۸$ و $\cos\hat{B}=\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$

۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{۵}{۱۳}a$$

از رابطهٔ $a+c=۱۸$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=۱۸ \Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow a=۱۳ \Rightarrow c=۵$$

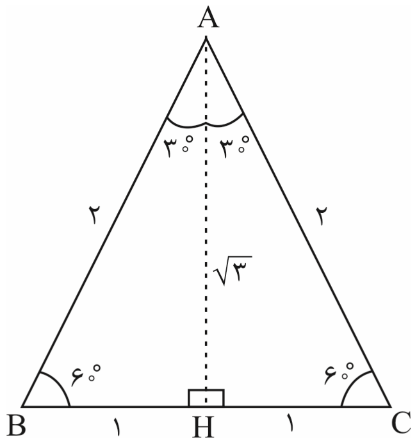
حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۳^۲=b^۲+۵^۲ \Rightarrow b^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \xrightarrow{\sqrt{\ }} b=۱۲$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

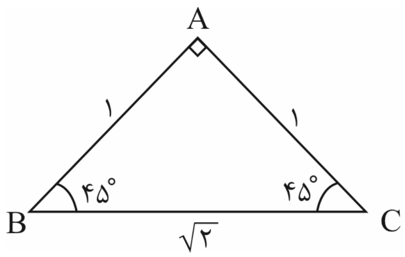
$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin 30^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{1}{2}\\ \cos 30^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan 30^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \cot 30^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{3}\end{cases},\quad \begin{cases}\sin 60^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos 60^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{1}{2}\\ \tan 60^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{3}\\ \cot 60^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 45° (به عنوان مثال B) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin 45^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \cos 45^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ=\frac{AC}{AB}=1\qquad \cot 45^\circ=\frac{AB}{AC}=1$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(60^\circ, 45^\circ, 30^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

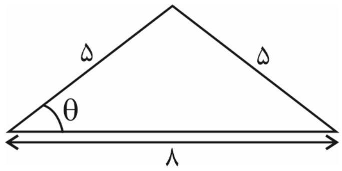
تست ۲: مقدار x در تساوی $x\cos 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}\tan 60^\circ-4\sin 30^\circ}{2\sqrt{2}\cos 45^\circ+\cot 45^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 3 ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-4\times\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{3-2}{2+1}=\frac{1}{3}\xrightarrow{\times 2} x=\frac{2}{3}$$

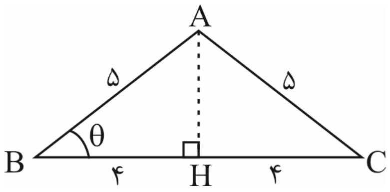
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $۲\cos\theta + \sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH} : AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۲۵ = AH^{۲} + ۱۶ \Rightarrow AH^{۲} = ۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH = ۳$$

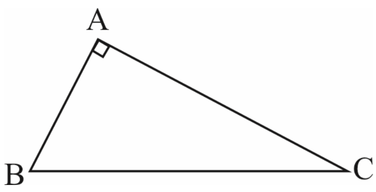
$$\sin\theta = \frac{AH}{AB} = \frac{۳}{۵} \ , \ \cos\theta = \frac{BH}{AB} = \frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta + \sin\theta = \frac{۸}{۵} + \frac{۳}{۵} = \frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \cos\hat{C} \ , \ \sin\hat{C} = \frac{AB}{BC} = \cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \cot\hat{C} \ , \ \tan\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \cot\hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P = \frac{۵\sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ \times \tan ۷۶^\circ}{۸\cot ۱۴^\circ \times \cos ۸۸^\circ \times \tan ۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

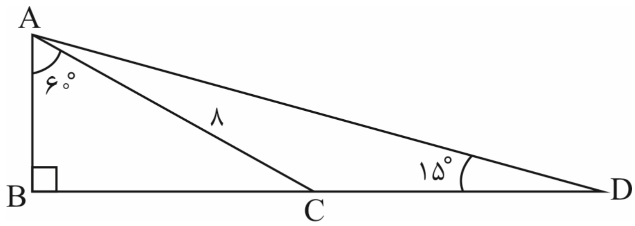
$$۷۶^\circ + ۱۴^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \tan ۷۶^\circ = \cot ۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ + ۷^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۸۳^\circ = \tan ۷^\circ$$

$$۲^\circ + ۸۸^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۲^\circ = \cos ۸۸^\circ$$

$$P = \frac{۵\sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ \times \tan ۷۶^\circ}{۸\tan ۷۶^\circ \times \sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ} = \frac{۵}{۸}$$

تست ۵: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



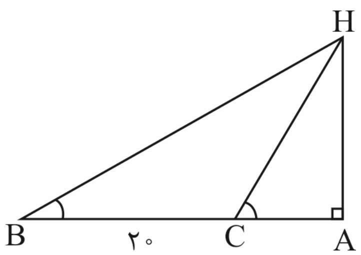
۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

۴) ۱۶

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



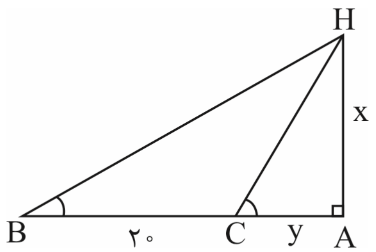
۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH=x$ و $AC=y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:



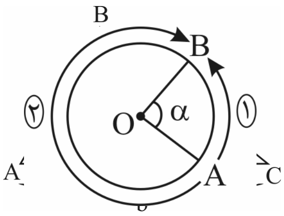
$$\begin{cases} \tan\hat{B}=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ=\dfrac{x}{y+۲۰}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*) \\ \tan\hat{C}=\dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ=\dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳}=\dfrac{x}{y} \end{cases}$$

$$x=y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \dfrac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y=y+۲۰ \Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow x=۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH=۱۰\sqrt{۳}$$

تست ۷: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A}=۹۰^\circ$، حاصل $\dfrac{۱}{۱+\tan\hat{C}}+\dfrac{۱}{۱+\tan\hat{B}}$ کدام است؟

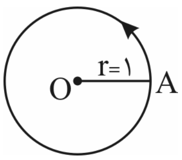
۱) ۱ ‏ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

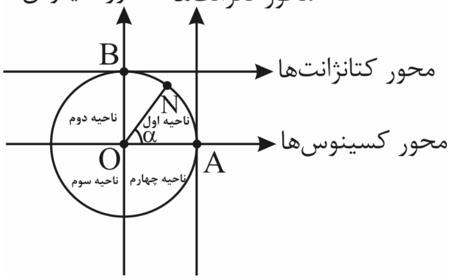
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

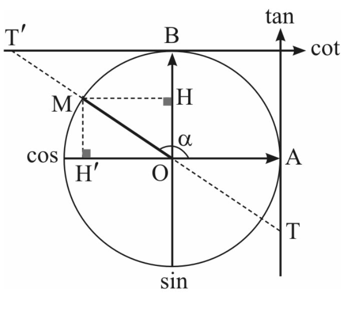
نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

نقطه‌ی B : مبدأ محور $\cot$

نقطه‌ی A : مبدأ محور $\tan$

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای $\sin$ و $\cos$

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی



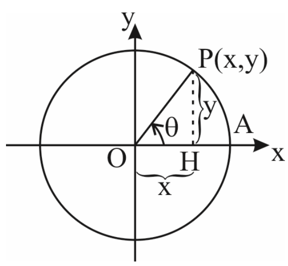
فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

در این صورت از انتهای کمان بر محور $\sin$ و $\cos$ عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \qquad , \qquad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور $\tan$ و $\cot$ قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \qquad , \qquad BT' = -\cot\alpha}$$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

مثال ۸: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:

$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}) = P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:

$$x = \cos\theta = \frac{۱}{۳} \ , \ y = \sin\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرفی:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = ۲\sqrt{۲} \ , \ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

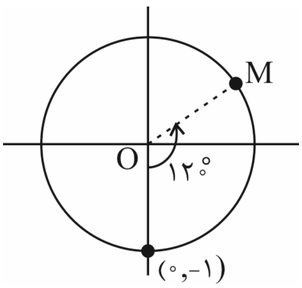
تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

۱) -۲۴۰° ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°

تست ۹: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.

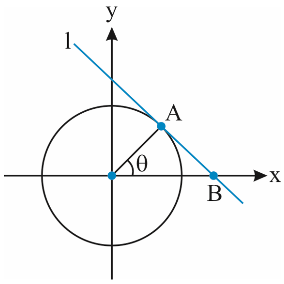


OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M = \cos\theta \Rightarrow x_M = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M = \sin\theta \Rightarrow y_M = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تست ۱۰: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



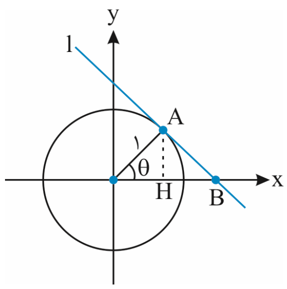
۱) $\cos\theta$

۲) $\frac{۱}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\frac{۱}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



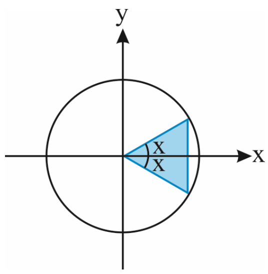
$$(۱)^۲ = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} ۱ = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{۱}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^۲ = (۱)^۲ + AB^۲ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} - ۱ = \frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \tan^۲\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تست ۱۱: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A \times (\tan x + \cot x)$ کدام است؟



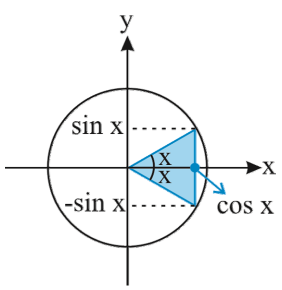
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $۲\sin x$ است. پس داریم:



$$A = \frac{۱}{۲} \times (۲\sin x)\cos x = \sin x \cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x \cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱}}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \sin x \cos x\left(\frac{۱}{\sin x \cos x}\right) = ۱$$

تست ۱۲: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ *(سراسری)*

۱) $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$

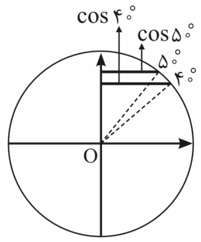
۲) $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳) $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$

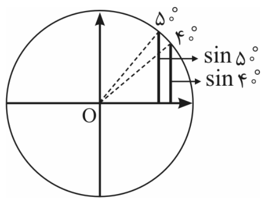
۴) $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

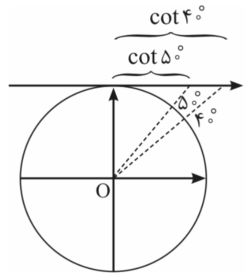
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



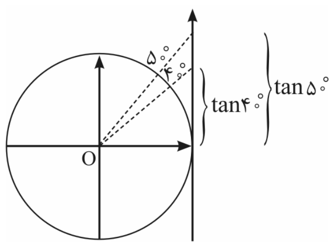
گزینه‌ی (۲) درست $\Leftarrow$ $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Leftarrow$ $\sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Leftarrow$ $\cot ۴۰^\circ > \cot ۵۰^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Leftarrow$ $\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۰^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x)=\sin x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ صعودی است. $\Leftarrow$ $۵۰^\circ > ۴۰^\circ$ $\Leftarrow$ $\sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ$

$f(x)=\cos x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ نزولی است. $\Leftarrow$ $۵۰^\circ > ۴۰^\circ$ $\Leftarrow$ $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

$f(x)=\tan x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ صعودی است. $\Leftarrow$ $۵۰^\circ > ۴۰^\circ$ $\Leftarrow$ $\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۰^\circ$

$f(x)=\cot x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ نزولی است. $\Leftarrow$ $۵۰^\circ > ۴۰^\circ$ $\Leftarrow$ $\cot ۵۰^\circ < \cot ۴۰^\circ$

تست ۱۳: اگر $\cos\alpha . \sin\alpha > ۰$ و $\cos\alpha . \tan\alpha < ۰$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول	۲) دوم	۳) سوم	۴) چهارم

تست ۱۴: حاصل عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{۲}+\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}$ که در آن $x\in[۰\,,\frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x+\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰\,,\frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y=x$)، $\cos x>\sin x$:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}+\frac{\sin x+\cos x}{۲}=\frac{-(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{۲}=\cos x$$

تست ۱۵: اگر $a\in\mathbb{R}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}\geq ۰ \quad\Rightarrow\quad \cos x\geq ۰ \quad\Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x>۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot x\leq ۰\\ \cot x-a^۲<۰\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\geq ۰$$

تست ۱۶: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ<\sin ۴۰^\circ<\sin ۱۰۰^\circ$ ۲) $\cos ۱۰۰^\circ<\cos ۴۰^\circ<\cos ۲۰^\circ$

۳) $\sin ۴۰^\circ<\sin ۹۰^\circ<\sin ۱۰۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰۰^\circ<\cos ۷۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$

تست ۱۷: اگر $\sin\theta+\tan\theta>۰$ و $\sin\theta\times\tan\theta<\frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست ۱۸: اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۲) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}]$ ۳) $(\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۴) $[۰,\frac{۲}{۵}]$

تست ۱۹: اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

تست ۲۰: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۲+\cos\alpha}$ کدام است؟

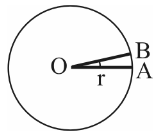
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تست ۲۱: بیشترین مقدار عبارت $۴+\cos^۲ x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

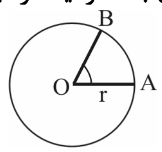
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل بـه آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$$\overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi r}{۳۶۰} \qquad A\hat{O}B = ۱ \text{ درجه}$$

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$$\overset{\frown}{AB} = r \qquad A\hat{O}B = ۱ \text{ رادیان}$$

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و ۲π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی ۲π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

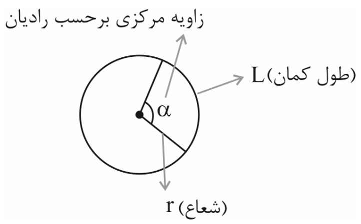
هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه: $\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}}$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و **D** اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R = ۱$ فرض شود، داریم:

$$D = \frac{۱۸۰}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۴} D \simeq ۵۷^\circ,۳$$

هر یک رادیان، تقریباً ۵۷° است.



$L = r\alpha$

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد **L**، شعاع دایره را با **r** و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشتـه می‌شود: $\alpha = \frac{L}{r}$

تست ۲۲: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = ۵۰^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

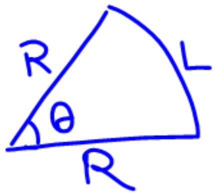
۱) $\frac{۱}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱۸}{\pi}$ ✓ ۴) $\frac{۳۶}{\pi}$

$$L = r\theta$$
$$۱۰ = r\left(۵۰\frac{\pi}{۱۸۰}\right) \rightarrow \boxed{r = \frac{۱۸۰}{۵\pi}} \rightarrow \frac{S = \pi r^۲}{P = ۲\pi r} = \frac{۱}{۲}r = \frac{۱۸}{\pi}$$

تست ۲۳: دایره‌ای به مساحت ۴π مفروض است. قطاعی به محیط $۷/۱۴$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

$S = ۴\pi = \pi R^۲ \longrightarrow R = ۲$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰



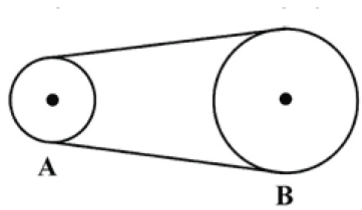
$L = R\theta$

محیط قطاع $= R + R + R\theta = ۲R + R\theta = ۷,۱۴$

$۴ + ۲\theta = ۷,۱۴ \longrightarrow ۲\theta = ۳,۱۴ = \pi$

$\theta = \frac{\pi}{۲} = ۹۰^\circ$

تست ۲۴: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های **A** و **B** توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی **A**، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی **B** برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی **B** به اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی **A** چند دور می‌زند؟



۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۱۰

$L_A = L_B$

$R_A \theta_A = R_B \cdot \theta_B$

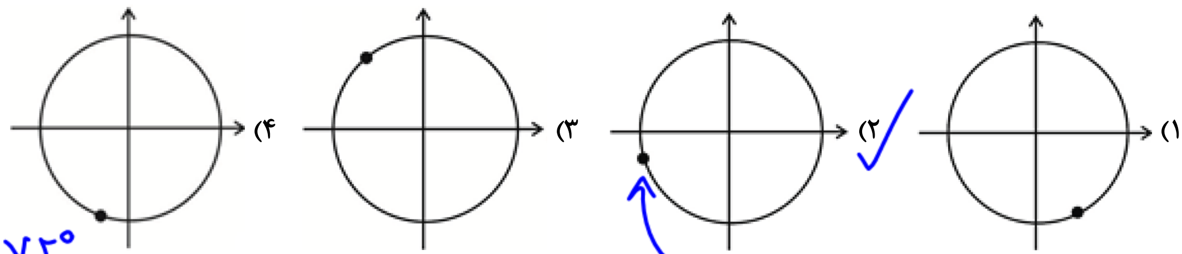
$۲۰\ \theta_A = ۱۰۰\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)$

$\theta_A = ۵\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = \frac{۱۵\pi}{۲}$

یک دور دایره	۲π
?	$\frac{۱۵\pi}{۲}$

$? = \frac{\frac{۱۵\pi}{۲}}{۲\pi} = \frac{۱۵}{۴} = ۳,۷۵$ دور

تست ۲۵: مجموعه دو زاویه ۷۲° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با **x** درجه باشد، زاویه‌ی $(۵x - ۱۰^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



$$+\begin{cases} x + y = ۷۲^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{۱۵} = \frac{۱۸۰}{۱۵} = ۱۲^\circ \end{cases}$$

$۲x = ۸۴^\circ \rightarrow x = ۴۲^\circ$

$۵(x = ۴۲^\circ) - ۱۰^\circ = ۲۰۰^\circ$

تست ۲۶: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۱۱\pi}{۳}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

$\frac{۳۶۰^\circ}{۳۶} = ۱۰^\circ$ فاصله‌ی ۲ کابین

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

$\frac{۱۱(\pi = ۱۸۰)}{۳} = ۶۶۰^\circ \xrightarrow[\text{یک دور}]{-۳۶۰^\circ} ۳۰۰^\circ$

$\frac{۳۰۰^\circ}{۱۰^\circ} = ۳۰$ کابین به جلو بردم

$۳۵ = ۳۰ + ۵$

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

ساعت
دقیقه

$$\theta = \left|\frac{11m}{2} - 30h\right| = \left|30h - \frac{11}{2}m\right|$$

تست ۲۷: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

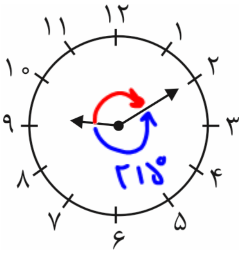
رادیان 2π	$60'$
$\frac{8\pi}{3}$	?

۱) یک ساعت
۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه ✓
۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

$$? = \frac{(\frac{8\pi}{3})(60')}{2\pi} = \frac{240}{3} = 80' = 60' + 20'$$

یک ساعت و بیست دقیقه

تست ۲۸: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟



۱) $\frac{9\pi}{5}$
۲) $\frac{29\pi}{30}$
۳) $\frac{29\pi}{36}$ ✓
۴) $\frac{145\pi}{36}$

$360° - 215° = 145°$

$145° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$

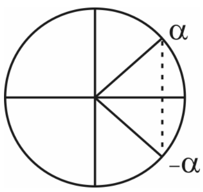
$$\theta = \left|30h - \frac{11}{2}m\right| = \left|30(9) - \frac{11}{2}(10)\right| = |270 - 55| = 215°$$

تبدیل به رادیان

$215 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{43\pi}{36}$ ← زاویه بزرگتر بین عقربه ها

چون گزینه ها نیست زاویه کوچکتر را پیدا کردم

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



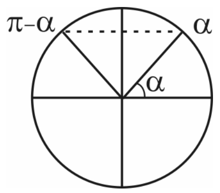
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi-\alpha)$



$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته بـه شـرطی کـه هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۲۹:

$\sin 150^\circ = \sin(\pi - 30) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 150 = \cos(\pi - 30) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150 = \tan(\pi - 30) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 150 = \cot(\pi - 30) = -\sqrt{3}$

$\sin 120 = \sin(\pi - 60) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120 = \cos(\pi - 60) = -\frac{1}{2}$

$\tan 120 = \tan(\pi - 60) = -\sqrt{3}$

$\cot 120 = \cot(\pi - 60) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$$\boxed{\sin\alpha = +\sin\beta \quad , \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad , \quad \cot\alpha = -\cot\beta}$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۳۰: حاصل $\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}}_{\text{صفر}}\right)\left(\underbrace{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{6\pi}{7}}_{\text{صفر}}\right)$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \Rightarrow \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{6\pi}{7} = 0 \quad , \quad \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

تست ۳۱: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}$ با فرض فردبودن n کدام است؟

$\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n\pi - \pi}{n}$ → $\pi - \frac{\pi}{n}$

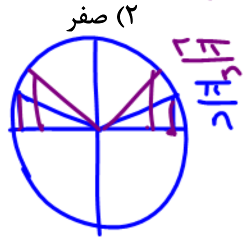
۱) ۱ ‏ ۲) صفر ‏ ۳) n ‏ ۴) $-n$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0$ ‏ $n=3$

$$\cos\boxed{\frac{\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \cos\boxed{\frac{(n-2)\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

$\pi - \frac{2\pi}{n}$ ‏ $\pi - \frac{\pi}{n}$ ‏ $\frac{2\pi}{n}$ ‏ $\frac{\pi}{n}$



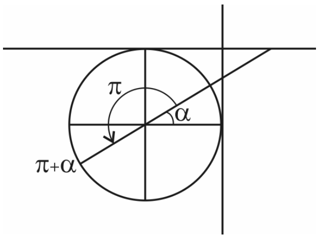
توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$\frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} + \frac{n\pi - 2\pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha,\pi+\alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π، در تانژانت و کتانژانت از همه مضارب π (چه فرد، چه زوج) صرف نظر کن

$$\begin{cases}\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

مثال ۳۲:

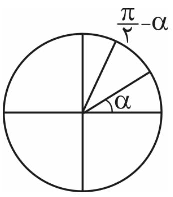
$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(\pi+۳۰^\circ)=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(\pi+۳۰^\circ)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۲۱۰^\circ=\tan(\pi+۳۰^\circ)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\cot ۲۱۰^\circ=\cot(\pi+۳۰^\circ)=\sqrt{۳}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{۲}$)



$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin\rightleftarrows\cos$ و $\tan\rightleftarrows\cot$

یادت باشه:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\qquad \tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha\qquad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه است. $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{3\pi}{2})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{6}$، $\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{3}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{3}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{7\pi}{6})=\sin\underbrace{(7\times\frac{\pi}{6})}_{\text{ربع سوم}}=-\sin(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$

$$\cot(-\frac{5\pi}{3})=-\cot\underbrace{(5\times\frac{\pi}{3})}_{\text{ربع چهارم}}=-\left(-\cot(\frac{\pi}{3})\right)=-(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{3}$، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7\times\frac{\pi}{6}=7\times30^\circ=210^\circ \qquad \text{یا} \qquad 5\times\frac{\pi}{3}=5\times60^\circ=300^\circ$$

تست ۳۳: حاصل عبارت $\frac{\cos285^\circ-\sin255^\circ}{\sin525^\circ-\sin105^\circ}$، با فرض $\tan15^\circ=0/28$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{16}{9}$ ✓ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{9}{16}$

$$\frac{\sin15^\circ+\cos15^\circ}{-\sin15^\circ-\cos15^\circ}$$

$\cos(285^\circ=270^\circ+15^\circ=\frac{3\pi}{2}+15^\circ)=\sin15^\circ$

$\sin(255^\circ=270^\circ-15^\circ=\frac{3\pi}{2}-15^\circ)=-\cos15^\circ$

$\sin(525^\circ=540^\circ-15^\circ=3\pi-15^\circ=\cancel{2\pi}+\pi+15^\circ)=-\sin15^\circ$

در سینوس از مضارب زوج π همیشه صرف نظر کرد.

$\sin(105^\circ=90^\circ+15^\circ=\frac{\pi}{2}+15^\circ)=\cos15^\circ$

برای تولید $\tan15^\circ$ هم جمله‌های صورت و مخرج را بر $\cos15^\circ$ تقسیم کن

$$\frac{\overset{0/28}{\tan15^\circ}+1}{-\tan15^\circ-1}=\frac{1/28}{-0/72}=-\frac{16}{9}$$

$\tan 89^\circ = \cot 1^\circ$

$\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$

در ۲ زاویه جمع ۹۰: تانژانت این کتانژانت متمم خودشه

$\tan 45 = 1$

تست ۳۴: حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ . \tan 2^\circ ..... \tan 88^\circ . \tan 89^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

$\tan 1 \; \tan 2 \ldots \cot 2 \; \cot 1 = 1$

$\tan\theta . \cot\theta = 1$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha = \cot\beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$ ، $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$\tan\alpha . \tan\beta = 1$

تست ۳۵: اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3\cos 165^\circ - 2\sin 285^\circ}{3\sin 345^\circ - 4\cos 255^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{a}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{2}{a}$ ۴) $-2a$

تست ۳۶: مقدار عبارت $\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ) + \cot(750^\circ) + \tan(-840^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) صفر ۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۳۷: حاصل عبارت $\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۷\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

تست ۳۸: حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۳۹: حاصل عبارت $\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^۲(۱۵^\circ)$ ۲) $\cos^۲(۱۵^\circ)$ ۳) $-\sin^۲(۱۵^\circ)$ ۴) $-\cos^۲(۱۵^\circ)$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از: $۱)\ \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta}\\ \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

۲) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

۵) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

۶) $\tan\theta\times\cot\theta=1$

۷) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

۸) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta$

۹) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$

۱۰) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

تست ۴۰: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ باشد، حاصل $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{32}{45}$ ۲) $\dfrac{45}{32}$ ۳) $\dfrac{31}{45}$ ۴) $\dfrac{45}{31}$

تست ۴۱: اگر $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{12}{7}$ ۲) $-\dfrac{3}{7}$ ۳) $\dfrac{12}{7}$ ۴) $\dfrac{3}{7}$

تست ۴۲: حاصل $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $2\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱

تست ۴۳: اگر $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$، حاصل $(\tan\theta - \cot\theta)^{۲} - \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

تست ۴۴: اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

تست ۴۵: اگر $\sin x \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^{۳} x - \cos^{۳} x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^{۳} x - \cos^{۳} x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^{۳} x - \cos^{۳} x = (\sin x - \cos x)(\sin^{۲} x + \sin x\cos x + \cos^{۲} x) = (\sin x - \cos x)(۱ + \frac{۱}{۳}) = \frac{۴}{۳}(\sin x - \cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^{۲} = \sin^{۲} x + \cos^{۲} x - ۲\sin x\cos x = ۱ - ۲(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^{۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^{۳} x - \cos^{۳} x = \frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}) = \pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}} = \pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تست ۴۶: اگر $\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۶۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم **sin** و هم **cos** داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش **tan** بسازید:

$$\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x + ۲\cos x = ۲\sin x - ۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x = \sin x \xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div \cos x} ۸ = \tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$$

$$۸ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{۶۵}{۸}$$

تست ۴۷: اگر $۲\sin\alpha = ۳\cos\alpha$، حاصل $\frac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۶

تست ۴۸: مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} - \frac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

تست ۴۹: حاصل $\cot^۴\theta - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{۱}{\sin^۴\theta}$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

تست ۵۰: اگر $\frac{۱+\cot x}{\tan x+۱}=۲$، حاصل $\frac{۲\cos x-۳\sin x}{\sin x+\cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

تست ۵۱: حاصل $\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\sqrt{۱+\cot^۲\alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$

تست ۵۲: حاصل $\sqrt{۱+\cos x\sqrt{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $۱-\sin^۲ x=\cos^۲ x$ و $۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۱+\cos x\sqrt{\underbrace{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}=\sqrt{۱+\cos x\sqrt{۱-\sin^۲ x}}=\sqrt{۱+\cos x\sqrt{\cos^۲ x}}$$

$$=\sqrt{۱+\cos x|\cos x|}\overset{\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}}{=\!=\!=}\sqrt{۱+\cos x(-\cos x)}=\sqrt{۱-\cos^۲ x}=\sqrt{\sin^۲ x}=|\sin x|\overset{\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}}{=\!=\!=}-\sin x$$

تست ۵۳: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\hat{B})+\frac{۱}{\tan^۲\hat{C}+۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=۹۰^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{۱}{۱+\tan^۲\bigcirc}=\cos^۲\bigcirc$ و $\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\bigcirc)=\cos^۲\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\hat{C}}+\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\hat{B})=\cos^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{B}$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و همچنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت: $\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$

روش دوم: دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{2}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$$

تست ۵۴: با فرض $2\sin^2x+3\cos^2x=5\sin x\cos x$، مقدار $\cos^2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{4}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\sin^2x+3\cos^2x=5\sin x\cos x\xrightarrow{\div\cos^2x}2\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+3\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2x+3=5\tan x\Rightarrow 2\tan^2x-5\tan x+3=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ داریم:

حالت اول : $\tan x=1\Rightarrow 1+(1)^2=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow 2=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\cos^2x=\frac{1}{2}$

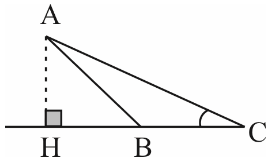
حالت دوم : $\tan x=\frac{3}{2}\Rightarrow 1+(\frac{3}{2})^2=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow 1+\frac{9}{4}=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\frac{13}{4}=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\cos^2x=\frac{4}{13}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2x=\frac{4}{13}$ است.

تست ۵۵: اگر $2\sin^2x+\cos^2x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۱)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

تست ۵۶: در شکل زیر، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{5}{13}$ و $CH=9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ *(ریاضی ۹۹)*



۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵

۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵

توابع مثلثاتی

$\boxed{y = \sin x}$

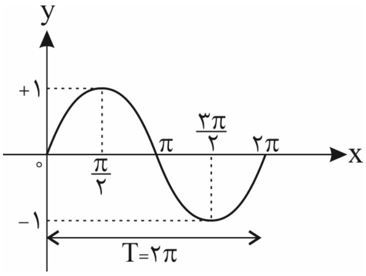
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است. (چون $-۱ \le \sin x \le ۱$)

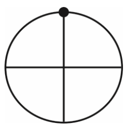
۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi} + \alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y = \sin x$ را در $[۰,۲\pi]$ یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.

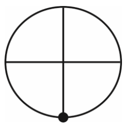
نمودار $y = \sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:

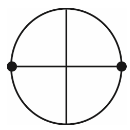
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	−۱	۰



(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T = ۲\pi$ می‌باشد.)

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، $\frac{۹\pi}{۲}$ یا $\frac{-۳\pi}{۲}$، $\frac{-۷\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۷\pi}{۲}$ یا $\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y = \sin x$ در  یعنی کمان $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال در مورد توابع مثلثاتی نیز برقرار است یعنی اگر $\alpha > ۰$ و $k > ۰$

برای رسم $y = \sin(x - \alpha)$، نمودار $y = \sin x$ را α تا به سمت راست انتقال می‌دهیم.

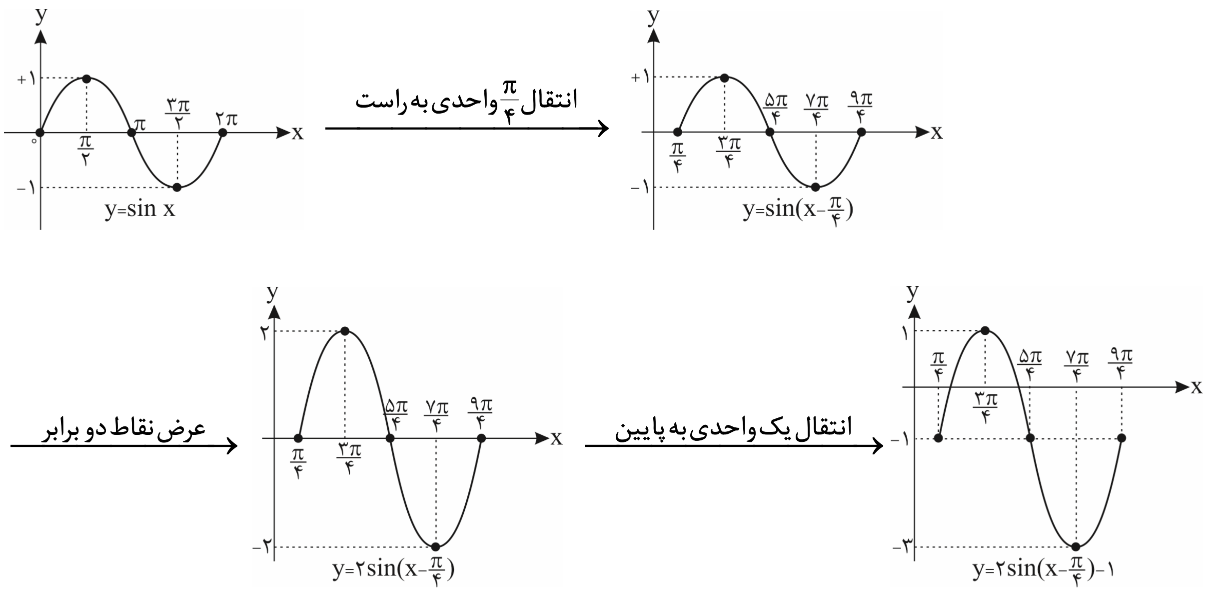
برای رسم $y = \sin(x + \alpha)$، نمودار $y = \sin x$ را α تا به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

برای رسم $y = \sin x + k$، نمودار $y = \sin x$ را k واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

برای رسم $y = \sin x - k$، نمودار $y = \sin x$ را k واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم.

تذکر: هم‌چنین در $y = a\sin x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ است، عرض نقاط a برابر می‌شود و در نتیجه ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $|a|$ و $-|a|$ خواهد بود.

به طور مثال نمودار تابع $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1$ را در یک دوره‌ی تناوب به صورت زیر است:



تذکر: در واقع در رسم $y = a\sin bx$، نمودار $y = \sin x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود (اگر $ab < 0$، یعنی یا $a < 0$ یا $b < 0$ باشد، نمودار $y = \sin x$ علاوه بر تغییرات فوق، نسبت به محور xها نیز قرینه می‌شود چون در مورد $b < 0$ داریم: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$)

در حالت کلی، در تابع $y = a\sin(bx + c) + d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

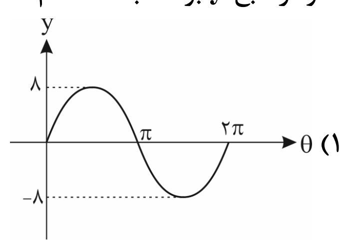
تست ۵۷: اگر بیشترین مقدار تابع $y = 2\sin 5x - 3c$ برابر (-7) باشد، c کدام است؟

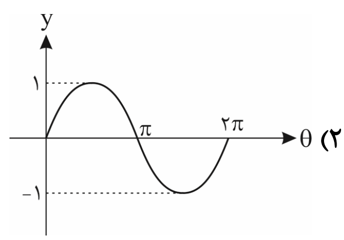
۱) ۳ ۲) -2 ۳) -5 ۴) ۱

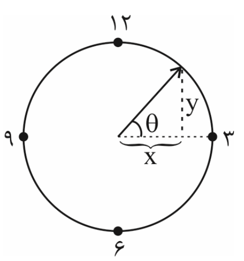
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

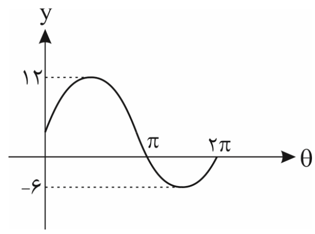
$$y_{max} = 2 - 3c = -7 \Rightarrow -3c = -9 \Rightarrow c = 3$$

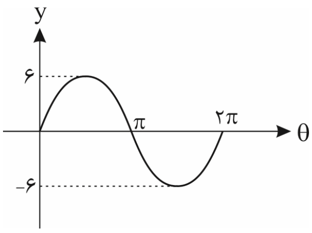
تست ۵۸: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)







۳) 

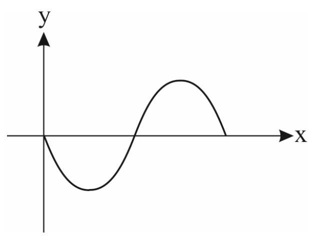
۴) 

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۸\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} T = ۲\pi \\ y_{max} = ۸ \\ y_{min} = -۸ \end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار $(\max)$ تابع $y = ۸\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T = ۲\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۳» درسته.

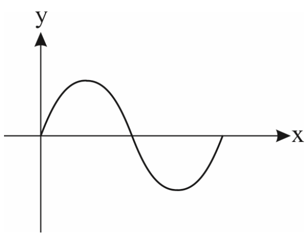
حالت ۲



$y = a\sin bx$

$a \times b < ۰$

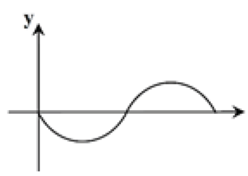
حالت ۱

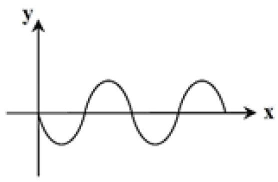


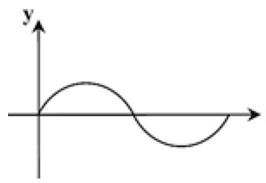
$y = a\sin bx$

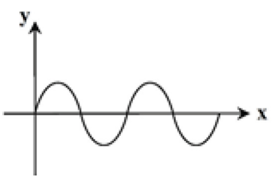
$a \times b > ۰$

تست ۵۹: نمودار تابع $f(x) = -\sin(\pi + x)$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به کدام شکل است؟

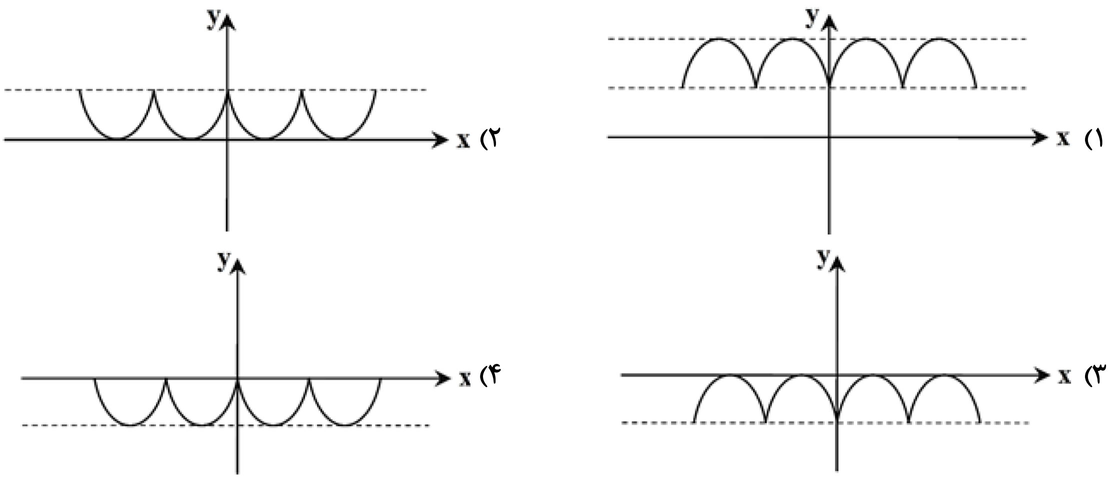
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

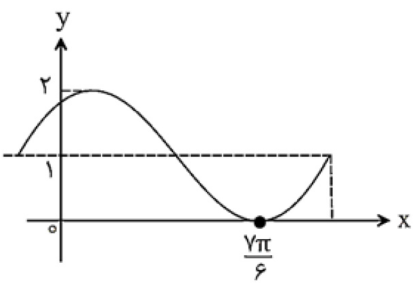
تست ۶۰: نمودار $f(x) = ۱ - |\sin x|$ در کدام گزینه آمده است؟



تست ۶۱: برد تابع $y = -۲\sin x + ۱$ بازهٔ $[a, b]$ است. حاصل $b^۲ - a^۳$ کدام است؟

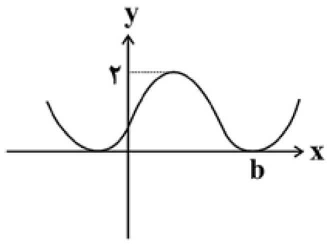
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۷
۴) ۱۱

تست ۶۲: ضابطهٔ تابع نشان‌داده‌شده در شکل برابر با کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟



۱) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$
۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۳}) + ۱$
۳) $y = \sin(x + \frac{\pi}{۳}) + ۱$
۴) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{۳}) + ۱$

تست ۶۳: اگر بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-\sin(x+\frac{۳\pi}{۴})$ به صورت زیر باشد، $a.b$ کدام است؟



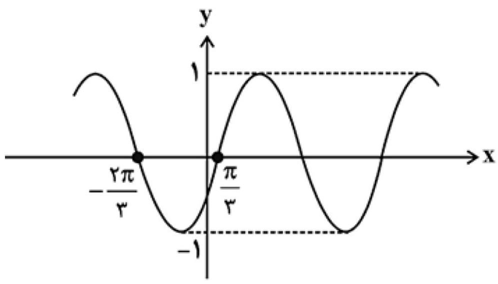
۱) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $\frac{۷\pi}{۴}$

۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

تست ۶۴: نمودار شکل زیر مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟



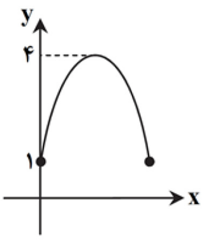
۱) $y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$

۲) $y=\sin(x-\frac{۲\pi}{۳})$

۳) $y=\sin(\frac{\pi}{۳}-x)$

۴) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$

تست ۶۵: نمودار تابع $f(x)=a\sin x+b$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ به شکل زیر است. مقدار $a^۲+b^۲$ کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۲

۳) ۵

۴) ۱۳

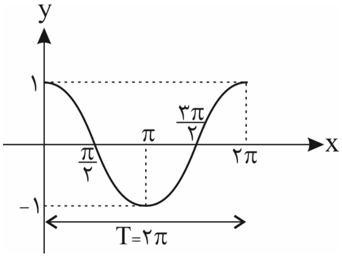
$\boxed{y=\cos x}$

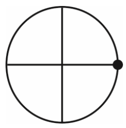
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد).

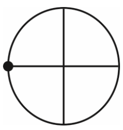
۲) برد این تابع $[-1,1]$ است (چون $-1\le\cos x\le 1$).

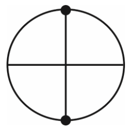
۳) نمودار $y=\cos x$ را نیز مانند $y=\sin x$ در $[0,2\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{2k\pi}_{\text{مضارب زوج }\pi}+\alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y=\cos x$ هم $T=2\pi$ است، 2π تا 2π تا تکرارش می‌کنیم.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1



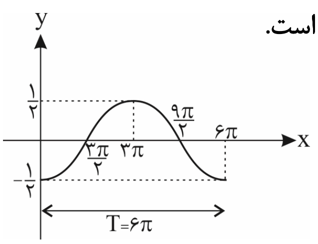
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\cos x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰ ، $\pm2\pi$، $\pm4\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است که در  یعنی کمان $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\pm\pi$، $\pm3\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\cos x$ در  یعنی کمان $x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y=\cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y=a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{2\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|}=6\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ همان $y=-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y=a\cos bx$، نمودار $y=\cos x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

حالت کلی، در تابع $y = a\cos(bx + c) + d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x = ۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = ۰$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است.

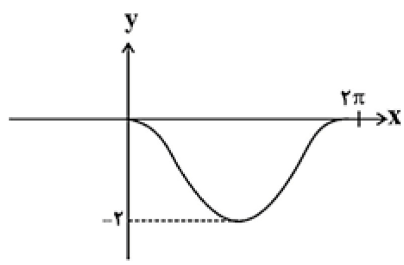
تست ۶۶: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x) = -a\cos\frac{\pi x}{۳} + ۱$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

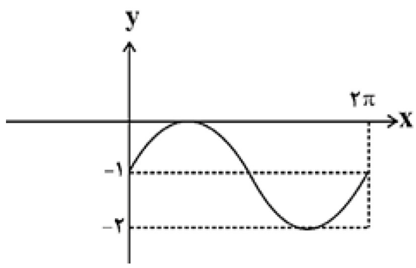
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

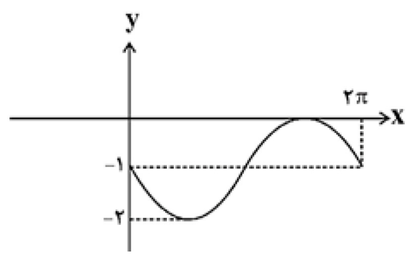
پاسخ: گزینه‌ی «۴»

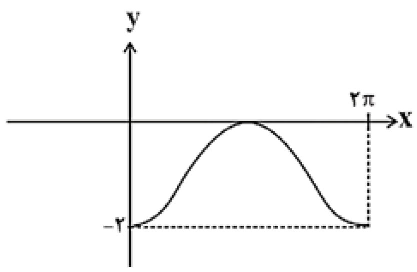
$$-|-a| + ۱ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow -|a| = \frac{۲}{۳} - ۱ \Rightarrow -|a| = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۳}$$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{۱}{۳})$ وجود دارد.)

تست ۶۷: بخشی از نمودار تابع $y = \sin(\frac{۷\pi}{۲} + x) - ۱$ شبیه کدام است؟

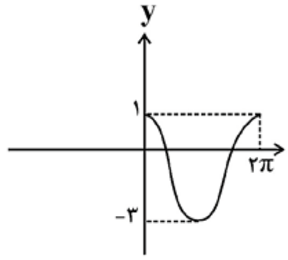
۱) 

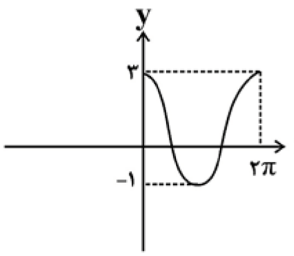
۲) 

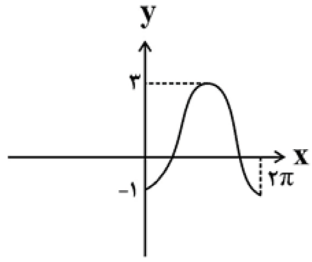
۳) 

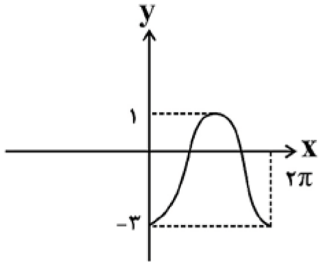
۴) 

تست ۶۸: نمودار تابع $y = -2\cos x + 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

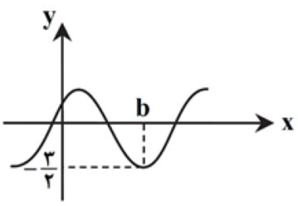
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۶۹: اگر نمودار تابع $y = a + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ به صورت زیر باشد، مقدار ab کدام است؟



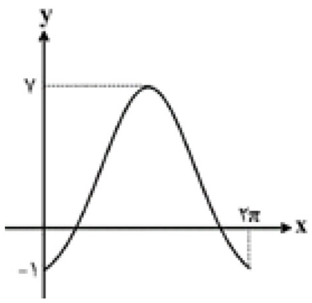
۱) $-\frac{7\pi}{6}$

۲) $-\frac{7\pi}{12}$

۳) $\frac{7\pi}{6}$

۴) $\frac{7\pi}{12}$

تست ۷۰: شکل تابع $y = a\cos(\pi - x) + b$ به صورت زیر است. حاصل ab چه‌قدر است؟



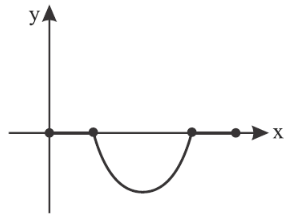
۱) ۶

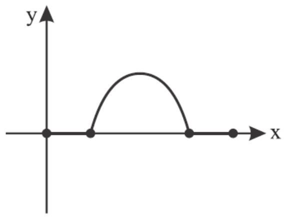
۲) ۹

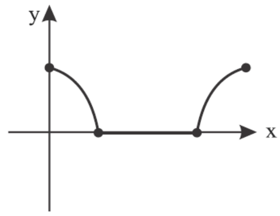
۳) ۸

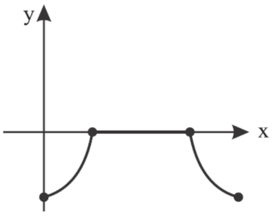
۴) ۱۲

تست ۷۱: نمودار تابع $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos^{2} x}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به کدام شکل است؟

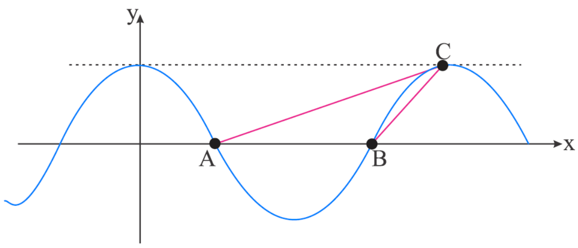
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۷۲: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\cos x$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



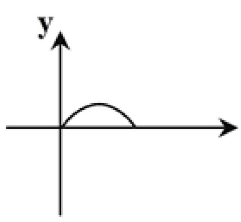
۱) $\frac{\pi}{4}$

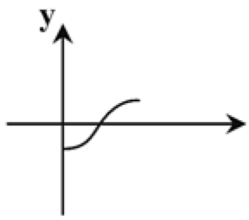
۲) $\frac{\pi}{2}$

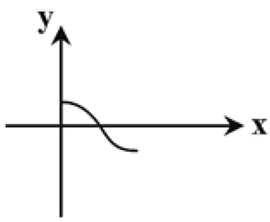
۳) π

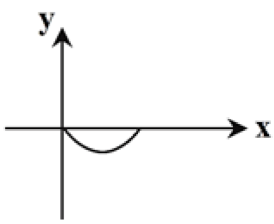
۴) $\frac{3\pi}{2}$

تست ۷۳: نمودار تابع $f(x)=a+b\cos x$ از نقطهٔ $(\pi,0)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=\frac{a}{b}\cos x$ در بازهٔ $[0,\pi]$ به کدام شکل است؟ $(b\neq 0)$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

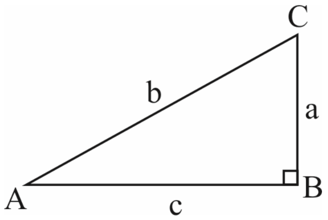
مثلثات پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}$، ۲) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}$، ۳) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$ و ۴) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$

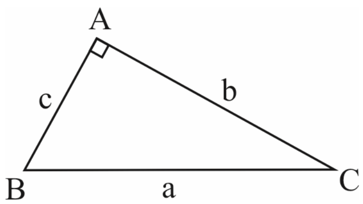
همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.



$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$
$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست ۱: در شکل مقابل $a+c=۱۸$ و $\cos\hat{B}=\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$
۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{۵}{۱۳}a$$

از رابطهٔ $a+c=۱۸$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=۱۸ \Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow a=۱۳ \Rightarrow c=۵$$

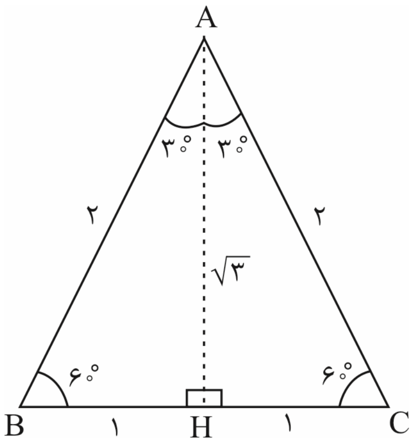
حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۳^۲=b^۲+۵^۲ \Rightarrow b^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \xrightarrow{\sqrt{\ }} b=۱۲$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

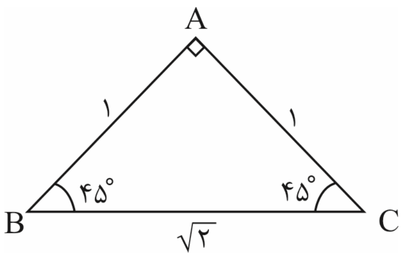
$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \cos ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \tan ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\\ \cot ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{cases},\quad \begin{cases}\sin ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \tan ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\\ \cot ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال B) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad \cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{AC}{AB}=۱\qquad \cot ۴۵^\circ=\frac{AB}{AC}=۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

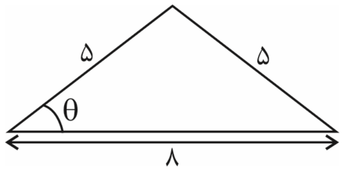
تست ۲: مقدار x در تساوی $\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ-۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ+\cot ۴۵^\circ}=x\cos ۶۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}-۴\times\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۳-۲}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times ۲} x=\frac{۲}{۳}$$

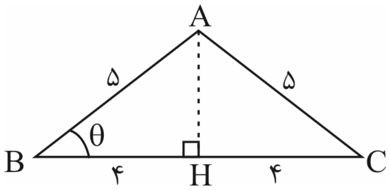
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $2\cos\theta+\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{8}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$

۳) $\frac{11}{5}$ ۴) $\frac{12}{5}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعـده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^2=AH^2+BH^2 \Rightarrow 25=AH^2+16 \Rightarrow AH^2=9 \xrightarrow{\sqrt{}} AH=3$$

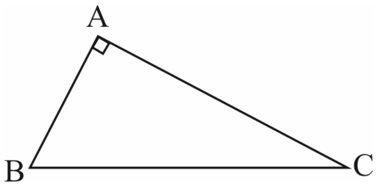
$$\sin\theta=\frac{AH}{AB}=\frac{3}{5}\ ,\ \cos\theta=\frac{BH}{AB}=\frac{4}{5}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$2\cos\theta+\sin\theta=\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=\frac{11}{5}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان 90° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\cos\hat{C}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}=\cot\hat{C}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\cot\hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P=\frac{5\sin 2^\circ\times\cot 83^\circ\times\tan 76^\circ}{8\cot 14^\circ\times\cos 88^\circ\times\tan 7^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $-\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{8}{5}$ ۴) $-\frac{8}{5}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

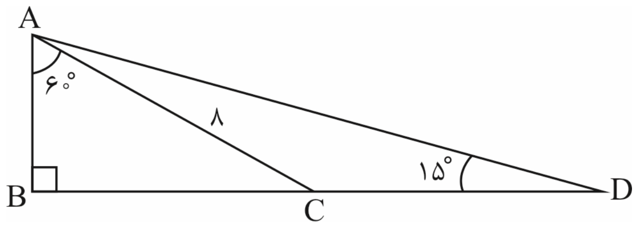
$$76^\circ+14^\circ=90^\circ \Rightarrow \tan 76^\circ=\cot 14^\circ$$

$$83^\circ+7^\circ=90^\circ \Rightarrow \cot 83^\circ=\tan 7^\circ$$

$$2^\circ+88^\circ=90^\circ \Rightarrow \sin 2^\circ=\cos 88^\circ$$

$$P=\frac{5\sin 2^\circ\times\cot 83^\circ\times\tan 76^\circ}{8\tan 76^\circ\times\sin 2^\circ\times\cot 83^\circ}=\frac{5}{8}$$

تست ۵: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



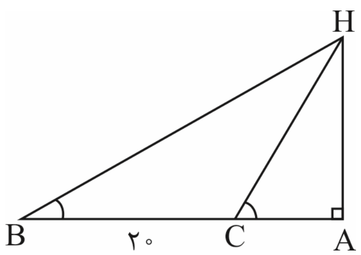
۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

۴) ۱۶

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



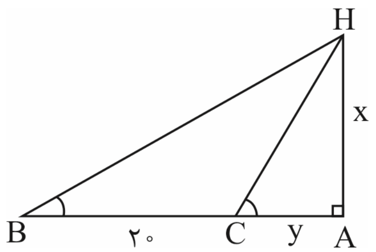
۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH=x$ و $AC=y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:



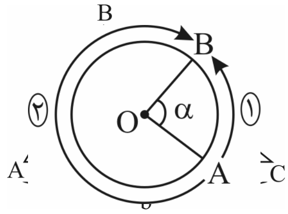
$$\begin{cases} \tan\hat{B}=\frac{AH}{AB}=\frac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ=\frac{x}{y+۲۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*) \\ \tan\hat{C}=\frac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ=\frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{x}{y} \end{cases}$$

$$x=y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y=y+۲۰ \Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow x=۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH=۱۰\sqrt{۳}$$

تست ۷: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A}=۹۰^\circ$، حاصل $\frac{۱}{۱+\tan\hat{C}}+\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}}$ کدام است؟

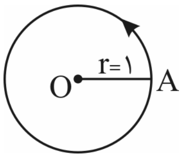
۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۴

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

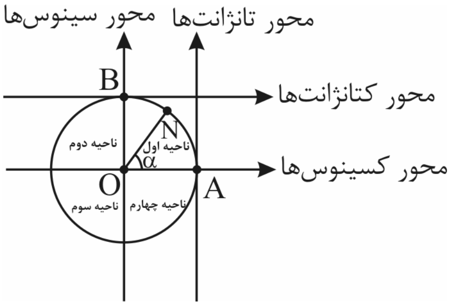
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

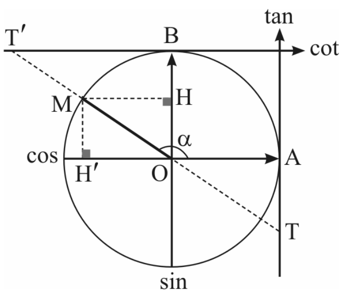
نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

نقطه‌ی B : مبدأ محور $\cot$

نقطه‌ی A : مبدأ محور $\tan$

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای $\sin$ و $\cos$

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی



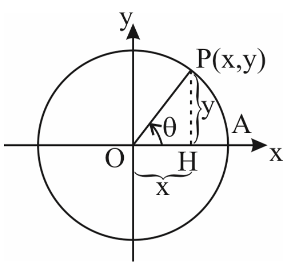
فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

در این صورت از انتهای کمان بر محور $\sin$ و $\cos$ عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور $\tan$ و $\cot$ قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha}$$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

مثال ۸: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:

$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}) = P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:

$$x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرفی:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

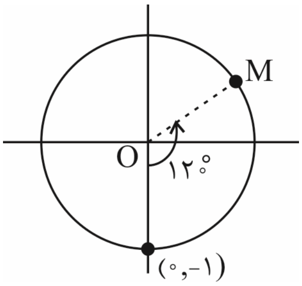
تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

۱) -۲۴۰° ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°

تست ۹: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.

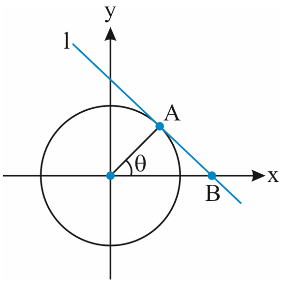


OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تست ۱۰: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



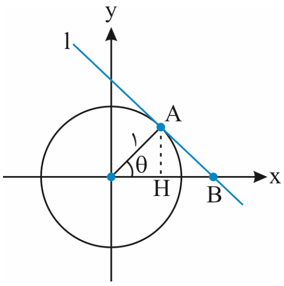
۱) $\cos\theta$

۲) $\dfrac{1}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\dfrac{1}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



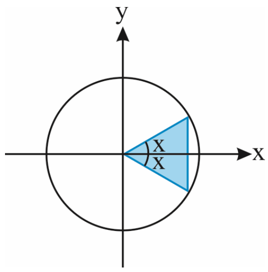
$$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} 1 = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تست ۱۱: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A\times(\tan x + \cot x)$ کدام است؟



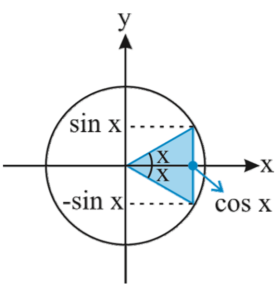
۱) $\dfrac{1}{2}$

۲) $\dfrac{1}{3}$

۳) $\dfrac{1}{4}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $2\sin x$ است. پس داریم:



$$A = \frac{1}{2}\times(2\sin x)\cos x = \sin x\cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x\cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\sin x\cos x}\right)$$

$$= \sin x\cos x\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right) = 1$$

تست ۱۲: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ *(سراسری)*

۱) $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$

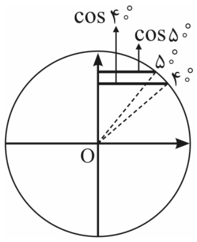
۲) $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

۳) $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$

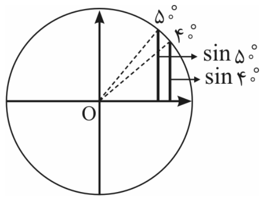
۴) $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

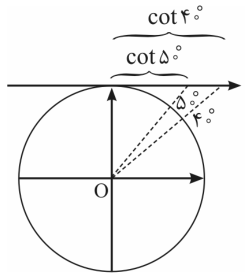
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



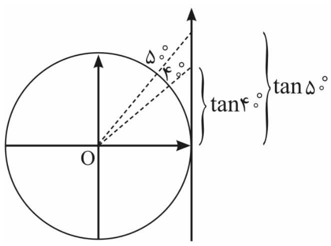
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow$ $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow$ $\sin 50^\circ > \sin 40^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow$ $\cot 40^\circ > \cot 50^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow$ $\tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$\sin 50^\circ > \sin 40^\circ \quad \Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است.

$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ \quad \Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cos x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است.

$\tan 50^\circ > \tan 40^\circ \quad \Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad f(x) = \tan x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است.

$\cot 50^\circ < \cot 40^\circ \quad \Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cot x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است.

تست ۱۳: اگر $\cos\alpha . \sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha . \tan\alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست ۱۴: حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{۲} + \frac{|\sin x - \cos x|}{۲}$ که در آن $x \in [۰ , \frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x + \cos x$ ۴) $\cos x - \sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰ , \frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y = x$)، $\cos x > \sin x$:

$$\frac{|\sin x - \cos x|}{۲} + \frac{\sin x + \cos x}{۲} = \frac{-(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{۲} = \cos x$$

تست ۱۵: اگر $a \in \mathbb{R}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}} \ge ۰ \quad \Rightarrow \quad \cos x \ge ۰ \quad \Rightarrow$$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x > ۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases} \cot x \le ۰ \\ \cot x - a^۲ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \ge ۰$$

تست ۱۶: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ < \sin ۴۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$ ۲) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۴۰^\circ < \cos ۲۰^\circ$

۳) $\sin ۴۰^\circ < \sin ۹۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۷۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

تست ۱۷: اگر $\sin\theta + \tan\theta > ۰$ و $\sin\theta \times \tan\theta < \frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست ۱۸: اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$
۲) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}]$
۳) $(\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$
۴) $[۰,\frac{۲}{۵}]$

تست ۱۹: اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۳}$

تست ۲۰: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۲+\cos\alpha}$ کدام است؟

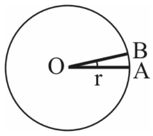
۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

تست ۲۱: بیشترین مقدار عبارت $۴+\cos^۲ x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

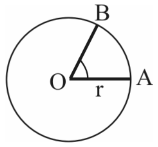
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل بـه آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ $\quad\quad$ $A\hat{O}B$ = ۱ درجه

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = r$ $\quad\quad$ $A\hat{O}B$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و ۲π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی ۲π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

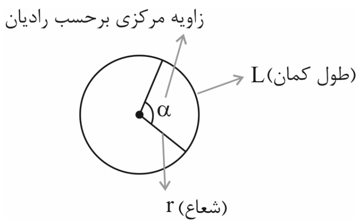
$\boxed{\text{هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا } ۲\pi \text{ رادیان است.}}$

رابطه‌ی بین رادیان و درجه: $\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}}$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و **D** اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R = ۱$ فرض شود، داریم:

$$D = \frac{۱۸۰}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۴} D \simeq ۵۷^\circ$$

هر یک رادیان، تقریباً ۵۷° است.



اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد **L**، شعاع دایره را با **r** و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشتـه می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تست ۲۲: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = ۵۰^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

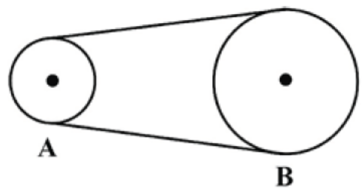
۱) $\frac{۱}{۵۰}$ $\quad$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ $\quad$ ۳) $\frac{۱۸}{\pi}$ $\quad$ ۴) $\frac{۳۶}{\pi}$

تست ۲۳: دایره‌ای به مساحت ۴π مفروض است. قطاعی به محیط $۷/۱۴$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

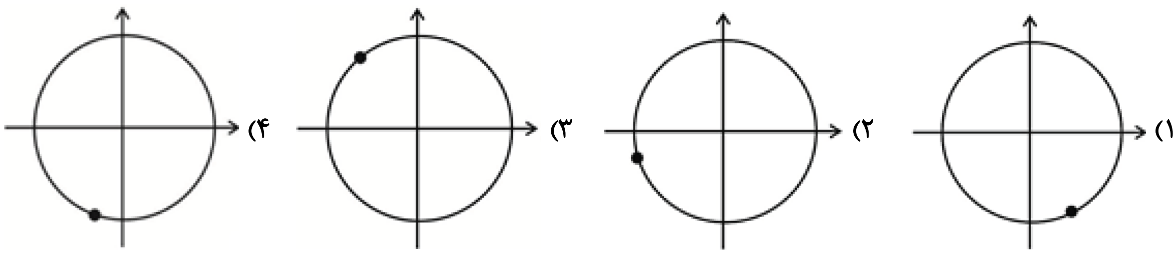
۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

تست ۲۴: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی A، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی B برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی B به اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی A چند دور می‌زند؟

۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۱۰



تست ۲۵: مجموعه دو زاویه ۷۲° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با x درجه باشد، زاویه‌ی $(۵x - ۱۰^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



تست ۲۶: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۱۱\pi}{۳}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

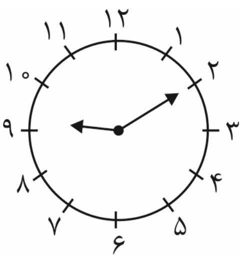
ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

$$\theta = \left| \frac{11m}{2} - 30h \right|$$

تست ۲۷: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

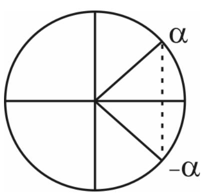
۱) یک ساعت
۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه
۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

تست ۲۸: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟



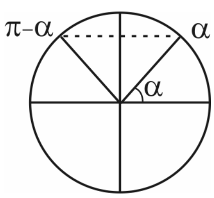
۱) $\frac{9\pi}{5}$
۲) $\frac{29\pi}{30}$
۳) $\frac{29\pi}{36}$
۴) $\frac{145\pi}{36}$

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi-\alpha)$



$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان ۱۸۰° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۲۹:

$$\sin ۱۵۰ = \sin(\pi - ۳۰) =$$
$$\cos ۱۵۰ = \cos(\pi - ۳۰) =$$
$$\tan ۱۵۰ = \tan(\pi - ۳۰) =$$
$$\cot ۱۵۰ = \cot(\pi - ۳۰) =$$
$$\sin ۱۲۰ = \sin(\pi - ۶۰) =$$
$$\cos ۱۲۰ = \cos(\pi - ۶۰) =$$
$$\tan ۱۲۰ = \tan(\pi - ۶۰) =$$
$$\cot ۱۲۰ = \cot(\pi - ۶۰) =$$

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$$\boxed{\sin\alpha = +\sin\beta \quad ، \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad ، \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad ، \quad \cot\alpha = -\cot\beta}$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۳۰: حاصل $\tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷} + \cos\frac{\pi}{۵} + \cos\frac{۴\pi}{۵}$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{۷} + \frac{۶\pi}{۷} = \pi \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷} = ۰ \qquad , \qquad \frac{\pi}{۵} + \frac{۴\pi}{۵} = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{۵} + \cos\frac{۴\pi}{۵} = ۰$$

تست ۳۱: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{۲\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{n-۱}{n}\pi$ با فرض فردبودن n کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) n ۴) $-n$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

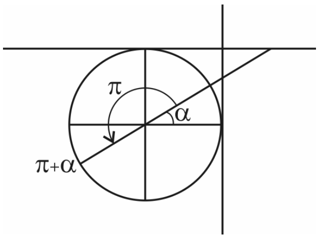
$$\cos\boxed{\frac{\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{۲\pi}{n}} + \cdots + \cos\boxed{\frac{(n-۲)\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{(n-۱)\pi}{n}}$$

توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$
$$\frac{۲\pi}{n} + \frac{(n-۲)\pi}{n} = \frac{۲\pi}{n} + \frac{n\pi - ۲\pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha , \pi + \alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر:

$$\begin{cases}\sin(۲k\pi+\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(۲k\pi+\alpha) = \cos\alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\tan(k\pi+\alpha) = \tan\alpha \\ \cot(k\pi+\alpha) = \cot\alpha\end{cases}$$

مثال ۳۲:

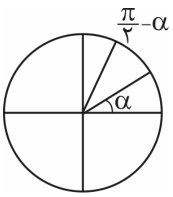
$$\sin ۲۱۰^\circ = \sin(\pi + ۳۰^\circ) =$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \cos(\pi + ۳۰^\circ) =$$

$$\tan ۲۱۰^\circ = \tan(\pi + ۳۰^\circ) =$$

$$\cot ۲۱۰^\circ = \cot(\pi + ۳۰^\circ) =$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{۲}$)



$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

یادت باشه:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه است. $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{\pi}{۲}$ $(\frac{۳\pi}{۲})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۶}$، $\frac{k\pi}{۴}$ و $\frac{k\pi}{۳}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{۶}$ یا $\frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{\pi}{۳}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۶})=\sin\underbrace{(۷\times\frac{\pi}{۶})}_{\text{ربع سوم}}=-\sin(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cot(-\frac{۵\pi}{۳})=-\cot\underbrace{(۵\times\frac{\pi}{۳})}_{\text{ربع چهارم}}=-\left(-\cot(\frac{\pi}{۳})\right)=-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{۷\pi}{۶}$ یا $\frac{۵\pi}{۳}$، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$۷\times\frac{\pi}{۶}=۷\times۳۰^\circ=۲۱۰^\circ \qquad \text{یا} \qquad ۵\times\frac{\pi}{۳}=۵\times۶۰^\circ=۳۰۰^\circ$$

تست ۳۳: حاصل عبارت $\frac{\cos۲۸۵^\circ-\sin۲۵۵^\circ}{\sin۵۲۵^\circ-\sin۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan۱۵^\circ=۰/۲۸$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$
۲) $-\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۱۶}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۱۶}$

تست ۳۴: حاصل عبارت $A=\tan ۱^\circ .\tan ۲^\circ ....\tan ۸۸^\circ .\tan ۸۹^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha=\cot\beta$ این اتفاق برای سـینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۲}-\beta\Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta\\ \cos\alpha=\sin\beta\end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin ۱۵^\circ=\cos ۷۵^\circ$، $\cos ۵۳^\circ=\sin ۳۷^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$$\tan\alpha .\tan\beta=۱$$

تست ۳۵: اگر $\tan ۱۵^\circ=a$ باشد، حاصل $\frac{۳\cos ۱۶۵^\circ-۲\sin ۲۸۵^\circ}{۳\sin ۳۴۵^\circ-۴\cos ۲۵۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{a}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{۲}{a}$ ۴) $-۲a$

تست ۳۶: مقدار عبارت $\cos(۳۰۰^\circ)+\sin(۳۳۰^\circ)+\cot(۷۵۰^\circ)+\tan(-۸۴۰^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) صفر ۴) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

تست ۳۷: حاصل عبارت $\sin^{۲}\frac{۷\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

تست ۳۸: حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۳۹: حاصل عبارت $\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^{۲}(۱۵^\circ)$ ۲) $\cos^{۲}(۱۵^\circ)$ ۳) $-\sin^{۲}(۱۵^\circ)$ ۴) $-\cos^{۲}(۱۵^\circ)$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

$۱)\ \sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}\\ \cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

۳) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۲) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۵) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

۴) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

۷) $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta$

۶) $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

۹) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$

۸) $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1+\cot^2\theta$

۱۰) $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$

تست ۴۰: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{32}{45}$ ۲) $\frac{45}{32}$ ۳) $\frac{31}{45}$ ۴) $\frac{45}{31}$

تست ۴۱: اگر $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{12}{7}$ ۲) $-\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{12}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$

تست ۴۲: حاصل $\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $2\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱

تست ۴۳: اگر $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$، حاصل $(\tan\theta - \cot\theta)^۲ - \frac{۱}{\cos^۲\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

تست ۴۴: اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

تست ۴۵: اگر $\sin x\cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳ x - \cos^۳ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^۳ x - \cos^۳ x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\sin^۲ x + \sin x\cos x + \cos^۲ x) = (\sin x - \cos x)(۱ + \frac{۱}{۳}) = \frac{۴}{۳}(\sin x - \cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x\cos x = ۱ - ۲(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^۳ x - \cos^۳ x = \frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}) = \pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}} = \pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تست ۴۶: اگر $\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$
۲) $-\frac{۶۵}{۸}$
۳) $\frac{۱۷}{۴}$
۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم **sin** و هم **cos** داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش **tan** بسازید:

$$\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x + ۲\cos x = ۲\sin x - ۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x = \sin x \xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div \cos x} ۸ = \tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$$

$$۸ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{۶۵}{۸}$$

تست ۴۷: اگر $۲\sin\alpha = ۳\cos\alpha$، حاصل $\frac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) ۶

تست ۴۸: مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} - \frac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

تست ۴۹: حاصل $\cot^۴\theta - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{۱}{\sin^۴\theta}$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$
۲) $\cos^۲\theta$
۳) $\tan^۲\theta$
۴) $\cot^۲\theta$

تست ۵۰: اگر $\frac{۱+\cot x}{\tan x+۱}=۲$، حاصل $\frac{۲\cos x-۳\sin x}{\sin x+\cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$　　۲) $\frac{۱}{۱۰}$　　۳) $\frac{۲}{۱۳}$　　۴) $\frac{۵}{۱۳}$

تست ۵۱: حاصل $\sqrt{۱-\sin^۲ \alpha}\sqrt{۱+\cot^۲ \alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$　　۲) $-\tan\alpha$　　۳) $\cot\alpha$　　۴) $-\cot\alpha$

تست ۵۲: حاصل $\sqrt{۱+\cos x\sqrt{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$　　۲) $-\sin x$　　۳) $\cos x$　　۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $۱-\sin^۲ x=\cos^۲ x$ و $۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۱+\cos x\sqrt{\underbrace{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}=\sqrt{۱+\cos x\sqrt{۱-\sin^۲ x}}=\sqrt{۱+\cos x\sqrt{\cos^۲ x}}$$

$$=\sqrt{۱+\cos x|\cos x|}\overset{\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}}{=\!=\!=}\sqrt{۱+\cos x(-\cos x)}=\sqrt{۱-\cos^۲ x}=\sqrt{\sin^۲ x}=|\sin x|\overset{\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}}{=\!=\!=}-\sin x$$

تست ۵۳: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\hat{B})+\frac{۱}{\tan^۲\hat{C}+۱}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) -۱　　۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=۹۰^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{۱}{۱+\tan^۲\bigcirc}=\cos^۲\bigcirc$ و $\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\bigcirc)=\cos^۲\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\hat{C}}+\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\hat{B})=\cos^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{B}$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ B و C متممِ‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و همچنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت: $\cos^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{B}=\sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B}=۱$

روش دوم: دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{۲}$، پس $\frac{\pi}{۲}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\hat{C}}+\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\hat{B})=\frac{۱}{۱+\tan^۲\hat{C}}+\sin^۲\hat{C}=\cos^۲\hat{C}+\sin^۲\hat{C}=۱$$

تست ۵۴: با فرض $۲\sin^۲x+۳\cos^۲x=۵\sin x\cos x$، مقدار $\cos^۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۴}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۲\sin^۲x+۳\cos^۲x=۵\sin x\cos x \xrightarrow{\div\cos^۲x} ۲\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}+۳\frac{\cos^۲x}{\cos^۲x}=۵\frac{\sin x\cos x}{\cos^۲x}$$

$$\Rightarrow ۲\tan^۲x+۳=۵\tan x \Rightarrow ۲\tan^۲x-۵\tan x+۳=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases}\tan x=۱\\ \tan x=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ داریم:

حالت اول: $\tan x=۱ \Rightarrow ۱+(۱)^۲=\frac{۱}{\cos^۲x} \Rightarrow ۲=\frac{۱}{\cos^۲x} \Rightarrow \cos^۲x=\frac{۱}{۲}$

حالت دوم: $\tan x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۱+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{\cos^۲x} \Rightarrow ۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲x} \Rightarrow \frac{۱۳}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲x} \Rightarrow \cos^۲x=\frac{۴}{۱۳}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^۲x=\frac{۴}{۱۳}$ است.

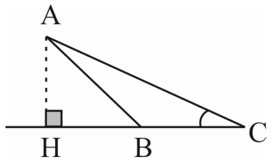
تست ۵۵: اگر $۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۱)*

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

تست ۵۶: در شکل زیر، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{۵}{۱۳}$ و $CH=۹$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ *(ریاضی ۹۹)*

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵

۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵



نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

مثال ۵۷: حاصل $\sin 15^\circ$ و $\sin 75^\circ$ را بیابید:

$$\sin(75^\circ)=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos 15^\circ$$

$$\sin(15^\circ)=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})-(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ$$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

۵) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

۶) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$

۷) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

۸) $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

۹) $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

مثال ۵۸: حاصل $\tan ۱۵^\circ$ و $\tan ۷۵^\circ$ را بیابید.

$$\tan(۱۵^\circ)=\tan(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\frac{۱-\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۳۰^\circ}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

$$\tan(۷۵^\circ)=\tan(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\frac{۱+\tan ۳۰^\circ}{۱-\tan ۳۰^\circ}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

تست ۵۹: اگر $\alpha+\beta=۱۳۵^\circ$ و $\tan(\alpha-\beta)=\frac{۳}{۴}$، مقدار کسر $\frac{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta-\sin^۲\alpha\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۴)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

تست ۶۰: مقدار عبارت $\frac{\cos ۲۰^\circ+\sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}$ چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته: در این مدل از سؤالات می‌توانیم به جای $\sqrt{۳}$ قرار دهیم $\tan ۶۰^\circ$ یا $\frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}$ و سپس با مخرج مشترک‌گیری به راحتی به جواب برسیم.

تست ۶۱: اگر $\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=۲$ باشد، $\tan x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۷)*

۱) -۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۳

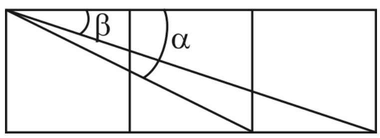
تست ۶۲: اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۲}{۳}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\sin\alpha\cos\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۴}$

تست ۶۳: اگر انتهای کمان α در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۹)

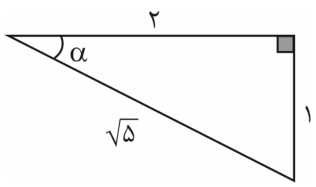
۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

تست ۶۴: شکل زیر از سه مربع یکسان به طول ضلع واحد تشکیل شده است. حاصل $\cos(\alpha+\beta)$ کدام است؟

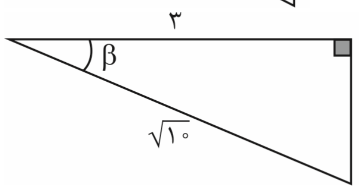


۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ ابتدا به کمک فیثاغورس اندازه‌ی وترهای دو مثلث قائم‌الزاویه را به دست می‌آوریم و سپس:



$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵},\ \cos\alpha=\frac{۲\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$



$$\Rightarrow \sin\beta=\frac{۱\times\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰},\ \cos\beta=\frac{۳\times\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}}=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰})-(\frac{\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰})=\frac{۶\sqrt{۵۰}}{۵۰}-\frac{\sqrt{۵۰}}{۵۰}=\frac{۵\sqrt{۵۰}}{۵۰}=\frac{\sqrt{۵۰}}{۱۰}$$

$$=\frac{۵\sqrt{۲}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۶۵: حاصل عبارت $\sin 10^\circ + \cos 10^\circ - \sqrt{2}\sin 35^\circ$ را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا حاصل $\sin 10^\circ + \cos 10^\circ$ را با استفاده از رابطه‌های ذکرشده می‌نویسیم:

$$\sin 10^\circ + \cos 10^\circ - \sqrt{2}\cos 55^\circ = \sqrt{2}\sin(10^\circ + 45^\circ) - \sqrt{2}\cos 55^\circ = \sqrt{2}\sin 55^\circ - \sqrt{2}\cos 55^\circ$$
$$= \sqrt{2}(\sin 55^\circ - \cos 55^\circ) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin(55^\circ - 45^\circ) = 2\sin 10^\circ$$

مثال ۶۶: اگر $\sin(x+y) = \frac{3}{5}$، $\sin(x-y) = \frac{5}{13}$، $x+y$ و $x-y$ هر دو حاده باشند، مقدار $\sin 2x$ و $\sin 2y$ را به‌دست آورید.

پاسخ: اول که به این سؤال نگاه می‌کنیم، هیچ ارتباطی بین آن‌چه داده شده و آن‌چه خواسته شده پیدا نمی‌کنیم. اما اگر فکر کنیم شاید بتوانیم بین عبارت‌های $x+y$، $x-y$، $2x$ و $2y$ رابطه‌ای پیدا کنیم. قبل از این که من بگویم چه خبر است خودتان کمی فکر کنید. و اما رابطهٔ بین این عامل‌ها:

$$2x = (x+y) + (x-y) \qquad\qquad 2y = (x+y) - (x-y)$$

یعنی $2x$ و $2y$ را می‌شود با جمع و تفریق کردن $x+y$ و $x-y$ پیدا کرد. حالا دیگر می‌توانیم $\sin 2x$ و $\sin 2y$ را پیدا کنیم:

$$\sin 2x = \sin((x+y)+(x-y)) = \sin(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y)\sin(x-y)$$

(دقت کنید که در نوشتن این رابطه فرض کردیم $x+y=\alpha$ و $x-y=\beta$ و رابطهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ را بسط داده‌ایم). خُب، حالا باید مقادیر $\sin(x+y)$، $\sin(x-y)$، $\cos(x+y)$ و $\cos(x-y)$ را پیدا کنیم. مقدار سینوس‌ها معلوم است، پس مقدار کسینوس‌ها را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی پیدا می‌کنیم:

$$\cos^2(x+y) = 1 - \sin^2(x+y) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{حاده } x+y} \cos(x+y) = \frac{4}{5}$$
$$\cos^2(x-y) = 1 - \sin^2(x-y) = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{حاده } x-y} \cos(x-y) = \frac{12}{13}$$

پس داریم:
$$\sin 2x = (\frac{3}{5})(\frac{12}{13}) + (\frac{4}{5})(\frac{5}{13}) = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$$

مقدار $\sin 2y$ را هم به همین ترتیب پیدا می‌کنیم. پیداکردن این مقدار را می‌گذاریم به عهدهٔ شما. جواب آخرش باید برابر $\frac{16}{65}$ شود. (جواب آخر را به این خاطر داده‌ام که بررسی کنید که آیا درست حل کرده‌اید یا نه.)

مثال ۶۷ (مهم): از حل دستگاه $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta) = 8\\ \tan(\alpha-\beta) = 7\end{cases}$ حاصل $\tan 2\alpha$ و $\tan 2\beta$ را بیابید.

$$\begin{cases}\alpha+\beta = x \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \tan x = 8\\ \alpha-\beta = y \Rightarrow \tan(\alpha-\beta) = \tan y = 7\end{cases}$$

$$x+y = 2\alpha \Rightarrow \tan(x+y) = \tan 2\alpha = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} = \frac{8+7}{1-56} = -\frac{15}{55}$$

$$x-y = 2\beta \Rightarrow \tan(x-y) = \tan 2\beta = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} = \frac{8-7}{1+56} = \frac{1}{57}$$

پس $\tan 2\alpha = \frac{15}{55}$ و $\tan 2\beta = \frac{1}{57}$ است.

تست ۶۸: اگر $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos 3x . \cos 2x + \sin 3x . \sin 2x \le 1$ آن‌گاه حدود تغییرات x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ ۴) $\pi \le x \le \frac{5\pi}{4}$

تست ۶۹: عبارت $\frac{\sin 2a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\cos a}$، وقتی $a \ne \frac{k\pi}{2}$ باشد، برابر است با:

۱) $\frac{1}{\cos a}$ ۲) $-\frac{1}{\cos a}$ ۳) $\frac{1}{\sin a}$ ۴) $-\frac{1}{\sin a}$

تست ۷۰: حاصل کسر $\frac{1-\tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ}$ کدام است؟

۱) $1-\tan 20^\circ$ ۲) $\tan 25^\circ$ ۳) $1+\tan 20^\circ$ ۴) $\tan 15^\circ$

تست ۷۱: اگر $\tan(\alpha + 20^\circ) = \frac{3}{4}$ بشاد، $\cot(25^\circ - \alpha)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

تست ۷۲: اگر α زاویهٔ منفرجه و $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$ کدام است؟

۱) -۷　۲) $-\frac{۱}{۷}$　۳) $\frac{۱}{۷}$　۴) ۷

تست ۷۳: اگر $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$　۲) $-\frac{۱}{۵}$　۳) $\frac{۱}{۵}$　۴) $\frac{۱}{۳}$

تست ۷۴: اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۱-m}{۲+m} = \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۱ < m < ۲$　۲) $-۲ < m < ۱$　۳) $m > ۱$　۴) $m < -۲$

تست ۷۵: اگر $\alpha+\beta = \frac{۵\pi}{۴}$ ، حاصل $(۱+\tan\alpha)(۱+\tan\beta)$ کدام است؟ (سنجش)

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

تست ۷۶: حاصل عبارت $A = (۱+\tan ۱۸^\circ)(۱+\tan ۲۷^\circ)$ کدام است؟ (گزینه‌ی دو)

۱) $\sqrt{۲}$　۲) ۱　۳) $۲\sqrt{۲}$　۴) ۲

تست ۷۷: اگر $\sin x = \frac{۲}{\sqrt{۷}}$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ اول باشد، حاصل $\tan(x+\frac{\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

تست ۷۸: حاصل عبارت $\frac{\tan^{۲} ۵x - \tan^{۲} x}{\tan^{۲} ۶x - \tan^{۲} ۵x \tan^{۲} x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست ۷۹: اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲} + ۳x - ۱ = ۰$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۳ ۴) -۱

تست ۸۰: اگر $\cot(x-y) = ۵$ و $\tan(x+y) = ۳$، حاصل $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

فرمول‌های کمان 2α

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

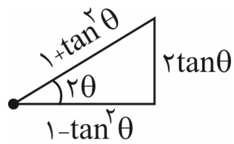
الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

پ) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

ت) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

«به شدت مهم»



۳) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

۷) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$

*۹) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

*۱۱) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha) = \tan 3\alpha$

تست ۸۱: حاصل عبارت $\sin(۷/۵^\circ)\sin(۹۷/۵^\circ)\cos(۱۵^\circ)$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

تست ۸۲: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^۴ x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$ ۳) $\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x$ ۴) $\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۲x$

تست ۸۳: حاصل عبارت $\cos\frac{۴\pi}{۷}\cdot\cos\frac{۲\pi}{۷}\cdot\cos\frac{\pi}{۷}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

تست ۸۴: ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\cos\frac{\theta}{۲}$ ۲) $\sin\frac{\theta}{۲}$ ۳) $۲\cot\frac{\theta}{۲}$ ۴) $۲\tan\frac{\theta}{۲}$

تست ۸۵: اگر انتهای کمان x در ربع سوّم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

تست ۸۶: حاصل $\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)$ به ازای $x=15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با استفاده از روابط $2\sin\bigcirc\cos\bigcirc=\sin 2\bigcirc$ و $\cos^2\bigcirc-\sin^2\bigcirc=\cos 2\bigcirc$ می‌توان نوشت:

$$\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1})=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(4x))$$

$$=\frac{1}{4}\sin(4x)$$

حالا با جای‌گذاری $x=15^\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\sin(4x)=\frac{1}{4}\sin(60^\circ)=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

تست ۸۷: با فرض $\sin\alpha=\frac{1}{4}$، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{64}$ ۲) $\frac{17}{32}$ ۳) $\frac{-17}{64}$ ۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha=1-2(\frac{1}{16})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 4\alpha=2\cos^2(2\alpha)-1$ برای محاسبهٔ مقدار $\cos 4\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos 4\alpha=2(\frac{49}{64})-1=\frac{98}{64}-1=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$$

تست ۸۸: اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

تست ۸۹: اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

تست ۹۰: اگر $\cot x-\tan x=3$ باشد، حاصل عبارت $M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ می‌دانیم $\cot\bigcirc-\tan\bigcirc=2\cot 2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$2\cot 2x=3 \Rightarrow \cot 2x=\frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x=\frac{2}{3}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

$$2\cot 4x=\cot 2x-\tan 2x=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$$

در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواستهٔ مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}=\frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2})+3(\frac{2}{3})}=\frac{\frac{5}{6}}{3+2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}}=\frac{1}{6}$$

تست ۹۱: اگر $\frac{1}{8}=\frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}$، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

چند تا اتّحاد مهمّ و کاربردی

$$۱)\ \cos^۴ x - \sin^۴ x = \cos ۲x$$

اثبات : $(\cos^۲ x - \sin^۲ x)\overbrace{(\cos^۲ x + \sin^۲ x)}^{۱} = \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$

$$۲)\ \sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴}\cos ۴x$$

اثبات: $\sin^۴ x + \cos^۴ x$

$$(\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۲ - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x = ۱ - ۲\sin^۲ x\cos^۲ x = ۱ - ۲(\sin x \cos x)^۲ = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲$$

$$= ۱ - ۲ \times \frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = ۱ - \frac{۱}{۲}(\frac{۱ - \cos ۴x}{۲}) = ۱ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}\cos ۴x = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴}\cos ۴x$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$ استفاده کردیم که $a = \sin^۲ x$ و $b = \cos^۲ x$ بود.

$$۳)\ \sin^۶ x + \cos^۶ x = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x = \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

اثبات: $\sin^۶ x + \cos^۶ x$

اثبات : $\overbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}^{۱}{}^۳ - ۳\sin^۲ x\cos^۲ x\overbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}^{۱} = ۱ - ۳\sin^۲ x\cos^۲ x = ۱ - ۳(\sin x\cos x)^۲$

$$= ۱ - ۳(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲ = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x = ۱ - \frac{۳}{۴}(\frac{۱ - \cos ۴x}{۲}) = ۱ - \frac{۳}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos ۴x = \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a = \sin^۲ x$ و $b = \cos^۲ x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$۴)\ (\sin x + \cos x)^۲ = ۱ + \sin ۲x$$
$$(\sin x - \cos x)^۲ = ۱ - \sin ۲x$$

اثبات: $(\sin x \pm \cos x)^۲$

$$\overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱} \pm \overbrace{۲\sin x\cos x}^{\sin ۲x} = ۱ \pm \sin ۲x$$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تست ۹۲: حاصل $\sqrt{۱ + \sin ۲x} - \sin x$ وقتی $\frac{\pi}{۳} < x < \frac{۳\pi}{۴}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر　　۲) $-۲\sin x$　　۳) $\cos x$　　۴) $۲\sin x - \cos x$

تست ۹۳: اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۳}{۴}$　　۲) $-\frac{۳}{۸}$　　۳) $\frac{۳}{۸}$　　۴) $\frac{۳}{۴}$

توابع مثلثاتی

$\boxed{y=\sin x}$

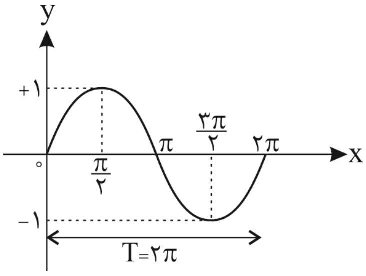
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است. (چون $-۱\le \sin x\le ۱$)

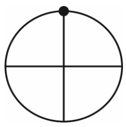
۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi}+\alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y=\sin x$ را در $[۰,۲\pi]$ یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.

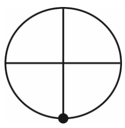
نمودار $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:

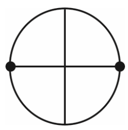
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T=۲\pi$ می‌باشد.)

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، $\frac{۹\pi}{۲}$ یا $\frac{-۳\pi}{۲}$، $\frac{-۷\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۷\pi}{۲}$ یا $\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\sin x$ در  یعنی کمان $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال در مورد توابع مثلثاتی نیز برقرار است یعنی اگر $\alpha>۰$ و $k>۰$

برای رسم $y=\sin(x-\alpha)$، نمودار $y=\sin x$ را α تا به سمت راست انتقال می‌دهیم.

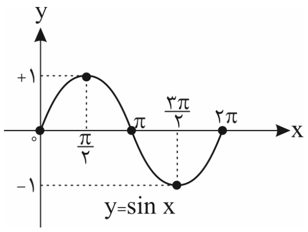
برای رسم $y=\sin(x+\alpha)$، نمودار $y=\sin x$ را α تا به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

برای رسم $y=\sin x+k$، نمودار $y=\sin x$ را k واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

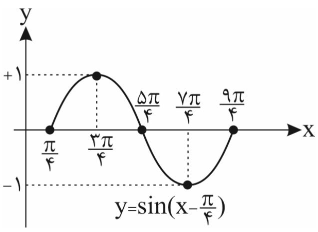
برای رسم $y=\sin x-k$، نمودار $y=\sin x$ را k واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم.

تذکر: هم‌چنین در $y=a\sin x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ است، عرض نقاط a برابر می‌شود و در نتیجه ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $|a|$ و $-|a|$ خواهد بود.

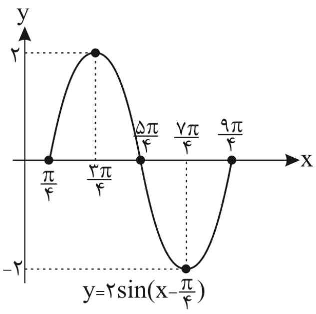
به طور مثال نمودار تابع $y = ۲\sin(x - \frac{\pi}{۴}) - ۱$ را در یک دوره‌ی تناوب به صورت زیر است:



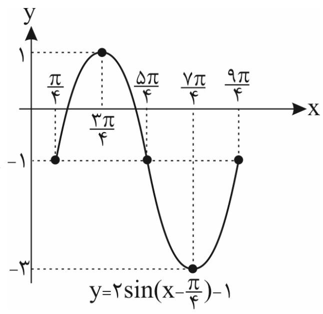
انتقال $\frac{\pi}{۴}$ واحدی به راست



عرض نقاط دو برابر



انتقال یک واحدی به پایین



تذکر: در واقع در رسم $y = a\sin bx$، نمودار $y = \sin x$ با ضریب $\frac{۱}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود (اگر $ab < ۰$، یعنی یا $a < ۰$ یا $b < ۰$ باشد، نمودار $y = \sin x$ علاوه بر تغییرات فوق، نسبت به محور xها نیز قرینه می‌شود چون در مورد $b < ۰$ داریم: $(\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$)

در حالت کلی، در تابع $y = a\sin(bx + c) + d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x = ۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = ۰$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

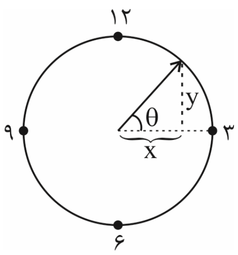
۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است.

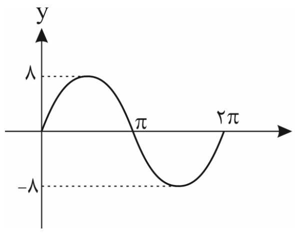
تست ۹۴: اگر بیشترین مقدار تابع $y = ۲\sin ۵x - ۳c$ برابر (-۷) باشد، c کدام است؟

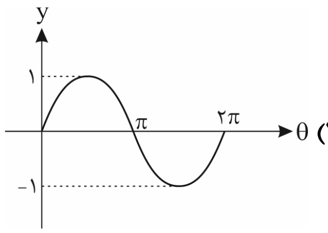
۱) ۳　　۲) -۲　　۳) -۵　　۴) ۱

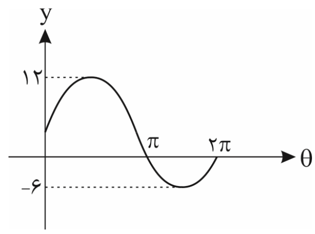
پاسخ: گزینه‌ی «۱»　　$y_{max} = ۲ - ۳c = -۷ \Rightarrow -۳c = -۹ \Rightarrow c = ۳$

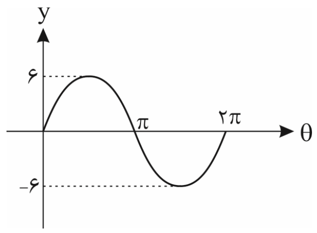
تست ۹۵: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



۱)


۲)


۳)


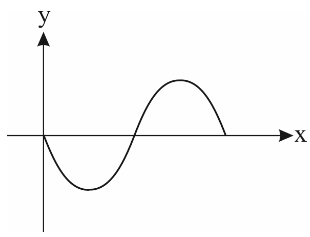
۴)


پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۸\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} T = ۲\pi \\ y_{max} = ۸ \\ y_{min} = -۸ \end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار $(\max)$ تابع $y = ۸\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T = ۲\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۳» درسته.

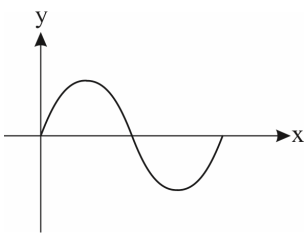
حالت ۲



$y = a\sin bx$

$a \times b < ۰$

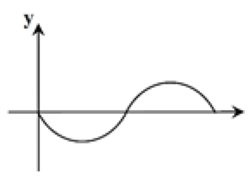
حالت ۱

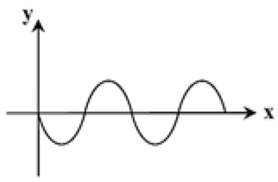


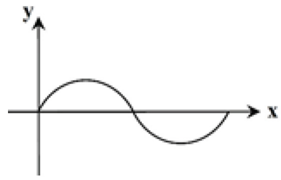
$y = a\sin bx$

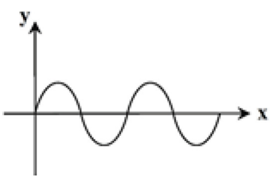
$a \times b > ۰$

تست ۹۶: نمودار تابع $f(x) = -\sin(\pi + x)$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به کدام شکل است؟

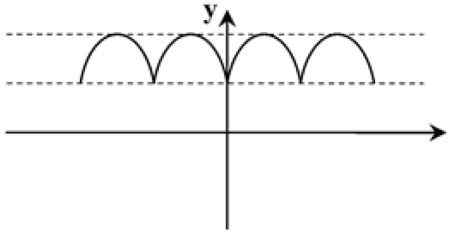
۱)


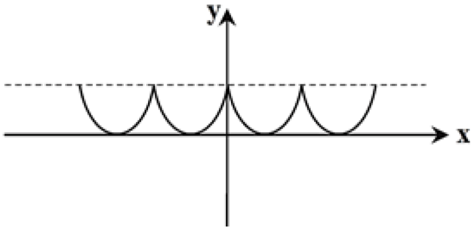
۲)


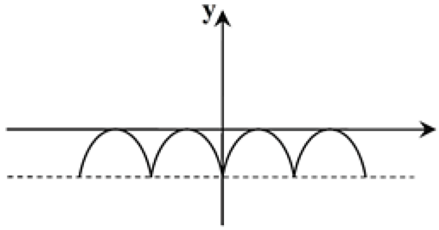
۳)


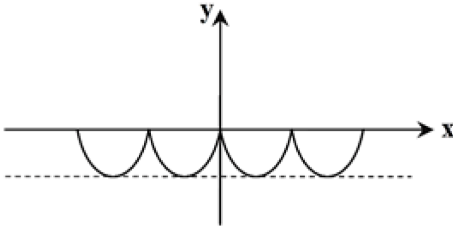
۴)


تست ۹۷: نمودار $f(x)=1-|\sin x|$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) 

۲) 

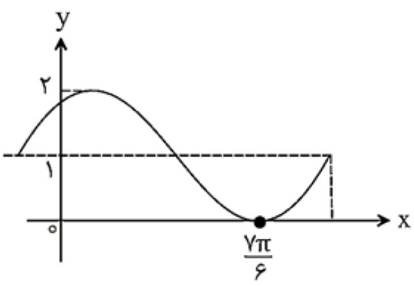
۳) 

۴) 

تست ۹۸: برد تابع $y=-2\sin x+1$ بازهٔ $[a,b]$ است. حاصل b^2-a^3 کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۷　　۴) ۱۱

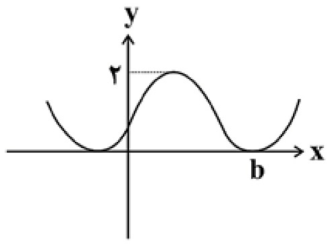
تست ۹۹: ضابطهٔ تابع نشان‌داده‌شده در شکل برابر با کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟



۱) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})-1$　　۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})+1$

۳) $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})+1$　　۴) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{3})+1$

تست ۱۰۰: اگر بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-\sin(x+\frac{۳\pi}{۴})$ به صورت زیر باشد، $a.b$ کدام است؟



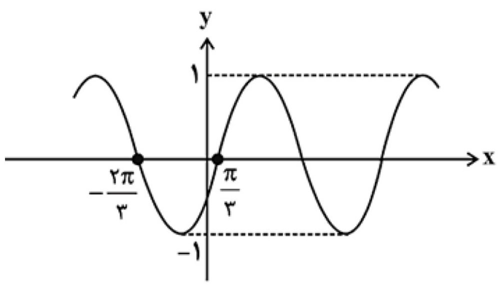
۱) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $\frac{۷\pi}{۴}$

۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

تست ۱۰۱: نمودار شکل زیر مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟



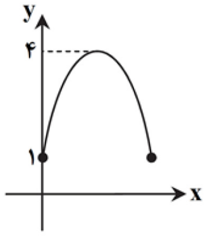
۱) $y=\sin(x+\frac{\pi}{۳})$

۲) $y=\sin(x-\frac{۲\pi}{۳})$

۳) $y=\sin(\frac{\pi}{۳}-x)$

۴) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$

تست ۱۰۲: نمودار تابع $f(x)=a\sin x+b$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ به شکل زیر است. مقدار $a^۲+b^۲$ کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۲

۳) ۵

۴) ۱۳

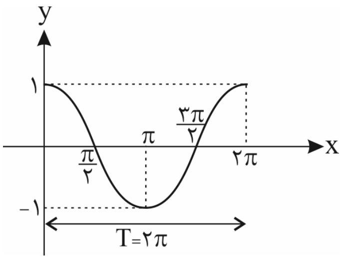
$\boxed{y=\cos x}$

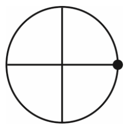
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد).

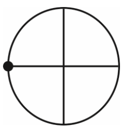
۲) برد این تابع $[-1,1]$ است (چون $-1\le\cos x\le 1$).

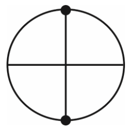
۳) نمودار $y=\cos x$ را نیز مانند $y=\sin x$ در $[0,2\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{2k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi}+\alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y=\cos x$ هم $T=2\pi$ است، 2π تا 2π تا تکرارش می‌کنیم.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1



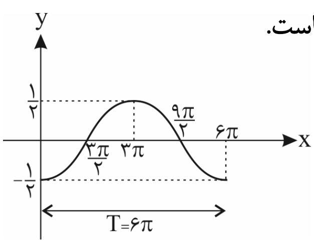
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\cos x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰ ، $\pm2\pi$، $\pm4\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است که در  یعنی کمان $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\pm\pi$، $\pm3\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\cos x$ در  یعنی کمان $x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y=\cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y=a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{2\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|}=6\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ همان $y=-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y=a\cos bx$، نمودار $y=\cos x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

حالت کلی، در تابع $y = a\cos(bx+c)+d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

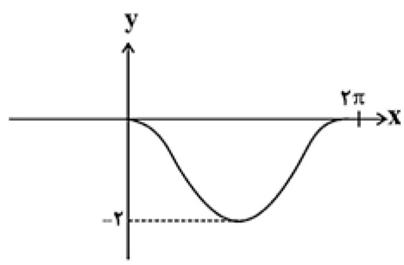
تست ۱۰۳: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x)=-a\cos\frac{\pi x}{۳}+۱$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

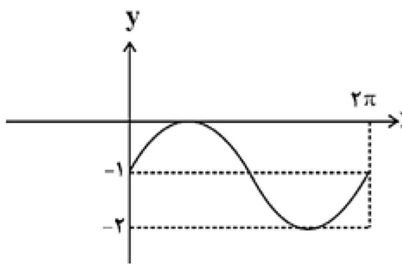
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

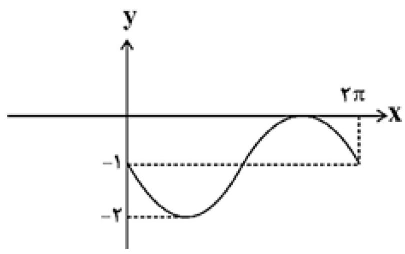
پاسخ: گزینه‌ی «۴»

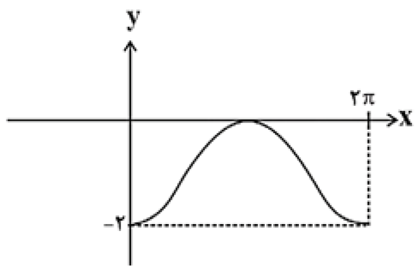
$$-|-a|+۱=\frac{۲}{۳} \Rightarrow -|a|=\frac{۲}{۳}-۱ \Rightarrow -|a|=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow |a|=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۳}$$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{۱}{۳})$ وجود دارد.)

تست ۱۰۴: بخشی از نمودار تابع $y=\sin(\frac{۷\pi}{۲}+x)-۱$ شبیه کدام است؟

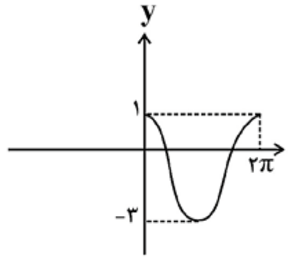
۱)


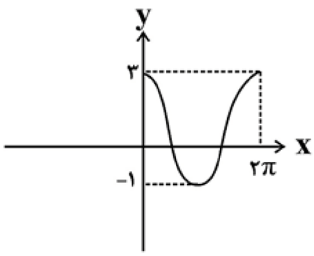
۲)


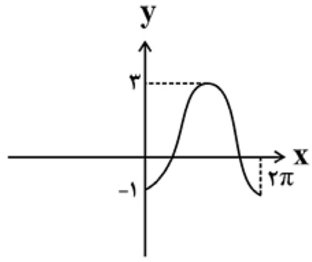
۳)


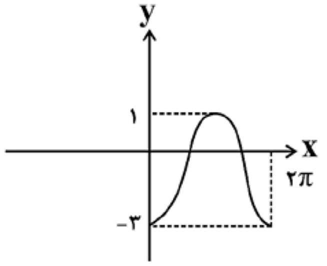
۴)


تست ۱۰۵: نمودار تابع $y=-۲\cos x+۱$ در بازهٔ $[\circ,۲\pi]$ کدام است؟

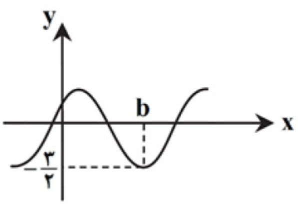
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۱۰۶: اگر نمودار تابع $y=a+\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ به صورت زیر باشد، مقدار ab کدام است؟



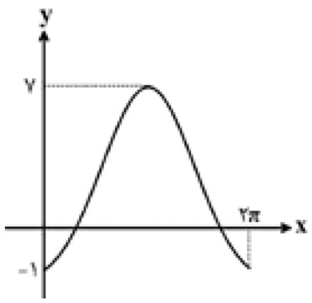
۱) $-\frac{۷\pi}{۶}$

۲) $-\frac{۷\pi}{۱۲}$

۳) $\frac{۷\pi}{۶}$

۴) $\frac{۷\pi}{۱۲}$

تست ۱۰۷: شکل تابع $y=a\cos(\pi-x)+b$ به صورت زیر است. حاصل ab چه‌قدر است؟



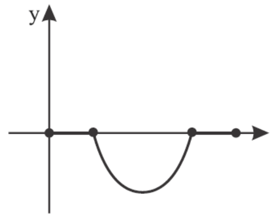
۱) ۶

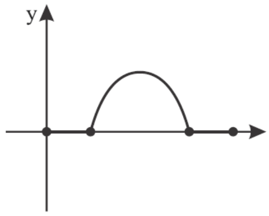
۲) ۹

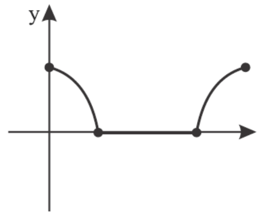
۳) ۸

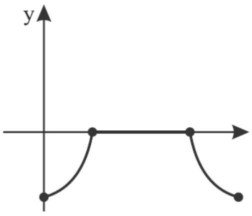
۴) ۱۲

تست ۱۰۸: نمودار تابع $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos^{۲} x}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به کدام شکل است؟

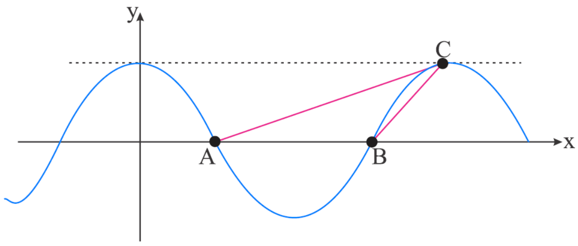
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۱۰۹: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\cos x$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



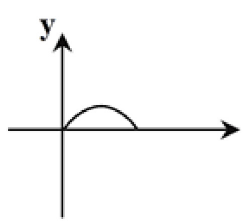
۱) $\frac{\pi}{۴}$

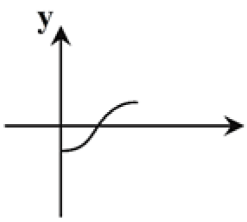
۲) $\frac{\pi}{۲}$

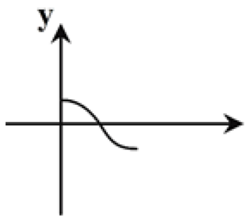
۳) π

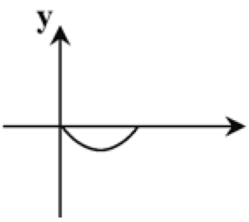
۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

تست ۱۱۰: نمودار تابع $f(x)=a+b\cos x$ از نقطهٔ $(\pi,۰)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=\frac{a}{b}\cos x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ به کدام شکل است؟ $(b\neq ۰)$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید