

توابع پایه یازدهم ریاضی و تجزی

زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a, b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a, b) با زوج مرتب (b, a) فرق دارد. هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

تست ۱: اگر دو زوج مرتب $(x - y, 1)$ و $(3, 2x + 3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x + 2y$ کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} x - y = 3 \\ + \quad 2x + 3y = 1 \\ \hline 3x + 2y = 4 \end{array} \quad \text{تست ۱}$$

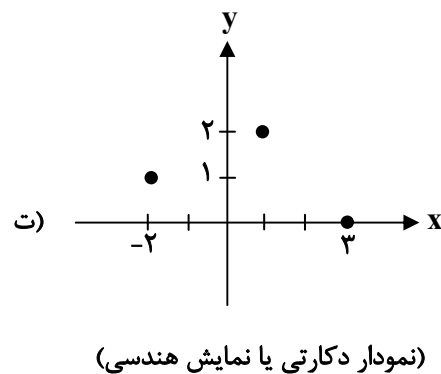
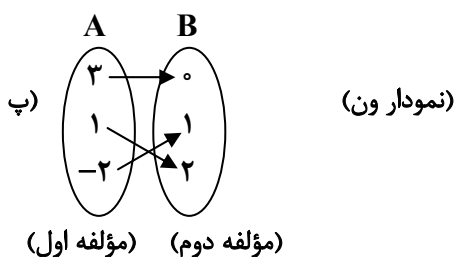
رابطه

برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

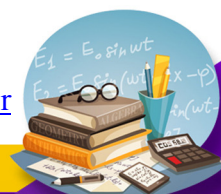
الف) $R = \{(1, 2), (3, 0), (-2, 1)\}$ (زوج مرتب)

ب) (جدول)

x (مؤلفه اول)	۱	۳	-۲
y (مؤلفه دوم)	۲	۰	۱



رابطه دکارتی



تست ۲: رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

(ریاضی خارج ۸۸)

تفکر منظم: یعنی از این شروع کن به ترتیب جلو برو

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$$

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

(۱) تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

مثال ۳: کدام یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟ f_7

$f_1 = \{(0,1), (-2,3), (4,2)\}$

$f_2 = \{(1,2), (3,4), (1,2)\}$

$f_3 = \{(2,3), (1,-4), (2, \sqrt{9})\}$

$f_4 = \{(-1,2)\}$

$f_5 = \{\}$

$f_6 = \{(1,2), (2,2), (1,5)\}$

یک $x=1$ دارد و تابع رابطه‌ها را تابع نیست

هی تابع است

نکته: در مجموعه عضو تکراری مهم نیست

نکته: هر خطی که در این شکل رایبیه حالت در یک نقطه (یک نقطه یا هیچ نقطه) قطع کند که تابع باشد.

پس ϕ تابع است زیرا خط قائم آن را اصلاً قطع نمی‌کند.

(تجربی خارج ۸۵)

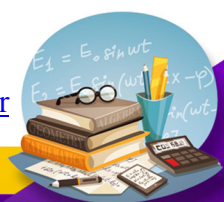
تست ۴: رابطه $\{(3, m^2), (2,1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۴ (هیچ مقدار m)

$m^2 = m + 2 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$m = -1 \quad m = 2 \rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-2, 1), (3, 4), (2, 4)\}$

در مجموعه $m=2$ ، $m=1$ ، $m=-1$ ، $m=3$ ، $m=4$ تابع است



همه دامنه یا مجموعه مقصود هم دامنه
 بزرگ‌تر یا برابر برداشت $R_f = \{a, b\} \subset B = \{a, b, c\}$ هم دامنه
 زیرمجموعه $D_f = \{a, b\}$ دامنه

۲) تعریف تابع از نظر نمودار ون

یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با نمودار ون نمایش داده می‌شود، وقتی تابع است که از هر مؤلفه مجموعه A (مؤلفه اول) فقط و فقط یک فلش خارج شود نه بیشتر و همه اعضای A به بازی گرفته شوند و هیچ عضوی از A نباشد که از آن فلش خارج نشود همان دامنه‌ی تابع است.

وقت کمید که در مجموعه A یک x داشته‌ی که از اون هیچ فلشی خارج نشد تابع نیست

همه دامنه $D_f = A$ همه دامنه B
 برداشتی که از اون هیچ فلشی خارج نشد تابع نیست
 همه دامنه B برداشتی که از اون هیچ فلشی خارج نشد تابع نیست
 همه دامنه B برداشتی که از اون هیچ فلشی خارج نشد تابع نیست

۳) تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی)

نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور y ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نه بیشتر.

تابع است
 چون هر خط به موازات محور y ، در هیچ جا چیزی را قطع نمی‌کند.
 تپی یک تابع است.

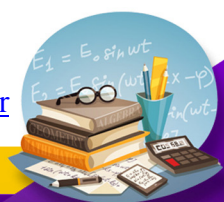
تابع نیست.
 چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.

تابع نیست.
 چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه، نمودار را قطع می‌کند.

تابع است.
 چون هر خط به موازات محور y ، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.

تست ۵: کدام شکل نمودار یک تابع است؟

(۱) (۲) (۳) (۴)



۴) تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به دست آید.



توی این مدل از سوال‌ها x ای رو انتخاب کن به ازای اون مشکوک به تولید چند تا y بشی. در واقع برای اثبات تابع نبودن از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۱- اگر عبارت y دار توی قدرمطلق و یا درون پرانتز توان زوج بود کاری کن عبارت قدرمطلق و یا توان زوج با یک عدد مثبت برابر بشه:
الف) $|2y - 1| + x - 2 = 0$

ب) $(y - 1)^2 + x^2 = 1$

۲- وقتی چند y با توان‌های فرد و مختلف کنار هم هستند، x ای را انتخاب کنی که سمت راست تساوی صفر بشه:

پ) $y^3 - y = 2x - 1$

۳- اگر جمع چند عبارت نامنفی برابر صفر بشه، باید تک‌تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

ت) $(y - 1)^2 + x^2 = 0$

ث) $(y^2 - 1)^2 + x^2 = 0$

ج) $x^2 + y^4 + 2y^3 + y^2 + 4x + 4 = 0$

معمولاً روابطی که در آن‌ها $|y|$ ، y^{2n} یا $[y]$ و یا $\sin y$ ، $\cos y$ ، $\tan y$ و یا $\cot y$ دیده می‌شه تابع نیستند.

چ) $x = \sin y$

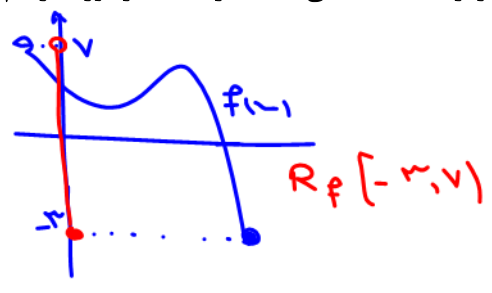
ح) $[y] + x^2 - 1 = 0$



برد: با Range که دوره تغییرات است و با دامنه‌هایی که بازای x های دامنه در دست شده اند از درسی شکل کافی است شکل را با یک پرس ۲ نکته روی محور x ها پرس کنیم هر جا که شده برد است

۴- اگر جمع چند عبارت نامنفی و یا چند عبارت همواره مثبت برابر یک عدد منفی بشه به رابطه‌ای برخورد کردیم که بیانگر تهی است و می‌دانیم تهی یک تابع است.

خ) $|y| + 3^x = -1$



د) $\sqrt{x-1} + y^2 = -1$

تست ۶: کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^2 - 3y^2 + x = 0$ ۲) $y + y^2 = x^3 + 1$ ۳) $|y-1| + x = 0$ ۴) $xy^2 - x = 1$

گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ رو تحلیل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که به ازای یک x بیش از یک مقدار واسه y بدست میاد پس تابع نیستن.

۱) $y^2 - 3y^2 + x = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y-3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

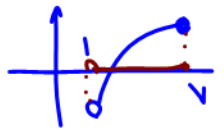
۳) $|y-1| + x = 0 \xrightarrow{x=-1} |y-1| - 1 = 0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2, y = 0$

۴) $xy^2 - x = 1 \xrightarrow{x=1} y^2 - 1 = 1 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Domain

دست تو جیب: تیزبین که باشی توی گزینه ۱ با انتخاب $x=1$ می‌شه از y فاکتور گرفت و ۲ مقدار واسش بدست بیاد پس تابع نیست. توی گزینه ۳ با انتخاب هر X منفی ۲ مقدار واسه y بدست میاد. گزینه ۴ با انتخاب $x=1$ ، ۲ مقدار واسه y بدست میاد.

دامنه: جایی که ورودی هاست که حتماً به f دارد و بازای اونجا y تعریف شده. همیشه سمتایه تابع روی محور x قواعد تعیین دامنه یعنی شکل را با یک پرس ۲ نکته روی محور x ها پرس کنیم هر جا که شده دامنه است.



$D_f: (1, 7]$

الف) توابع چند جمله‌ای: دامنه این توابع برابر با \mathbb{R} است.

مثال ۷:

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- $f(x) = x + 1$
- $f(x) = 2$
- $f(x) = x^3 + 4x + 10$

$y = ax^{n \in \mathbb{N}} + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ $D_f: \mathbb{R}$

چیزهای بزرگ

$D_f: \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، x هایی که مخرج را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند. مخرج = ۰ به ازای این‌ها می‌خورد

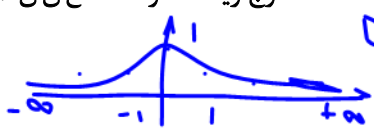
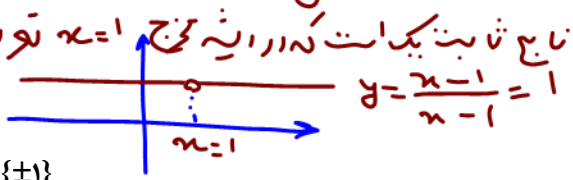
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $D_f = \mathbb{R} - \{x | h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

۱) $f(x) = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

۲) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

۳) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x-5} \Rightarrow x^2+4x-5=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, x=-5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$

۴) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ غ.ق. ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$



تابع کبری در ریشه فرج: $y = \frac{x}{x} = 1$ $y = \frac{-x}{x} = -1$ $y = \frac{1-x}{x}$ $y = \frac{x}{x}$ $y = \frac{1}{x}$

۱) بیابنا تا نام
۲) صفره
۳) جیش

دامنه هر سه تابع بالا
 $D_f: \mathbb{R} - \{0\}$

۵) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ مخرج ریشه نداره $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۶) $f(x) = \frac{x+1}{|2x-3|}$ $|2x-3| = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
 ریشه ای فرج: $\frac{3}{2} \leq x < 2$
 $[x+k] = [x] + k \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [\frac{3}{2}, 2) = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$

۷) $f(x) = \frac{1}{[x] - \frac{1}{2}}$ $\Rightarrow [x] - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow [x] = \frac{1}{2}$
 ریشه ندارد $D_f: \mathbb{R}$
 خرابی برآنت کماصع است. برآنت [] جزو است.
 قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن عبارت را ندارید!

۸) $g(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - 1}{\frac{3x}{x-2}}$ $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

$f(x) = \frac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-4}}$ $D_f: \mathbb{R} - \{2, 3, 4\}$

- $\mathbb{R} - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - (a, b] = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$f(x) = \sqrt[k]{g(x)}$ $D_f = \{x | g(x) \geq 0\}$

اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگتر از صفر قرار دهیم:

۹) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

۱۰) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$
 ۱) $9-x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$
 ۲) $x^2-1 > 0 \Rightarrow x < -1$ یا $x > 1$
 $\Rightarrow (1), (2) \cap \rightarrow D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$

نکته: $|u| < a \rightarrow -a < u < a$
 $|u| > a \rightarrow u < -a$ یا $u > a$

۱۱) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$ $\Rightarrow \frac{x-3}{x+4} \geq 0$
 $x \in (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$

د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می گیریم:

$f(x) = \sqrt[k]{g(x)}$ $D_f = D_g$

۱۲) $f(x) = \sqrt{\frac{5}{x^2+x-12}}$ $D_f: \mathbb{R} - \{3, -4\}$

۱۳) $f(x) = \sqrt{5x^2-7} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۱۴) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

کمی خیال شو!



۱۵) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$

$D_f : \mathbb{R} - \{x=0\}$

(ه) توابع لگاریتمی: برای تعیین توابع لگاریتمی باید سه شرط زیر را در نظر بگیریم:

$f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$

$D_f = \{x | g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$

بعد آدرس می‌دهیم.

۱۶) $f(x) = \log_{-x+4}^{x-1}$

۱۷) $f(x) = \log^{(x-5)^2}$

(و) توابع مثلثاتی: در توابع شامل sin و cos، فقط عبارت جلوی آن‌ها را تعیین دامنه کرده و sin و cos را نادیده می‌گیریم:

$f(x) = \sin g(x)$ و $f(x) = \cos g(x) \rightarrow D_f = D_g$

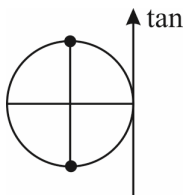
بعد آدرس دم
مثال ۸:

۱) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ $D_f = \mathbb{R}$

۲) $g(x) = \cos \frac{1}{x}$ $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

در تعیین دامنه توابع $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ وضعیت کمی فرق می‌کند چون $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ است.

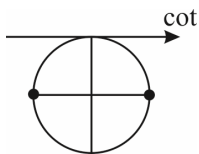
برای دامنه $\tan \alpha$ باید مخرج کسر یعنی $\cos \alpha$ صفر نباشد، پس:



$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \tan u \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x | u = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

برای $\cot \alpha$ هم $\sin \alpha$ نباید صفر باشد x ، پس:



$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$

$f(x) = \cot u \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x | u = k\pi\}$

۱۸) $f(x) = \tan 2x$

در تعیین دامنه توابع $f(x) = [g(x)]$, $f(x) = |g(x)|$ قدرمطلق و براکت را نادیده می‌گیریم یعنی $D_f = D_g$ است:

۱۹) $f(x) = [\sqrt{x}] \Rightarrow D_f = x \geq 0$

۲۰) $f(x) = [\frac{1}{x}] \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

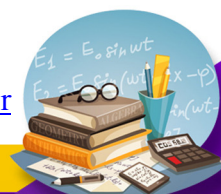
۲۱) $f(x) = \frac{1}{[x]} \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$

۱۸ به جزیره‌های نخ

۲۲) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$

نخ

Handwritten notes and diagrams for problem 22. It shows a number line with points -3, -1, 1, 3. The domain is determined by $9-x^2 > 0 \Rightarrow 9 > x^2 \Rightarrow -3 < x < 3$ and $|x-1| \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. The final domain is $D_f = [-3, 3] - \{1\}$.



دامنه‌گرها $\{ریشه\}$ \mathbb{R} - است

تست ۹: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، $b + a$ چه قدر است؟

۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

حتماً ایشه خارج است پس حتماً خارج به صورت زیر است:

$$2(x+2)^2 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2x^2 + 8x + 8$$

با فرج مشابه $2x^2 + ax + b$ $\rightarrow a = 8 \quad b = 8 \quad a + b = 16$

تست ۱۰: دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{-x^2(x^2 - 4)^2}$ چند عضو دارد؟

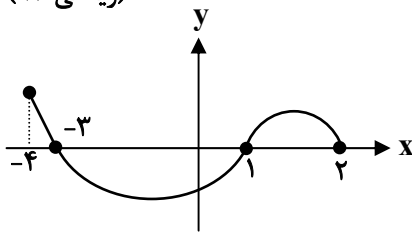
۴ بی‌شمار

۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(ریاضی ۹۲)



تست ۱۱: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

(۱) $[0, 2]$

(۲) $[-3, 2]$

(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

(ریاضی خارج ۹۷)

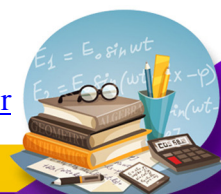
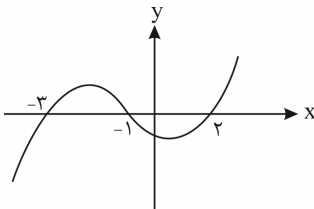
تست ۱۲: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟

(۱) $[-3, 2]$

(۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -1]$

(۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$



مثال ۱۳: اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۶)

تست ۱۴: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{(4a-3)x^2 + 2ax + 1}$ شامل همه اعداد حقیقی به غیر از یک عدد حقیقی باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۱۵: اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a+2)x^2 + ax + b}$ به صورت $(-\infty, 3]$ باشد، مقدار b کدام است؟

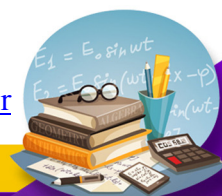
(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) ۴

مقدار تابع:

در تابع $y = f(x)$ برای تعیین مقدار تابع در $x = a$ به جای x ، a را قرار می‌دهیم. دقت کنید که a می‌تواند یک عدد یا متغیر باشد. اگر تابع چند ضابطه‌ای باشد، ابتدا با توجه به دامنه، ضابطه را انتخاب کرده سپس مقدار تابع را به دست می‌آوریم.

تست ۱۶: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$



تست ۱۷: اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ ، آن گاه $f(2)$ کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) -۲ (۲) -۱ (۱)

(تجربی ۹۰)

تست ۱۸: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

- ۹ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

تست ۱۹: اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ باشد، آن گاه $f(\sqrt[3]{3} + 2)$ کدام است؟

- ۱۶ (۴) ۵ (۳) $(\sqrt[3]{3} + 1)^3 - 1$ (۲) صفر (۱)

تست ۲۰: اگر $f(x) = (x + x^{-1})^2$ باشد، حاصل $f(\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟

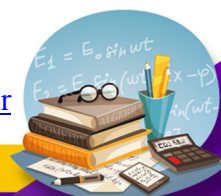
- $4\sqrt{2}$ (۴) ۴ (۳) ۸ (۲) $2\sqrt{2}$ (۱)

هر وقت بخواهیم از روی تابع (یه عبارتِ $f(x)$ دار) ضابطه‌ی $f(x)$ رو پیدا کنیم، کافیه توی پرانتز رو t بگیریم و سپس x رو تنها کنیم و هر جا سمت راست مساوی x دیدیم مقدارش رو بر حسب t جای‌گذاری کنیم و آخرش هم $t \rightarrow x$.

(تجربی ۹۷)

تست ۲۱: اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ برابر کدام است؟

- $x^2 - x + 1$ (۴) $x^2 - 2x + 1$ (۳) $x^2 - 2x - 1$ (۲) $x^2 - x + 3$ (۱)



تست ۲۲: اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x+1$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{1-x}$ (۲) $\frac{2}{x-1}$ (۳) $\frac{1-x}{3}$ (۴) $\frac{x-1}{3}$

پاسخ: توی پرانتز رو t می‌گیریم.

پس $f(t) = x+1$ حالا باید x رو تنها کنیم:

$$\frac{x-2}{x+1} = t$$

$$x-2 = tx+t \Rightarrow tx-x = -t-2 \Rightarrow x(t-1) = -t-2 \Rightarrow x = \frac{-t-2}{t-1} \quad (*)$$

حالا سمت راست هر جا x دیدیم $(*)$ رو می‌ذاریم:

$$f(t) = \frac{-t-2}{t-1} + 1 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = \frac{-x-2}{x-1} + 1 = \frac{-x-2+x-1}{x-1} = \frac{-3}{x-1} = \frac{3}{1-x}$$

بعضی وقتها هم نیازی به t نیست فقط کافیه از اتحادها استفاده کنیم:



$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

۲ تا مثال خوب:

۱) $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$, $f(x) = ?$

پاسخ:

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$f(t) = t^2 - 2 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^2 - 2$$

حالا $x - \frac{1}{x} = t$ پس:

واسه حلش از اتحاد $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ استفاده کردیم.

۲) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} - 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6$$

حالا $x + \frac{1}{x} = t$ پس:

$$f(t) = t^2 - 6 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^2 - 6$$

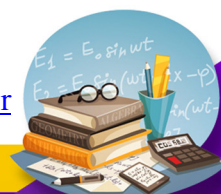
واسه حلش از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم.

تست ۲۳: اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^3}$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 + 3x$ (۲) $x^3 - 3x$ (۳) $(x-1)^3$ (۴) $(x+1)^3$

پاسخ: باید ببینیم f با ورودی‌های خود چه کرده است. یعنی دقیقاً بلایی که به سر $x + \frac{1}{x}$ اومده چیه؟

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$



$$f(t) = t^3 - 3t$$

$$f(x) = x^3 - 3x$$

الان اگر $x + \frac{1}{x} = t$ بگیریم:

پس $t \rightarrow x$:

«تساوی دو تابع»

دو تابع f و g مساوی هستند هر گاه:

الف) دامنه‌ی f و g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g) داشته باشیم، $f(x) = g(x)$ (ضابطه‌ها برابر باشند).

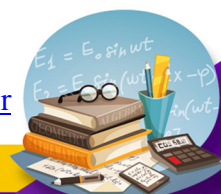
تست ۲۴: به ازای کدام مقدار k ، دو تابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}, & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1 - k, & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ برابرند؟

(۱) -۳ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) -۱

مثال ۲۵: تساوی تابع‌های زیر را بررسی کنید.

الف)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} \\ g(x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \end{cases}$$



$$پ) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1 \\ g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \end{cases}$$

$$ت) \begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-x}^3 \\ g(x) = (x-1)\sqrt{1-x} \end{cases}$$

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

دامنه‌ی توابع $f \pm g$ و $f \cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به جز نقاطی که $g(x) = 0$.

اگر توابع f و g به صورت زوج‌های مرتب مطرح شوند، مثلاً $f = \{(a, b), (1, 2)\}$ و $g = \{(a, c), (2, 1)\}$ ، منظور از $f + g$ آن است که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی از f و g را که دارای مؤلفه‌های اول یکی هستند (اشتراک دامنه‌ها)، با هم جمع کنیم. یعنی:

$$f + g = \{(a, b + c)\}$$

و به همین ترتیب $f - g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$f - g = \{(a, b - c)\} \quad , \quad f \cdot g = \{(a, b \times c)\} \quad , \quad \frac{f}{g} = \left\{ \left(a, \frac{b}{c} \right) \right\} \quad , \quad c \neq 0$$

حواستون باشه که دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(2, 1)$ در f و g ، چون مؤلفه‌های اول یکسان ندارند در $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به بازی گرفته

نمی‌شن!

تذکره: $(kf)(x) = kf(x)$ و $D_{kf} = D_f$ و منظور از $(kf)(x)$ آن است که اعضای برد f در k ضرب شوند. مثلاً:

$$f = \{(a, b), (1, 2)\} \Rightarrow 3f = \{(a, 3b), (1, 6)\}$$

تست ۲۶: اگر توابع f و g به صورت $f = \{(2, 5)\}$ و $g = \{(2, 7)\}$ تعریف شده باشند، آن‌گاه تابع $f \cdot g$ برابر است با:

$$\{(10, 14)\} \quad (1) \quad \{(4, 35)\} \quad (2) \quad \{(4, 12)\} \quad (3) \quad \{(2, 35)\} \quad (4)$$



تست ۲۷: اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

تست ۲۸: اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -2 \\ x-2 & x < -2 \end{cases}$ حاصل $f+2g$ به ازای $x = f(0)$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) ۳

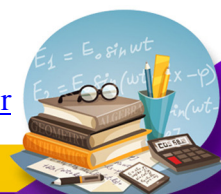
تست ۲۹: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ دامنه‌ی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-3, +\infty) - \{1\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $(-3, +\infty)$ (۴) $(-3, +\infty) - \{0\}$

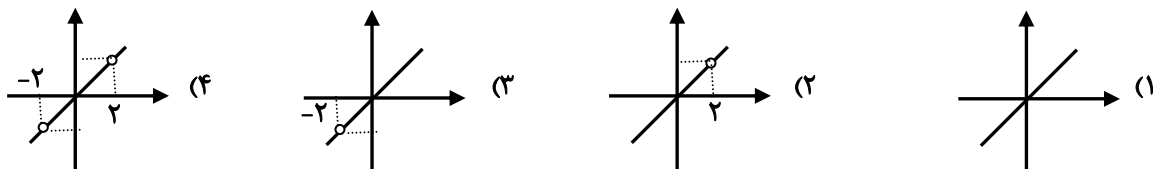
تست ۳۰: اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ و $g = \{(1,5), (2,6), (3,0)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

(۱) \emptyset (۲) $\left\{ \left(1, \frac{4}{5}\right), (3, 1) \right\}$

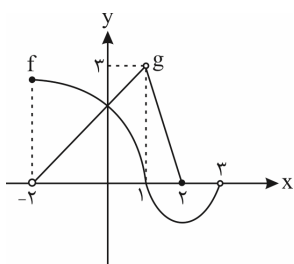
(۳) $\left\{ \left(1, \frac{4}{5}\right), \left(2, \frac{1}{6}\right) \right\}$ (۴) $\left\{ (2, 1), \left(1, \frac{4}{5}\right) \right\}$



تست ۳۱: اگر $f(x) = x^3 - 4x$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f \times g$ چگونه است؟

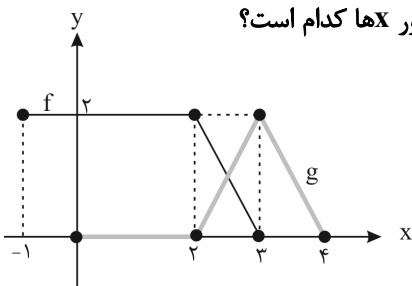


تست ۳۲: نمودار توابع f و g مطابق شکل مقابل است. دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f-g}$ کدام است؟

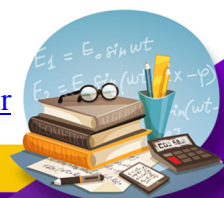


- (۱) $(-2, 2] - \{0, 1\}$
- (۲) $(-2, 2) - \{1\}$
- (۳) $(-2, 3) - \{0, 1\}$
- (۴) $(-2, 3) - \{1\}$

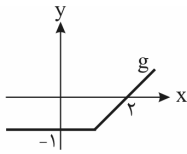
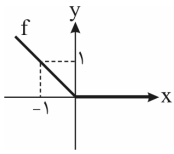
تست ۳۳: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $f + g$ و محور x ها کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) ۶
- (۳) $\frac{5}{2}$
- (۴) ۱۸



تست ۳۴: نمودار دو تابع f و g به صورت مقابل است. کدام موارد زیر نادرست است؟

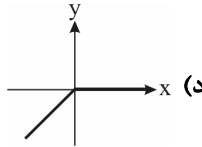


(ب) $\frac{f}{g}(2) = 2$

(الف) نمودار $f \cdot g$ است.



نمودار $f \cdot g$ است.



(ج) $(f + g)(-1) = 0$

(۴) تمامی موارد

(۳) الف و ب

(۲) الف و ب و د

(۱) ج و ب

پاسخ: گزینه «۳» - الف) به وضوح نادرست است به ازای $x < 0$ ، نه f صفر است و نه g . پس نمی‌تواند $f \cdot g = 0$ باشد.

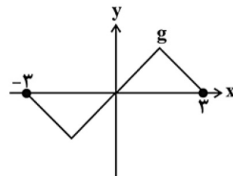
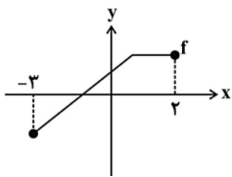
(ب) $\frac{f}{g}$ در ۲ تعریف نمی‌شود، زیرا $g(2) = 0$. ببینید: تعریف نشده $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(2)}{0}$. پس این قسمت نیز نادرست است.

(ج) $f(-1) = 1$ و $g(-1) = -1$ است و در نتیجه: $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 0$. یعنی این قسمت درست است.

(د) این قسمت هم درست است. ببینید:

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = 0 \\ x < 0 \Rightarrow g(x) = -1 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x) = -f(x) \end{cases}$$

تست ۳۵: با توجه به نمودار تابع‌های f و g ، دامنه تابع $\frac{2f^2}{g}$ کدام است؟



(۱) $(0, 2]$

(۲) $[0, 2]$

(۳) $[-3, 2]$

(۴) $(-3, 0) \cup (0, 2]$

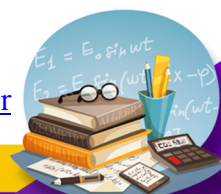
تست ۳۶: توابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ مفروض‌اند. برد تابع $f - g$ کدام است؟

(۴) \mathbb{R}

(۳) $\mathbb{R} - \{-1\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{1\}$

(۱) $\mathbb{R} - \{0\}$



تست ۳۷: توابع $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g = \{(2, -1), (4, 4), (-1, 5), (7, 13)\}$ مفروض اند، بیشترین مقدار تابع $2f + 3g$ کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۳

تست ۳۸: اگر $f = \{(4, 3), (3, 1), (5, 4)\}$ و $2f - g = \{(3, 6), (4, 4)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

$$\{(3, -\frac{1}{4})\} \quad (۲)$$

$$\{(3, -\frac{1}{4}), (4, \frac{3}{4})\} \quad (۱)$$

$$\{(4, \frac{3}{4})\} \quad (۴)$$

$$\{(3, \frac{3}{8}), (4, \frac{3}{4})\} \quad (۳)$$

ترکیب دو تابع به صورت ضابطه‌ای

ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fg نشان می‌دهیم و به صورت $(fg)(x) = f(g(x))$ تعریف می‌کنیم و برای تعیین این تابع باید در تابع $f(x)$ به جای x ، $g(x)$ را قرار بدهیم. همچنین برای تعیین تابع $(gof)(x) = g(f(x))$ باید در تابع $g(x)$ به جای x ، $f(x)$ را قرار بدهیم.

$$x \rightarrow f \rightarrow g \Rightarrow g(f(x))$$

$$x \rightarrow g \rightarrow f \Rightarrow f(g(x))$$

(تجربی خارج ۹۶)

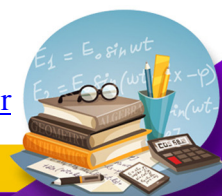
تست ۳۹: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

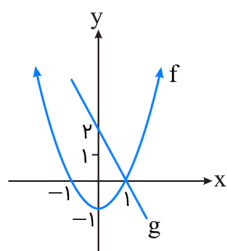
$$x+1 \quad (۴)$$

$$-x-1 \quad (۳)$$

$$-x \quad (۲)$$

$$x \quad (۱)$$





تست ۴۰: اگر نمودار f و g به صورت زیر باشد، حاصل $(f + (g \circ f))(-1)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

تست ۴۱: اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{3}(x - 3)$ ، مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور x قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟

(تجربی خارج ۹۱)

- (۱, ۵) (۴)
- (-۲, ۱) (۳)
- (-۱, ۵) (۲)
- (-۵, ۱) (۱)

(ریاضی خارج ۹۰)

تست ۴۲: اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

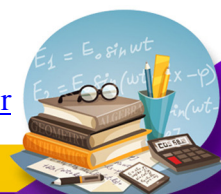
- $2 - f(x)$ (۴)
- $f(x)$ (۳)
- $4 - x$ (۲)
- x (۱)

(ریاضی ۸۶)

تست ۴۳: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

ورودی \rightarrow $2x - 2$ \rightarrow $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ \rightarrow خروجی

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- $\frac{7}{2}$ (۲)
- $\frac{11}{9}$ (۱)



تست ۴۴: اگر $g(x) = x^2 + 2x$ و $f(x) = x^2 - 1$ باشند، مجموع مکعبات جواب‌های حقیقی معادله $f(g(x)) = 8$ کدام‌اند؟
 (۱) ۱۰ (۲) -۱۶ (۳) -۲۶ (۴) ۱۶

پاسخ:

یادت باشه: برای حل معادله $f(g(x)) = m$ ابتدا معادله $f(x) = m$ را حل می‌کنیم و جواب‌هایش را می‌یابیم و سپس $g(x)$ را برابر جواب‌های به‌دست آمده قرار می‌دهیم و معادله به‌دست آمده را حل می‌کنیم. پس در این‌جا داریم:

$$f(x) = 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

حالا $g(x)$ را برابر جواب‌های معادله بالا قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} g(x) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \xrightarrow[\text{P}=-3]{\text{S}=-2} \text{مجموع مکعبات} = \text{S}^3 - 3\text{PS} \\ = (-2)^3 - 3(-3)(-2) = -8 - 18 = -26 \\ \text{و} \\ g(x) = -3 \Rightarrow x^2 + 2x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$



تذکر: اگر تابع $f \circ g$ و تابع درونی یعنی g رو داشته باشیم و تابع بیرونی یعنی f را بخواهیم باید $g(x)$ رو برابر t قرار بدیم. بعدش x رو تنها کنیم و برحسب t محاسبه کنیم و توی $f(g(x))$ که الان تبدیل به $f(t)$ شده هر جا x دیدیم، معادل آن را برحسب t می‌نویسیم. مثلاً اگر $f(g(x)) = 6x + 7$ و $g(x) = 3x + 5$ باشد:

$$g(x) = t \Rightarrow 3x + 5 = t \Rightarrow 3x = t - 5 \Rightarrow x = \frac{t - 5}{3}$$

$$f(g(x)) = 6x + 7 \xrightarrow[\text{x}=\frac{t-5}{3}]{\text{g(x)=t}} f(t) = 6\left(\frac{t-5}{3}\right) + 7 = 2(t-5) + 7 = 2t - 3 \xrightarrow{\text{f(t) همان f(x) است}} f(x) = 2x - 3$$

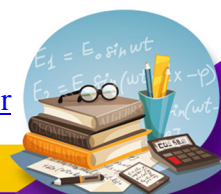
تست ۴۵: اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

(ریاضی ۹۲ و مشابه تجربی خارج ۹۵ و ریاضی ۹۳)

(۱) $2x^2 - 7x + 3$ (۲) $2x^2 - 3x + 7$ (۳) $4x^2 - 2x + 13$ (۴) $4x^2 - 4x + 11$

تست ۴۶: اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

(۱) $2x^2 + 3x + 1$ (۲) $2x^2 - 2x + 3$ (۳) $2x^2 - x + 4$ (۴) $2x^2 + x + 3$



(ریاضی ۹۱)

تست ۴۷: اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(g(x)) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

تست ۴۸: تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه،

(ریاضی خارج ۹۴)

نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۹ و ۴

تست ۴۹: اگر $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ ، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

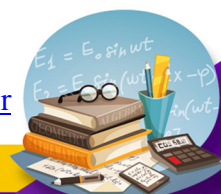
- (۱) $x^2 - 4$ (۲) $x^2 - 2$ (۳) x^2 (۴) $x^2 + 2$



تذکر: چنانچه تابع $f \circ g$ و تابع بیرونی f را داشته باشیم و تابع درونی g را بخواهیم، ابتدا به جای x های تابع f ، $g(x)$ قرار می‌دهیم و تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌یابیم. از آنجا که تابع $f \circ g$ را هم داریم، با مقایسه‌ی این دو ضابطه، تابع g را بدست می‌آوریم.
تست ۵۰: اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $2x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ و $g(x) = 3x + 4$ باشند، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

(تجربی خارج ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



تست ۵۱: اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (تجربی خارج ۹۰)

(۱) $x^2 - 1$ (۲) $x^2 + 1$ (۳) $x^2 - 2x$ (۴) $x^2 + 2x$

دامنه‌ی تابع مرکب

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب آن‌ها یعنی $f(g(x))$ به شرطی تشکیل می‌شود که اولاً x اجازه داشته باشد به عنوان دامنه وارد g بشود ($x \in D_g$) و ثانیاً، $g(x)$ هم اجازه داشته باشد تا به عنوان دامنه وارد $f(x)$ بشود ($g(x) \in D_f$) و خواهیم داشت:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

برای ترکیب $g(f(x))$ نیز داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



اگر نخواهید از راه تعریف، دامنه را بدست آورید، ضابطه‌ی $f \circ g$ یا $g \circ f$ را نوشته ولی به هیچ عنوان، آن را ساده نمی‌کنیم و از روی ضابطه، دامنه را بدست می‌آوریم.

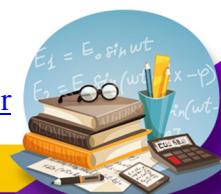
مثال ۵۲: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه‌ی $f \circ g$ را به دست آورید.

تست ۵۳: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) $[0, 1]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

تست ۵۴: اگر $g(x) = 1 - 2x$ و $f(x) = ax - 1$ ، به ازای کدام مقدار a دو تابع f و $f \circ g$ روی محور x متقاطع‌اند؟

(۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3



تست ۵۵: اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f \circ g(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(-1, 1)$

تست ۵۶: اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

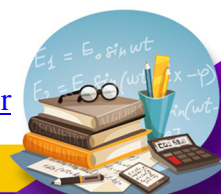
- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2] \cup (0, 2]$

تست ۵۷: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

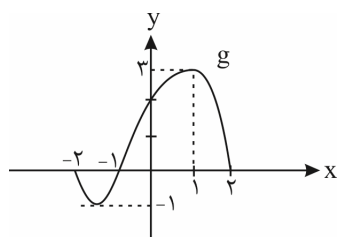
- (۱) $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{4}, +\infty)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(-1, \frac{1}{4})$

تست ۵۸: اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$



تست ۵۹: اگر $f(x) = 4x^2 - 2$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟



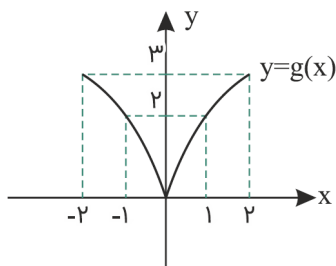
(۱) $[-1, 1]$

(۲) $[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}]$

(۳) $[-\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{4}]$

(۴) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

تست ۶۰: اگر $D_f = [0, 2]$ باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی $f \circ g$ کدام است؟



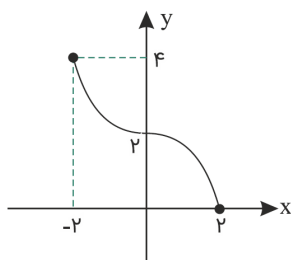
(۱) $[-2, 2]$

(۲) $[-1, 1]$

(۳) $[-2, -1] \cup [1, 2]$

(۴) $[0, 2]$

تست ۶۱: اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح خواهد بود؟



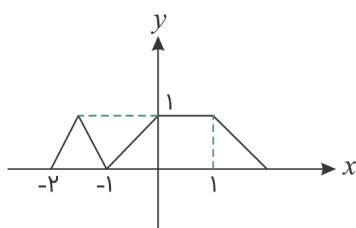
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴





تست ۶۲: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $f \circ f(x)$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$
- (۲) $[0, 1)$
- (۳) $(0, 1)$
- (۴) $\{1\}$

قدر مطلق

تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را تابع قدر مطلق می‌خوانند و آن را با نماد $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.

تذکر: $\sqrt{a^2} = |a|$



قدری که توش مثبت‌ه خودش میاد بیرون. قدری که توش منفیه قرینه‌اش!

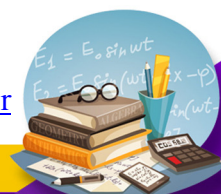
$|\sqrt{3} - \sqrt{5}| =$
 $|1 - \sqrt{2}| =$
 $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| =$
 $|\sin x - 1| =$
 $|1 - \cos x| =$

تست ۶۳: حاصل $|2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}|$ کدام است؟

- (۱) $3 - 2\sqrt{3}$
- (۲) $2\sqrt{3} - 3$
- (۳) ۳
- (۴) ۱

تست ۶۴: در کدام حالت تساوی $\frac{|a^2|}{|b|} = -\frac{a^2}{b}$ برقرار است؟

- (۱) $ab < 0$
- (۲) $ab > 0$
- (۳) $a < 0$
- (۴) $b < 0$



تست ۶۵: با فرض $x^2 - 2x < 0$ ، حاصل عبارت $A = |x| + |x-2| + |x-4|$ کدام است؟

$x-2$ (۴) $-3x+6$ (۳) $-x+6$ (۲) $3x-6$ (۱)

پاسخ: نامعادله $x^2 - x < 0$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

جواب

جواب نامعادله $0 < x < 2$ است. در این بازه داخل قدرمطلق اول، یعنی x مثبت است و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود، داخل قدرمطلق دوم، منفی است و قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود. در نهایت داخل قدرمطلق سوم منفی است و قرینه‌ی آن از قدرمطلق خارج می‌شود.

$$A = |x| + |x-2| + |x-4| = x - (x-2) - (x-4) = x - x + 2 - x + 4 = -x + 6$$

پس گزینه‌ی «۲» درست است.

ویژگی‌های تابع قدرمطلق:

۱) $|x| \geq 0$

۲) $\sqrt{u^2} = |u|$

۳) $|-x| = |x| \Rightarrow |a-b| = |b-a|$ یعنی داخل قدرمطلق را می‌توان در منفی ضرب نمود

$$۴) \begin{cases} |u| = a \xrightarrow{a \geq 0} u = \pm a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| = 3 \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow x = 4, -2 \\ |u| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq u \leq a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \\ |u| \geq a \xrightarrow{a \geq 0} u \geq a \text{ یا } u \leq -a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 4 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases} \end{cases}$$

۵) $|x| \geq x \xrightarrow{\text{مثلاً}} y = \sqrt{|x|-x} \xrightarrow{\text{دامنه}} |x|-x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq x$ بدیهی $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

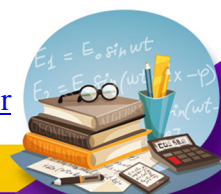
۶) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

۷) $|x+y| \leq |x| + |y|$ نامساوی مثلثی $\Rightarrow \begin{cases} |x+y| = |x| + |y| \Rightarrow xy \geq 0 \text{ هم‌علامت } x \text{ و } y \\ |x+y| < |x| + |y| \Rightarrow xy < 0 \text{ مختلف‌العلامت } x \text{ و } y \end{cases}$

۸) $|xy| = |x||y| \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x^2-1| = |x-1||x+1|$

۹) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

مثال: $|\frac{x-1}{x+2}| < 1$



یادت باشه: برای حل نامعادله قدرمطلق $|v| < |u|$ می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق‌ها از بین بروند:

$$|x-1| < |x+2| \xrightarrow{\text{توان } 2} (x-1)^2 < (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -6x < 3 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

حل معادلات قدرمطلق

(۱) معادلات به فرم $|f(x)| = a$ ، $(a \geq 0)$: برای حل این معادله به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = \pm a$$

مثلاً $|x-3| = 2$ به صورت $x-3 = \pm 2$ حل می‌شود که یک‌بار $x=5$ و یک‌بار $x=1$ به دست می‌آید.

(۲) معادلات به فرم $|f(x)| = |g(x)|$: حل این مدل از معادلات به صورت زیر است:

$$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

مثلاً برای حل معادله $|2x-1| = |x|$ داریم:

$$|2x-1| = |x| \Rightarrow 2x-1 = \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = x \Rightarrow x=1 \\ 2x-1 = -x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

(۳) معادلات به فرم $|f(x)| = g(x)$: در حل این دسته از معادلات چون طرف چپ، یک عبارت نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی باید عبارت سمت راست هم، نامنفی باشد یعنی $g(x) \geq 0$. حالا با این شرط، جاب‌ها را به صورت زیر می‌یابیم:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

فقط xهایی قبول می‌شوند که $g(x)$ را منفی نکنند.

مثلاً برای حل معادله $|x-1| = -2x$ داریم:

$$|x-1| = -2x \Rightarrow x-1 = \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x \Rightarrow x=-1 \\ x-1 = -2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $x = \frac{1}{3}$ باشد سمت راست تساوی یعنی $-2x$ ، منفی می‌شود پس $x = \frac{1}{3}$ قبول نیست ولی اگر $x = -1$ باشد سمت راست یعنی $-2x$ ، منفی نمی‌شود پس $x = -1$ قبول است.

(۴) معادلات به فرم $|f(x)| = f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \geq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-1| = x-1$ داریم:

$$|x-1| = x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

(۵) معادلات به فرم $|f(x)| = -f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \leq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-2| = 2-x$ داریم:

$$|x-2| = 2-x \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

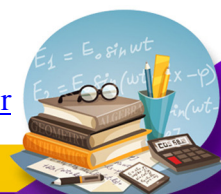
(۶) معادلات به فرم $|f(x)| + |g(x)| = 0$: چون قدرمطلق یک عبارت همواره نامنفی است، از درسنامه معادلات گنگ فهمیدیم که جمع چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام از آن‌ها صفر باشد.

(۷) اگر معادله با هیچ‌یک از ۶ حالت قبل تطابق نداشت، باید به کمک تعیین علامت جواب‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم. مثلاً معادله

$$|x-3| = x-3 \text{ با هیچ‌یک از ۶ مورد فوق حل نمی‌شود پس به کمک تعیین علامت حلش می‌کنیم.}$$

برای این منظور ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم که می‌شود $x=0$ و $x=1$ و سپس x را یک‌بار کوچک‌تر از ریشه کوچک، یک‌بار بین دو ریشه و یک‌بار بزرگ‌تر از ریشه بزرگ‌تر قرار می‌دهیم. سپس جواب به دست آمده را به شرطی قبول می‌کنیم که در محدوده تعیین شده قرار گرفته باشد.

$$x < 0 \Rightarrow -x - (2x-2) = x-3 \Rightarrow -x-2x+2 = x-3 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$



$x = \frac{5}{4}$ در محدوده $x < 0$ قرار ندارد و اشتراکشان \emptyset شد پس $x = \frac{5}{4}$ قبول نمی‌شود.

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow x - (2x - 2) = x - 3 \Rightarrow x - 2x + 2 = x - 3 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

اشتراکشان \emptyset شد پس $x = \frac{5}{2}$ قبول نمی‌شود.

$$x \geq 1 \Rightarrow x + 2x - 2 = x - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

اشتراکشان \emptyset شد پس $x = -\frac{1}{2}$ قبول نمی‌شود.

پس این معادله جواب ندارد.

تست‌ها

تست ۶۶: مجموعه جواب معادله $|x^3 - 9x| + x^3 - 9x = 0$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۶۷: مجموعه جواب نامعادله $(-x^2 - 6)(5 - |2x - 1|) \leq 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\mathbb{R} - (-2, 3)$ ۲ (۲) $[-2, 3]$ ۳ (۳) $(-2, 3)$ ۴ (۴) $\mathbb{R} - [-2, 3]$

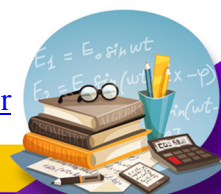
تست ۶۸: مجموع ریشه‌های معادله $3|x| - |x - 1| + x = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{4}{3}$ ۲ (۲) $-\frac{2}{15}$ ۳ (۳) $-\frac{7}{15}$ ۴ (۴) $-\frac{4}{5}$

(تجربی خارج ۹۳)

تست ۶۹: مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 2x < |x - 2|$ به صورت کدام بازه است؟

- ۱ (۱) $(-1, 1)$ ۲ (۲) $(-1, 2)$ ۳ (۳) $(0, 2)$ ۴ (۴) $(1, 2)$



تست ۷۰: اگر رابطه‌ی $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x ، y و z چگونه‌اند؟
(تجربی ۸۶)

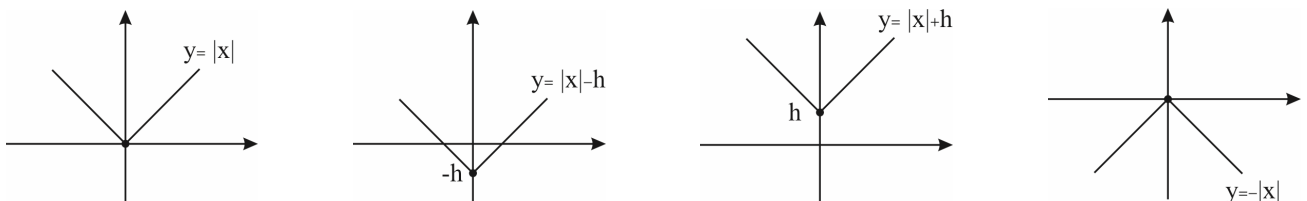
- (۱) مساوی هم (۲) هم علامت (۳) مثبت (۴) منفی

تست ۷۱: اگر $|x+y| < |x|+|y|$ ، آن گاه حاصل $\sqrt{x^6 y^2}$ کدام است؟
(۱) $|x^3|y$ (۲) $x^3 y$ (۳) $-x^3 y$ (۴) $x^3 |y|$

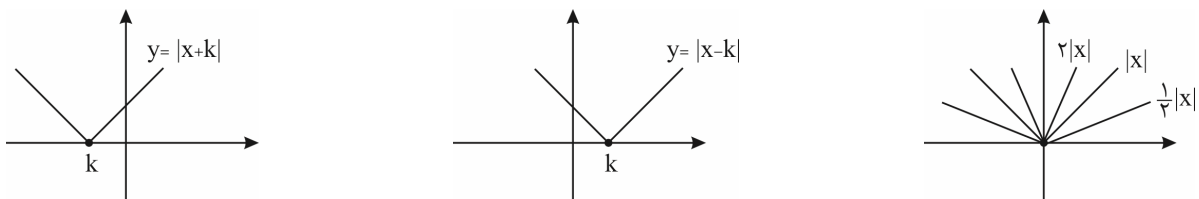
تست ۷۲: اگر مجموعه جواب نامعادله $|ax+b| > 3$ به صورت $\mathbb{R} - [-1, 2]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟
(۱) ۱ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

نمودارهای قدر مطلق

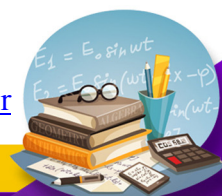
(۱) رسم به کمک انتقال: این روش برای رسم تابع‌هایی به فرم $\pm |x \pm k| \pm h$ کاربرد دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



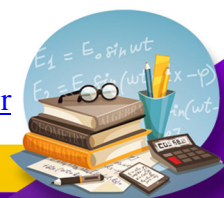
اگر $|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم به $-|x|$ می‌رسیم. همان $|x|$ است که به اندازه h بالا رفته است. ($h > 0$) همان $|x|$ است که به اندازه h پایین آمده است. ($h > 0$)



همان $|x|$ است که به اندازه k به راست رفته است. ($k > 0$) همان $|x|$ است که به اندازه k به چپ رفته است. ($k > 0$)



رسم چند تابع قدر مطلق:





۲) رسم نمودارهای مجموع و تفاضل قدرمطلق و عبارات خطی:

وقتی چند قدرمطلق از درجه اول جمع یا تفریق شده بودند، از روش نقطه‌یابی برای رسم استفاده می‌کنیم. این روش برای رسم تابع‌هایی که به شکل $y = mx + n + |ax + b| + c$ بسیار کارآمد است. برای نقطه‌یابی کافی است ریشه‌های قدرمطلق را به تابع بدهیم و سپس یک عدد بعد از ریشه بزرگ‌تر و یک عدد قبل از ریشه کوچک‌تر را نیز به جای x ‌های تابع قرار داده و نقاط به دست آمده را به هم وصل می‌کنیم. مثلاً برای رسم $y = |x - 3| + |x + 2|$ داریم:

$$\underbrace{\begin{matrix} A & | & 3 \\ & | & 5 \end{matrix}} \quad \underbrace{\begin{matrix} B & | & -2 \\ & | & 5 \end{matrix}}$$

مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها

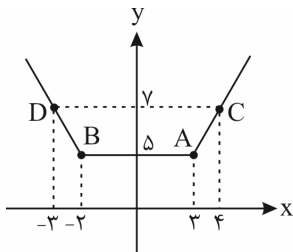
$$\underbrace{\begin{matrix} C & | & 4 \\ & | & 7 \end{matrix}}$$

بعد از ریشه بزرگ‌تر

$$\underbrace{\begin{matrix} D & | & -3 \\ & | & 7 \end{matrix}}$$

قبل از ریشه کوچک‌تر

ضمناً یادتان باشد که در این مدل از توابع، نمودار در ریشه‌های داخل قدرمطلق دچار شکستگی می‌شود.



به $f(x) = |x - a| + |x - b|$ تابع گلدانی هم می‌گویند که در آن $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [|b - a|, +\infty)$ و نقاط شکستگی آن

$$A \left| \begin{matrix} a \\ | \\ b - a \end{matrix} \right. \quad \text{و} \quad B \left| \begin{matrix} b \\ | \\ b - a \end{matrix} \right. \text{ می‌باشند.}$$

برای رسم $y = |x - 1| - |x + 3|$ هم داریم:

$$\underbrace{\begin{matrix} A & | & 1 \\ & | & -4 \end{matrix}} \quad \underbrace{\begin{matrix} B & | & -3 \\ & | & 4 \end{matrix}}$$

مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها

$$\underbrace{\begin{matrix} C & | & 2 \\ & | & -4 \end{matrix}}$$

بعد از ریشه بزرگ‌تر

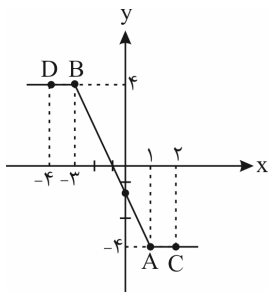
$$\underbrace{\begin{matrix} D & | & -4 \\ & | & 4 \end{matrix}}$$

قبل از ریشه کوچک‌تر

$$E \left| \begin{matrix} 0 \\ | \\ -2 \end{matrix} \right.$$

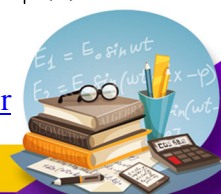
توجه کنید که محل برخورد منحنی به محور y ها با جایگذاری $x = 0$ به دست می‌آید که نقطه سهمی است:

اکنون این نقاط را به هم وصل می‌کنیم.



به $f(x) = |x - a| - |x - b|$ تابع سرسره‌ای هم گفته می‌شود که در آن $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-|b - a|, |b - a|]$ و نقاط شکستگی آن

$$A \left| \begin{matrix} a \\ | \\ f(a) \end{matrix} \right. \quad \text{و} \quad B \left| \begin{matrix} b \\ | \\ f(b) \end{matrix} \right. \text{ می‌باشند.}$$



برای رسم $y = x - 1 + |2x - 4| - |x + 1|$ نیز داریم:

$$\underbrace{\begin{matrix} A & B \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{matrix}}_{\text{مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها}}$$

مختصات ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها

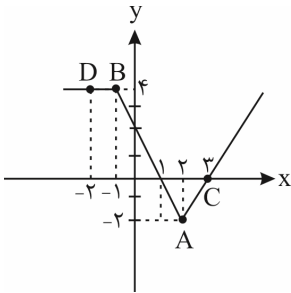
$$\underbrace{\begin{matrix} C \\ 3 \\ 0 \end{matrix}}_{\text{بعد از ریشه کوچک‌تر}}$$

بعد از ریشه کوچک‌تر

$$\underbrace{\begin{matrix} D \\ -2 \\ 4 \end{matrix}}_{\text{قبل از ریشه کوچک‌تر}}$$

قبل از ریشه کوچک‌تر

از مختصات نقطه کمکی $E \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$ نیز استفاده می‌کنیم تا محل برخورد با محور y ها به دست بیاید.



ویژگی‌هایش را ببینید:

۱- دامنه‌اش \mathbb{R}

۲- برد آن $(-\infty, +2]$

۳- دارای دو ریشه

۴- از ناحیه سوم عبور نمی‌کند.

پس به طور کلی برای فهمیدن کمترین مقدار عبارتهایی مثل عبارات بالا کافی است مقدار تابع را به ازای ریشه هر کدام از قدرمطلق‌ها پیدا کنیم و کمترین مقدار به دست آمده را انتخاب کنیم.

تست ۷۳: کمترین مقدار تابع $f(x) = |3x| + |x + 2| - x$ برابر کدام است؟

۴) -۱

۳) ۲

۲) ۱

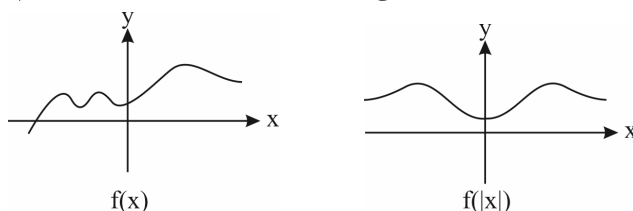
۱) صفر

۳) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور طول‌ها را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.



مثلاً اگر $f(x) = |x| - 1$ و $g(x) = x^2 - 4$ ، $|f(x)|$ و $|g(x)|$ به صورت زیر رسم می‌شوند.

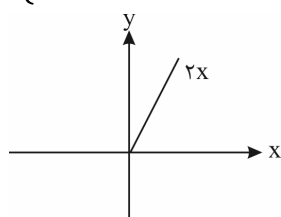
۴) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمتی را که سمت چپ محور y ها (یعنی $x < 0$) است، حذف می‌کنیم و قرینه قسمت سمت راست (یعنی $x > 0$) را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.



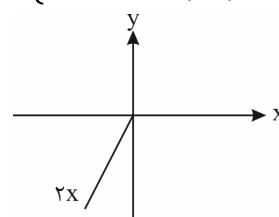
۵) رسم توابع شامل قدرمطلق در حالت کلی:

اگر به حالت‌های ۱ تا ۴ برخورد نکردید، برای رسم کافی است قبل و بعد از ریشه داخل قدرمطلق را بررسی کرده و قدرمطلق را به کمک تعیین علامت حذف کنید و هر ضابطه را در بازه خودش رسم کنید.

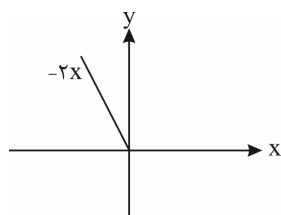
$$1) y = x + |x| = \begin{cases} x \geq 0 & x + x = 2x \\ x < 0 & x - x = 0 \end{cases}$$



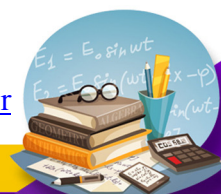
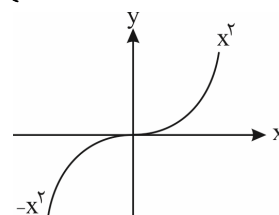
$$2) y = x - |x| = \begin{cases} x \geq 0 & x - x = 0 \\ x < 0 & x - (-x) = 2x \end{cases}$$



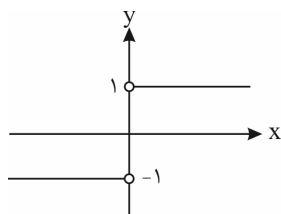
$$3) y = |x| - x = \begin{cases} x \geq 0 & x - x = 0 \\ x < 0 & x - x = -2x \end{cases}$$



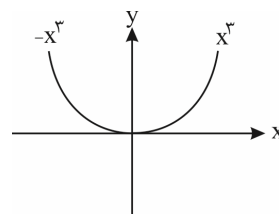
$$4) y = x |x| = \begin{cases} x \geq 0 & x(x) = x^2 \\ x < 0 & x(-x) = -x^2 \end{cases}$$



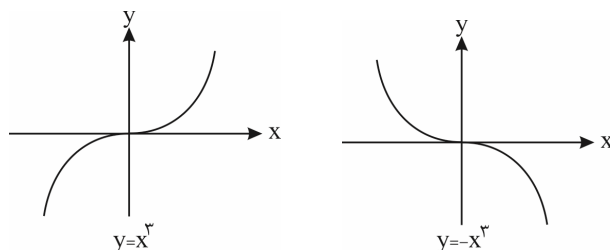
$$5) y = \frac{x}{|x|} \text{ یا } \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x > 0 & \frac{x}{x} = 1 \\ x < 0 & -\frac{x}{x} = -1 \end{cases}$$



$$6) y = x^2 |x| = \begin{cases} x \geq 0 & x^2(x) = x^3 \\ x < 0 & x^2(-x) = -x^3 \end{cases}$$



توضیحات: مثلاً برای مورد ۶، این طوری به فارسی می‌خوانیم: سمت راست مبدأ ($x \geq 0$) نمودار x^3 را رسم کنید (و یا از نمودار x^3 فقط سمت راست را انتخاب کنید) و سمت چپ مبدأ ($x < 0$) نمودار $-x^3$ را رسم کنید (و یا از نمودار $-x^3$ فقط سمت چپ را انتخاب کنید):



(تجربی ۹۵)

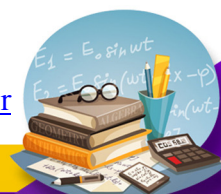
تست ۷۴: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

- ۳ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۲) ۲ (۱)

(ریاضی ۹۹)

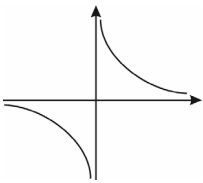
تست ۷۵: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = \frac{1}{3}x + 2$ و $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)



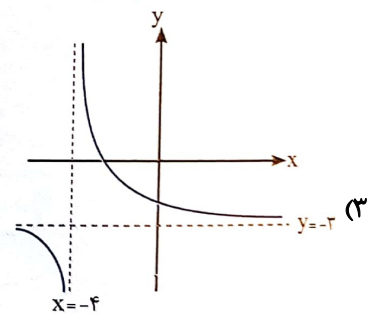
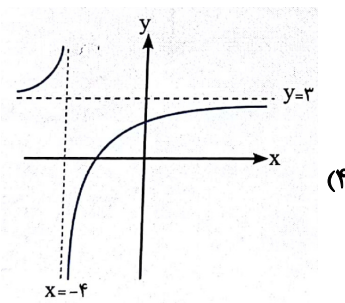
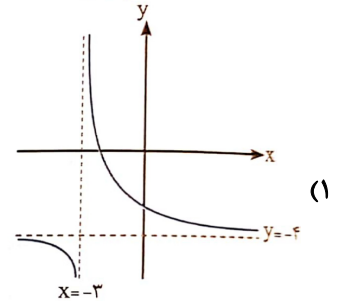
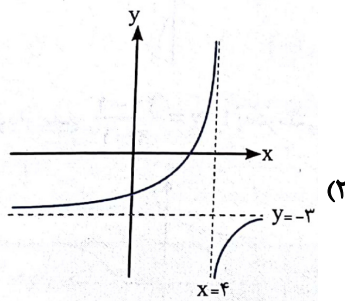
تابع گویا

هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌های جبری باشند به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد.

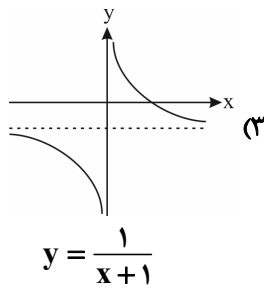
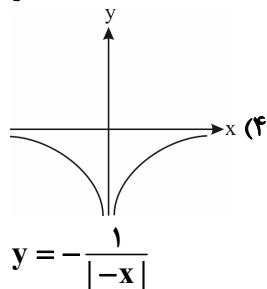
ساده‌ترین تابع گویا $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{0\}$ است که به صورت  می‌باشد. حال با توجه به این تابع، بقیه را با

استفاده از انتقال رسم می‌کنیم.

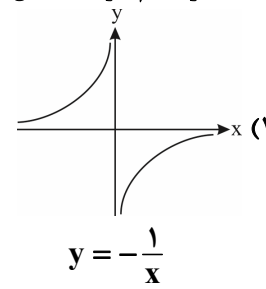
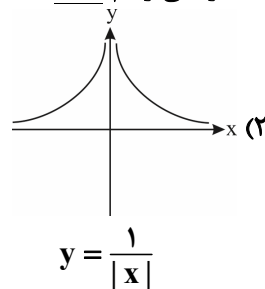
تست ۷۶: نمودار $y = \frac{1}{x+4} - 3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟



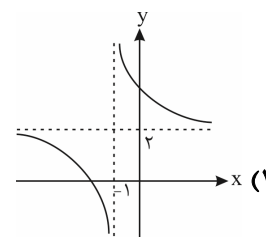
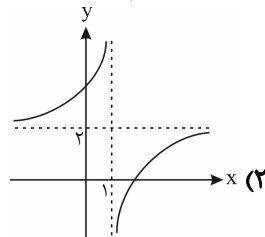
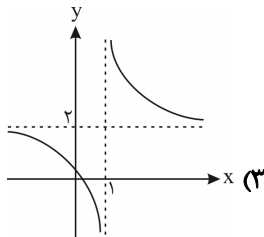
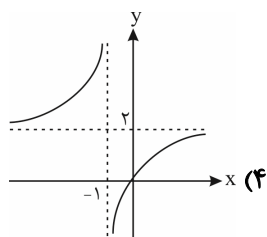
(مشابه تمرین کتاب درسی)



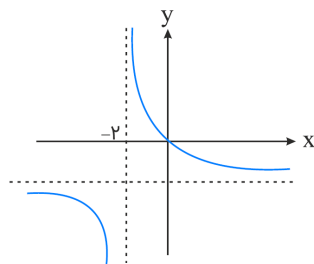
تست ۷۷: در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟



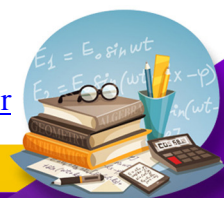
تست ۷۸: کدام یک از گزینه‌های زیر نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-1}$ را به درستی نمایش می‌دهد؟



تست ۷۹: اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

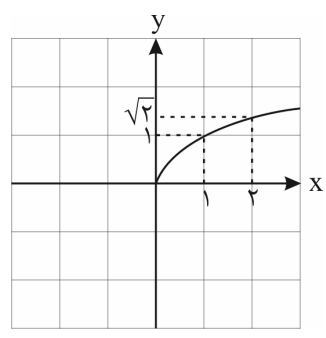


- (۱) -۱
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{3}{2}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$



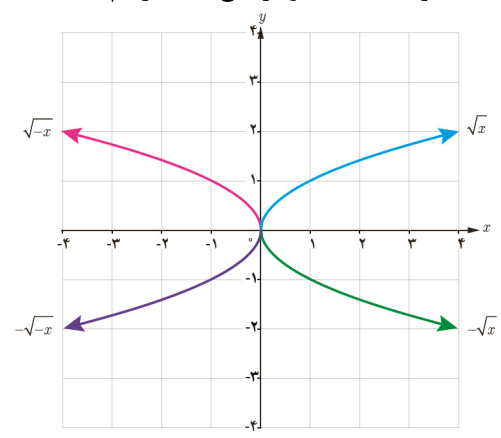
تابع رادیکالی

هر تابع به صورت $f(x) = \sqrt{p(x)}$ (یک تابع از x است) را یک تابع رادیکالی (ریشه دوم) می‌نامیم. برای محاسبه دامنه‌ی این نوع توابع باید نامعادله‌ی $p(x) \geq 0$ را حل کرد. به طور مثال به تابع زیر و نمودار آن توجه کنید:

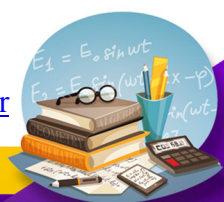
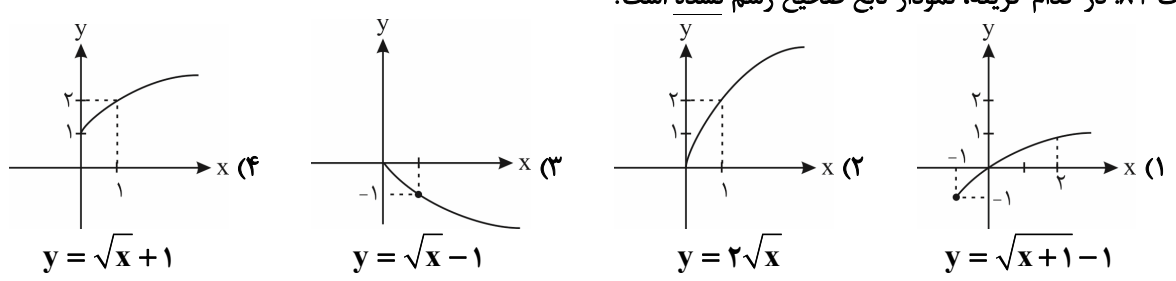


$$f(x) = \sqrt{x}$$

اکنون با استفاده از قوانین انتقال می‌توانیم توابع رادیکالی به صورت $k\sqrt{ax+b}$ را رسم کنیم. مثال ۸۰: نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع \sqrt{x} رسم کنید.



تست ۸۱: در کدام گزینه، نمودار تابع صحیح رسم نشده است؟



تست ۸۲: با انتقال نمودار $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ به نمودار $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$ رسیده‌ایم. مراحل انتقال به ترتیب کدام است؟

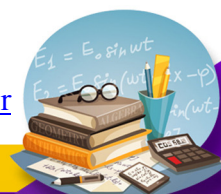
(۱) دو واحد به چپ و یک واحد به بالا
 (۲) دو واحد به راست و یک واحد به بالا
 (۳) دو واحد به چپ و یک واحد به پایین
 (۴) دو واحد به راست و یک واحد به پایین

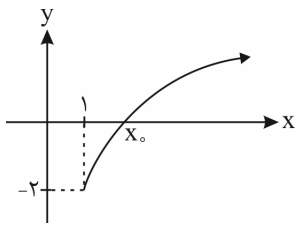
تست ۸۳: نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع حاصل کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{x-2} - 1$
 (۲) $y = -\sqrt{x-2} - 1$
 (۳) $y = -\sqrt{x+2} - 1$
 (۴) $y = \sqrt{x+2} - 1$

تست ۸۴: دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x-4}$ بازه‌ی $[a, +\infty)$ است، در این صورت دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $g(x) = \sqrt{5-(a+1)x}$ شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

(۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴



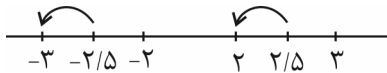


تست ۸۵: با توجه به نمودار تابع $y = -2 + \sqrt{x-1}$ ، x_0 کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۳ (۴)

شگردهای جزء صحیح

جزء صحیح هر عددی مانند x را به شکل $[x]$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر x عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خودش برابر است. مثلاً $[2] = 2$ و اگر x عددی غیر صحیح باشد، اولین عدد صحیح قبل آن، برابر جزء صحیح x است. مثلاً $[2/5] = 2$ و $[-2/5] = -3$ می‌باشد.



خاصیت جزء صحیح

(۱) خروجی جزء صحیح همواره یک عدد صحیح است، یعنی برای هر $x \in \mathbb{R} : [x] \in \mathbb{Z}$ مثلاً $[4] = 4$ و $[\pi = 3/14] = 3$ و $[-0/6] = -1$.

(۲) اگر عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد می‌توانیم جزء صحیح را حذف می‌کنیم. یعنی برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم: $[x] = x$.
 (۳) اعداد ثابت و عبارت‌هایی که مطمئن هستیم صحیح هستند می‌توانیم از جزء صحیح خارج کنیم یعنی اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد $[x+k] = [x] + k$ است.

مثلاً $[x+3]$ همان $[x] + 3$ است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

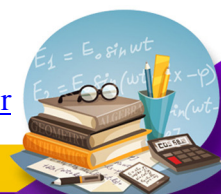
$$\begin{aligned} 1) \quad [x + \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}] &= [x] + [x] = 2[x] \\ 2) \quad [x + \underbrace{2[x]}_{\in \mathbb{Z}}] &= [x] + 2[x] = 3[x] \\ 3) \quad [x - \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}] &= [x] - [x] = 0 \end{aligned}$$

$$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$$

(۴) خاصیت روبه‌رو در برخی از تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\text{مثلاً اگر دامنهٔ تابع } y = \frac{2x}{[2x] - [x]} \text{ را بی‌پرسند، داریم:}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow [2x] - [x] = 0 \xrightarrow{[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]} [x] + [x + \frac{1}{2}] - [x] = 0$$



$$\Rightarrow [x + \frac{1}{4}] = 0 \xrightarrow[k \leq u < k+1]{|u|=k, k \in \mathbb{Z}} 0 \leq x + \frac{1}{4} < 1 \xrightarrow{-(-\frac{1}{4})} -\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] = (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$$

(۵) برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $k \leq x < k+1 \Rightarrow [x] = k$ یعنی اگر $[x] = 2$ باشد، حدود x به صورت $2 \leq x < 3$ است.

(۶) مجموع عبارت‌های $[x]$ و $[-x]$ را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اگر $[x]$ را به سمت راست تساوی ببریم، در این صورت داریم:

$$\text{اگر } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x]$$

$$\text{اگر } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

(۷) همواره رابطه $[x] + [y] \leq [x+y]$ برقرار است.

$$\begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ [x] + [y] \leq [x+y] \end{cases}$$

به مقایسهٔ مقابل توجه کنید:

(۸) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، مقدار $[x+y]$ می‌تواند دو مقدار متمایز زیر را اختیار کند: $[x+y] = [x] + [y]$ یا $[x] + [y] + 1$

تست‌ها

(تجربی خارج ۸۸)

تست ۸۶: اگر $x^2 + x < 0$ ، آن‌گاه $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

۱ (۴)

۳ (صفر)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

تست ۸۷: اگر $[x^2 - 6x] = [x^2 - 10x] = 7$ باشد، حاصل $[(x-4)^2]$ کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۷ (۱)



تست ۸۸: اگر $(1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6 = 198$ ، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱۹۵ (۱) ۱۹۶ (۲) ۱۹۷ (۳) ۱۹۸ (۴)

تست ۸۹: اگر $[\frac{x}{p}] = 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

تست ۹۰: برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(تجربی ۹۱)

تست ۹۱: حاصل عبارت $[\frac{x-1}{p}] + [\frac{3-x}{p}]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱) صفر و ۱ ۲) صفر و -۱ ۳) -۱ و -۲ ۴) ۱ و ۲

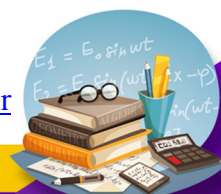
پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{x-1}{p}] + [\frac{3-x}{p}] = [\frac{x-1}{p}] + [\frac{2+1-x}{p}] = [\frac{x-1}{p}] + [\frac{1-x}{p} + 1] = [\frac{x-1}{p}] + [\frac{1-x}{p}] + 1$$

$$[\frac{x-1}{p}] + [\frac{1-x}{p}] + 1 = \underbrace{\text{صفر یا } -1}_{\text{صفر یا } -1} + 1 = 1$$

$$\text{پس: } [u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



(تجربی خارج ۹۰)

تست ۹۲: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

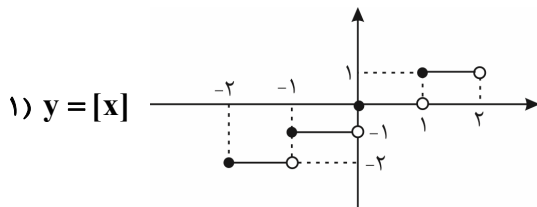
۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

نمودارهای معروف براکتی

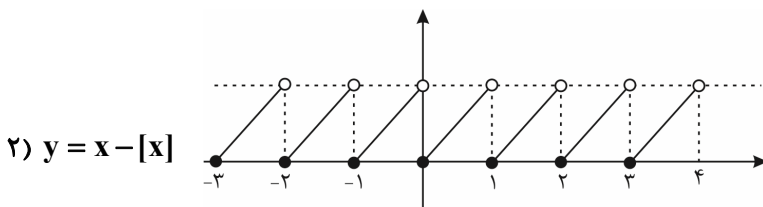
شکل‌های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)



توجه کنید در تابع $y = [x]$ ، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلخواه در بازه $[-2, 2)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-2, 2]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطه $x = 2$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$$x = 2 \Rightarrow y = [2] = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

و این یعنی به شکل بالا باید نقطه $A(2, 2)$ نیز اضافه شود.



ویژگی‌های تابع $y = x - [x]$

(۱) دامنه \mathbb{R}

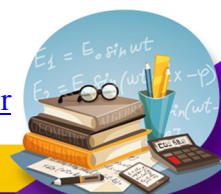
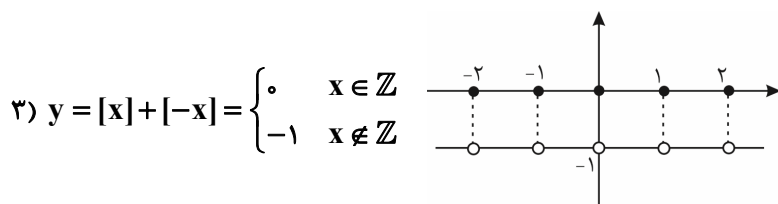
(۲) برد $[0, 1)$ یعنی: $0 \leq x - [x] < 1$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.

(۴) طول هر پله $\sqrt{2}$ واحد است.

(۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$

در این‌جا به طور دلخواه آن را در بازه $[-3, 4)$ رسم کردیم.



ویژگی‌های تابع $y = [x] + [-x]$

(۱) دامنه \mathbb{R}

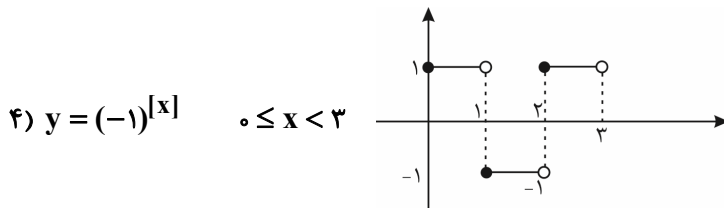
(۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 0\}$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

(۴) در تمام نقاط دارای حد -1 است یعنی $\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} [x] + [-x] = -1$

(۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$.

(۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، -1 می‌شود.



ویژگی‌های $y = (-1)^{[x]}$

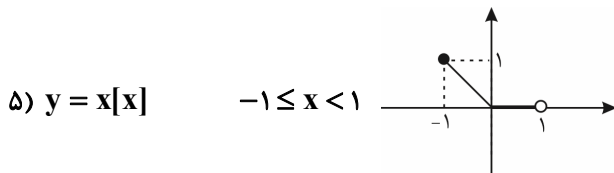
در اینجا به طور مثال در بازه $[0, 3)$ رسمش کردیم.

(۱) دامنه \mathbb{R}

(۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 1\}$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.

(۴) متناوب است با دوره تناوب $T = 2$.



در اینجا به طور مثال در بازه $[-1, 1)$ رسمش کردیم.

توجه کنید نقطه $x = 0$ برای این تابع، نقطه گوشه به حساب می‌آید.

رسم نمودار $y = [ax]$

تابع $y = [ax]$ از روی تابع $y = [x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y = [\frac{x}{2}]$ که

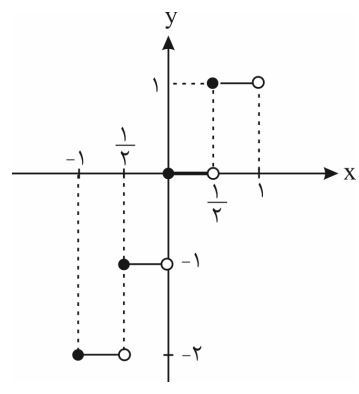
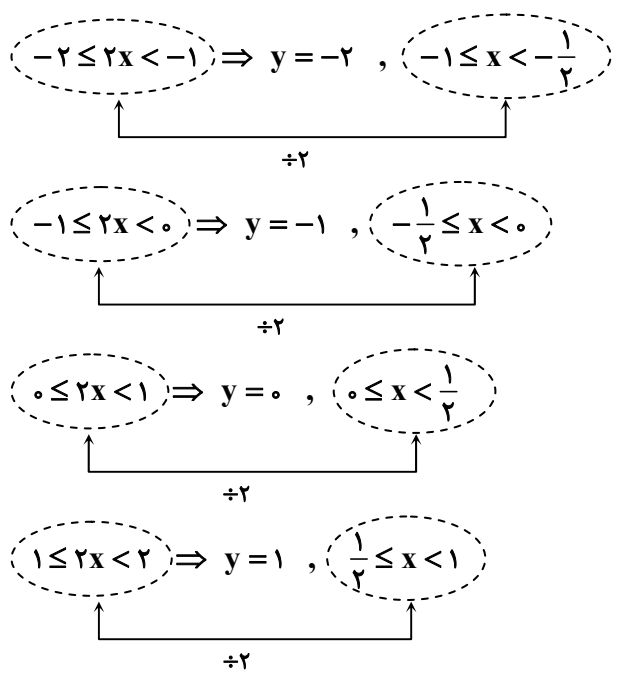
$a = \frac{1}{2}$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2} = 2$ برابر و در رسم $y = [2x]$ که $a = 2$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

مثال ۹۳: تابع $y = [2x]$ را در بازه $[-1, 1)$ رسم کنید.

پاسخ: $-1 \leq x < 1$ است، پس $-2 \leq 2x < 2$ ، (داخل جزء صحیح از -2 تا 2 تغییر می‌کند). این محدوده را یک واحد یک واحد بازه‌بندی می‌کنیم و در هر بازه مقدار $[2x]$ را یافته و آن را در محدوده دامنه خود رسم می‌کنیم. مثلاً $-2 \leq 2x < -1$ ، پس $[2x] = -2$ و خط

$y = -2$ را در بازه $-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{4} \rightarrow -2 \leq 2x < -1$ یعنی $[-1, -\frac{1}{2})$ رسم می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

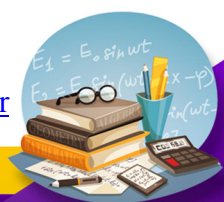




مثال ۹۴: نمودار تابع $y = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ را در بازه $[-4, 4]$ رسم کنید.

تست ۹۵: نمودار تابع $y = x - [x]$ و $x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟ (تجربی)

- (۱) $(4, 1)$
- (۲) $(4, \sqrt{2})$
- (۳) $(5, 1)$
- (۴) $(5, \sqrt{2})$



(تجربی خارج)

تست ۹۶: اگر $f(x) = [x]$ ، مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟
 (۱) $\{0\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-1, 0, 1\}$

(تجربی خارج ۸۶)

مثال ۹۷: نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$; $x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

تست ۹۸: برد تابع $y = x - 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ کدام است؟

(۱) $[-2, 0]$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[-1, 1]$

(تجربی ۹۹)

تست ۹۹: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟
 (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[1, 4]$

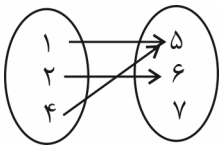


تابع یک‌به‌یک

۱) تابعی که در آن هیچ دو زوج متمایزی، مولفه دوم تکراری نداشته باشد، یک‌به‌یک می‌گویند. تابع یک‌به‌یک دارای تعداد عضوهای یکسان دامنه و برد است.

برای پیدا کردن مجهول در تست‌های مربوط به تابع یک‌به‌یک، ابتدا سراغ مولفه‌های دوم یکسان می‌رویم و مولفه‌های اولشان را برابر می‌گذاریم. مثلاً در $f = \{(2,5)(3,1)(m,5)\}$ به سراغ $(2,5), (m,5)$ می‌رویم و مولفه‌های اولشان را مساوی قرار می‌دهیم: $m = 2$ توجه کنید در این مدل از سوالات شرط تابع بودن را نیز کنترل کنید. مثلاً $f = \{(1,5)(1,6)\}$ اصلاً تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک بودن را کنترل نمی‌کنیم.

۲) در نمودار ون چنانچه بیش از یک فلش به مولفه‌های دوم وارد شود، تابع دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. مثلاً:

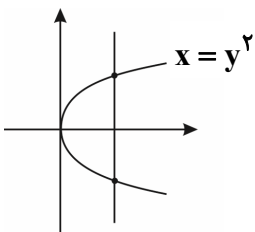


یک‌به‌یک نیست چون $(1,5), (4,5)$ دارای مولفه دوم تکراری هستند.

۳) در نمودار دکارتی، تابعی یک‌به‌یک است که در آن هر خط به موازات محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

<p>یک‌به‌یک نیست چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.</p>	<p>یک‌به‌یک نیست، چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.</p>	<p>یک‌به‌یک است. چون هر خط افقی دلخواه، حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کرده است.</p>
--	---	--

توجه کنید نمودار اصلاً بیانگر یک تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک بودن را اصلاً کنترل نمی‌کنیم.



یادداشت باشد: معمولاً وجود x^2 ، $|x|$ ، $[x]$ یا نسبت‌های مثلثاتی $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ و $\cot x$ تابع را غیریک‌به‌یک می‌کند.

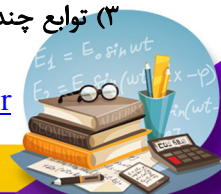
چند نکته مهم:

۱) تابع خطی $y = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ (شیب غیرصفر، خطی که افقی نباشد) همواره یک‌به‌یک است.

۲) تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در فاصله طول رأس به بعد و یا طول رأس به قبل، یک‌به‌یک است یعنی در این فاصله‌ها: $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$

یا $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$

۳) توابع چند جمله‌ای از درجه زوج (بزرگ‌توان x زوج است) غیر یک‌به‌یک هستند.



۴) توابع $x + |x|$ ، $|x| - x$ ، $x - |x|$ یا $\frac{|x|}{x}$ با توجه به نمودارشان که در درس نامه قدرمطلق دیدیم، یک‌به‌یک نیستند چون در بخشی از نمودارشان به شکل یک خط افقی درمی‌آیند و هر وقت قسمتی از نمودار به شکل یک خط افقی باشد تابع حتماً غیریک‌به‌یک است.

۵) توابع $[x]$ ، $x - [x]$ و $[x] + [-x]$ به دلیل مشابه مورد بالا، غیریک‌به‌یک هستند.

۶) تابع $x + [x]$ یک‌به‌یک است.

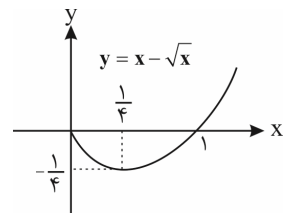
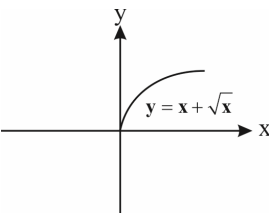
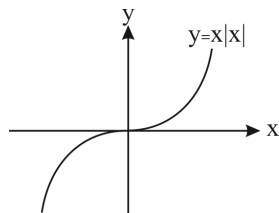
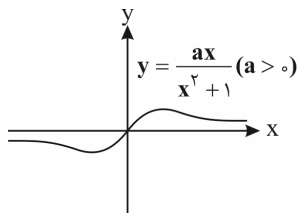
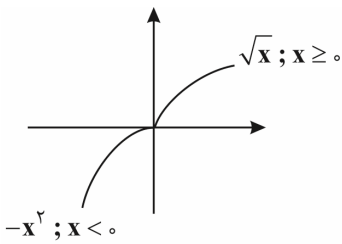
۷) تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک‌به‌یک است.

۸) در بررسی یک‌به‌یک بودن توابع دو یا چند ضابطه‌ای ابتدا یک‌به‌یک بودن ضابطه را در دامنه آن بررسی کرده و سپس بررسی می‌کنیم که هر خط افقی بیشتر از یک مرتبه نمودار تابع را قطع نکند

(برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد)، مثلاً تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ یک‌به‌یک است چون طبق

نمودار هر خط افقی فقط در یک نقطه نمودار تابع را قطع می‌کند.

۹) توابع $x|x|$ و $x + \sqrt{x}$ یک‌به‌یک و توابع $x - \sqrt{x}$ و $\frac{ax}{x^2+1}$ غیریک‌به‌یک هستند.



تست ۱۰۰: اگر تابع $f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (m, 3)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار n کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

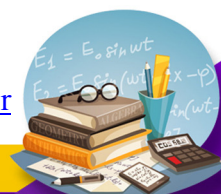
تست ۱۰۱: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با کدام ضابطه، یک‌به‌یک است؟

۴) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

۳) $f(x) = x|x|$

۲) $f(x) = x + |x|$

۱) $f(x) = x - |x|$



تست ۱۰۲: اگر تابع $f(x) = a|x| + 2x$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(-2, 2)$

تست ۱۰۳: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ 2x-a & x < 1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

(۱) \mathbb{R} (۲) \emptyset (۳) $[-3, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -3]$

تابع معکوس (تابع وارون)

تابع یک‌به‌یک f ، در زیر داده شده است. اگر جای مولفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب f را عوض کنیم، تابع دیگری مانند g به دست می‌آید:

$$f = \{(1, 2)(0, -3)(4, 7)\}, \quad g = \{(2, 1)(-3, 0)(7, 4)\}$$

دو تابع f و g را معکوس هم می‌نامند اگر برد و دامنه دو تابع بالا را مقایسه کنید می‌بینید که دامنه f برابر برد g و برد f مساوی دامنه g

$$D_f = R_g = \{1, 0, 4\}, \quad R_f = D_g = \{2, -3, 7\}$$

است:

هرگاه $f: A \rightarrow B$ یک‌به‌یک باشد، تابع معکوس f را که با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

همان‌طور که در مثال دیدیم، می‌توانیم بگوییم که همواره $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$ می‌باشد.

توجه کنید که شرط لازم و کافی برای آن که f^{-1} تابع باشد (f معکوس‌پذیر باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد. پس اگر در یک سؤال از ما

شرط وارون‌پذیری بپرسند، در واقع منظور همان شرط یک‌به‌یک بودن است که در درس‌نامه قبلی بسیار کامل بررسی کردیم.

نکته مهم در معکوس توابع مرکب: اگر f و g دو تابع یک‌به‌یک باشند آن‌گاه همواره داریم:

$$1) (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$$

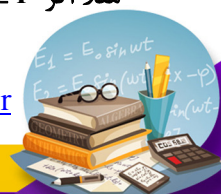
$$2) (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

تذکر: اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی f^{-1} است یعنی:

$$f(2) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

مثلاً اگر $A(2, 3) \in f$ باشد:



تست ۱۰۴: در تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟
 (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$
 ۲) $\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$
 ۳) $\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\}$
 ۴) $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

تست ۱۰۵: دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟
 (تجربی خارج ۹۶)

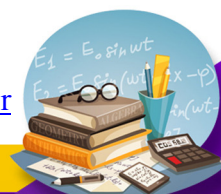
۱) ۲
 ۲) ۳
 ۳) ۶
 ۴) ۷

تست ۱۰۶: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟
 (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$
 ۲) $\frac{3}{5}$
 ۳) $\frac{2}{3}$
 ۴) $\frac{3}{4}$

تست ۱۰۷: دو تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟
 (ریاضی خارج ۹۳)

۱) -۴
 ۲) -۱
 ۳) ۲
 ۴) ۴



تست ۰۸:۱ اگر $f = \{(1,2), (2,5), (0,3), (4,-1)\}$ و $g = \{(2,3), (-1,4), (4,1), (3,0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ شامل چند عضو ۲ تایی است؟ (تجربی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱) نمودار تابع‌های f ، f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع یک‌به‌یک نسبت به خط $y = x$ متقارن باشد، آن‌گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

۲) اگر $f(a) = b$ ، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ به عبارت دیگر اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطه (b, a) روی نمودار f^{-1} است.

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \quad (۳)$$

۴) اگر نمودارهای f و f^{-1} ، یکدیگر را در نقطه (a, b) قطع کنند آن‌گاه $f(a) = b$ و $f(b) = a$. یعنی هم (a, b) و هم (b, a) ، نقاط تقاطع هستند.

۵) اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ، $x \in D_f$ یا $x \in R_{f^{-1}}$ (الف)

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید دامنه‌اش و اگر f^{-1} را داشتید بردش را حساب می‌کنید.

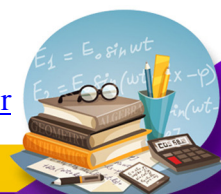
ب) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ ، $x \in D_{f^{-1}}$ یا $x \in R_f$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید بردش و اگر f^{-1} را داشتید دامنه‌اش را حساب می‌کنید.

۶) دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ فقط به شرطی با هم مساوی هستند که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و برد f یکسان باشد. بعضی‌ها فکر می‌کنند که چون $f^{-1}(f(x)) = x$ و $f(f^{-1}(x)) = x$ هستند پس این دو همیشه برابرند.

مثال: در تابع $f(x) = -x + 1$ با شرط $-1 \leq x \leq 2$ ، $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ است چون برد این تابع در محدوده دامنه $[-1, 2]$ ، برابر است. $[-1, 2]$ است.

۷) اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها همانی است اما عکس موضوع همواره برقرار نیست.



(تجربی ۹۱)

تست ۹۰: ضابطه‌ی وارون $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1$ (۲)

$y = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1$ (۱)

$y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1$ (۴)

$y = \frac{x}{|x|-1}, |x| > 1$ (۳)

(تجربی خارج ۹۲)

تست ۱۱۰: ضابطه‌ی معکوس $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

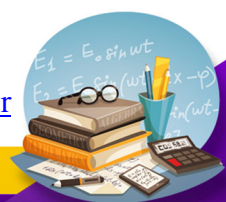
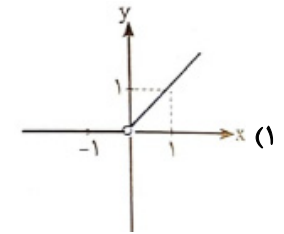
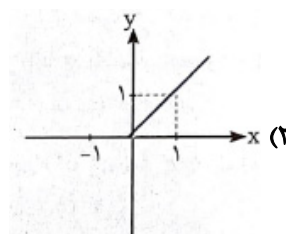
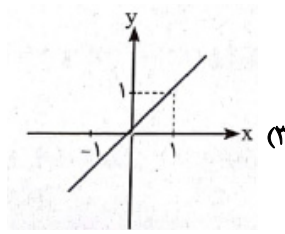
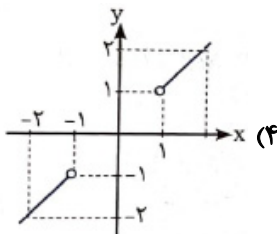
$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۲)

$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$ (۱)

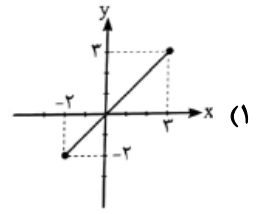
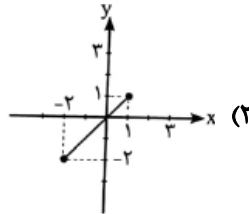
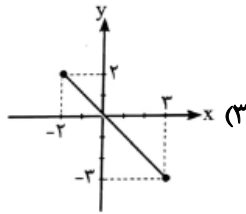
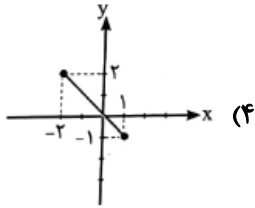
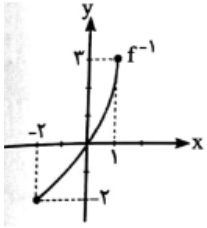
$y = x|x|, x \in \mathbb{R}$ (۴)

$y = x|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۳)

تست ۱۱۱: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ باشد، نمودار $(f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟

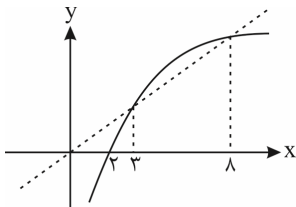


تست ۱۱۲: نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر است. نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟



تست ۱۱۳: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۴)



- (۱) $(0, 2]$
- (۲) $[2, 3]$
- (۳) $[2, 8]$
- (۴) $[3, 8]$

به دست آوردن ضابطه‌ی وارون

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون (البته تابع اصلی باید یک‌به‌یک باشد) این کار رو می‌کنیم:

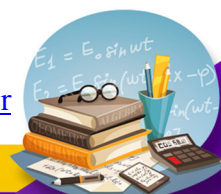
۱- به جای $f(x)$ می‌نویسیم y .

۲- x رو تنها می‌کنیم.

۳- وقتی x تنها شد، به جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و به جای y می‌ذاریم x .

$$1) f(x) = 2x - 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \xrightarrow{\div 2} \frac{y+3}{2} = x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} \frac{x+3}{2} = y \Rightarrow \frac{x+3}{2} = f^{-1}(x)$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x-1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$$



۳) $f(x) = (x-1)^2; x \geq 1 \Rightarrow y = (x-1)^2$ جذر می‌گیریم تا از شر توان ۲ و اساسه x خلاص بشیم. $\rightarrow \sqrt{y} = |x-1|$ خودش گفته $x \geq 1$ پس $\rightarrow \sqrt{y} = x-1$
 خودش $(x-1) = x-1$
 $\Rightarrow x = \sqrt{y} + 1$ ————— مرحله سوم $\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$ ☁

۴) $f(x) = (x-1)^2; x < 1$
 $\Rightarrow y = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y} = (x-1)$ خودش گفته $x < 1$ $\rightarrow \sqrt{y} = 1-x \Rightarrow x = 1-\sqrt{y}$
 قرینش $|(x-1)| = 1-x$

مرحله سوم $\rightarrow f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$ ☁

۵) $f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow y = \sqrt{x-1}$ به توان ۲ می‌رسونیم تا از شر رادیکال خلاص بشیم و x آزاد بشه $\rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 + 1$

مرحله سوم $\rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1$ ☁

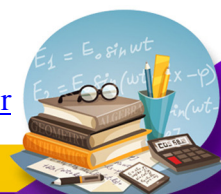
۶) $f(x) = -\sqrt{x-1} \Rightarrow y = -\sqrt{x-1}$ توان ۲ $\rightarrow y^2 = (-\sqrt{x-1})^2 = +(x-1) \Rightarrow x = y^2 + 1$

مرحله سوم $\rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1$ ☁

۷) $f(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} \sqrt[3]{y} = x$ مرحله سوم $\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

۸) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 6 \Rightarrow y = (x-1)^3 + 6$
 حالا عبارت x دارو تنها کن.

$(x-1)^3 = y - 6 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x-1 = \sqrt[3]{y-6} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-6} + 1$ ————— مرحله سوم $\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-6} + 1$

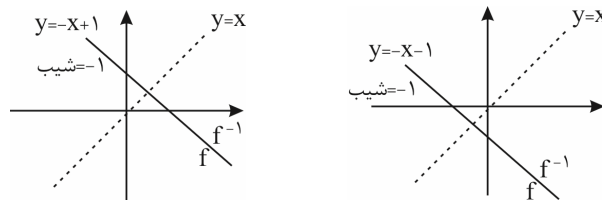


چند نکته مهم:

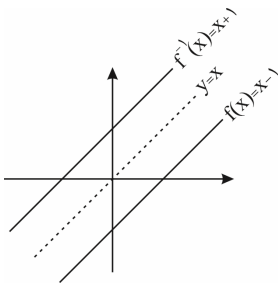
۱) در تابع خطی $f(x) = ax + b$ ، ضابطه وارون به صورت $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ درمی آید که نیازی به حفظ کردن نیست اما باید بدانید که

شیب f و f^{-1} عکس یکدیگر هستند و سه حالت ممکن است برای تابع خطی و وارونش پیش بیاید:
الف) اگر شیب خط -1 باشد، تابع و وارونش بر هم منطبق هستند.

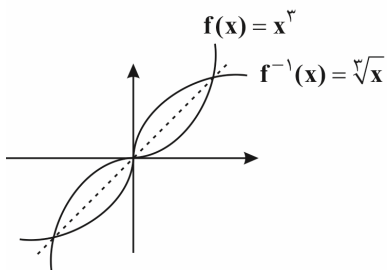
البته خط $y = x$ هم تنها خطی است که با شیب مثبت، خودش و وارونش بر هم منطبق هستند و بی شمار نقطه تلاقی دارند.
مثلاً:



ب) خط با شیب $a \neq \pm 1$ وارونش را قطعاً روی نیمساز ناحیه ۱ و ۳ قطع می کند.

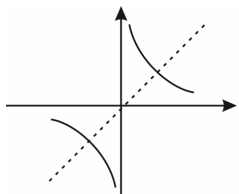


پ) به غیر از خط $y = x$ ، تمام خطوط با شیب $a = 1$ هرگز وارونشان را قطع نمی کنند و با آن موازی هستند. مثلاً:



۲) همان طور که در قسمت پیدا کردن ضابطه تابع وارون دیدید، اگر $f(x) = x^3$ باشد وارونش $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ است. این دو تابع را همزمان در یک دستگاه رسم می کنیم و می بینیم که این دو تابع همدیگر را در سه نقطه روی خط $y = x$ قطع می کنند.

۳) وارون تابع $y = \frac{1}{x}$ بر خود تابع منطبق است.



$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

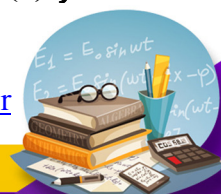
۴) وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ به شکل $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

۵) در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ اگر $a + d = 0$ باشد، تابع و وارونش بر یکدیگر منطبق هستند یعنی:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

۶) اگر f و f^{-1} متقاطع باشند و f یک تابع اکیداً صعودی باشد آن گاه نقاط تقاطع روی خط $y = x$ است. برای پیدا کردن نقطه و یا نقاط برخورد (تقاطع) f و f^{-1} به جای حل $f(x) = f^{-1}(x)$ کافی است $f(x) = x$ را حل کنید.

۷) اگر $f^{-1}(a)$ را بیابند، اسم آن x گذاشته و $f(x) = a$ را حل می کنیم. x همان جواب مسئله است. مثلاً اگر $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$



و $f^{-1}(4)$ را بپرسند:

$$f^{-1}(4) = x \Rightarrow f(x) = 4 \Rightarrow -x + \sqrt{-2x} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow[x=-2]{\text{حدس}} \sqrt{-2(-2)} = -2 + 4 \Rightarrow 2 = 2 \checkmark$$

پس $x = -2$ جواب مسئله است. (ریاضی ۸۸)

تست ۱۱۴: تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟ (ریاضی ۹۴)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) غیر متقاطع

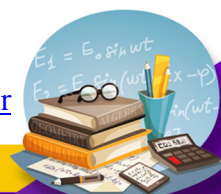
تست ۱۱۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱ (۱) $-1, -4$ ۲ (۲) $-1, 4$ ۳ (۳) $1, -4$ ۴ (۴) $1, 4$

تست ۱۱۶: ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱ (۱) $y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$ ۲ (۲) $y = -x^2 + 4x - 5, x \leq 2$

۳ (۳) $y = -x^2 + 4x - 5, x \geq 1$ ۴ (۴) $y = x^2 - 4x + 5, x \geq 1$



تست ۱۱۷: ضابطه تابع وارون $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1$ کدام است؟

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + 1 \quad (1) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \quad (2) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \quad (3) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} - 1 \quad (4)$$

تست ۱۱۸: تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۲)

$$\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4 \quad (1) \quad \frac{1}{4}x - 1, x \geq 4 \quad (3) \quad \frac{1}{4}x - 1, x \leq 4 \quad (2) \quad \frac{1}{4}x + 1, x \leq 4 \quad (4)$$

(تجربی ۹۴)

تست ۱۱۹: تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

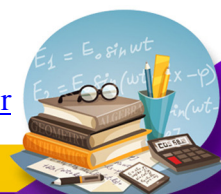
$$1 - \sqrt{1+x}, x < 0 \quad (1) \quad 1 - \sqrt{1-x}, x < 1 \quad (2) \quad 1 + \sqrt{1-x}, 0 < x < 1 \quad (3) \quad 1 - \sqrt{1-x}, 0 < x < 1 \quad (4)$$

تست ۱۲۰: تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام

(تجربی ۹۹)

طول قطع می‌کند؟

$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$



(تجربی خارج ۹۹)

تست ۱۲۱: فرض کنید $g(x)$ وارون و تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

(ریاضی ۸۹)

تست ۱۲۲: اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، آنگاه حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

