توابع پایهٔ یازدهم ریاضی و تجربی

زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a,b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a,b) با زوج مرتب (b,a) فرق دارد.

هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\,,\,b=d$$

تست ۱: اگر دو زوج مرتب $(x-y,1)$ و $(3,2x+3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x+2y$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۹

$$+\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$$
$$3x+2y=4$$

رابطه

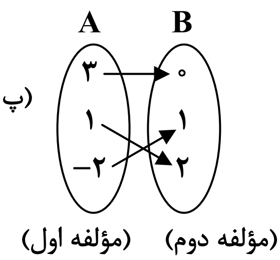
برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

الف) $R=\{(1,2),(3,0),(-2,1)\}$ (زوج مرتب)

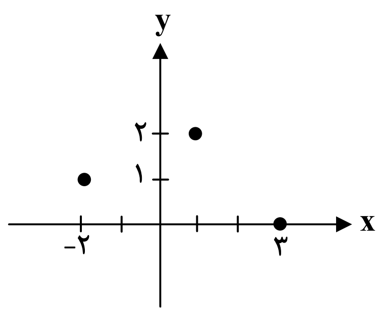
ب) (جدول)

(مؤلفه اول) x	۱	۳	۲−
(مؤلفه دوم) y	۲	۰	۱

پ) (نمودار ون)



ت)



(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)

رنه دکارت

تست ۲: رابطه‌ی $R = \{(x,y) \mid x,y \in N, 2x + y \le 7\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟ (ریاضی خارج ۸۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹ ✓

تفکر منظم: یعنی از $x=1$ شروع کن به ترتیب جلو برو

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

۱) تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x,y_1) \in f \,,\, (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

مثال ۳: کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟ f_6

$f_1 = \{(0,1),(-2,3),(4,2)\}$ $\qquad$ $f_2 = \{(1,2),(3,4),(1,2)\}$

$f_3 = \{(2,3),(1,-4),(2,\cancel{\sqrt{9}})\}$ ۳ $\qquad$ $f_4 = \{(-1,2)\}$

$f_5 = \{\}$ ← تهی تابع است $\qquad$ $f_6 = \{(1,2),(2,2),(1,5)\}$ ← یک $x=1$ با دو تا y رابطه داره تابع نیست

نکته: در مجموعه عضو تکراری مهم نیست

نکته: هر خط موازی محور yها شکل رابطه را حداکثر در یک نقطه (یک نقطه یا هیچ نقطه) قطع کند تابع است.

پس تهی $\emptyset$ ← تابع است زیرا خط قائم آن را اصلا قطع نمی‌کند.

تست ۴: رابطه $\{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟ (تجربی خارج ۸۵)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ‌مقدار m

$x=3$ با بیش از یک y در ارتباط باشد پس:

$m^2 = m+2 \longrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$m=2 \longrightarrow \{(3,4),(2,1),(-2,2),(3,4),(2,4)\}$ تابع نیست

$m=-1 \longrightarrow$ تابع است $\{(3,1)^*,(2,1),(-2,-1),(3,1)^*,(1,4)\}$ در مجموعه تکرار اعضا مهم نیست

هم دامنه یا مجموعه مقصد بزرگ‌تر یا برابر برد است.

هم دامنه $= B$

هم دامنه

برد $R_f: \{a, b\} \subset B = \{a, b, c\}$

زیرمجموعه

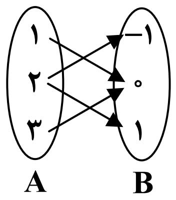
۲) تعریف تابع از نظر نمودار ون

یک رابطه بین مجموعه **A** و مجموعه **B** که با نمودار ون نمایش داده می‌شود، وقتی تابع است که از هر مؤلفه مجموعه **A** (مؤلفه اول) فقط و فقط یک فلش خارج شود نه بیشتر و همه اعضای **A** به بازی گرفته شوند و هیچ عضوی از **A** نباشد که از آن فلش خارج نشود **A** همان دامنه‌ی تابع است.

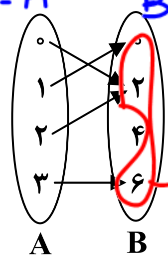
دقت کنید اگر در مجموعه مبداء (A) یک عضو داشتی که ازون هیچ فلشی خارج نشد تابع نیست.

دامنه = مبداء = $D_f = A$

هم دامنه: B



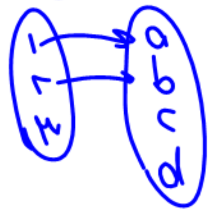
تابع نیست



تابع است

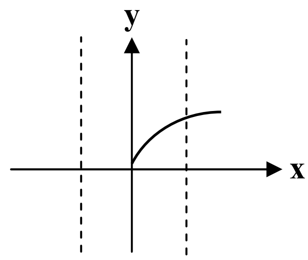
$R_f \subseteq B$

برد می‌تونه با هم دامنه برابر باشه یا کوچکتر



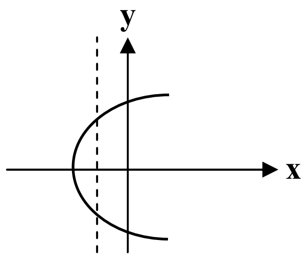
۳) تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی)

نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور **y**ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نه بیشتر.



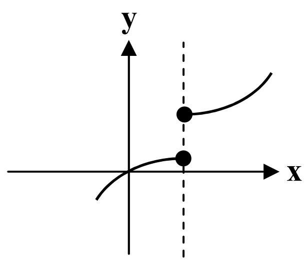
تابع است.

چون هر خط به موازات محور **y**، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.



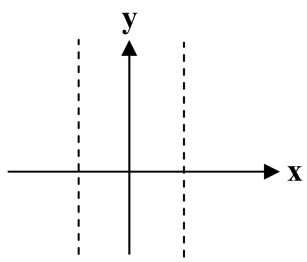
تابع نیست.

چون خطی به موازات محور **y** در بیش از یک نقطه، نمودار را قطع می‌کند.



تابع نیست.

چون خطی به موازات محور **y** در بیش از یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.



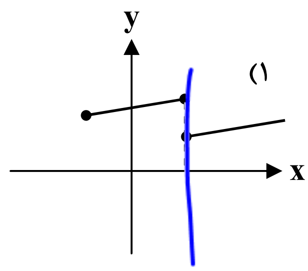
تابع است

(تهی) چون هر خطی به موازات محور **y**ها، در هیچ جا چیزی را قطع نمی‌کند.

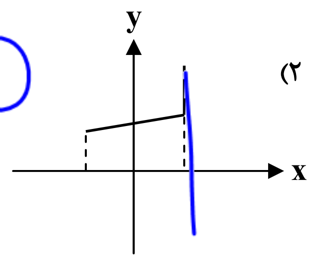
تهی یک تابع است.

تست ۵: کدام شکل نمودار یک تابع است؟

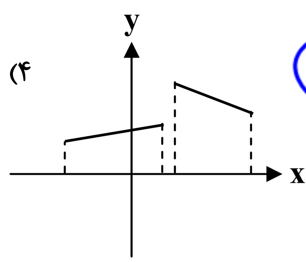
۱)



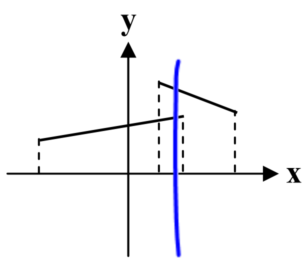
۲)



۳)



۴)



۴) تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y=f(x)$ وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به‌دست آید.

توی این مدل از سوال‌ها xای رو انتخاب کن که به ازای اون مشکوک به تولید چند تا y بشی. در واقع برای اثبات تابع نبودن از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۱- اگر عبارت yدار توی قدرمطلق و یا درون پرانتز توان زوج بود کاری کن عبارت قدرمطلقی و یا توان زوج با یک عدد مثبت برابر بشه:

الف) $|2y-1|+x-2=0$

ب) $(y-1)^2+x^2=1$

۲- وقتی چند y با توان‌های فرد و مختلف کنار هم هستند، xای را انتخاب کنید که سمت راست تساوی صفر بشه:

پ) $y^3-y=2x-1$

۳- اگر جمع چند عبارت نامنفی برابر صفر بشه، باید تک‌تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

ت) $(y-1)^2+x^2=0$

ث) $(y^2-1)^2+x^2=0$

ج) $x^2+y^4+2y^3+y^2+4x+4=0$

معمولاً روابطی که در آن‌ها $|y|$، y^{2n} یا $[y]$ و یا $\sin y$، $\cos y$، $\tan y$ و یا $\cot y$ دیده می‌شه تابع نیستند.

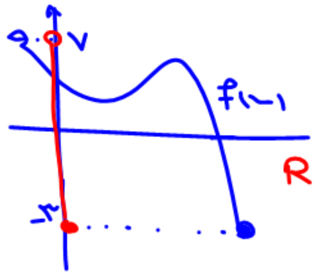
چ) $x=\sin y$

ح) $[y]+x^2-1=0$

برد: یا Range که دوره تغییرات y است و یا y هایی است که به ازای x های دامنه درست شده اند.
از روی شکل کافی است شکل را با یک پرس ۲ فکه روی محور y ها پرس کنیم هر جا لکه شد برد است.

۴- اگر جمع چند عبارت نامنفی و یا چند عبارت همواره مثبت برابر یک عدد منفی بشه به رابطه‌ای برخورد کردیم که بیانگر تهی است و می‌دانیم تهی یک تابع است.

خ) $|y| + 3^{x} = -1$



$R_f\ [-۳,۷)$

د) $\sqrt{x-1} + y^{2} = -1$

تست ۶: کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^{3} - 3y^{2} + x = 0$ ۲) $y + y^{3} = x^{3} + 1$ ۳) $|y-1| + x = 0$ ۴) $xy^{2} - x = 1$

گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ رو تحلیل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که به ازای یک x بیش از یک مقدار واسه y بدست میاد پس تابع نیستن.

$$1)\ y^{3} - 3y^{2} + x = 0 \xrightarrow{x=0} y^{3} - 3y^{2} = 0 \Rightarrow y^{2}(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^{2} = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

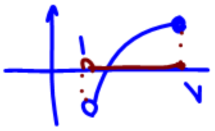
$$3)\ |y-1| + x = 0 \xrightarrow{x=-1} |y-1| - 1 = 0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y - 1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2,\ y = 0$$

$$4)\ xy^{2} - x = 1 \xrightarrow{x=1} y^{2} - 1 = 1 \Rightarrow y^{2} = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Domain

دست تو جیب: تیزبین که باشی توی گزینه ۱ با انتخاب $x = 1$ می‌شه از y فاکتور گرفت و ۲ مقدار واسش بدست بیاد پس تابع نیست. توی گزینه ۳ با انتخاب هر x منفی ۲ مقدار واسه y بدست میاد. گزینه ۴ با انتخاب $x = 1$، ۲ مقدار واسه y بدست میاد.

دامنه: جای x ها و ورودی هایی است که حسینه به f دادیم و به ازای اونا y تعریف شده هستند. ضمناً با به تابع ورودی محور x ها است.
یعنی شکل f را با یک پرس ۲ فکه روی محور x ها پرس کنیم هر جا لکه شد دامنه است.



$D_f: (۱,۷]$

قواعد تعیین دامنه

الف) توابع چند جمله‌ای: دامنه این توابع برابر با $\mathbb{R}$ است.

مثال ۷:

$f(x) = x^{2} - 5x + 6$

$f(x) = x + 1$

$f(x) = 2$

$f(x) = x^{3} + 4x + 10$

$y = ax^{n \in \mathbb{N}} + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \quad D_f : \mathbb{R}$

$D_f : \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ همه چیز را می‌گیرد.

ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، xهایی که مخرج را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند. مخرج = ۰ بذار، ریشه‌های مخرج را حذف کن.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{x \mid h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

صورت و مخرج برابر پس کسر همیشه برابر یک است.

تابع ثابت یک است که در ریشه مخرج $x=1$ تعریف نشده است.

$$1)\ f(x) = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$y = \frac{x-1}{x-1} = 1$

$$2)\ f(x) = \frac{x+5}{x^{2}-1} \Rightarrow x^{2} - 1 = 0 \Rightarrow x^{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$3)\ f(x) = \frac{1}{x^{2} + 4x - 5} \Rightarrow x^{2} + 4x - 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x = 1,\ x = -5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$$

$$4)\ f(x) = \frac{1}{x^{2}+1} \Rightarrow x^{2} + 1 = 0 \Rightarrow x^{2} = -1 \text{ غ.ق.ق} \Rightarrow \text{مخرج ریشه نداره} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

هیچ جا تعریف نشده نداشت.

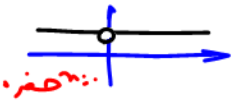
$D_f : (-\infty, +\infty)$

زنگوله

تابع کسری در ریشه مخرج: ① مجانب قائم ② حفره ③ جهش

$y=\frac{|x|}{x}\begin{cases} x>0: & y=\frac{x}{x}=1 \\ x<0: & y=\frac{-x}{x}=-1\end{cases}$ جهش

$y=\frac{x}{x}$ حفره



$y=\frac{1}{x}$

$[-2,3]=$

دامنه همه‌ی سه تابع بالا $D_f:\mathbb{R}-\{0\}$ است.

۵) $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta<0$ مخرج ریشه ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۶) $f(x)=\frac{x+1}{[2x-3]}$ $\quad [2x]-3=0 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow 3\le 2x<4 \Rightarrow \frac{3}{2}\le x<2$

$[x+k]=[x]+k \quad k\in Z$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[\frac{3}{2},2)=(-\infty,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$

۷) $f(x)=\frac{1}{[x]-\frac{1}{2}} \Rightarrow [x]-\frac{1}{2}=0 \to [x]=\frac{1}{2}=0/5$ ریشه ندارد، $x\in\emptyset$ $\quad D_f:\mathbb{R}$

خروجی براکت‌ها اعداد صحیح است. براکت [ ] Z گویند.

قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن عبارت را ندارید!

۸) $g(x)=\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\frac{3x}{x-2}}$ $\qquad D_g=\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

$f(x)=\frac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-4}}$ $\quad D_f:\mathbb{R}-\{2,3,4\}$

$\mathbb{R}-(a,b)=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$

$\mathbb{R}-(a,b]=(-\infty,a]\cup(b,+\infty)$

$\mathbb{R}-[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$

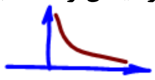
$\mathbb{R}-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)}$ $\qquad D_f=\{x\,|\,g(x)\ge 0\}$

اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم:

۹) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$



تابع ۹ در نمونه اول است.

مهم ۱۰) $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$

$9\ge x^2 \to 3\ge |x|$

۱) $9-x^2\ge 0 \Rightarrow -3\le x\le 3$

۲) $x^2-1>0 \Rightarrow x<-1$ یا $x>1$

$x^2>1 \to |x|>1$

$\Rightarrow (1),(2) \xrightarrow{\cap} D_f=[-3,-1)\cup(1,3]$

نکته: $|u|<a \xrightarrow{a>0} -a<u<a$

$|u|>a \xrightarrow{a>0} u<-a$ یا $u>a$

۱۱) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+4}} \Rightarrow \frac{x-3}{x+4}\ge 0$

x		-4		3	
$\frac{x-3}{x+4}\ge 0$	+	تن	−	۰	+

$x\in(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$

د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می‌گیریم:

$f(x)=\sqrt[2k+1]{g(x)}$ $\qquad D_f=D_g$

$\sqrt[2k+1]{}$ بی‌خیال شو!

۱۲) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{5}{x^2+x-12}}$ $\quad D_f:\mathbb{R}-\{3,-4\}$

۱۳) $f(x)=\sqrt[3]{5x^2-7} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۱۴) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

۱۵) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad D_f: \mathbb{R}-\{x=0\}$

هـ) توابع لگاریتمی: برای تعیین توابع لگاریتمی باید سه شرط زیر را در نظر بگیریم:

$f(x)=\log_{h(x)}^{g(x)} \qquad D_f=\{x \mid g(x)>0 , h(x)>0 , h(x)\neq 1\}$

بعدا بررسی می‌دیم.

۱۶) $f(x)=\log_{-x+4}^{x-1}$

۱۷) $f(x)=\log^{(x-5)^2}$

و) توابع مثلثاتی: در توابع شامل $\sin$ و $\cos$، فقط عبارت جلوی آن‌ها را تعیین دامنه کرده و $\sin$ و $\cos$ را نادیده می‌گیریم:

$f(x)=\sin g(x)$ و $f(x)=\cos g(x) \rightarrow D_f=D_g$

بعدا بررسی درم.

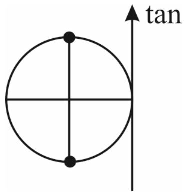
مثال ۸:

۱) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6}) \qquad D_f=R$

۲) $g(x)=\cos\frac{1}{x} \qquad D_g=R-\{0\}$

در تعیین دامنه توابع $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ وضعیت کمی فرق می‌کند چون $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ است.

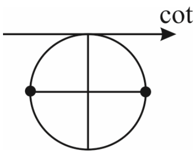
برای دامنه $\tan\alpha$ باید مخرج کسر یعنی $\cos\alpha$ صفر نباشد، پس:



$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \ , \ \cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\tan u \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x \mid u=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

برای $\cot\alpha$ هم $\sin\alpha$ نباید صفر باشد x، پس:



$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x} \ , \ \sin x\neq 0 \Rightarrow x\neq k\pi$

$f(x)=\cot u \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x \mid u=k\pi\}$

۱۸) $f(x)=\tan 2x$

در تعیین دامنه توابع $f(x)=[g(x)] , f(x)=|g(x)|$ قدرمطلق و براکت را نادیده می‌گیریم یعنی $D_f=D_g$ است:

۱۹) $f(x)=[\sqrt{x}] \Rightarrow D_f=x\geq 0$

۲۰) $f(x)=[\frac{1}{x}] \Rightarrow D_f=R-\{0\}$

دامنه: IR به جز ریشه‌های مخرج

۲۱) $f(x)=\frac{1}{[x]} \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0\leq x<1 \Rightarrow D_f=R-[0,1)$

مخرج $=0$ ، ریشه‌های مخرج

$D_f:(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

۲۲) $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$

$9-x^2\geq 0 \rightarrow 9\geq x^2 \rightarrow 3\geq|x| \rightarrow -3\leq x\leq 3$

مخرج $=0$: $|x-1|=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$ ریشه مخرج

$D_f:[-3,3]-\{1\}$

دامنه کسرها $\mathbb{R}-\{$ریشه مخرج$\}$ است

تست ۹: اگر دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-2\}$ باشد، $b+a$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۴

حتما ۲- ریشه مخرج است. پس حتما مخرج به صورت زیر است:

$2(x+2)^2=2(x^2+4x+4)=2x^2+8x+8$ با مخرج تساوی کن $2x^2+ax+b$ $\Big\} \to a=8 \quad b=8 \quad a+b=16$

تست ۱۰: دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ چند عضو دارد؟ می‌دانیم ≥ 0.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

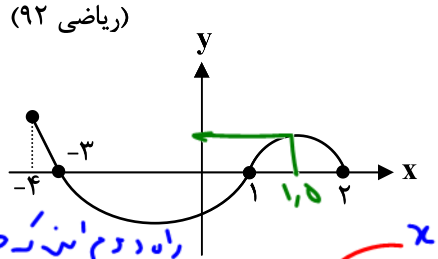
$-x^2(x^2-4)^2\geq 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } (-1)} x^2(x^2-4)^2\leq 0$ $\begin{cases} x^2(x^2-4)^2<0 & \text{امکان ندارد} \\ x^2(x^2-4)=0 \to x=0,\pm 2 \end{cases}$

$D_f:\{0,\pm 2\}$ ۳ عضو

تست ۱۱: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $[0,2]$
۲) $[-3,2]$
۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$
۴) $[-3,0]\cup[1,2]$

می‌دانیم که باید $xf(x)\geq 0$



راه دوم: بهترین جای x و $f(x)$ همان شکل را تعویض کنیم

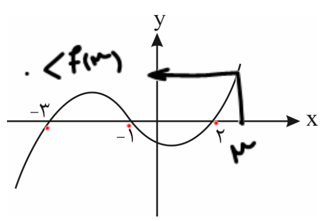
$xf(x)\geq 0$ → $x=0$ ، $x=-3,1,2$

x	-4	-3		0		1		2
$xf(x)$			$-$		$+$		$-$	$+$

نوجه: اگر شکل f بالای محور xها (خط $y=0$) باشد $+$ و اگر زیر آن باشد $\ominus$ و اگر روی آن باشد صفر است.

تست ۱۲ : شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) $[-3,2]$
۲) $[-1,+\infty)$
۳) $(-\infty,-1]$
۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$



نقطه‌ی تنهای منفرد را به حساب نیاور $x=-1$

x	$-\infty$		-3		-1 (مضاعف)		2		3 (مثلا)	$+\infty$
$(x+1)f(x)\geq 0$		$+$		$-$		$-$		$+$		

$x=-1$ ، $x=-3,-1,2$

$x=-1$ هم در $(x+1)$ هم در f هست ریشه مضاعف

$D_f:(-\infty,-3]\cup\{-1\}\cup[2,+\infty)$

$D_f:\mathbb{R}-(-3,2)$

$D_f = \mathbb{R} \cap \left(D_{f_2} = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] - \{0\}\right) = D_{f_2}$ $\qquad D_{f_2}: \bigcirc \ge 0 \qquad D_{y_1}: \mathbb{R}$

با تعریف شده باشد

مثال ۱۳ : اگر عبارت $\sqrt[3]{2x - x^2} + \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟ D_f را بیابید (تجربی خارج ۹۶)

دامنه $\frac{+}{\div}$ دو یا چند تابع اشتراک دامنه هاست که در حالت تقسیم ریشه های مخرج هم حذف می شوند.

$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \ge 0 \longrightarrow \frac{2}{x^2} \ge \frac{9}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{x^2} \ge \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{عکس}} x^2 \le \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \le \frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f: [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] - \{0\}$ $\qquad x \ne 0$

V.I.P
مهم

تست ۱۴ : اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{1}{(4a-3)x^2 + 2ax + 1}$ شامل همهٔ اعداد حقیقی به غیر از یک عدد حقیقی باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

که مخرج یک ریشه بدهد

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مخرج باید اصلاً درجه یک باشد که یک ریشه دارد، لذا ضریب x^2 را صفر می کنیم: $4a - 3 = 0 \longrightarrow \boxed{a = \frac{3}{4}}$

یا مخرج درجه دو است ولی $\Delta = 0$ و یک ریشه دارد:

$\Delta = (2a)^2 - 4(4a-3)(1) = 0$

$4a^2 - 4(4a-3) = 0 \xrightarrow{\div 4} a^2 - 4a + 3 = 0 \longrightarrow \boxed{a = 1, 3}$

V.I.P
مهم

تست ۱۵ : اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{(a+2)x^2 + ax + b}$ به صورت $(-\infty, 3]$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۶ ۴) ۴

زیر رادیکال درجه یک هست ← تنها ریشه زیر رادیکال $= 3$

پس ضریب x^2 صفر هست: $a + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{a = -2}$

x		3	
$(a+2)x^2 + ax + b \ge 0$	$+$	0	$-$

$f(x) = \sqrt{-2x + b} = 0$

$-2(3) + b = 0 \longrightarrow \boxed{b = 6}$ $\qquad 3 =$

مقدار تابع:

در تابع $y = f(x)$ برای تعیین مقدار تابع در $x = a$ به‌جای x، a را قرار می‌دهیم. دقت کنید که a می‌تواند یک عدد یا متغیر باشد. اگر تابع چند ضابطه‌ای باشد، ابتدا با توجه به دامنه، ضابطه را انتخاب کرده سپس مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم.

تست ۱۶: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-x^2}$ ۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

$\frac{x^2}{x^2-1} - 2\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 \xrightarrow[x=2 \text{ تست}]{} \frac{4}{3} - 4 + 1 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=2$ برابر $-\frac{5}{3}$ شود گزینه ۳ است.

VIP تست ۱۷: اگر $f(x)+xf(-x)=x^{2}+1$، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟ می‌خوام توی شکم f برابر ۲ گردد لذا x را برابر ۲ می‌گذارم: ۲- هم حواست باشه زوجند کن

۱) -1 ۲) -2 ۳) 3 ۴) 4

$x=2 \rightarrow f(2)+2f(-2)=(2)^2+1=5$

$x=-2 \rightarrow f(-2)-2f(2)=(-2)^2+1=5$

$$\begin{cases} f(2)+2f(-2)=5 \\ f(-2)-2f(2)=5 \quad \times(-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(2)+\cancel{2f(-2)}=5 \\ \cancel{-2f(-2)}+4f(2)=-10 \end{cases}$$

$5f(2)=-5$

$f(2)=-1$

گزینه ۱

تست ۱۸: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & x>3 \\ 2x+3 & x\le 3 \end{cases}$، مقدار $f(f(5))+f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

$f(5) \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} 5-\sqrt{5+4=9}=5-3=2$

$f(2) \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} 2x+3=7$

$f(1) \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} 2(1)+3=5$

$f(f(5)=2)=f(2)=7$

$f(f(1)=5)=f(5)=2$

جمع ۹

گزینه ۴

تست ۱۹: اگر $f(x)=x^{3}-6x^{2}+12x+5$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt[3]{3}+2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $(\sqrt[3]{3}+1)^{3}-1$ ۳) ۵ ۴) ۱۶

اینو بشناس: مکعب ۲ جمله $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$

$f(x)=(x^3-6x^2+12x-8)+13=(x-2)^3+13$

$f(x)=(x-2)^3+13$

$f(\sqrt[3]{3}+2)=(\sqrt[3]{3}+\cancel{2}-\cancel{2})^3+13=3+13=16$

گزینه ۴

تست ۲۰: اگر $f(x)=(x+x^{-1})^{2}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{2}$

$f(x)=(x+\frac{1}{x})^2=(\sqrt{2}-\cancel{1}+\sqrt{2}+\cancel{1})^2=(2\sqrt{2})^2=4(2)=8$

$x=\sqrt{2}-1$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

هر وقت بخواهیم از روی تابعِ f(یه عبارتِ xدار) ضابطه‌ی $f(x)$ رو پیدا کنیم، کافیه توی پرانتز رو t بگیریم و سپس x رو تنها کنیم و هرجا سمت راستِ مساوی x دیدیم مقدارش رو برحسب t جای‌گذاری کنیم و آخرش هم $t \to x$.

تست ۲۱: اگر $f(2x-3)=4x^{2}-14x+13$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $x^{2}-x+3$ ۲) $x^{2}-2x-1$ ۳) $x^{2}-2x+1$ ۴) $x^{2}-x+1$

$2x-3=t \rightarrow x=\frac{t+3}{2}$ $\quad f(2x-3=t)=4(\frac{t+3}{2})^2-14(\frac{t+3}{2})+13$

$f(t)=(t+3)^2-7(t+3)+13 \rightarrow f(x)=(x+3)^2-7(x+3)+13=x^2-x+1$ گزینه ۴

$x=0 \rightarrow f(2\cancel{x}-3)=\cancel{4x^2}-\cancel{14x}+13 \rightarrow f(-3)=13$: روش دوم: x برابر صفر بگذار طرف راست برابر ۱۳ است: باید در گزینه‌ها ۳- بگذاری ۱۳ بشه: فقط ۴

گزینه ① $f(0)=3$ اولی درسته که اگه $x=0$ بدی ۳ بگیری

دلیل ۲: $x=2$ ←

ولی خروج را صفر نکنه یعنی $x\neq -1$

تست ۲۲: اگر $f(\frac{x-2}{x+1})=x+1$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{1-x}$ ۲) $\frac{3}{x-1}$ ۳) $\frac{1-x}{3}$ ۴) $\frac{x-1}{3}$

پاسخ: توی پرانتز رو t می‌گیریم. $\frac{x-2}{x+1}=t$

پس $f(t)=x+1$ حالا باید x رو تنها کنیم:

$$x-2=tx+t\Rightarrow tx-x=-t-2\Rightarrow x(t-1)=-t-2\Rightarrow x=\frac{-t-2}{t-1}\quad (*)$$

حالا سمت راست هرجا x دیدیم $(*)$ رو می‌ذاریم:

$$f(t)=\frac{-t-2}{t-1}+1\xrightarrow{t\to x}f(x)=\frac{-x-2}{x-1}+1=\frac{-x-2+x-1}{x-1}=\frac{-3}{x-1}=\frac{3}{1-x}$$

بعضی وقت‌ها هم نیازی به t نیست فقط کافیه از اتحادها استفاده کنیم:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$x-\frac{1}{x}=t \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2+\frac{1}{x^2}-2\cancel{x}(\frac{1}{\cancel{x}})=t^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$

۲ تا مثال خوب:

۱) $f(\overset{t}{x-\frac{1}{x}})=x^2+\frac{1}{x^2}-4$, $f(x)=?$

$f(x-\frac{1}{x}=t)=\boxed{x^2+\frac{1}{x^2}}-4=t^2+2-4=t^2-2$

$f(t)=t^2-2$

$f(x)=x^2-2$

پاسخ:

$$f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2+2x\frac{1}{x}-4=(x-\frac{1}{x})^2+2-4=(x-\frac{1}{x})^2-2$$

حالا $x-\frac{1}{x}=t$ پس:

$$f(t)=t^2-2\xrightarrow{t\to x}f(x)=x^2-2$$

واسه حلّش از اتحاد $\boxed{a^2+b^2=(a-b)^2+2ab}$ استفاده کردیم.

۲) $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}-4$

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2x\cdot\frac{1}{x}-4=(x+\frac{1}{x})^2-2-4=(x+\frac{1}{x})^2-6$$

حالا $x+\frac{1}{x}=t$ پس:

$$f(t)=t^2-6\xrightarrow{t\to x}f(x)=x^2-6$$

واسه حلّش از اتحاد $\boxed{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$ استفاده کردیم.

$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$

$f(2)=1+1=2$

به طرفین: $x=1$

تست ۲۳: اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2+3x ۲) x^3-3x ✓ ۳) $(x-1)^3$ ۴) $(x+1)^3$

تنها گزینه‌ای که ۲ بگیره ۲ میگه گزینه ۲ هست.

پاسخ: باید ببینیم f با ورودی‌های خود چه کرده است. یعنی دقیقاً بلایی که به سر $x+\frac{1}{x}$ اومده چیه؟

$$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\cdot\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

$f(x+\frac{1}{x}=t)=x^3+\frac{1}{x^3}$

$x+\frac{1}{x}=t \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x^3+3x^2(\frac{1}{x})+3x(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^3}=t^3$

$x^3+\frac{1}{x^3}+3x+\frac{3}{x}=t^3$

$x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x}=t)=t^3$

$x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$

الان اگر $x+\frac{1}{x}=t$ بگیریم: $f(t)=t^3-3t$

پس $t \to x$: $f(x)=x^3-3x$

$f(x+\frac{1}{x}=t)=x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t \longrightarrow f(x)=x^3-3x$

«تساوی دو تابع»

شعار: دامنه‌ها ساوی، ضابطه‌ها ساوی

دو تابع f و g مساوی هستند هر گاه:

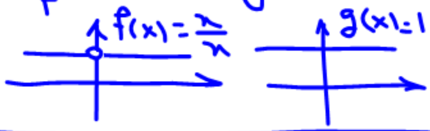
الف) دامنه‌ی f و g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g) داشته باشیم، $f(x)=g(x)$ (ضابطه‌ها برابر باشند.)

مثال

تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ با $g(x)=1$ برابر نیست زیرا دامنه برابر ندارند

$D_f: \mathbb{R}-\{0\} \neq D_g: \mathbb{R}$



تست ۲۴: به ازای کدام مقدار k، دو تابع $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{4x^2-1}{2x+1}, & x\neq -\frac{1}{2}\\ 1-k, & x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ برابرند؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) صفر ۴) -1

چون برابرند اگر هر دو $x=-\frac{1}{2}$ بگیرند باید خروجی برابر بدهند:

$f(-\frac{1}{2})=2(x=-\frac{1}{2})-1=-2$ ؛ $g(-\frac{1}{2})=1-k \longrightarrow k=1+2=3$

مثال ۲۵: تساوی تابع‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\begin{cases}f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\geq 0\\ g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\end{cases}$

x		-1		1	
	$+$	ت.ن	$-$	0	$+$

$D_f: (-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

$\sqrt{x-1}\geq 0 \rightsquigarrow x\geq 1$

$\sqrt{x+1}>0 \rightsquigarrow x>-1$

$D_g: [1,+\infty)\neq D_f$ برابر نیستند

ب) $\begin{cases}f(x)=\sqrt{1-x^2}\\ g(x)=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\end{cases}$

$1-x^2\geq 0$

$(1-x)(1+x)$

x		-1		1	
	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_f\ [-1,1]$

$\sqrt{(1-x)(1+x)}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$ ۲ تابع برابرند

$1-x\geq 0$ و $1+x\geq 0$

$(1\geq x)\cap(x\geq -1)=[-1,1]=D_g=D_f$

$y=\sqrt{1-a^2}$ نیم دایره به شعاع a

پ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}-1 \\ g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} \end{cases}$

$x \geq 0 \quad D_f\,[0,+\infty)$

$\sqrt{x}+1=0 \quad \sqrt{x}=-1$ جواب ندارد. $x\geq 0$ $\quad D_g:[0,+\infty)=D_f$

$g(x)=\dfrac{(x-1)}{\sqrt{x}+1}\,\dfrac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{x-1}}=\sqrt{x}-1=f(x)$ تابع برابرند.

ت) $\begin{cases} f(x)=-\sqrt{(1-x)^3} \geq 0 \\ g(x)=(x-1)\sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases}$

$1-x\geq 0 \quad 1\geq x \quad D_f(-\infty,1]$

$1\geq x \quad D_g:(-\infty,1]=D_f$

برابرند

$f(x)=\ominus\sqrt{(1-x)^3=(1-x)^2(1-x)}=\ominus|1-x|\sqrt{1-x}=-(1-x)\sqrt{1-x}=(x-1)\sqrt{1-x}=g(x)$

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\qquad$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)$ $\qquad$ $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

دامنه‌ی توابع $f\pm g$ و $f\cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنه‌ی $\dfrac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به‌جز نقاطی که $g(x)=0$.

اگر توابع f و g به‌صورت زوج‌های مرتب مطرح شوند، مثلاً $f=\{(a,b)\,,\,(1,2)\}$ و $g=\{(a,c)\,,\,(2,1)\}$، منظور از $f+g$ آن است که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی از f و g را که دارای مؤلفه‌های اوّل یکی هستند (اشتراک دامنه‌ها)، با هم جمع کنیم. یعنی:

$f+g=\{(a\,,\,b+c)\}$

و به همین ترتیب $f-g$، $f\cdot g$ و $\dfrac{f}{g}$ عبارت است از:

$$f-g=\{(a\,,\,b-c)\}\quad,\quad f\cdot g=\{(a\,,\,b\times c)\}\quad,\quad \frac{f}{g}=\left\{(a\,,\,\frac{b}{c})\right\}\,,\,c\neq 0$$

حواستون باشه که دو زوج مرتب $(1,2)$ و $(2,1)$ در f و g، چون مؤلفه‌های اوّل یکسان ندارن در $f\pm g$ و $f\cdot g$ و $\dfrac{f}{g}$ به بازی گرفته نمی‌شن!

تذکر: $(kf)(x)=kf(x)$ و $D_{kf}=D_f$ و منظور از $(kf)(x)$ آن است که اعضای برد f در k ضرب شوند. مثلاً:

$f=\{(a,b)\,,\,(1,2)\}\ \Rightarrow\ 3f=\{(a,3b)\,,\,(1,6)\}$

تست ۲۶: اگر توابع f و g به‌صورت $f=\{(2,5)\}$ و $g=\{(2,7)\}$ تعریف شده باشند، آن‌گاه تابع $f\cdot g$ برابر است با:

۱) $\{(10,14)\}$ $\quad$ ۲) $\{(4,35)\}$ $\quad$ ۳) $\{(4,12)\}$ $\quad$ ۴) $\{(2,35)\}$

تست ۲۷: اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$، مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

تست ۲۸: اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\le 0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x & x\ge -2 \\ x-2 & x<-2 \end{cases}$، حاصل $f+2g$ به ازای $x=f(0)$ چقدر است؟

۱) 2 ۲) -4 ۳) -6 ۴) 3

تست ۲۹: اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}}$، دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

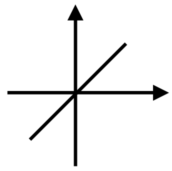
۱) $(-3\,,+\infty)-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $(-3\,,+\infty)$ ۴) $(-3\,,+\infty)-\{0\}$

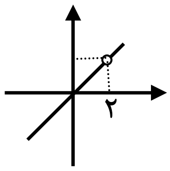
تست ۳۰: اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ و $g=\{(1,5),(2,6),(3,0)\}$ باشد، آن‌گاه تابع $\dfrac{2f}{g}$ کدام است؟

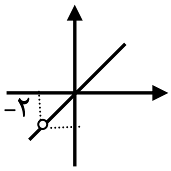
۱) $\varnothing$ ۲) $\left\{(1,\frac{4}{5}),(3,1)\right\}$

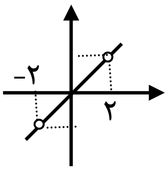
۳) $\left\{(1,\frac{4}{5}),(2,\frac{1}{2})\right\}$ ۴) $\left\{(2,1),(1,\frac{4}{5})\right\}$

تست ۳۱: اگر $f(x)=x^{۳}-۴x$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴}$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f\times g$ چگونه است؟

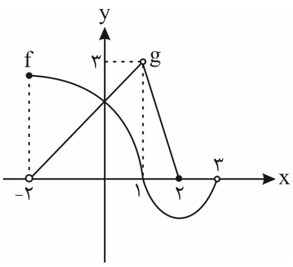
۱) 

۲) 

۳) 

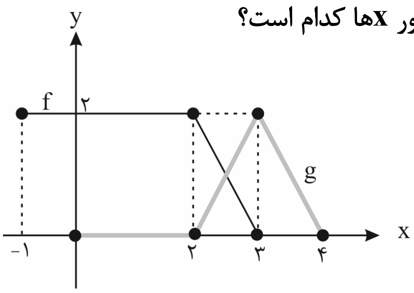
۴) 

تست ۳۲: نمودار توابع f و g مطابق شکل مقابل است. دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f-g}$ کدام است؟



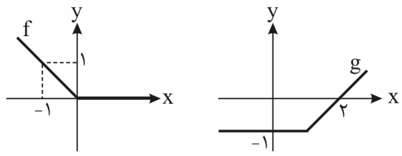
۱) $(-۲,۲]-\{۰,۱\}$
۲) $(-۲,۲)-\{۱\}$
۳) $(-۲,۳)-\{۰,۱\}$
۴) $(-۲,۳)-\{۱\}$

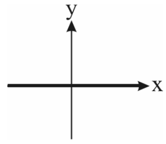
تست ۳۳: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $f+g$ و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۶
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۱۸

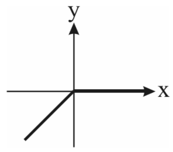
تست ۳۴: نمودار دو تابع $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ به‌صورت مقابل است. کدام موارد زیر نادرست است؟



الف)  نمودار $f\cdot g$ است.

ب) $\frac{f}{g}(۲)=۲$

ج) $(f+g)(-۱)=۰$

د)  نمودار $f\cdot g$ است.

۱) ج و ب ۲) الف و ب و د ۳) الف و ب ۴) همه‌ی موارد

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ الف) به وضوح نادرست است به ازای $x<۰$، نه f صفر است و نه g. پس نمی‌تواند $f\cdot g=۰$ باشد.

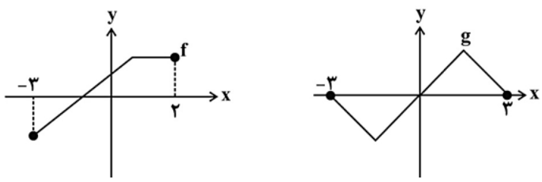
ب) $\frac{f}{g}$ در ۲ تعریف نمی‌شود، زیرا $g(۲)=۰$. ببینید: تعریف نشده $=\frac{f(۲)}{g(۲)}=(\frac{f}{g})(۲)$. پس این قسمت نیز نادرست است.

ج) $f(-۱)=۱$ و $g(-۱)=-۱$ است و در نتیجه: $(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=۰$. یعنی این قسمت درست است.

د) این قسمت هم درست است. ببینید:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \quad\Rightarrow\quad f(x)=۰ \quad\Rightarrow\quad (f\cdot g)(x)=۰ \\ x<۰ \quad\Rightarrow\quad g(x)=-۱ \quad\Rightarrow\quad (f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)=-f(x) \end{cases}$$

تست ۳۵: با توجه به نمودار تابع‌های $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$، دامنهٔ تابع $\frac{۲f^۲}{g}$ کدام است؟



۱) $(۰,۳)$

۲) $[۰,۳)$

۳) $[-۳,۲]$

۴) $(-۳,۰)\cup(۰,۲]$

تست ۳۶: توابع $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ و $g(x)=\frac{x^۲+۱}{x}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-۱\}$ ۴) $\mathbb{R}$

تست ۳۷: توابع $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۲,-۱),(۴,۴),(-۱,۵),(۷,۱۳)\}$ مفروض‌اند، بیشترین مقدار تابع $۲f+۳g$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۳

تست ۳۸: اگر $f=\{(۴,۳),(۳,۱),(۵,۴)\}$ و $۲f-g=\{(۳,۶),(۴,۴)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $\{(۳,-\frac{۱}{۴}),(۴,\frac{۳}{۲})\}$ ۲) $\{(۳,-\frac{۱}{۴})\}$

۳) $\{(۳,\frac{۳}{۸}),(۴,\frac{۳}{۲})\}$ ۴) $\{(۴,\frac{۳}{۲})\}$

ترکیب دو تابع به صورت ضابطه‌ای

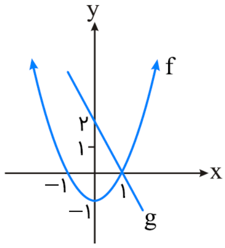
ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم و به صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ تعریف می‌کنیم و برای تعیین این تابع باید در تابع $f(x)$ به جای x، $g(x)$ را قرار بدهیم. همچنین برای تعیین تابع $(gof)(x)=g(f(x))$ باید در تابع $g(x)$ به جای x، $f(x)$ را قرار بدهیم.

$$x\to f\to g\Rightarrow g(f(x))$$
$$x\to g\to f\Rightarrow f(g(x))$$

تست ۳۹: اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-۱$ ۴) $x+۱$

تست ۴۰: اگر نمودار f و g به صورت زیر باشد، حاصل $(f+(gof))(-1)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۱-

۴) ۲-

تست ۴۱: اگر $f(x)=x^{2}+x-2$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ ، مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $(-5,1)$ ۲) $(-1,5)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,5)$

تست ۴۲: اگر $f(x)=2-|x-2|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) x ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $2-f(x)$

تست ۴۳: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

ورودی $\rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} \rightarrow$ خروجی

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۴۴ : اگر $g(x)=x^2+2x$ و $f(x)=x^2-1$ باشند، مجموع مکعبات جواب‌های حقیقی معادلهٔ $f(g(x))=8$ کدام‌اند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶- ۳) ۲۶- ۴) ۱۶

پاسخ:

یادت باشه: برای حل معادلهٔ $f(g(x))=m$ ابتدا معادلهٔ $f(x)=m$ را حل می‌کنیم و جواب‌هایش را می‌یابیم و سپس $g(x)$ را برابر جواب‌های به‌دست آمده قرار می‌دهیم و معادلهٔ به‌دست آمده را حل می‌کنیم. پس در این‌جا داریم:

$$f(x)=8 \Rightarrow x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

حالا $g(x)$ را برابر جواب‌های معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} g(x)=3 \Rightarrow x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \xrightarrow[P=-3]{S=-2} \text{مجموع مکعبات}=S^3-3PS \\ =(-2)^3-3(-3)(-2)=-8-18=-26 \\ \text{و} \\ g(x)=-3 \Rightarrow x^2+2x=-3 \Rightarrow x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

تذکر: اگه تابع fog و تابع درونی یعنی g رو داشته باشیم و تابع بیرونی یعنی f را بخواهیم باید $g(x)$ رو برابر t قرار بدیم. بعدش x رو تنها کنیم و برحسب t محاسبه کنیم و توی $f(g(x))$ که الان تبدیل به $f(t)$ شده هرجا x دیدیم، معادل آن را برحسب t می‌نویسیم.

مثلاً اگر $f(g(x))=6x+7$ و $g(x)=3x+5$ باشد:

$$g(x)=t \Rightarrow 3x+5=t \Rightarrow 3x=t-5 \Rightarrow x=\frac{t-5}{3}$$

$$f(g(x))=6x+7 \xrightarrow[x=\frac{t-5}{3}]{g(x)=t} f(t)=6\left(\frac{t-5}{3}\right)+7=2(t-5)+7=2t-3 \xrightarrow{\text{همان } f(x) \text{ است } f(t)} f(x)=2x-3$$

تست ۴۵: اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟

(ریاضی ۹۲ و مشابه تجربی خارج ۹۵ و ریاضی ۹۳)

۱) $2x^2-7x+3$ ۲) $2x^2-3x+7$ ۳) $4x^2-2x+13$ ۴) $4x^2-4x+11$

تست ۴۶: اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+6x+5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $2x^2+3x+1$ ۲) $2x^2-2x+3$ ۳) $2x^2-x+4$ ۴) $2x^2+x+3$

تست ۴۷: اگر $g(x)=2x-1$ و $f(g(x))=\frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) ۴-　　۲) ۲-　　۳) ۲　　۴) ۴

تست ۴۸: تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه، نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$　　۲) ۹ و $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{4}$ و ۴　　۴) ۹ و ۴

تست ۴۹: اگر $f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4$ و $g(x)=x-\frac{1}{x}$ ، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2-4　　۲) x^2-2　　۳) x^2　　۴) x^2+2

تذکر: چنانچه تابع fog و تابع بیرونی f را داشته باشیم و تابع درونی g را بخواهیم، ابتدا به جای xهای تابع f، $g(x)$ قرار می‌دهیم و تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌یابیم. از آنجا که تابع fog را هم داریم، با مقایسه‌ی این دو ضابطه، تابع g را بدست می‌آوریم.

تست ۵۰: اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $x \to f \to g \to 2x$ و $g(x)=3x+4$ باشند، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

تست ۵۱ : اگر $f(x) = x^{2} - x - 2$ و $f(g(x)) = x^{2} + x - 2$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $x^{2} - 1$　　۲) $x^{2} + 1$　　۳) $x^{2} - 2x$　　۴) $x^{2} + 2x$

دامنه‌ی تابع مرکب

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب آن‌ها یعنی $f(g(x))$ به شرطی تشکیل می‌شود که اولاً x اجازه داشته باشد به عنوان دامنه وارد g بشود ($x \in D_g$) و ثانیاً، $g(x)$ هم اجازه داشته باشد تا به عنوان دامنه وارد $f(x)$ بشود ($g(x) \in D_f$) و خواهیم داشت:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

برای ترکیب $g(f(x))$ نیز داریم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

اگر نخواستید از راه تعریف، دامنه را بدست آورید، ضابطه‌ی fog یا gof را نوشته ولی به هیچ عنوان، آن را ساده نمی‌کنیم و از روی ضابطه، دامنه را بدست می‌آوریم.

مثال ۵۲: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$، دامنه و ضابطه‌ی fog را به دست آورید.

تست ۵۳: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟

۱) $[0,1]$　　۲) $[0,2]$　　۳) $[1,2]$　　۴) $[1,3]$

تست ۵۴: اگر $g(x) = 1 - 2x$ و $f(x) = ax - 1$، به ازای کدام مقدار a دو تابع f و fog روی محور x متقاطع‌اند؟

۱) ۳-　　۲) ۲-　　۳) ۲　　۴) ۳

تست ۵۵: اگر $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $[-۱,۱)$

تست ۵۶: اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

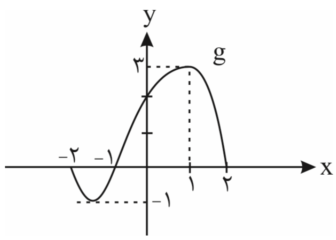
تست ۵۷: اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

تست ۵۸: اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $[۰,۱)$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$

تست ۵۹: اگر $f(x) = ۴x^{۲} - ۲$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع gof کدام است؟



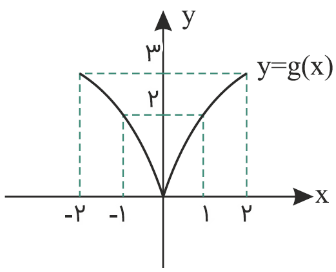
۱) $[-۱,۱]$

۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۵}}{۲}]$

۳) $[-\frac{\sqrt{۵}}{۲},-\frac{۱}{۲}]$

۴) $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$

تست ۶۰: اگر $D_f = [۰,۲]$ باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنهٔ fog کدام است؟



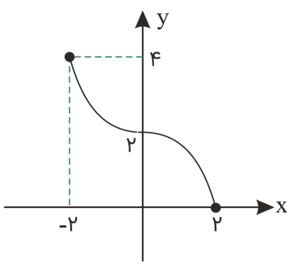
۱) $[-۲,۲]$

۲) $[-۱,۱]$

۳) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$

۴) $[۰,۲]$

تست ۶۱: اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع fof شامل چند عدد صحیح خواهد بود؟



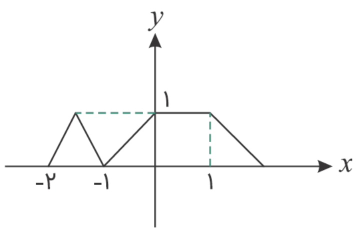
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

تست ۶۲: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $fof(x)$ کدام است؟



۱) $[۰,۱)$
۲) $[۰,۱)$
۳) $(۰,۱)$
۴) $\{۱\}$

قدرمطلق

تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ را تابع قدرمطلق می‌خوانند و آن را با نماد $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.

تذکر: $\sqrt{a^۲}=|a|$

قدری که توش مثبته خودش میاد بیرون. قدری که توش منفیه قرینه‌اش!

$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=$

$|۱-\sqrt{۲}|=$

$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|=$

$|\sin x-۱|=$

$|۱-\cos x|=$

تست ۶۳: حاصل $|\sqrt{۳}-۱|+|۱-\sqrt{۳}|+|۲-\sqrt{۳}|$ کدام است؟

۱) $۳-۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}-۳$ ۳) ۳ ۴) ۱

تست ۶۴: در کدام حالت تساوی $\frac{|a^۲|}{|b|}=-\frac{a^۲}{b}$ برقرار است؟

۱) $ab<۰$ ۲) $ab>۰$ ۳) $a<۰$ ۴) $b<۰$

تست ۶۵: با فرض $x^{۲}-۲x<۰$، حاصل عبارت $A=|x|+|x-۲|+|x-۴|$ کدام است؟

۱) $۳x-۶$ ۲) $-x+۶$ ۳) $-۳x+۶$ ۴) $x-۲$

پاسخ: نامعادله‌ی $x^{۲}-x<۰$ را تعیین‌علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$x^{۲}-۲x$		$+$	۰	$-$ (جواب)	۰	$+$	

$$x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

جواب نامعادله‌ی $۰<x<۲$ است. در این بازه داخل قدرمطلق اول، یعنی x مثبت است و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود، داخل قدرمطلق دوم، منفی است و قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود. در نهایت داخل قدرمطلق سوم منفی است و قرینه‌ی آن از قدرمطلق خارج می‌شود.

$$A=|x|+|x-۲|+|x-۴|=x-(x-۲)-(x-۴)=x-x+۲-x+۴=-x+۶$$

پس گزینه‌ی «۲» درست است.

ویژگی‌های تابع قدرمطلق:

۱) $|x|\geq ۰$

۲) $\sqrt{u^{۲}}=|u|$

۳) $|-x|=|x| \Rightarrow |a-b|=|b-a|$ یعنی داخل قدرمطلق را می‌توان در منفی ضرب نمود

۴)
$$\begin{cases} |u|=a \xrightarrow{a\geq ۰} u=\pm a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-۱|=۳ \Rightarrow x-۱=\pm ۳ \Rightarrow x=۴,-۲ \\ |u|\leq a \xrightarrow{a\geq ۰} -a\leq u\leq a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-۱|\leq ۳ \Rightarrow -۳\leq x-۱\leq ۳ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۴ \\ |u|\geq a \xrightarrow{a\geq ۰} u\geq a \text{ یا } u\leq -a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-۱|\geq ۳ \Rightarrow \begin{cases} x-۱\geq ۳ \Rightarrow x\geq ۴ \\ \text{یا} \\ x-۱\leq -۳ \Rightarrow x\leq -۲ \end{cases} \end{cases}$$

۵) $|x|\geq x \xrightarrow{\text{مثلاً}} y=\sqrt{|x|-x} \xrightarrow{\text{دامنه}} |x|-x\geq ۰ \Rightarrow |x|\geq x$ بدیهی $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۶) $|x|^{۲}=|x^{۲}|=x^{۲}$

۷) $|x+y|\leq |x|+|y|$ نامساوی مثلثی $\Rightarrow \begin{cases} |x+y|=|x|+|y| \Rightarrow xy\geq ۰ \text{ x و y هم‌علامت} \\ |x+y|<|x|+|y| \Rightarrow xy<۰ \text{ x و y مختلف‌العلامت} \end{cases}$

۸) $|xy|=|x||y| \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x^{۲}-۱|=|x-۱||x+۱|$

۹) $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$

مثال: $|\frac{x-۱}{x+۲}|<۱$

یادت باشه: برای حل نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u|<|v|$ می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق‌ها از بین بروند:

$$|x-1|<|x+2| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-1)^2<(x+2)^2 \Rightarrow x^2-2x+1<x^2+4x+4 \Rightarrow -6x<3 \Rightarrow x>\frac{-1}{2}$$

حل معادلات قدرمطلقی

۱) معادلات به فرم $|f(x)|=a$، $(a\geq 0)$: برای حل این معادله به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$|f(x)|=a \Rightarrow f(x)=\pm a$$

مثلاً $|x-3|=2$ به صورت $x-3=\pm 2$ حل می‌شود که یک‌بار $x=5$ و یک‌بار $x=1$ به دست می‌آید.

۲) معادلات به فرم $|f(x)|=|g(x)|$: حل این مدل از معادلات به صورت زیر است:

$$|f(x)|=|g(x)| \Rightarrow f(x)=\pm g(x)$$

مثلاً برای حل معادلهٔ $|2x-1|=|x|$ داریم:

$$|2x-1|=|x| \Rightarrow 2x-1=\pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=x \Rightarrow x=1 \\ 2x-1=-x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

۳) معادلات به فرم $|f(x)|=g(x)$: در حل این دسته از معادلات چون طرف چپ، یک عبارت نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی باید عبارت سمت راست هم، نامنفی باشد یعنی $g(x)\geq 0$. حالا با این شرط، جاب‌ها را به صورت زیر می‌یابیم:

$$|f(x)|=g(x) \Rightarrow f(x)=\pm g(x)$$

فقط xهایی قبول می‌شوند که $g(x)$ را منفی نکنند.

مثلاً برای حل معادلهٔ $|x-1|=-2x$ داریم:

$$|x-1|=-2x \Rightarrow x-1=\pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x-1=2x \Rightarrow x=-1 \\ x-1=-2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $x=\frac{1}{3}$ باشد سمت راست تساوی یعنی $-2x$، منفی می‌شود پس $x=\frac{1}{3}$ قبول نیست ولی اگر $x=-1$ باشد سمت راست یعنی $-2x$، منفی نمی‌شود پس $x=-1$ قبول است.

۴) معادلات به فرم $|f(x)|=f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x)\geq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-1|=x-1$ داریم:

$$|x-1|=x-1 \Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$

۵) معادلات به فرم $|f(x)|=-f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x)\leq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-2|=2-x$ داریم:

$$|x-2|=2-x \Rightarrow x-2\leq 0 \Rightarrow x\leq 2$$

۶) معادلات به فرم $|f(x)|+|g(x)|=0$: چون قدرمطلق یک عبارت همواره نامنفی است، از درسنامه معادلات گنگ فهمیدیم که جمع چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام از آن‌ها صفر باشد.

۷) اگر معادله با هیچ‌یک از ۶ حالت قبل تطابق نداشت، باید به کمک تعیین علامت جواب‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم. مثلاً معادلهٔ $|x|+|2x-2|=x-3$ با هیچ‌یک از ۶ مورد فوق حل نمی‌شود پس به کمک تعیین علامت حلش می‌کنیم.

برای این منظور ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم که می‌شود $x=0$ و $x=1$ و سپس x را یک‌بار کوچک‌تر از ریشهٔ کوچک، یک‌بار بین دو ریشه و یک‌بار بزرگ‌تر از ریشهٔ بزرگ‌تر قرار می‌دهیم. سپس جواب به‌دست آمده را به شرطی قبول می‌کنیم که در محدودهٔ تعیین‌شده قرار گرفته باشد.

$$x<0 \Rightarrow -x-(2x-2)=x-3 \Rightarrow -x-2x+2=x-3 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

$x=\frac{5}{4}$ در محدودهٔ $x<0$ قرار ندارد و اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{5}{4}$ قبول نمی‌شود.

$$0\le x<1 \Rightarrow x-(2x-2)=x-3 \Rightarrow x-2x+2=x-3 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{5}{2}$ قبول نمی‌شود.

$$x\ge 1 \Rightarrow x+2x-2=x-3 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{-1}{2}$ قبول نمی‌شود.

پس این معادله جواب ندارد.

تست‌ها

تست ۶۶: مجموعه جواب معادله‌ی $|x^3-9x|+x^3-9x=0$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۶۷: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(-x^2-6)(5-|2x-1|)\le 0$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-2,3)$ ۲) $[-2,3]$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $\mathbb{R}-[-2,3]$

تست ۶۸: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3|x|-|x-1|+x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{15}$ ۳) $-\frac{7}{15}$ ۴) $-\frac{4}{5}$

تست ۶۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2-2x<|x-2|$ به صورت کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,2)$

تست ۷۰: اگر رابطه‌ی $|x+y+z| \le |x|+|y|+|z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x ، y و z چگونه‌اند؟ (تجربی ۸۶)

۱) مساوی هم ۲) هم‌علامت ۳) مثبت ۴) منفی

تست ۷۱: اگر $|x+y| < |x|+|y|$، آن‌گاه حاصل $\sqrt{x^۶y^۲}$ کدام است؟

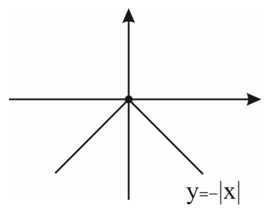
۱) $|x^۳|y$ ۲) $x^۳y$ ۳) $-x^۳y$ ۴) $x^۳|y|$

تست ۷۲ : اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|ax+b| > ۳$ به صورت $\mathbb{R}-[-۱,۲]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

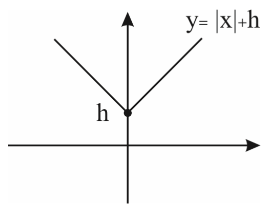
۱) ۱ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

نمودارهای قدرمطلقی

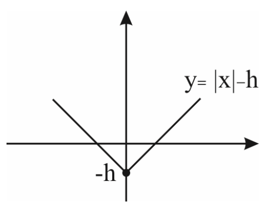
۱) رسم به کمک انتقال: این روش برای رسم تابع‌هایی به فرم $\pm|x\pm k|\pm h$ کاربرد دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



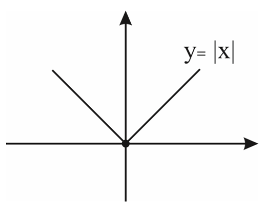
اگر $|x|$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم به $-|x|$ می‌رسیم.

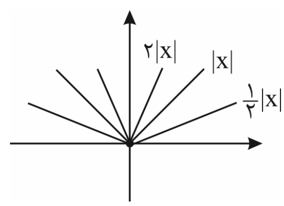


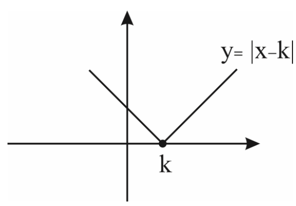
همان $|x|$ است که به اندازهٔ h بالا رفته است. $(h>۰)$



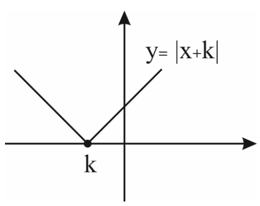
همان $|x|$ است که به اندازهٔ h پایین آمده است. $(h>۰)$







همان $|x|$ است که به اندازهٔ k به راست رفته است. $(k>۰)$



همان $|x|$ است که به اندازهٔ k به چپ رفته است. $(k>۰)$

رسم چند تابع قدرمطلقی:

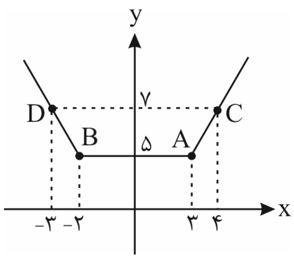
۲) رسم نمودارهای مجموع و تفاضل قدرمطلق و عبارات خطی:

وقتی چند قدرمطلق از درجه اول جمع یا تفریق شده بودند، از روش نقطه‌یابی برای رسم استفاده می‌کنیم. این روش برای رسم تابع‌هایی که به شکل $y = mx + n + |ax + b| + c$ بسیار کارآمد است. برای نقطه‌یابی کافی است ریشه‌های قدرمطلق را به تابع بدهیم و سپس یک عدد بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر و یک عدد قبل از ریشهٔ کوچک‌تر را نیز به جای xهای تابع قرار داده و نقاط به‌دست آمده را به هم وصل می‌کنیم.

مثلاً برای رسم $y = |x-3| + |x+2|$ داریم:

$$\underbrace{D\left|\begin{matrix}-3\\7\end{matrix}\right.}_{\text{قبل از ریشهٔ کوچک‌تر}} \qquad \underbrace{C\left|\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\right.}_{\text{بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر}} \qquad \underbrace{B\left|\begin{matrix}-2\\5\end{matrix}\right. \quad A\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.}_{\text{مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها}}$$

ضمناً یادتان باشد که در این مدل از توابع، نمودار در ریشه‌های داخل قدرمطلق دچار شکستگی می‌شود.



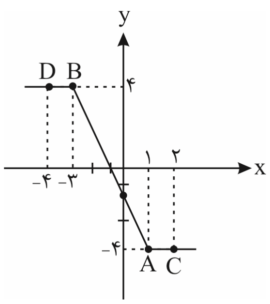
به $f(x) = |x-a| + |x-b|$ تابع گلدانی هم می‌گویند که در آن $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [|b-a|, +\infty)$ و نقاط شکستگی آن $A\left|\begin{matrix}a\\|b-a|\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}b\\|b-a|\end{matrix}\right.$ می‌باشند.

برای رسم $y = |x-1| - |x+3|$ هم داریم:

$$\underbrace{D\left|\begin{matrix}-4\\4\end{matrix}\right.}_{\text{قبل از ریشهٔ کوچک‌تر}} \qquad \underbrace{C\left|\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}\right.}_{\text{بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر}} \qquad \underbrace{B\left|\begin{matrix}-3\\4\end{matrix}\right. \quad A\left|\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right.}_{\text{مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها}}$$

توجه کنید که محل برخورد منحنی به محور yها با جایگذاری $x = 0$ به دست می‌آید که نقطهٔ سهمی است: $E\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$

اکنون این نقاط را به هم وصل می‌کنیم.



به $f(x) = |x-a| - |x-b|$ تابع سرسره‌ای هم گفته می‌شود که در آن $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-|b-a|, |b-a|]$ و نقاط شکستگی آن $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ می‌باشند.

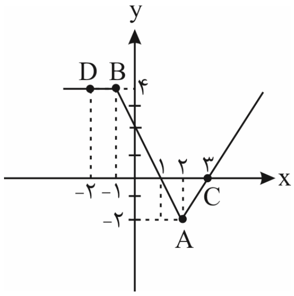
برای رسم $y = x-۱+|۲x-۴|-|x+۱|$ نیز داریم:

$A\Big|\begin{matrix}۲\\-۲\end{matrix}$ $B\Big|\begin{matrix}-۱\\۴\end{matrix}$ مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها

$C\Big|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}$ بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر

$D\Big|\begin{matrix}-۲\\۴\end{matrix}$ قبل از ریشهٔ کوچک‌تر

از مختصات نقطهٔ کمکی $E\Big|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}$ نیز استفاده می‌کنیم تا محل برخورد با محور yها به دست بیاید.



ویژگی‌هایش را ببینید:

۱- دامنه‌اش $\mathbb{R}$

۲- برد آن $[-۲,+\infty)$

۳- دارای دو ریشه

۴- از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.

پس به طور کلی برای فهمیدن کم‌ترین مقدار عبارت‌هایی مثل عبارات بالا کافی است مقدار تابع را به ازای ریشهٔ هر کدام از قدرمطلق‌ها پیدا کنیم و کم‌ترین مقدار به‌دست آمده را انتخاب کنیم.

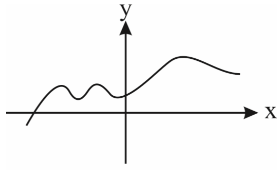
تست ۷۳ : کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=|۳x|+|x+۲|-x$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱

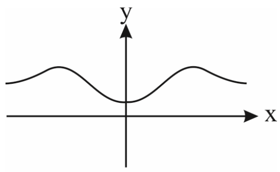
۳) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور طول‌ها را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

مثلاً اگر $f(x)=|x|-1$ و $g(x)=x^2-4$، $|f(x)|$ و $|g(x)|$ به صورت زیر رسم می‌شوند.

۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمتی را که سمت چپ محور yها (یعنی $x<0$) است، حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت سمت راست (یعنی $x>0$) را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.



f(x)

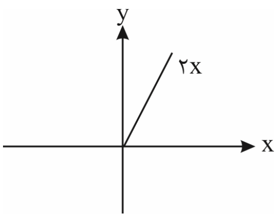


f(|x|)

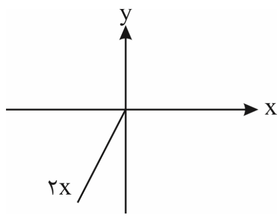
۵) رسم توابع شامل قدرمطلق در حالت کلی:

اگر به حالت‌های ۱ تا ۴ برخورد نکردید، برای رسم کافی است قبل و بعد از ریشهٔ داخل قدرمطلق را بررسی کرده و قدرمطلق را به کمک تعیین علامت حذف کنید و هر ضابطه را در بازهٔ خودش رسم کنید.

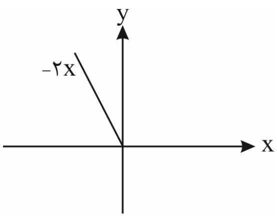
۱) $y=x+\overset{\overset{x=0}{\uparrow}}{|x|}=\begin{cases} x\geq 0 & x+x=2x \\ x<0 & x-x=0 \end{cases}$



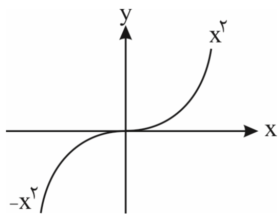
۲) $y=x-\overset{\overset{x=0}{\uparrow}}{|x|}=\begin{cases} x\geq 0 & x-x=0 \\ x<0 & x-(-x)=2x \end{cases}$



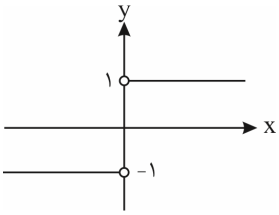
۳) $y=\overset{\overset{x=0}{\uparrow}}{|x|}-x=\begin{cases} x\geq 0 & x-x=0 \\ x<0 & x-x=-2x \end{cases}$



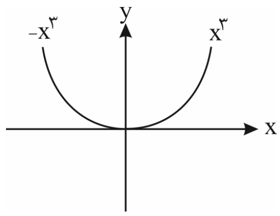
۴) $y=x\,\overset{\overset{x=0}{\uparrow}}{|x|}=\begin{cases} x\geq 0 & x(x)=x^2 \\ x<0 & x(-x)=-x^2 \end{cases}$



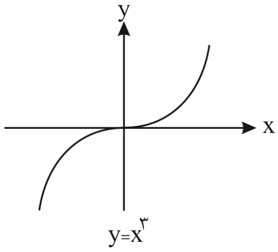
$$۵)\ y=\frac{x}{\underset{\substack{\downarrow \\ x=۰}}{|x|}} \text{ یا } \frac{\overset{\substack{x=۰ \\ \uparrow}}{|x|}}{x}=\begin{cases} x>۰ & \frac{x}{x}=۱ \\ x<۰ & -\frac{x}{x}=-۱ \end{cases}$$

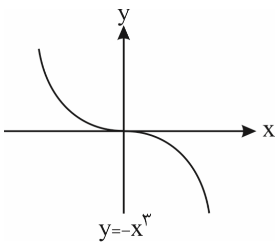


$$۶)\ y=x^۲\ \overset{\substack{x=۰ \\ \uparrow}}{|x|}=\begin{cases} x\geq ۰ & x^۲(x)=x^۳ \\ x<۰ & x^۲(-x)=-x^۳ \end{cases}$$



توضیحات: مثلاً برای مورد ۶، این‌طوری به فارسی می‌خوانیم: سمت راست مبدأ $(x\geq ۰)$ نمودار $x^۳$ را رسم کنید (و یا از نمودار $x^۳$ فقط سمت راست را انتخاب کنید) و سمت چپ مبدأ $(x<۰)$ نمودار $-x^۳$ را رسم کنید (و یا از نمودار $-x^۳$ فقط سمت چپ را انتخاب کنید):





تست ۷۴: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=۲-|x|$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

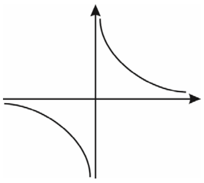
۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳

تست ۷۵: مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

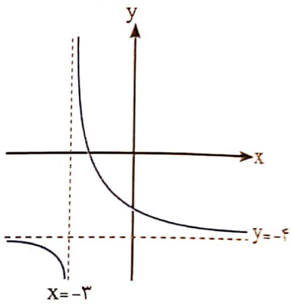
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

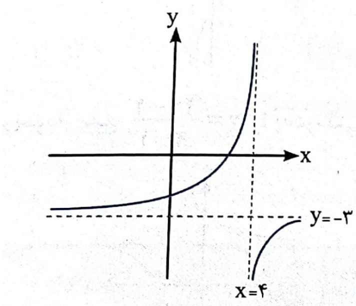
تابع گویا

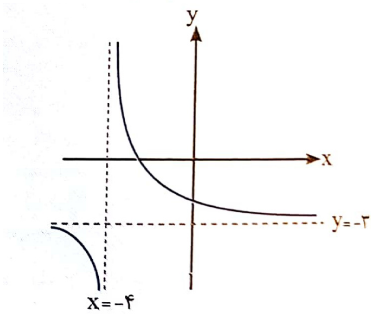
هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌های جبری باشند به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد.

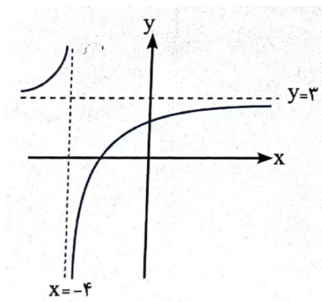
ساده‌ترین تابع گویا $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{0\}$ است که به صورت  می‌باشد. حال با توجه به این تابع، بقیه را با استفاده از انتقال رسم می‌کنیم.

تست ۷۶: نمودار $y=\frac{1}{x+4}-3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟

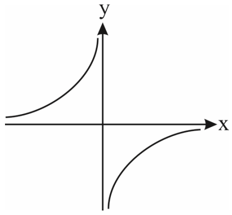
۱) 

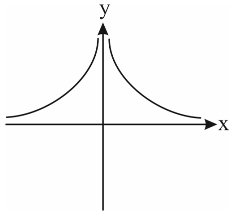
۲) 

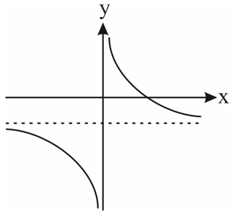
۳) 

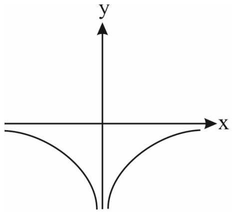
۴) 

تست ۷۷: در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

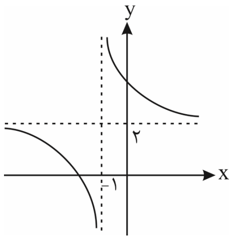
۱) 
$y=-\frac{۱}{x}$

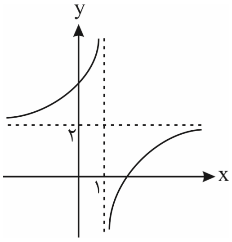
۲) 
$y=\frac{۱}{|x|}$

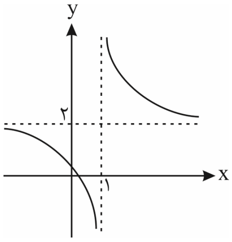
۳) 
$y=\frac{۱}{x+۱}$

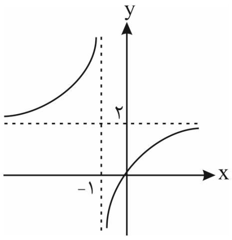
۴) 
$y=-\frac{۱}{|-x|}$

تست ۷۸: کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمودار تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ را به درستی نمایش می‌دهد؟

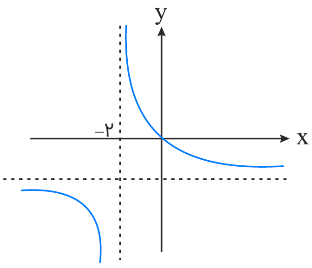
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۷۹: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{bx-۲}$ به صورت زیر باشد، $f(۱)$ کدام است؟



۱) -۱

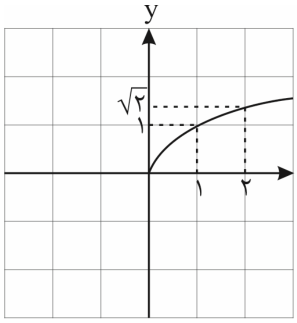
۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۳}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۳}$

تابع رادیکالی

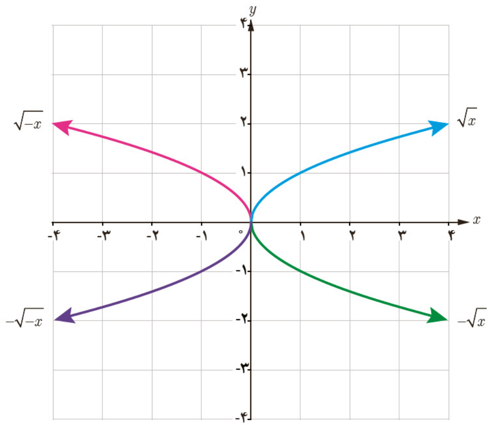
هر تابع به صورت $f(x)=\sqrt{p(x)}$ ($p(x)$ یک تابع از x است) را یک تابع رادیکالی (ریشه دوم) می‌نامیم. برای محاسبه دامنه‌ی این نوع توابع باید نامعادله‌ی $p(x)\geq ۰$ را حل کرد. به طور مثال به تابع زیر و نمودار آن توجه کنید:



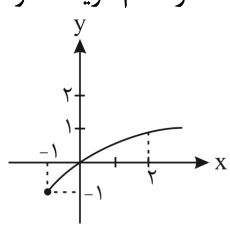
$$f(x)=\sqrt{x}$$

اکنون با استفاده از قوانین انتقال می‌توانیم توابع رادیکالی به صورت $k\sqrt{ax+b}$ را رسم کنیم.

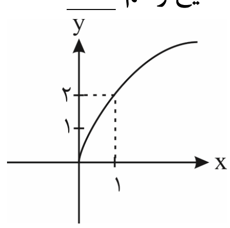
مثال ۸۰: نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.



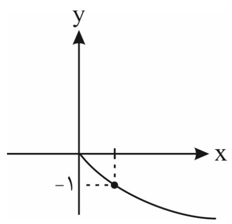
تست ۸۱: در کدام گزینه، نمودار تابع صحیح رسم نشده است؟

۱) 

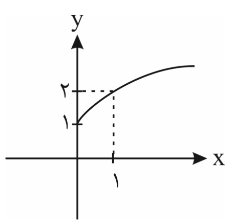
$y=\sqrt{x+۱}-۱$

۲) 

$y=۲\sqrt{x}$

۳) 

$y=\sqrt{x}-۱$

۴) 

$y=\sqrt{x}+۱$

تست ۸۲: با انتقال نمودار $f(x)=۱+\sqrt{x-۱}$ به نمودار $g(x)=۲+\sqrt{x+۱}$ رسیده‌ایم. مراحل انتقال به ترتیب کدام است؟

۱) دو واحد به چپ و یک واحد به بالا
۲) دو واحد به راست و یک واحد به بالا
۳) دو واحد به چپ و یک واحد به پایین
۴) دو واحد به راست و یک واحد به پایین

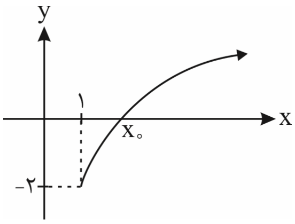
تست ۸۳: نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=\sqrt{x-۲}-۱$
۲) $y=-\sqrt{x-۲}-۱$
۳) $y=-\sqrt{x+۲}-۱$
۴) $y=\sqrt{x+۲}-۱$

تست ۸۴: دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۲x-۴}$ بازه‌ی $[a,+\infty)$ است، در این صورت دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\sqrt{۵-(a+۱)x}$ شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

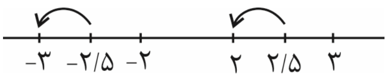
تست ۸۵: با توجه به نمودار تابع $y=-۲+\sqrt{x-۱}$، $x_۰$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳

شگردهای جزء صحیح

جزء صحیح هر عددی مانند x را به شکل $[x]$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر x عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خودش برابر است. مثلاً $[۲]=۲$ و اگر x عددی غیرصحیح باشد، اولین عدد صحیح قبل آن، برابر جزء صحیح x است. مـثلاً $[۲/۵]=۲$ و $[-۲/۵]=-۳$ می‌باشد.



خاصیت جزء صحیح

۱) خروجـی جـزء صـحیح همـواره یـک عـدد صـحیح اسـت، یعنـی بـرای هـر $x\in\mathbb{R}: [x]\in\mathbb{Z}$ مـثلاً $[۴]=۴$ و $[\pi=۳/۱۴]=۳$ و $[-۰/۶]=-۱$.

۲) اگر عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد می‌توانیم جزء صحیح را حذف می‌کنیم. یعنی برای هر $x\in\mathbb{Z}$ داریم: $[x]=x$.

۳) اعداد ثابت و عبـارت‌هـایی کـه مطمـئن هـستیم صـحیح هـستند مـی‌تـوانیم از جـزء صـحیح خـارج کـنیم یعنـی اگـر $k\in\mathbb{Z}$ باشـد $[x+k]=[x]+k$ است.

مثلاً $[x+۳]$ همان $[x]+۳$ است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$۱)\ [x+\overbrace{[x]}^{\in\mathbb{Z}}]=[x]+[x]=۲[x]$$

$$۲)\ [x+\underbrace{۲[x]}_{\in\mathbb{Z}}]=[x]+۲[x]=۳[x]$$

$$۳)\ [x-\underbrace{[x]}_{\in\mathbb{Z}}]=[x]-[x]=۰$$

۴) خاصیت روبه‌رو در برخی از تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد: $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$

مثلاً اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{۲x}{[۲x]-[x]}$ را بپرسند، داریم:

$$\text{مخرج}=۰ \Rightarrow [۲x]-[x]=۰ \xrightarrow{[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]} \cancel{[x]}+[x+\frac{۱}{۲}]-\cancel{[x]}=۰$$

$$\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]=۰ \xrightarrow[k\le u<k+۱]{[u]=k,k\in\mathbb{Z}} ۰\le x+\frac{۱}{۲}<۱ \xrightarrow{-(\frac{-۱}{۲})} \frac{-۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲})=(-\infty,\frac{-۱}{۲})\cup[\frac{۱}{۲},+\infty)$$

۵) برای هر $k\in\mathbb{Z}$ داریم: $[x]=k \Rightarrow k\le x<k+۱$ یعنی اگر $[x]=۲$ باشد، حدود x به صورت $۲\le x<۳$ است.

۶) مجموع عبارت‌های $[x]$ و $[-x]$ را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

اگر $[x]$ را به سمت راست تساوی ببریم، در این صورت داریم:

اگر $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-[x]$

اگر $x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-[x]-۱$

۷) همواره رابطهٔ $[x]+[y]\le[x+y]$ برقرار است.

به مقایسهٔ مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases}|x+y|\le|x|+|y|\\ [x]+[y]\le[x+y]\end{cases}$$

۸) برای هر دو عدد حقیقی x و y، مقدار $[x+y]$ می‌تواند دو مقدار متمایز زیر را اختیار کند: $[x+y]=[x]+[y]$ یا $[x]+[y]+۱$

تست‌ها

تست ۸۶: اگر $x^۲+x<۰$، آن‌گاه $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۸)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

تست ۸۷: اگر $[x^۲-۱۰x]=[x^۲-۶x]=۷$ باشد، حاصل $[(x-۴)^۲]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳

تست ۸۸: اگر $198 = ^{6}(\sqrt{2}-1) + ^{6}(\sqrt{2}+1)$، جزء صحیح عدد $^{6}(\sqrt{2}+1)$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۴) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

تست ۸۹: اگر $[\frac{x}{2}] = 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

تست ۹۰: برای هر عدد طبیعی $n > 2$، حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۹۱: حاصل عبارت $[\frac{3-x}{2}] + [\frac{x-1}{2}]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱) صفر و ۱ ۲) صفر و ۱- ۳) ۱- و ۲- ۴) ۱ و ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{x-1}{2}] + [\frac{3-x}{2}] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{2+1-x}{2}] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2} + 1] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2}] + 1$$

چون $[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$، پس:

$$\underbrace{[\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2}]}_{\text{صفر یا } -1} + 1 = \text{۱ یا صفر}$$

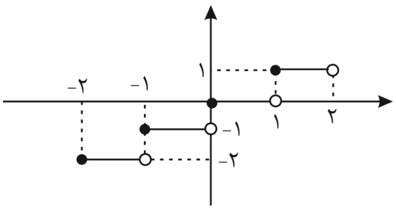
تست ۹۲: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-۲[x]$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

نمودارهای معروف براکتی

شکل‌های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)

۱) $y=[x]$

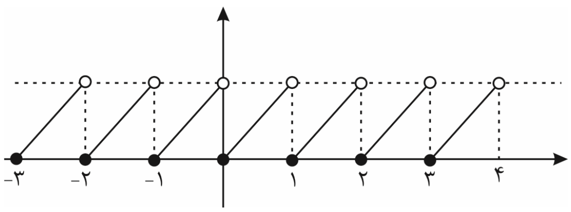


توجه کنید در تابع $y=[x]$، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلخواه در بازهٔ $[-۲,۲)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-۲,۲]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطهٔ $x=۲$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$$x=۲ \Rightarrow y=[۲]=۲ \Rightarrow A(۲,۲)$$

و این یعنی به شکل بالا باید نقطهٔ $A(۲,۲)$ نیز اضافه شود.

۲) $y=x-[x]$



ویژگی‌های تابع $y=x-[x]$

۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد $[۰,۱)$ یعنی: $۰\le x-[x]<۱$

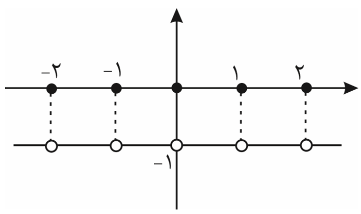
۳) در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.

۴) طول هر پله $\sqrt{۲}$ واحد است.

۵) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=۱$

در این‌جا به طور دلخواه آن را در بازهٔ $[-۳,۴)$ رسم کردیم.

۳) $y=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$



ویژگی‌های تابع $y=[x]+[-x]$

۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد دو عضوی $R_f=\{-۱,۰\}$

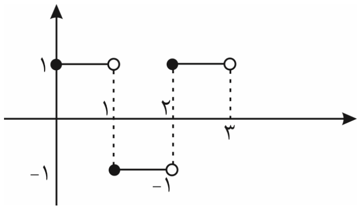
۳) در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

۴) در تمام نقاط دارای حد ۱- است یعنی $\lim\limits_{x\to a\in\mathbb{R}}[x]+[-x]=-۱$

۵) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=۱$.

۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، ۱- می‌شود.

۴) $y=(-۱)^{[x]}$ $\quad ۰\le x<۳$



ویژگی‌های $y=(-۱)^{[x]}$

در این‌جا به طور مثال در بازهٔ $[۰,۳)$ رسمش کردیم.

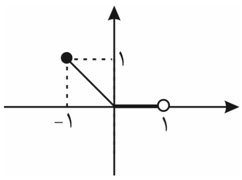
۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد دو عضوی $R_f=\{-۱,۱\}$

۳) در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.

۴) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=۲$.

۵) $y=x[x]$ $\quad -۱\le x<۱$



در این‌جا به طور مثال در بازهٔ $[-۱,۱)$ رسمش کردیم.

توجه کنید نقطهٔ $x=۰$ برای این تابع، نقطهٔ گوشه به حساب می‌آید.

رسم نمودار $y=[ax]$

تابع $y=[ax]$ از روی تابع $y=[x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{۱}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y=[\frac{x}{۲}]$ که $a=\frac{۱}{۲}$ است طول پله‌ها $۲=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}$ برابر و در رسم $y=[۲x]$ که $a=۲$ است طول پله‌ها $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود.

مثال ۹۳: تابع $y=[۲x]$ را در بازهٔ $[-۱,۱)$ رسم کنید.

پاسخ: $-۱\le x<۱$ است، پس $-۲\le ۲x<۲$، (داخل جزء صحیح از ۲- تا ۲ تغییر می‌کند). این محدوده را یک واحد بازه‌بندی می‌کنیم و در هر بازه مقدار $[۲x]$ را یافته و آن را در محدودهٔ دامنهٔ خود رسم می‌کنیم. مثلاً $-۲\le ۲x<-۱$، پس $[۲x]=-۲$ و خط $y=-۲$ را در بازهٔ $-۱\le x<-\frac{۱}{۲}$ $\xrightarrow{\div ۲}$ $-۲\le ۲x<-۱$ یعنی $[-۱,\frac{۱}{۲})$ رسم می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

$$-۲ \le ۲x < -۱ \Rightarrow y = -۲ \quad , \quad -۱ \le x < -\frac{۱}{۲}$$

÷۲

$$-۱ \le ۲x < ۰ \Rightarrow y = -۱ \quad , \quad -\frac{۱}{۲} \le x < ۰$$

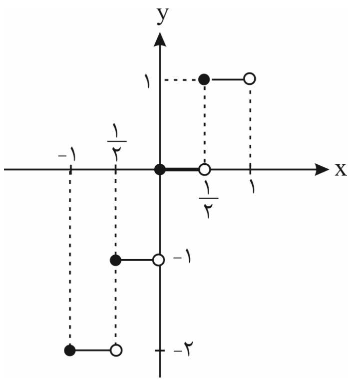
÷۲

$$۰ \le ۲x < ۱ \Rightarrow y = ۰ \quad , \quad ۰ \le x < \frac{۱}{۲}$$

÷۲

$$۱ \le ۲x < ۲ \Rightarrow y = ۱ \quad , \quad \frac{۱}{۲} \le x < ۱$$

÷۲



مثال ۹۴: نمودار تابع $y = [\frac{x}{۲}]$ را در بازهٔ $[-۴,۴]$ رسم کنید.

تست ۹۵ : نمودار تابع $x \in [-۲,۳)$ و $y = x - [x]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟ (تجربی)

۱) $(۴,۱)$ ۲) $(۴,\sqrt{۲})$ ۳) $(۵,۱)$ ۴) $(۵,\sqrt{۲})$

تست ۹۶: اگر $f(x)=[x]$، مجموعهٔ مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج)

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{-۱,۰,۱\}$

مثال ۹۷ : نمودار تابع $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱\ ;\ x\in[-۲,۶)$ ازچند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟ (تجربی خارج ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۹۸: برد تابع $y=x-۲[\frac{x}{۲}+۱]$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰)$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[-۱,۱)$

تست ۹۹: اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، برد تابع gof کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$

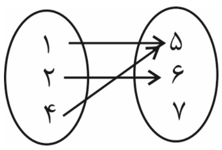
تابع یک‌به‌یک

۱) تابعی که در آن هیچ دو زوج متمایزی، مولفهٔ دوم تکراری نداشته باشد، یک‌به‌یک می‌گویند. تابع یک‌به‌یک دارای تعداد عضوهای یکسان دامنه و برد است.

برای پیدا کردن مجهول در تست‌های مربوط به تابع یک‌به‌یک، ابتدا سراغ مولفه‌های دوم یکسان می‌رویم و مولفه‌های اولشان را برابر می‌گذاریم. مثلاً در $f=\{(۲,۵)(۳,۱)(m,۵)\}$ به سراغ $(۲,\underline{۵}),(m,\underline{۵})$ می‌رویم و مولفه‌های اولشان را مساوی قرار می‌دهیم: $m=۲$

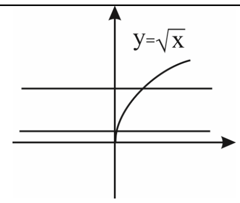
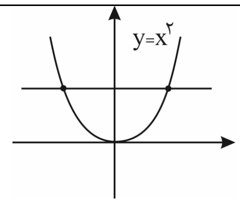
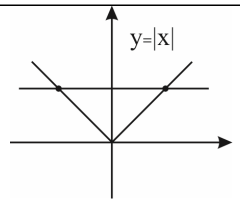
توجه کنید در این مدل از سؤالات شرط تابع‌بودن را نیز کنترل کنید. مثلاً $f=\{(۱,۵)(۱,۶)\}$ اصلاً تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک‌بودن را کنترل نمی‌کنیم.

۲) در نمودار ون چنان‌چه بیش از یک فلش به مولفه‌های دوم وارد شود، تابع دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. مثلاً:

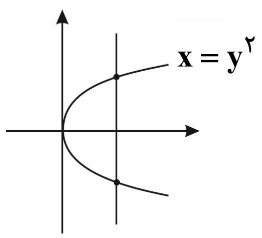


یک‌به‌یک نیست چون $(۱,۵),(۴,۵)$ دارای مولفهٔ دوم تکراری هستند.

۳) در نمودار دکارتی، تابعی یک‌به‌یک است که در آن هر خط به موازات محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

		
یک‌به‌یک است. چون هر خط افقی دلخواه، حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کرده است.	یک‌به‌یک نیست، چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.	یک‌به‌یک نیست چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.

توجه کنید نمودار اصلاً بیانگر یک تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک‌بودن را اصلاً کنترل نمی‌کنیم.



یادت باشه: معمولاً وجود $x^۲$، $|x|$، $[x]$ یا نسبت‌های مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$ تابع را غیریک‌به‌یک می‌کند.

چند نکتهٔ مهم:

۱) تابع خطی $y=ax+b$ با شرط $a\neq ۰$ (شیب غیرصفر، خطی که افقی نباشد) همواره یک‌به‌یک است.

۲) تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ در فاصلهٔ طول رأس به بعد و یا طول رأس به قبل، یک‌به‌یک است یعنی در این فاصله‌ها: $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$

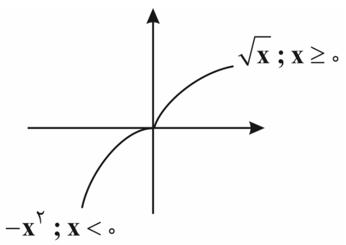
۳) توابع چند جمله‌ای از درجه زوج (بزرگ‌توان x زوج است) غیر یک‌به‌یک هستند.

۴) توابع $|x|-x$ ، $x-|x|$ ، $|x|$ ، $x+|x|$ ، $\frac{|x|}{x}$ یا $\frac{x}{|x|}$ با توجه به نمودارشان که در درس‌نامهٔ قدرمطلق دیدیم، یک‌به‌یک نیستند چون در بخشی از نمودارشان به شکل یک خط افقی درمی‌آیند و هروقت قسمتی از نمودار به شکل یک خط افقی باشد تابع حتماً غیریک‌به‌یک است.

۵) توابع $[x]$ ، $x-[x]$ ، $[x]+[-x]$ و $(-1)^{[x]}$ به دلیل مشابه مورد بالا، غیریک‌به‌یک هستند.

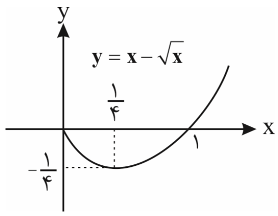
۶) تابع $x+[x]$ یک‌به‌یک است.

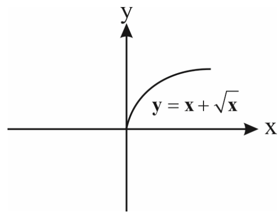
۷) تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq 0$ یک‌به‌یک است.

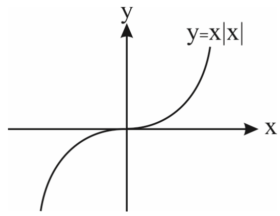


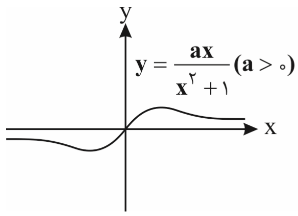
۸) در بررسی یک‌به‌یک بودن توابع دو یا چند ضابطه‌ای ابتدا یک‌به‌یک بودن ضابطه را در دامنهٔ آن بررسی کرده و سپس بررسی می‌کنیم که هر خط افقی بیشتر از یک مرتبه نمودار تابع را قطع نکند (برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد)، مثلاً تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ یک‌به‌یک است چون طبق نمودار هر خط افقی فقط در یک نقطهٔ نمودار تابع را قطع می‌کند.

۹) توابع $x|x|$ و $x+\sqrt{x}$ یک‌به‌یک و توابع $x-\sqrt{x}$ و $\frac{ax}{x^2+1}$ غیر یک‌به‌یک هستند.









تست ۱۰۰: اگر تابع $f=\{(-1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,3)\ ,\ (a,m-1)\ ,\ (a+2,n)\ ,\ (m,3)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار n کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 3 ۴) 2

تست ۱۰۱: تابع $f:R\longrightarrow R$ با کدام ضابطه، یک به یک است؟

۱) $f(x)=x-|x|$ ۲) $f(x)=x+|x|$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

تست ۱۰۲: اگر تابع $f(x)=a|x|+2x$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-2,2)$

تست ۱۰۳: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\ge 1\\ 2x-a & x<1\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $[-3,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-3]$

تابع معکوس (تابع وارون)

تابع یک‌به‌یک f، در زیر داده شده است. اگر جای مولفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب f را عوض کنیم، تابع دیگری مانند g به دست می‌آید:

$f=\{(1,2)(0,-3)(4,7)\}$, $g=\{(2,1)(-3,0)(7,4)\}$

دو تابع f و g را معکوس هم می‌نامند اگر برد و دامنهٔ دو تابع بالا را مقایسه کنید می‌بینید که دامنهٔ f برابر برد g و برد f مساوی دامنهٔ g است:

$D_f=R_g=\{1,0,4\}$, $R_f=D_g=\{2,-3,7\}$

هرگاه $f:A\to B$ یک‌به‌یک باشد، تابع معکوس f را که با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$

همان‌طور که در مثال دیدیم، می‌توانیم بگوییم که همواره $D_f=R_{f^{-1}}$ و $R_f=D_{f^{-1}}$ می‌باشد.

توجه کنید که شرط لازم و کافی برای آن که f^{-1} تابع باشد (f معکوس‌پذیر باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد. پس اگر در یک سؤال از ما شرط وارون‌پذیری بپرسند، در واقع منظور همان شرط یک‌ب‌یک بودن است که در درس‌نامهٔ قبلی بسیار کامل بررسی کردیم.

نکتهٔ مهم در معکوس توابع مرکب: اگر f و g دو تابع یک‌ب‌یک باشند آن‌گاه همواره داریم:

۱) $(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)$

۲) $(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$

تذکر: اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی تابع f باشد، نقطهٔ $A'(b,a)$ روی f^{-1} است یعنی:
$f(a)=b\ \Rightarrow\ f^{-1}(b)=a$

مثلاً اگر $A(2,3)\in f$ باشد:
$f(2)=3\ \Rightarrow\ f^{-1}(3)=2$

تست ۱۰۴: در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$
۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$
۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$
۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

تست ۱۰۵: دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

تست ۱۰۶: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{۹x+۶}{۱-x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

تست ۱۰۷: دو تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & , x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-۱}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۴-
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۴

تست ۱۰۸: اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$ تابع gof^{-1} شامل چند عضو ۲تایی است؟ (تجربی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱) نمودار تابع‌های f، f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع یک‌به‌یک نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، آن‌گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

۲) اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ به عبارت دیگر اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ (b,a) روی نمودار f^{-1} است.

۳) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۴) اگر نمودارهای f و f^{-1}، یکدیگر را در نقطهٔ (a,b) قطع کنند آن‌گاه $f(a)=b$ و $f(b)=a$. یعنی هم (a,b) و هم (b,a)، نقاط تقاطع هستند.

۵) اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

الف) $(f^{-1}of)(x)=x \quad , \quad x\in D_f$ یا $x\in R_{f^{-1}}$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید دامنه‌اش و اگر f^{-1} را داشتید بردش را حساب می‌کنید.

ب) $(fof^{-1})(x)=x \quad , \quad x\in D_{f^{-1}}$ یا $x\in R_f$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید بردش و اگر f^{-1} را داشتید دامنه‌اش را حساب می‌کنید.

۶) دو تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ فقط به شرطی با هم مساوی هستند که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و برد f یکسان باشد. بعضی‌ها فکر می‌کنند که چون $f^{-1}(f(x))=x$ و $f(f^{-1}(x))=x$ هستند پس این دو همیشه برابرند.

مثال: در تابع $f(x)=-x+۱$ با شرط $-۱\le x\le ۲$، $f^{-1}of=fof^{-1}$ است چون برد این تابع در محدودهٔ دامنهٔ $[-۱,۲]$، برابر $[-۱,۲]$ است.

۷) اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها همانی است اما عکس موضوع همواره برقرار نیست.

تست ۱۰۹: ضابطه‌ی وارون $y=\dfrac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $y=\dfrac{x}{1-|x|}\ ,\ |x|<1$

۲) $y=\dfrac{1-|x|}{|x|}\ ,\ |x|>1$

۳) $y=\dfrac{x}{|x|-1}\ ,\ |x|>1$

۴) $y=\dfrac{|x|-1}{x}\ ,\ |x|<1$

تست ۱۱۰: ضابطه‌ی معکوس $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۹۲)

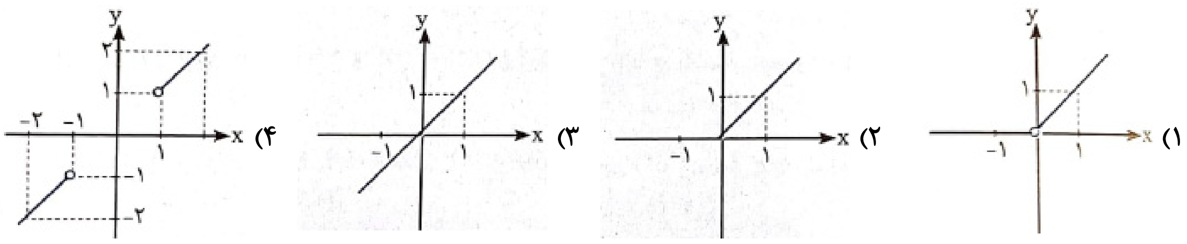
۱) $y=x\sqrt{|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۲) $y=x\sqrt{|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

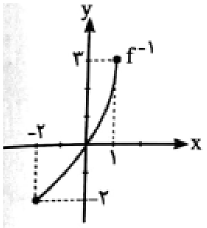
۳) $y=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

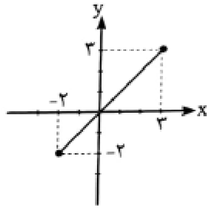
۴) $y=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$

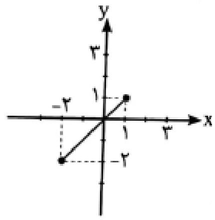
تست ۱۱۱: اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ باشد، نمودار $(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

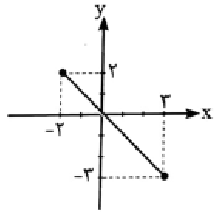


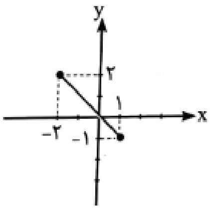
تست ۱۱۲: نمودار تابع $f^{-۱}$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y = f^{-۱}of(x)$ کدام است؟



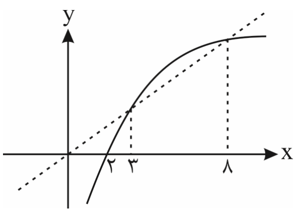
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۱۱۳: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-۱}(x)}$، کدام است؟ (تجربی ۹۴)



۱) $(۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

به دست آوردن ضابطه‌ی وارون

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون (البته تابع اصلی باید یک‌به‌یک باشد) این ۳ کار رو می‌کنیم:

۱- به جای $f(x)$ می‌نویسیم y.

۲- x رو تنها می‌کنیم.

۳- وقتی x تنها شد، به جای x قرار می‌دهیم $f^{-۱}(x)$ و به جای y می‌ذاریم x.

$$۱)\ f(x) = ۲x - ۳ \Rightarrow y = ۲x - ۳ \Rightarrow y + ۳ = ۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{y+۳}{۲} = x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} \frac{x+۳}{۲} = y \Rightarrow \frac{x+۳}{۲} = f^{-۱}(x)$$

$$۲)\ f(x) = \frac{۱}{x-۱} \Rightarrow y = \frac{۱}{x-۱} \Rightarrow x - ۱ = \frac{۱}{y} \Rightarrow x = \frac{۱}{y} + ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{x} + ۱ = \frac{x+۱}{x}$$

$3)\ f(x)=(x-1)^2; x\geq 1 \Rightarrow y=(x-1)^2 \xrightarrow[\text{۲ واسه x خلاص بشیم.}]{\text{جذر می‌گیریم تا از شر توان}} \sqrt{y}=|x-1| \xrightarrow[\underset{\text{خودش}}{\overset{+}{|x-1|=x-1}}]{\text{خودش گفته } x\geq 1 \text{ پس}} \sqrt{y}=x-1$

$\Rightarrow x=\sqrt{y}+1 \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$

$4)\ f(x)=(x-1)^2\ ;\ x<1$

$\Rightarrow y=(x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y}=(x-1) \xrightarrow[\underset{\text{قرینش}}{\overset{-}{|x-1|=1-x}}]{\text{خودش گفته } x<1} \sqrt{y}=1-x \Rightarrow x=1-\sqrt{y}$

$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$

$5)\ f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow y=\sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{رادیکال خلاص بشیم و x آزاد بشه}]{\text{به توان ۲ می‌رسونیم تا از شرّ}} y^2=x-1 \Rightarrow x=y^2+1$

$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=x^2+1$

$6)\ f(x)=-\sqrt{x-1} \Rightarrow y=-\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2=(-\sqrt{x-1})^2=+(x-1) \Rightarrow x=y^2+1$

$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=x^2+1$

$7)\ f(x)=x^3 \Rightarrow y=x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} \sqrt[3]{y}=x \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

$8)\ f(x)=x^3-3x^2+3x+5 \Rightarrow y=x^3-3x^2+3x+5 \Rightarrow y=x^3-3x^2+3x-1+6 \Rightarrow y=(x-1)^3+6$

حالا عبارت xدار رو تنها کن.

$(x-1)^3=y-6 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x-1=\sqrt[3]{y-6} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-6}+1 \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-6}+1$

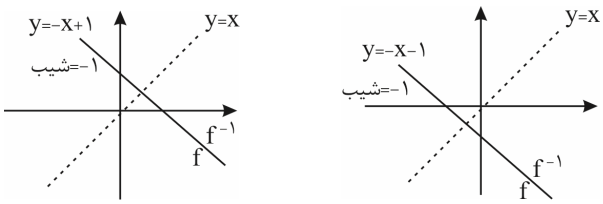
چند نکته مهم:

۱) در تابع خطی $f(x)=ax+b$، ضابطهٔ وارون به صورت $f^{-1}(x)=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$ درمی‌آید که نیازی به حفظ کردن نیست اما باید بدانید که شیب f و f^{-1} عکس یکدیگر هستند و سه حالت ممکن است برای تابع خطی و وارونش پیش بیاید:

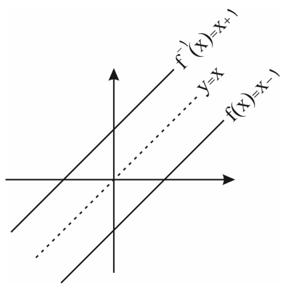
الف) اگر شیب خط ۱- باشد، تابع و وارونش بر هم منطبق هستند.

البته خط $y=x$ هم تنها خطی است که با شیب مثبت، خودش و وارونش بر هم منطبق هستند و بی‌شمار نقطهٔ تلاقی دارند.

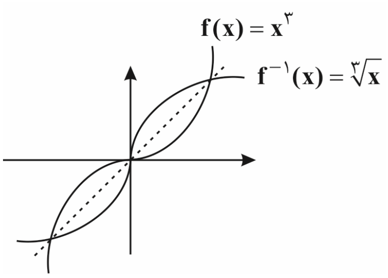
مثلاً:



ب) خط با شیب $a\neq \pm ۱$ وارونش را قطعاً روی نیمساز ناحیه ۱ و ۳ قطع می‌کند.

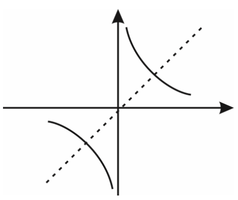


پ) به غیر از خط $y=x$، تمام خطوط با شیب $a=۱$ هرگز وارونشان را قطع نمی‌کنند و با آن موازی هستند. مثلاً:



۲) همان‌طور که در قسمت پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون دیدید، اگر $f(x)=x^{۳}$ باشد وارونش $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x}$ است. این دو تابع را همزمان در یک دستگاه رسم می‌کنیم و می‌بینیم که این دو تابع همدیگر را در سه نقطه روی خط $y=x$ قطع می‌کنند.

۳) وارون تابع $y=\frac{۱}{x}$ بر خود تابع منطبق است.



$$y=\frac{۱}{x}\Rightarrow xy=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{x}$$

۴) وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰$ به شکل $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

۵) در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰$ اگر $a+d=۰$ باشد، تابع و وارونش بر یکدیگر منطبق هستند یعنی:

$f(x)=f^{-1}(x)$

۶) اگر f و f^{-1} متقاطع باشند و f یک تابع اکیداً صعودی باشد آن‌گاه نقاط تقاطع روی خط $y=x$ است. برای پیداکردن نقطه و یا نقاط برخورد (تقاطع) f و f^{-1} به جای حل $f(x)=f^{-1}(x)$ کافی است $f(x)=x$ را حل کنید.

۷) اگر $f^{-1}(a)$ را بپرسند، اسم آن را x گذاشته و $f(x)=a$ را حل می‌کنیم. x همان جواب مسئله است. مثلاً اگر $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$

و $f^{-1}(4)$ را بپرسند:

$$f^{-1}(4)=x \Rightarrow f(x)=4 \Rightarrow -x+\sqrt{-2x}=4$$
$$\Rightarrow \sqrt{-2x}=x+4 \xrightarrow[x=-2]{\text{حدس}} \sqrt{-2(-2)}=-2+4 \Rightarrow 2=2 \checkmark$$

پس $x=-2$ جواب مسئله است. (ریاضی ۸۸)

تست ۱۱۴: تابع $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنه‌ی $(-1,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟ (ریاضی ۹۴)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) غیر متقاطع

تست ۱۱۵: نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$، با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $-1,-4$ ۲) $-1,4$ ۳) $1,-4$ ۴) $1,4$

تست ۱۱۶ : ضابطهٔ معکوس تابع $y=2-\sqrt{x-1}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $y=x^2-4x+5, x\le 2$ ۲) $y=-x^2+4x-5, x\le 2$

۳) $y=-x^2+4x-5, x\ge 1$ ۴) $y=x^2-4x+5, x\ge 1$

تست ۱۱۷ : ضابطهٔ تابع وارون $y=2x^3+6x^2+6x+1$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}+1$ ۲) $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ ۳) $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ ۴) $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}-1$

تست ۱۱۸: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x-|4-2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟
(ریاضی خارج ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}x+1, x\geq 4$ ۲) $\frac{1}{4}x-1, x\leq 4$ ۳) $\frac{1}{4}x-1, x\geq 4$ ۴) $\frac{1}{4}x+1, x\leq 4$

تست ۱۱۹: تابع با ضابطهٔ $y=x|x-2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $1-\sqrt{1+x}\ , x<0$ ۲) $1-\sqrt{1-x}\ , x<1$
۳) $1+\sqrt{1-x}\ , 0<x<1$ ۴) $1-\sqrt{1-x}\ , 0<x<1$

تست ۱۲۰: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{2}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟
(تجربی ۹۹)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

تست ۱۲۱: فرض کنید $g(x)$ وارون وتابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۳)+g(۱۵)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

تست ۱۲۲: اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ ، آنگاه حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸