۳) $P(x)=\dfrac{|x+4|(x+2)^2\sqrt[3]{(x+3)}}{\underbrace{(x^2-3x+2)}_{(x-1)(x-2)}\sqrt[4]{(x-5)^2}}$

x	$-\infty$	زوج -4		ساده -3		زوج -2		ساده 1		ساده 2		زوج 5		مثلاً 6	$+\infty$
	$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$		$-$		$+$		$+$		

مثال ۲: عبارت $\dfrac{(1-x)|x|}{(x-2)^2(x-3)^3}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

ریشه‌های صورت : $(1-x)|x|=0 \Rightarrow \begin{cases}|x|=0 \Rightarrow x=0\\ 1-x=0 \Rightarrow x=1\end{cases}$

ریشه‌های مخرج : $(x-2)^2(x-3)^3=0 \Rightarrow \begin{cases}(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2\\ (x-3)^3=0 \Rightarrow x=3\end{cases}$

حالا ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم و به ازای عددی بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه (اینجا ۴ گذاشتیم) علامت خانه سمت راست را تعیین می‌کنیم و با عبور از روی ریشه‌های ساده $(x=1, x=3)$ علامت را عوض می‌کنیم اما با عبور از روی ریشه‌های دارای توان زوج و قدرمطلقی (ستاره‌دار) علامت را تغییر نمی‌دهیم.

x	$-\infty$		0^*		1		2^*		3		4	$+\infty$
$\dfrac{(1-x)\lvert x\rvert}{(x-2)^2(x-3)^3}$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$		

نامعادلاتی که درجه اول نیستند (درجه ۲، کسری و ...)

به طور کلی برای حل هر نامعادله‌ای، ابتدا همه عبارت‌ها را به سمت راست یا چپ منتقل می‌کنیم و سپس ریشه‌های صورت و مخرج عبارت (اگر کسری نباشد فقط ریشه‌های عبارت) را یافته و طبق مراحلی که در بالا توضیح دادم تعیین علامت را انجام می‌دهیم و جواب را مشخص می‌کنیم.

یادت باشه:

۱) برای حل نامعادلات کسری، اگر مخرج همواره مثبت نباشد اجازهٔ طرفین وسطین نداریم و باید تمام عبارت‌ها را به یک طرف بیاوریم.

مثال ۳: $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{x-3} \Rightarrow \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-3}>0 \Rightarrow \dfrac{x-3-(x-1)}{(x-1)(x-3)}>0 \Rightarrow \dfrac{-2}{(x-1)(x-3)}>0$

حالا باید ریشه‌های صورت و مخرج این عبارت را پیدا کنیم. ریشهٔ صورت: هرگز صفر نمی‌شود $\Rightarrow$ ریشه ندارد

ریشه‌های مخرج : $(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1 & \text{ساده}\\ x=3 & \text{ساده}\end{cases}$

x	$-\infty$		ساده 1		ساده 3		مثلاً 4	$+\infty$
$\dfrac{-2}{(x-1)(x-3)}>0$		$-$	ت.ن	$+$ جواب	ت.ن	$-$		

$\Rightarrow x\in(1,3)$

۲) برای حل نامعادلات کسری، اگر مخرج همواره مثبت باشد اجازهٔ طرفین وسطین داریم.

مثال ۴: $\dfrac{5x}{\underbrace{x^2+4}_{\text{همواره }+}}\le 1 \Rightarrow 5x\le x^2+4 \Rightarrow 0\le x^2-5x+4 \xrightarrow{\text{مرتب}} x^2-5x+4\ge 0$

اگر ۲ طرف نامساوی را در عبارتی مثبت ضرب یا تقسیم کنیم علامت نامساوی عوض نمی‌شه در حالیکه اگر عبارت منفی بود علامت عوض می‌شود.

حالا ریشه‌های x^2-5x+4 را پیدا می‌کنیم.

x^2-5x+4
$(x-1)(x-4)\ge 0$

x	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
		+	ο	−	ο	+	
		جواب				جواب	

ساده   ساده   مثال ۵

مجموعه جواب: $x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

نامساوی توأمان (باهم): تک‌تک حل کنید و بین $\cap$ بگیر

تست ۵ : مجموعه جواب نامعادلهٔ $1<\boxed{\frac{2x-3}{x+1}}<3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۸ و مشابه ۹۶)

۱) $\mathbb{R}-[-6,4]$ ۲) ~~$\mathbb{R}-[-4,6]$~~   ۳) $x>4$ ۴) ~~$x<-6$~~

راه کارنامه

$x=5 \rightarrow 1<\frac{2(5)-3=7}{5+1=6}=1,\ldots<3 \rightarrow$ $x=5$ جواب $\rightarrow$ گزینه ۲،۴ حذف

$x=-7 \rightarrow 1<\frac{2(-7)-3=-17}{-7+1=-6}=2,\ldots<3 \rightarrow$ $x=-7$ جواب $\rightarrow$ گزینه ۳ حذف

گزینه ① جواب

تست ۶ : نمودار تابع با ضابطهٔ $\boxed{f(x)=x^3-4x^2-x+4}$ ، $x>-1$ در بازهٔ (a,b) زیر محور xها است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

منفی است

۱) ۵   ۲) ۳ ✓   ۳) ۴   ۴) ۲

شرط اینکه تابع f را بعد از $x=-1$ نگاه کنی

$x^3-4x^2-x+4<0$
$(x^3-x)+(4-4x^2)<0$
$x(x^2-1)-4(x^2-1)<0$
$(x^2-1)(x-4)<0$

$x>-1$

x	$-\infty$		-1		1		4		5	$+\infty$
$(x+1)(x-1)(x-4)<0$		−	ο	+	ο	−	ο	+		

ساده   ساده   ساده   مثال

جواب: $x\in(1,4)$ $a=1$ $b=4$ $b-a=3$

تست ۷ : در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y=\frac{2x^2-6}{x^2-x-2}$، در زیر خط به معادلهٔ $y=2$ قرار دارد؟

۱) ~~$(1,+\infty)$~~   ۲) ~~$(-1,2)$~~   ۳) $(-\infty,-1)\cup(1,2)$ ✓   ۴) ~~$(-1,1)\cup(2,+\infty)$~~

ترجیح

$\frac{2x^2-6}{x^2-x-2}<2$

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

از دل معلوم بود بازه‌ای که $x=2$ غلط

$x=0 \rightarrow \frac{-6}{-2}=3\not<2$

$x=0$ فاصله‌ای که داخل بازه‌ها نیست؛ گزینه ۲ و ۴ حذف

$x=2$

$\frac{2(2)^2-6=2}{(2)^2-2-2=0}$

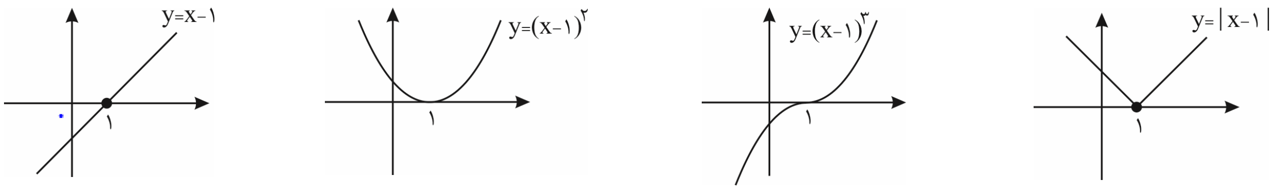
$x=2$ تعریف نشده، گزینه ① غلط

جواب: گزینه ۳

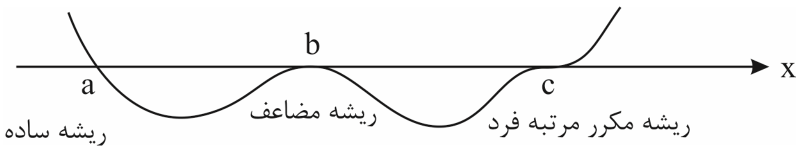
تعیین علامت، نامعادله، سهمی، معادلات گویا و رادیکالی

تعریف ریشه و یا صفر معادله

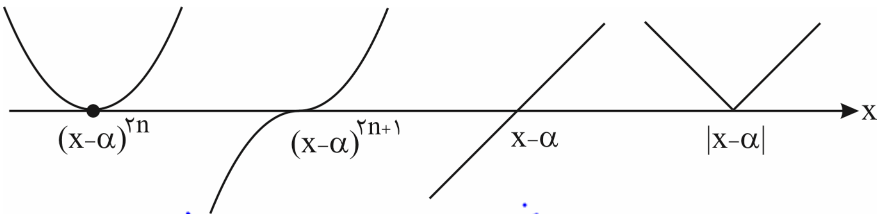
ریشه به معنی محل برخورد نمودار، با محور **x**ها می‌باشد.



همان‌طور که می‌بینید در ریشه‌های ساده و مکرّر مرتبهٔ فرد، علامت تغییر می‌کند وهمچنین در ریشهٔ مضاعف و ریشهٔ درون قدرمطلق علامت عبارت تغییری نمی‌کند.



به طور کلی شکل برخورد ریشه‌های ساده، مضاعف و مکرّر مرتبهٔ فرد با محور **x**ها به صورت زیر است:



نتیجه: توابع در ریشه‌های ساده و مرتبه فرد تغییر علامت می‌دهند ولی در ریشه مضاعف یا مرتبه زوج یا ریشه داخل قدرمطلق تغییر علامت نمی‌دهند

روش تعیین علامت سریع

ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم. سپس ریشه های هر عبارت در صورت و مخرج را یافته و به صورت صعودی در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم و دور ریشه های با توان زوج و مضاعف و یا ریشه های داخل قدر مطلق خط می‌کشیم که متمایز از بقیه باشند. سپس بـه ازای یک مقدار بزرگتر از بزرگترین ریشه، علامت خانه‌ی سمت راست جدول را تعیین می‌کنیم. حالا کافی است با عبور از ریشه های ساده علامت را تغییر داده و با عبور از ریشه هایی که دورشان خط کشیدیم (مضاعف و قدر مطلقی و ....) علامت را عوض نکنیم.

مثال ۱:

۱) $\dfrac{x-1}{x+2}$

x	$-\infty$	-2 (ساده)		1 (ساده)		2 (مثلاً)	$+\infty$
	+	ن.ت	−	0	+		

تابع بالای x هاست یعنی مثبت است.

۲) $\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$	-2 (مضاعف)		1 (ساده)		2 (مثلاً)	$+\infty$
	−	ن.ت	−	0	+		

تابع زیر محور x هاست یعنی تابع منفی است.

زمانی که جواب نامعادله به صورت بازه است از کنترل و رد گزینه استفاده کن.

نکته: ریشه مخرج کسر هرگز در مجموعه جواب معادله یا نامعادله نیست. هر گزینه شامل ریشه مخرج حذف می‌شود.

تست ۸ : مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-2} > \frac{7x-8}{x^2-x-2}$، به صورت بازه، کدام است؟ (تجربی ۹۸ خارج)

۱) $(-4,2)\cup(2,4)$ ۲) $(2,4)$ $(x+1)(x-2)$ ۳) $(-1,2)\cup(2,4)$ ۴) $(-1,2)$

گزینه‌ای که $x=-1$ داره شامل گ ① غلطه

$x=3$ باید در جواب باشه گ ۴ مردوده

$x=3 \rightarrow \frac{7(3)-8=13}{3^2-3-2=4}=3.\ldots > \frac{3}{3-2=1}$ ✓ ⟶

$x=0$ باید در جواب باشه گ ۲ مردوده

$x=0 \rightarrow \frac{7(0)-8}{-2}=4 > \frac{0}{-2}=0$ ✓ ⟶

$x=-3 \rightarrow \frac{7(-3)-8=-29}{10}=-2.9 \not> \frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$ ⟶ گ ۳ درسته ☺

به نامعادلات خاص توجه کنید:

مهم

۱) $(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow x\in \mathbb{R}$

۲) $(x-1)^2 > 0 \Rightarrow x\in \mathbb{R}-\{1\}$

۳) $(x-1)^2 \le 0 \Rightarrow$ ——— $\begin{cases}(x-1)^2<0 & \text{هرگز امکان ندارد}\\ (x-1)^2=0 \longrightarrow x\in\{1\}\end{cases}$

۴) $(x-1)^2 < 0 \Rightarrow x\in \varnothing$

هرگز جواب ندارد

تست ۹ : مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{3x^2-3x}{x^3-1}\ge 1$ ، کدام مجموعه است ؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $x>1$ ۴) $x<1$

$$\frac{3x(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(\underbrace{x^2+x+1})} \ge 1 \xrightarrow{x\neq 1} 3x \ge x^2+x+1$$

$\Delta<0$ همواره موافق علامت ضریب x^2 و مثبت است

$$0 \ge x^2-2x+1$$

$$0 \ge (x-1)^2 \quad \text{عبارت توان زوج}$$

نه ⊖ است نه منفی تونه صفر باشه، $x=1$ هم جواب نیست چون ریشه مخرج پس جواب $\varnothing$ است

حالت خاص حل درجه ۲

۱- اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ ، مجموع ضرایب صفر باشد، یعنی $a+b+c=0$ ، در این صورت یک ریشه $x_1=1$ و ریشه‌ی دیگر $x_2=\frac{c}{a}$ است.

مثلاً:

$3x^2+4x-7=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=-\frac{7}{3}\end{cases}$

$a=3$, $b=4$, $c=-7$, $a+b+c=0$

۲- اگر $a+c=b$ باشد، یک ریشه $x_1=-1$ و دیگری $x_2=\frac{-c}{a}$ است.

مثلاً:

$3x^2+7x+4=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=-\frac{c}{a}=-\frac{4}{3}\end{cases}$

$a=3$, $b=7$, $c=4$, $a+c=b$

۳- اگر معادله‌ی درجه دوم، تجزیه شود به دو پرانتز عبارت درجه‌ی اول ، ریشه ها به سادگی محاسبه می‌شود.

مثلاً با فاکتور گیری جمله مشترک

ضرب ۲ ریشه

گاهی با جمع مشترک ریشه‌ها را می‌یابیم $x^2 - Sx + P = 0$

جمع ۲ ریشه

مثال ۱۰:

$x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-7) = 0 \longrightarrow x = 6, 7$

یا

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \longrightarrow x = -2, -3$

یا $x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 + 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+5) = 0 \longrightarrow x = -4, -5$

اگر x^2 ضریب داشته باشد، می‌توانیم از روش زیر، معادله را در صورت داشتن ریشه تجزیه کنیم: روش رولی

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x+6)(x-1) = 0 \Rightarrow (x + \frac{6}{3})(3x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

اصلاً اهمیتی ندارد که عدد ۳در پرانتز اول و دوم به ترتیب پشت x و زیر عدد ثابت قرار بگیرد، یعنی تجزیه به صورت $(x - \frac{1}{3})(3x+6)$ گناه ندارد.

۴- اگر هیچ‌یک از سه حالت فوق رخ نداد، از روش دلتا ریشه‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند. توجه کنید که Δ می‌تواند مثبت، منفی و صفر شود که اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است.

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{\text{اگر } \Delta > 0 \text{ باشد}} x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثلاً : $x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (6)^2 - 4(1)(4) = 36 - 16 = 20 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2(1)}$

* اگر Δ منفی شود معادلهٔ درجه دوم فاقد ریشه حقیقی می‌باشد. مثلاً $x^2 + x + 1 = 0$ که در آن $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$ است، ریشه حقیقی ندارد.

* اگر $\Delta = 0$ باشد معادله دارای یک ریشه مضاعف است و از دستور $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.

یادت باشه: اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار $\frac{c}{a}$ منفی شود می‌توان گفت که حتماً $\Delta > 0$ است. $\Delta = b^2 - 4\underbrace{ac}_{\ominus} > 0$

برای حل معادلاتی به فرم $x^2 - 4 = 0$ یا $(x-1)^2 - 16 = 0$ بهتر است به کمک ریشه‌گیری معادله را حل کنیم:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$(x-1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow x - 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

تست ۱۱ : به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه دوّم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $1 < m < 1/5$ ۲) $2 < m < 5$ ۳) $-1 < m < 3/5 - \{0/5\}$ ۴) $-1 < m < 2/5$

اگر $m = 0/5$ باشد عبارت از درجه دوم می‌افتد

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$$\begin{cases} a = 2m - 1 \\ b = 6 \\ c = m - 2 \end{cases}$$

$\Delta = (6)^2 - 4(2m-1)(m-2) > 0$

$\div 4 \; (\; 36 - 4(2m^2 - 4m - m + 2) > 0$

$9 - 2m^2 + 5m - 2 > 0$

$\Delta = -2m^2 + 5m + 7 > 0$

m		-1		$\frac{7}{2}$	
$\Delta >$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-1 < m < \frac{7}{2}$

$ax^2+bx+c=0 \to x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

S: Sumation
P: Production
D: Diffrence

رابطه‌ی بین ریشه های یک معادله‌ی درجه دوم

$x_1+x_2=\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

$x_1x_2=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{(2a)(2a)}$ مزدوج $=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4ac}=\frac{c}{a}$

۱) مجموع ریشه ها $= x_1+x_2=\frac{-b}{a}=S$

۲) حاصل ضرب ریشه ها $= x_1.x_2=\frac{c}{a}=P$

۳) قدر مطلق تفاضل ریشه ها $=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) مجموع مربعات ریشه ها $= x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

۵) مجموع مکعبات ریشه ها $= x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3SP$

۶) مجموع جذر ریشه های مثبت $=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

۷) قدر مطلق تفاضل جذر ریشه های مثبت $=|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$

۸) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$

۹) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$

دو حالت مهم:

$S=x_1+x_2=0 \longrightarrow x_1=-x_2$

$S=\frac{-b}{a}=0 \longrightarrow b=0$

الف) اگر $S=0$ باشد یعنی دو ریشهٔ قرینه داریم. مثل $x^2-1=0$

ب) اگر $P=1$ باشد، یعنی دو ریشهٔ معکوس داریم. $P=x_1x_2=1 \to x_1=\frac{1}{x_2}$ ؛ $P=\frac{c}{a}=1$ ، $c=a$

یادت باشه: در تمامی موارد گفته‌شده معمولاً پس از نوشتن این روابط به دو یا چند مقدار برای m یا هر متغیـر دیگـری کـه مجهـول اسـت می‌رسیم. توجه داشته باشید mهایی قبول هستند که به ازای آن‌ها دلتای معادلهٔ داده‌شده منفی نشود.

مثل $-x^2+7x-1=0$

تست ۱۲ : به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ می‌باشد؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴

$\begin{cases} a=2 \\ b=-(m+1) \\ c=\frac{1}{8} \end{cases}$

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2$

$\sqrt{S+2\sqrt{P}}=2$

$\begin{cases} S=-\frac{b}{a}=-\frac{(-(m+1))}{2}=\frac{m+1}{2} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{16} \end{cases}$

برای حذف $\sqrt{\ }$ دو طرف به توان ۲

$\sqrt{\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}}=\sqrt{\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}}=2$

$\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4 \to \frac{m+2}{2}=4 \quad \boxed{m=6}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4(3)(2-m)$

$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{(2m-1)}{3} \\ S = \frac{1-2m}{3} \end{cases}$ $P = \frac{c}{a} = \frac{2-m}{3}$

۱ تست ۱۳ : معادله درجه دوّم $3x^2 + (2m-1)x + (2-m) = 0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) $-\frac{5}{2}$

$S = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{P} \longrightarrow \frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \xrightarrow{\text{طرفین - وسطین}} (2-m)(1-2m) = 9$

$2 - 4m - m + 2m^2 = 9 \longrightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow[a+c=b]{\text{حالت خاص}} \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{7}{2} \end{cases}$

$\Delta \xrightarrow{m=-1} 9 - 36 < 0$ غ ق ق

اونی درسته که Δ رو مثبت کنه ۲ تا ریشه حقیقی بده

۳ تست ۱۴ : به ازای کدام مقدار m ، ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ $\Delta > 0$
(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) $\varnothing$ ۲) ۱- و ۲ ۳) ۱- ۴) ۲

$x_1 = \frac{1}{x_2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x_1 x_2 = 1 \longrightarrow P = \frac{c}{a} = 1 \longrightarrow a = c \longrightarrow m = m^2 - 2$

$m^2 - m - 2 = 0$

$a + c = b$ حالت خاص

$m = -1 , m = -\frac{c}{a} = 2$

$mx^2 + 3x + (m^2 - 2) = 0$

$\begin{cases} a = m \quad b = 3 \quad c = m^2 - 2 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4m(m^2-2) \end{cases}$

اونی درسته که Δ رو مثبت کنه فقط $m=-1$ داره

۳ تست ۱۵ : به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $(m+1)x^2 + m(m^2-9)x - 2 = 0$، دو ریشهٔ قرینهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۹

$x_1 = -x_2$

$x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow S = 0 \longrightarrow -\frac{b}{a} = 0 \longrightarrow b = 0$

$b = m(m^2 - 9) = 0 \longrightarrow m = 0 , \pm 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(m(m^2-9)\right)^2 - 4(m+1)(-2)$ اونی درسته که Δ رو مثبت کنه.

$m = 0 \longrightarrow \Delta = 8 > 0$ ✓ $m = -3 \longrightarrow \Delta = (-4)(-2)(-2) < 0$ غ ق ق

$m = 3 \longrightarrow \Delta = 24 > 0$ ✓ فقط $m=3$ تو گزینه هاست.

۱) برای آن که هر دو ریشهٔ معادلات $ax^2 + bx + c = 0$ و $a'x^2 + b'x + c' = 0$ مشترک باشند، باید: x_1 x_2 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

مثال ۱۷: به ازای چه مقدار m و n هر دو ریشهٔ معادلات $\begin{cases} mx^2 - 18x + 24 = 0 \\ x^2 - 6x + n = 0 \end{cases}$ مشترک هستند؟ باید ضرایب ۲ معادله مشترک باشند

$\frac{m}{1} = \frac{-18}{-6} = \frac{24}{n}$

$m = 3 = \frac{24}{n} \longrightarrow n = \frac{24}{3} = 8$ $\boxed{m = 3 \quad n = 8}$

۲) اگر دو معادله درجه دوم دارای یک ریشه مشترک باشند، جملهٔ x^2 را بین دو معادله حذف می‌کنیم.

دو رو ۳- ضرب کن

۱) تست ۱۶ : اگر دو معادلهٔ $mx^2+5x-7=0$ و $3mx^2-10x+4=0$ دارای یک ریشه مشترک باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

با بدجمع تحتر این دو معادله حذف کرد.

$$+\begin{cases} 3mx^2-10x+4=0 \\ -3mx^2-15x+21=0 \end{cases}$$

$$-25x+25=0$$

$25=25x$ ، $\boxed{1=x}$ ریشه مشترک دارد

صدق در یکی از معادله

$mx^2+5x-7=0 \rightarrow m+5-7=0$ ، $m=2$

بررسی علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$\Delta=b^2-4ac>0$

ابتدا $\frac{c}{a}$ را حساب می‌کنیم. اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است. اما اگر $\frac{c}{a}>0$ باشد، باید Δ را به دست آوریم. اگر $\Delta<0$ باشد، معادله فاقد ریشه حقیقی است اما اگر Δ منفی نباشد معادله دارای ریشه حقیقی است.

برای حل درجه ۲ اول به $\frac{c}{a}$ نگاه کن اگر منفی بود $\Delta>0$ دو ریشه $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ مختلف‌العلامت

شرایط دو ریشه‌ی مثبت	شرایط دو ریشه‌ی منفی
۱) $\Delta>0$	۱) $\Delta>0$
۲) $S>0$	۲) $S<0$
۳) $P>0$	۳) $P>0$
$\Delta>0$ چون ۲ ریشه داری.	$\Delta>0$ چون ۲ ریشه داری.
$S>0$ چون جفتشون مثبته!	$S<0$ چون جفتشون منفیه!
$P>0$ چون جفتشون مثبته!	$P>0$ چون جفتشون منفیه!

۴) تست ۱۷ : به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-1)x^2+2x-1=0$ دارای ۲ ریشه‌ی مختلف‌العلامت است؟

۱) $0<m<1$ ۲) $m>-1$ ۳) $m<1$ ۴) $m>1$

$x_1x_2<0 \rightarrow \frac{c}{a}<0 \rightarrow \frac{-1}{m-1}<0$

کسر منفیه صورت منفیه مخرج باید مثبت باشه

$m-1>0$ ، $\boxed{m>1}$

(الف) ∩ (ب) ∩ (ج)

(الف) ۶ ، (ب) ۰ ، (ج) ۳ ، ۶-

گزینه ۴ تست ۱۸ : به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$ دارای ۲ ریشه‌ی حقیقی منفی است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

(الف)
$P: x_1x_2=\frac{c}{a}>0$ ، $\frac{c}{a}=\frac{-3}{m-6}>0$

کسر مثبته، صورتش منفیه مخرجش باید منفی باشه

(الف) $m-6<0 \rightarrow \boxed{m<6}$

(ب)
$S: x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$ ، $-\frac{b}{a}=\frac{2m}{m-6}<0$

(ب) $2m>0 \rightarrow \boxed{m>0}$

(ج)
$\Delta=b^2-4ac=(-2m)^2-4(m-6)(-3)>0$

$\Delta=4m^2-4(-3m+18)>0$ ، ۴ ÷ طرفین ، $m^2+3m-18>0$ ، $(m-3)(m+6)$

m		-6		3	
	$+$	0	$-$	0	$+$
	جواب				جواب

اشتراک بالای (۱۸)

متفاوت

تست ۱۹ : به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟
(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)

۱) $a<-4-\{-5\}$ ۲) $a>-4$ ۳) $a<4$ ۴) $a>4$

نکته: اگر در معادله درجه ۳ اعداد ۱ یا ۱- یا ۲ یا ۲- گذاشتیم و صفر شد آن عدد ریشه معادله درجه ۳ است و عبارت بر (x - آن) بخش‌پذیر است

$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$

$x=1 \to (1)+(a-1)+(4-a)-4=0$ پس $x=1$ ریشه درجه ۳ است

$$\begin{array}{l|l} x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+ax+4 \\ (a-1)x^2+x^2=ax^2 & \\ -(ax^2-ax)=-ax^2+ax & \\ ax+(4-a)x=4x-4 & \\ -(4x-4) & \\ 0 & \end{array}$$

پس خواهیم داشت: درجه ۳ $=(x-1)\underbrace{(x^2+ax+4)}$

۳ ریشه حقیقی مثبت میخواد:

$\Delta=a^2-4(4)>0$

(الف) $a^2>16 \to |a|>4$

(ب)

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0 \to -a>0 \to a<0$ (ب)

(الف) $\cap$ (ب) $a<-4 \to$

حالا کی می‌دونه چرا در گزینه ۱ نوشتیم $a<-4-\{-5\}$؟

اگه صحبتی از دو ریشه‌ی قرینه یا دوریشه‌ی معکوس نکرد و گفت توی معادله‌ی درجه دوممون بین ریشه‌هاش رابطه‌ی خاصی برقراره، باید اون رابطه رو بنویسی. مثلاً توی تست می‌گه:

✓ یکی از ریشه‌ها ۵ واحد از ریشه‌ی دیگر کم‌تر است	$\alpha=\beta-5$
✓ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است	$\alpha=\frac{1}{2}\beta+3$
✓ یکی از ریشه‌ها نصف ریشه‌ی دیگر است	$\alpha=\frac{1}{2}\beta$
✓ یکی از ریشه‌ها از ۷ برابر ریشه‌ی دیگر ۴ واحد کم‌تر است	$\alpha=7\beta-4$

بعد از این که رابطشون رو نوشتی، با استفاده از S یا P ، دو معادله و دو مجهول تشکیل میدی و حلش می‌کنی. ببین:

تست ۲۰ : در معادله‌ی $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است ؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=8 \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=m \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=m \end{cases}$

$\boxed{\alpha=\frac{1}{2}\beta+5}$

$S=\alpha+\beta=$

$8=\frac{1}{2}\beta+5+\beta \to \frac{3}{2}\beta+5=8$

$\frac{3}{2}\beta=3 \to \beta=2$ ریشه در معادله صادقه $\to (2)^2-8(2)+m=0 \to \boxed{m=12}$

۱) تست ۲۱ : ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+mx+12=0$ را α و β می‌نامیم. اگر $\beta^2=\frac{3}{\alpha}$، آن‌گاه ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) -2

$\beta^2=\frac{3}{\alpha} \longrightarrow \beta\cdot\beta=\frac{3}{\alpha} \longrightarrow \beta(\underbrace{\alpha\beta}_{6})=3 \longrightarrow \boxed{\beta=\frac{1}{2}}$ $\boxed{\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{12}{2}=6}$

$\alpha\beta=6$

$\alpha(\frac{1}{2})=6 \longrightarrow \alpha=12$

ریشه کوچکتر $\beta=\frac{1}{2}$ است.

حل با نکته *:

$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

$\frac{\cancel{(-3)^2}}{(m+1)m}=\frac{\cancel{(2+1)^2}}{2}$ $m(m+1)=2 \longrightarrow m^2+m-2=0$

$m=-1$ $m=2$

تست ۲۲: به ازای کدام مقدار m، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $\underbrace{(m+1)}_{a}x^2-3x+m=0$، یکی از ریشه‌ها دو برابر ریشه‌ی دیگر است؟ $k=2$

۱) -2 و 3 ۲) 2 و -3 ۳) -1 و 2 ۴) -2 و 1

$b=-3$ $c=m$

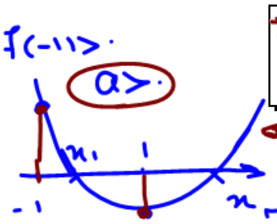
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ببینید:

$$\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_1+x_2=\frac{3}{m+1} \end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{1}{m+1} \quad , \quad x_2=\frac{2}{m+1}$$

از طرفی $\frac{c}{a}=\frac{m}{m+1}$، بنابراین:

$$x_1x_2=\frac{m}{m+1} \Rightarrow \frac{1}{m+1}\cdot\frac{2}{m+1}=\frac{m}{m+1} \xrightarrow{m\neq-1} \frac{2}{m+1}=m \Rightarrow m^2+m-2=0 \Rightarrow m=1 \ , \ m=-2$$

نکته: در معادله‌ی ax^2+bx+c، اگر یک ریشه k برابر ریشه‌ی دیگر باشد: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$ *



تست ۲۳: به ازای کدام مقادیر b، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2+bx+3=0$ رابطه‌ی $-1<x_1<1<x_2$ برقرار است؟

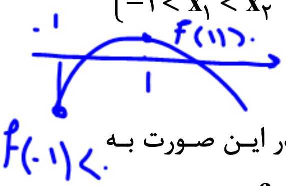
۱) $b>4$ ۲) $b<-4$ ۳) $b>4$ یا $b<-4$ ۴) $-4<b<4$

$f(x)=x^2+bx+3$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ فرض کنید: حالت کلی

$$\begin{cases} x_1<1<x_2 & \Rightarrow af(1)<0 \xrightarrow{a=1} f(1)<0 \Rightarrow 1+b+3<0 \Rightarrow b<-4 \\ -1<x_1<x_2 & \Rightarrow af(-1)>0 \xrightarrow{a=1} f(-1)>0 \Rightarrow 1-b+3>0 \Rightarrow b<4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} b<-4$$

$a=1$ در این تست



تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

خوب به معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ دقّت کنید، حال من طرفین این معادله را بر a تقسیم می‌کنم که در این صورت به $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ تبدیل می‌شود. می‌دانیم مجموع ریشه‌ها یا همان S، مساوی $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی P برابر $\frac{c}{a}$ است، بنابراین:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \xrightarrow{\text{یک تغییر کوچک}} x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=0 \xrightarrow{-\frac{b}{a}=S \ , \ \frac{c}{a}=P} x^2-Sx+P=0$$

پس اگر مجموع ریشه‌ها در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها P باشد، آن معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

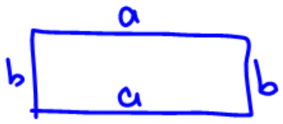
$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

$\alpha+\beta=S$

$\alpha\cdot\beta=P$

معادله درجه دوی می‌نویسیم که ریشه‌های آن طول و عرض مستطیل باشند:

$x^2-(\text{جمع})x+\text{ضرب}=0$ جمع: $a+b$ ضرب $=ab$



(۳) تست ۲۴: در مستطیلی به محیط $23\ cm$ و مساحت $28\ cm^2$ اختلاف طول و عرض چند سانتی‌متر است؟

$a-b$ تفاضل ریشه‌ها

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

محیط مستطیل $=2(a+b)=23 \longrightarrow a+b=\frac{23}{2}$ مساحت $=ab=28$

$X^2-\frac{23}{2}X+28=0 \longrightarrow \begin{cases} a \\ b \end{cases}$ $\underset{\text{تفاضل ریشه‌ها}}{a-b}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}=4{,}5$

$\Delta: b^2-4ac=(-\frac{23}{2})^2-4(28)=\frac{529}{4}-112=\frac{529-448}{4}=\frac{81}{4}$

اگر یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا $m+\sqrt{n}$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن $m-\sqrt{n}$ است.

تست ۲۵ : معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا که یک جواب آن $5+2\sqrt{3}$ است ، کدام است ؟

$\alpha=5+2\sqrt{3}$

$\beta=5-2\sqrt{3}$

۱) $x^2-10x-13=0$ ۲) $x^2-10x+13=0$

۳) $x^2+10x+12=0$ ۴) $x^2-10x+12=0$

$S=\alpha+\beta=10$

$P=\alpha\beta=(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})=(5)^2-(2\sqrt{3})^2=25-12=13$

$x^2-Sx+P=0 \longrightarrow x^2-10x+13=0$ گزینه (۲)

ارتباط بین جواب‌های دو معادلهٔ درجه دوم

این مدل سوالات توی کتابتون کم‌رنگ شده ولی قلم‌چی و گزینه‌ی (۲) ازش سوال اومده پس ما هم می‌گیم: یک معادله‌ی درجه دوم به ما می‌دن و می‌گن از روی این معادله، به معادله‌ی جدید بنویس.

مثلاً می‌گن معادله‌ی درجه دومی بنویسید که هر کدام از ریشه هایش از هر کدام از ریشه های معادله‌ی $x^2+6x-5=0$ یک واحد بیشتر باشد :

α',β' را ریشه های معادله‌ی جدید می‌نامیم که قرار است $\alpha'=\alpha+1,\beta'=\beta+1$ باشد که α,β ریشه های معادله‌ی $x^2+6x-5=0$ است.

$$\begin{cases}\alpha'=\alpha+1\\ \beta'=\beta+1\end{cases} \rightarrow \begin{cases} S'=\alpha'+\beta'=(\alpha+1)+(\beta+1)=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+2=S+2 \\ P'=\alpha'\beta'=(\alpha+1)(\beta+1)=\underbrace{\alpha\beta}_{P}+\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+1=P+S+1\end{cases}$$

$$\xrightarrow[P=\frac{-5}{1}=-5]{S=\frac{-6}{1}=-6} \begin{cases} S'=S+2=-6+2=-4 \\ P'=P+S+1=-5-6+1=-10\end{cases}$$

حالا با داشتن P',S' معادله‌ی جدید به صورت $x^2-S'x+P'=0$ است که یعنی $x^2-(-4)x-10=0$ الان هر کدام از ریشه های $x^2+4x-10=0$ از هر کدام از ریشه های x^2+6x-5 یک واحد بیشتر است.

ریشه های معادله جدید را α' , β' می نامیم.
$\alpha' = \frac{1}{\alpha} - 1$
$\beta' = \frac{1}{\beta} - 1$

۴ تست ۲۶ : ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است ؟

(سراسری تجربی ۹۴)

$S_{ق} = \frac{3}{2}$ $\quad P_{ق} = -\frac{1}{2} = \alpha\beta$

۱) $x^2 - 5x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + 5x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ ۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

$$S_{جدید} = \alpha' + \beta' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\beta + \alpha = S}{\alpha\beta = P} - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$P_{جدید} = \alpha'\beta' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = (-2) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 1$$

$$= (-2) + (3) + 1 = 2 \qquad x^2 - Sx + P = 0 \longrightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

٤ تست ۲۷ : جواب‌های کدام معادله، قرینه و معکوس جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ است؟

۱) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ۲) $x^2 + 3x + 2 = 0$ ۳) $x^2 + 3x - 2 = 0$ ۴) $x^2 - 3x - 2 = 0$

$\alpha' = -\frac{1}{\alpha}$ $\qquad S_{جدید} = \alpha' + \beta' = \left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) = -\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) = -\frac{S}{P} = -\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = 3$

$\beta' = -\frac{1}{\beta}$ $\qquad P_{جدید} = \alpha'\beta' = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = -2$

$\boxed{S_{ق} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \qquad P_{ق} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}}$ $\qquad x^2 - Sx + P = x^2 - 3x - 2 = 0$

ریشهٔ هر معادله‌ای در آن معادله صدق می‌کند.

بیاریم

۱ تست ۲۸: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^3}{(\beta+1)^3} + \frac{\beta^5}{(\alpha+1)^5}$ کدام است؟

ضرب ریشه: $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

۱) -2 ۲) 2 ۳) -8 ۴) 8

$$\frac{\beta^5}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = \frac{1}{\alpha^5}} + \frac{\alpha^3}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^3 = \frac{1}{\beta^3}} = \alpha^5\beta^5 + \alpha^3\beta^3$$

$$= (\alpha\beta = -1)^5 + (\alpha\beta = -1)^3 = -1 - 1 = -2$$

α در معادله صدق می کند:
$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \\ \alpha^2 + \alpha = 1 \longrightarrow \alpha(\alpha + 1) = 1 \longrightarrow \alpha + 1 = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$

β در معادله صدق می کند:
$\beta^2 + \beta - 1 = 0$
$\beta^2 + \beta = 1 \longrightarrow \beta(\beta + 1) = 1 \longrightarrow \beta + 1 = \frac{1}{\beta}$

۱ تست ۲۹ : اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x(x+1) = 3$ باشند، آن‌گاه β^3 با کدام گزینه برابر است؟

۱) $-3(\frac{4}{\alpha} + 1)$ ۲) $1 - 4\alpha$ ۳) $-4(\alpha + 1)$ ۴) $3(\frac{4}{\alpha} - 1)$

$x^2 + x = 3$
$x^2 + x - 3 = 0$

β در معادله صادقه
$\beta^2 + \beta - 3 = 0$
$\boxed{\beta^2 = 3 - \beta}$

$$\beta^3 = \beta\beta^2 = \left(-\frac{3}{\alpha}\right)(3 - \beta)$$

$\boxed{\beta = -1 - \alpha} \longleftarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1$

$\boxed{\beta = -\frac{3}{\alpha}} \longleftarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$

$$\beta^3 = \left(-\frac{3}{\alpha}\right)\left(3 - (-1 - \alpha)\right) = -3\left(\frac{1}{\alpha}\right)(4 + \alpha)$$

$$\beta^3 = -3\left(\frac{4}{\alpha} + 1\right)$$

① =

شکل جذرگیری
$$\begin{cases} u^2<4 \to |u|<2 \to -2<u<2 \\ u^2=4 \to |u|=2 \to u=\pm 2 \\ u^2>4 \to |u|>2 \to u<-2 \text{ یا } u>2 \end{cases}$$

۴

تست ۳۰ : در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $x'\cdot x''^2=-1$ بین ریشه‌ها برقرار است. کدام‌یک از رابطه‌های زیر، همواره بین ضرایب برقرار است؟

۱) $a^2+c^2=abc$　　۲) $a^3+b^3+c^3=0$　　۳) $a^2+abc=c^2$　　۴) $a^3+c^3=abc$

$$x'x''^2=-1 \to \underbrace{\boxed{x'x''}}_{\text{ضرب ۲ ریشه}}x''=-1 \to \left(\frac{c}{a}\right)x''=-1 \to x''=-\frac{a}{c}$$

ریشه هر معادله در آن معادله صادق است پس $x''=-\frac{a}{c}$ را در معادله بذار

$$a\left(-\frac{a}{c}\right)^2+b\left(-\frac{a}{c}\right)+c=0$$

$$a\left(\frac{a^2}{c^2}\right)-\frac{ab}{c}+c=0 \xrightarrow{\text{دو طرف ضربدر } c^2} a^3-abc+c^3=0 \to a^3+c^3=abc$$

تست ۳۱ : فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

$x^2+x-5=0 \to S=-1$, $P=-5$

VIP

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $125x^2+16x=1$　　۲) $125x^2=16x+1$　　۳) $125x^2=12x+1$　　۴) $125x^2+12x=1$

$$S_{\text{جدید}}=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{(S^3-3PS)+3(S^2-2P)+3S+2}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3=-125}=\frac{16}{-125}$$

$$P_{\text{جدید}}=\frac{1}{(x_1+1)^3}\cdot\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{1}{(x_1x_2+x_1+x_2+1)^3}=\frac{1}{(P+S+1)^3}=\frac{1}{(-5-1+1)^3}=-\frac{1}{125}$$

$$x^2-Sx+P=0 \to x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0 \xrightarrow{\text{ضربدر } 125} 125x^2+16x-1=0$$

معادله‌ی دو مجذوری (درجه چهار) به شکل $ax^4+bx^2+c=0$

مهم

واسه حل ای معادله کافیه از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کنیم. پس داریم: $at^2+bt+c=0$

به مثال‌های زیر دقت کن:

۱) $x^4-5x^2+6=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-5t+6=(t-2)(t-3)=0$　$\begin{cases} t_1=2=x^2 \to x=\pm\sqrt{2} \\ t_2=3=x^2 \to x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

$x=\sqrt{2}$ یا $\sqrt{3}$ یا $-\sqrt{2}$ یا $-\sqrt{3}$　۴ جواب متمایز می‌شن

۲) $x^4-x^2-6=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-t-6=(t-3)(t+2)=0$　$\begin{cases} t_1=3=x^2 \to x=\pm\sqrt{3} \\ t_2=-2=x^2 \text{ جواب نداره} \end{cases}$

۲ جواب

۳) $x^4+5x^2+6=0 \xrightarrow{x^2=t} \boxed{t^2+5t+6}=(t+3)(t+2)=0$　$\Delta>0$　$\begin{cases} t_1=-2=x^2 \text{ جواب نداره} \\ t_2=-3=x^2 \text{ جواب نداره} \end{cases}$

بدون جواب　معادله برحسب t دو جواب منفی داره ولی معادله برحسب x جوابی نداره

۴) $x^4-4x^2+4=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-4t+4=(t-2)^2=(t-2)(t-2)=0$　$\begin{cases} t_1=2=x^2 \to x=\pm\sqrt{2} \\ t_2=2=x^2 \to x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

۲ ریشه مضاعف داره. یعنی x دوبار $\sqrt{2}$ و دوبار $-\sqrt{2}$ می‌باشه.

$\sqrt{m^2}=|m|$

یعنی معادله شبیه شکل ① صفحه قبل باشد

و تا t مثبت بدهد که ۴ تا x متفاوت

به دست بیاید

t_1, t_2 باید هر دو مثبت در بیارد که هر کدام ۲ x تولید کند

$x^2=t$

$\Delta>0$

۲ گ

تست ۳۲ : اگر معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است ؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) $m<-4$ ۲) $m>4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $4<m<9$

$t_1>0 , t_2>0$ $\quad S=t_1+t_2=-\frac{b}{a}>0 \to m+2>0$ $\quad P=t_1t_2=\frac{c}{a}>0$ $\quad m+5>0$

$(\boxed{m>-2}$ اشتراک $\cap \boxed{m>-5}) \Rightarrow \boxed{m>-2}$

$x^2=t \to t^2-\underbrace{(m+2)}_{b}t+\underbrace{(m+5)}_{c}=0 , \quad a=1$

$\Delta=b^2-4ac=(-(m+2))^2-4(m+5)>0 \to m^2+\cancel{4m}+4-\cancel{4m}-20=m^2-16>0$ $\quad m^2>16$ $\quad |m|>4$

تست ۳۳ : اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی $x^4-7x^2-5=0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2-3SP+2S$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

VIP

$t=x^2$

۱) $59-7\sqrt{69}$ ۲) $7+\sqrt{69}$ ۳) ۵۰ ۴) $59+7\sqrt{69}$

گزینه ۴

$t^2-7t-5=0 \quad t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{49-4(-5)=69}}{2}=\begin{cases} t_1=\frac{7+\sqrt{69}}{2}=x^2 \\ t_2=\underbrace{\frac{7-\sqrt{69}}{2}}_{\text{عدد منفی}}=x^2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

$x^2=\frac{7+\sqrt{69}}{2} \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\frac{7+\sqrt{69}}{2} \longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$

$x_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \quad x_2=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \quad P=x_1x_2=-\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\right)^2=-\left(\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)$ $\quad \boxed{S=x_1+x_2=0}$

$2P^2-\cancel{3SP}+\cancel{2S}=2P^2=2\left(\frac{49+69+2(7)\sqrt{69}}{\cancel{4}=2}\right)=59+7\sqrt{69}$

[illegible] درجه ۲

معادلات به شکل $ax+b\sqrt{x}+c=0$

واسه حل این معادله‌ها از تغییر $\sqrt{x}=t$ استفاده می‌کنیم. واسه این حالت هم نیازی نیست فرمول حفظ کنی

مثال ۳۴:

۱) $x-4\sqrt{x}+3=0 \longrightarrow t^2-4t+3=0 \xrightarrow[a+b+c=0]{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} t_1=1=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \boxed{x=1} \\ t_2=\frac{c}{a}=3=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \boxed{x=9} \end{cases}$

دو جواب

۲) $x+4\sqrt{x}-5=0 \longrightarrow t^2+4t-5=0 \xrightarrow[a+b+c=0]{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} t_1=1=\sqrt{x} \rightsquigarrow \boxed{x=1} \\ t_2=\frac{c}{a}=-5=\sqrt{x} \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$

یک جواب یک ریشه

۳) $x+4\sqrt{x}+3=0 \longrightarrow \boxed{t^2+4t+3=0} \longrightarrow a+c=b \quad \begin{cases} t_1=-1=\sqrt{x} \quad \text{جواب ندارد} \\ t_2=-\frac{c}{a}=-3=\sqrt{x} \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$

$\Delta>0$ برحسب t دو ریشه دارد که هر دو منفی اند

ولی معادله برحسب x ریشه ندارد.

۴) $x-4\sqrt{x}+4=0$

$t^2-4t+4=(t-2)^2=0 \to (t-2)(t-2)=0 \begin{cases} t_1=2=\sqrt{x} \longrightarrow x=4 \\ t_2=2=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=4 \end{cases}$ ریشه مضاعف دارد

$\boxed{\sqrt{x}=t \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=t^2}$

به این مثال از کتاب درسی توجه کنید:

مثال ۳۵: $4x^6+1=5x^3$

$4x^6-5x^3+1=0 \xrightarrow[x^6=t^2]{x^3=t} 4t^2-5t+1=0$ جمع ضرایب صفر

$\begin{cases} t_1=1 \longrightarrow x^3=1 \longrightarrow x=1 \\ t_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{4} \longrightarrow x^3=\frac{1}{4} \longrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$

تست ۳۶: مجموع ریشه های $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۲

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

وقتی چیز تکرار شونده دیدی t بگیر

$x^2+x=t$

$t^2-18t+72=(t-12)(t-6)=0 \begin{cases} t_1=6=x^2+x \\ t_2=12=x^2+x \end{cases}$

$x^2+x-6=0 \xrightarrow{\Delta>0} S_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1$

$x^2+x-12=0 \xrightarrow{\Delta>0} S_2=x'+x''=-\frac{b}{a}=-1$

$x_1+x_2+x'+x''=-1-1=-2$

تست ۳۷: معادلهٔ $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

متفاوت

$x^2-2x=t$

$t^2-t-2=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t_1=-1 = x^2-2x \\ t_2=-\frac{c}{a}=2=x^2-2x \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-2x+1=(x-1)^2=0 \to x_1=x_2=1 \\ x^2-2x-2=0 \quad \Delta=(-2)^2-4(1)(-2)>0 \to \text{۲ ریشه} \quad x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2} \end{cases}$

کلاً ۳ ریشه متمایز

تست ۳۸: فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار x_1+x_2 کدام است؟

VIP

دو طرف را در قسمت لاغر پرانتز ضرب می‌کنیم

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3$

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$\boxed{\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\right)}\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)-2\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=0$

$\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right)=0 \begin{cases} x-\frac{1}{x}-2=0 \longrightarrow \frac{x^2-1-2x}{x}=0 \to x^2-2x-1=0 \quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2 \\ \sqrt[3]{x^2}=1 \to x^2=1 \to x=\pm 1 \quad x'=1 \quad x''=-1 \end{cases}$

$\underbrace{x'+x''}_{\text{صفر}}+x_1+x_2=2$

روابط بین ضرائب و ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$

فرض کنید این معادله سه ریشه به نام‌های α، β و γ داشته باشد، بنابراین:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

حال عبارت حاصلضربی را کمی ساده می‌کنیم:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=a\left(x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\gamma+\beta\alpha+\gamma\beta)x-\alpha\beta\gamma\right)$$

کلاس بالا

شرط برابری آن است که ضرائب جملات هم‌توان، در طرفین تساوی با یک‌دیگر مساوی باشد و در نتیجه:

۱) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$	۲) $\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$	۳) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

تست ۳۹ : تابع درجه سوم $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ در سه نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند. اگر حاصل ضرب طول این نقاط ۳ و $f(2)=15$ باشد، a کدام است؟

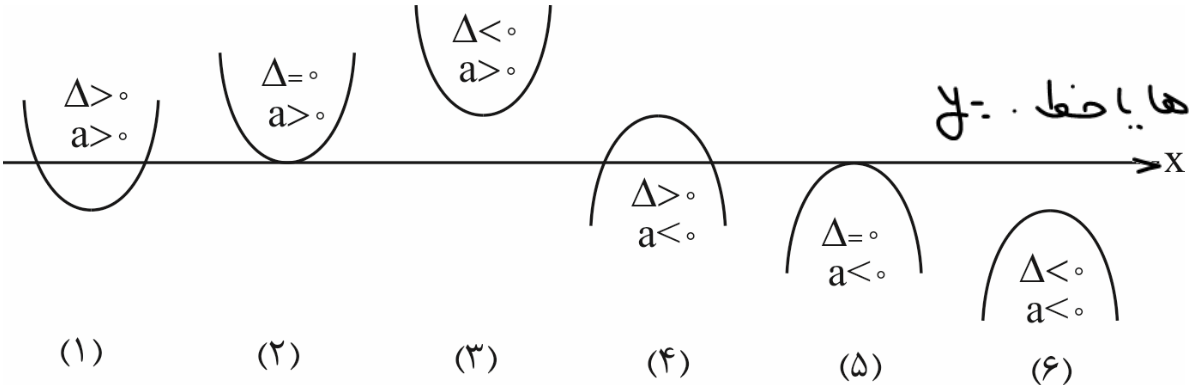
۱) ۱   ۲) ۳-   ۳) ۳   ۴) ۱-

سال بعد کلاس کنکور

نمودار تابع درجه دوم

در منحنی نمودار توابع $y=ax^2+bx+c$ که معرف یک سهمی است، چنانچه $a>0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین است.

۶ حالت برای نمایش منحنی تابع درجه دوم داریم :



(۱) : ۲ ریشه‌ی متمایز و دهانه رو به بالا

(۲) : یک ریشه مضاعف و دهانه رو به بالا. به این حالت نامنفی نیز می‌گویند.

(۳) : فاقد ریشه‌ی حقیقی و دهانه رو به بالا

(۴) : ۲ ریشه‌ی متمایز، دهانه رو به پایین

(۵) : یک ریشه مضاعف و دهانه رو به پایین. به این حالت، نامثبت نیز می‌گویند.

(۶) : فاقد ریشه‌ی حقیقی، دهانه رو به پایین.

در حالت (۳) می‌گوییم که تابع ، همواره مثبت است. یعنی $\Delta<0$ و $a>0$

در حالت (۶) می‌گوییم که تابع ، همواره منفی است. یعنی $\Delta<0$ و $a<0$

۳ تذکر مهم :

۱- اگر $\Delta<0$ باشد، سهمی یا بالای محور x ها است یا پایین محور x ها است.

۲- اگر $\Delta=0$ باشد، سهمی بر محور x ها مماس است.

۳- اگر $\Delta>0$ باشد، سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

تست ۴۰ : به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=\underbrace{(1-m)}_{a}x^2+\underbrace{2(m-3)}_{b}x\underbrace{-1}_{c}$ همواره پایین محور xها است؟
(ریاضی خارج ۹۸، مشابه ریاضی ۹۱)

۱) $1<m<5$ ۲) $2<m<5$ ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$

خط زیر محورها

الف) دهانه پایین : $1-m<0 \longrightarrow 1<m$

ب) ریشه ندهد ، $\Delta<0$: $\Delta=(2(m-3))^2-4(1-m)(-1)<0$

$\Delta=\cancel{4}(m-3)^2+\cancel{4}(1-m)<0 \sim\sim\sim m^2-6m+9+1-m<0$

$m^2-7m+10<0$

m		2		5	
$\Delta<0$	+	0	−	0	+

$2<m<5$ (ب)   (الف) ∩ (ب) $\boxed{2<m<5}$

تست ۴۱ : به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-2)x^2-3x+\underbrace{m+2}_{c}$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟
(سراسری ریاضی)

y=0

۱) ۳- ۲) $\frac{-5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

الف) $\boxed{m>2}$ $m-2>0$: دهانه بالا

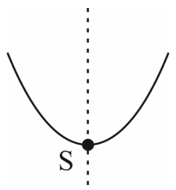
$\Delta=0$: $(-3)^2-4(m-2)(m+2)=0 \longrightarrow 9-4(m^2-4)=9-4m^2+16=25-4m^2=0$

$25=4m^2 \longrightarrow m^2=\frac{25}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} m=\pm\frac{5}{2} \xrightarrow[m>2]{\text{شرط الف}} m=\frac{5}{2}=2{,}5$

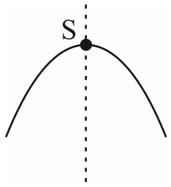
شگردهای محور تقارن تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$

خطی است که منحنی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. به نمودارهای مقابل توجه کنید:

$x=-\frac{b}{2a}$ = خط تقارن سهمی است.
هم طول رأس است، هم خط $x=-\frac{b}{2a}$
محور تقارن است.



$x_S=-\frac{b}{2a}$

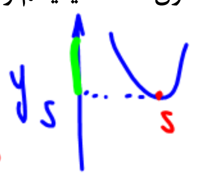


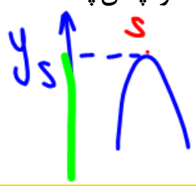
$x_S=-\frac{b}{2a}$

به x_S محور تقارن سهمی می‌گوییم. در سهمی به S (با جمع ریشه‌ها فرق می‌کند) رأس سهمی می‌گوییم و مختصات آن را به صورت $S(x_S,y_S)$ نشان می‌دهیم که $x_S=\frac{-b}{2a}$ و $\boxed{y_S=-\frac{\Delta}{4a}}$ می‌باشد. اگر $a>0$ باشد (دهانهٔ سهمی رو به بالا) سهمی دارای مینیمم است و مختصات S همان مختصات نقطهٔ **min** می‌باشد و اگر $a<0$ باشد (دهانهٔ سهمی رو به پایین) سهمی دارای ماکسیمم بوده و مختصات S همان مختصات نقطهٔ **max** است.

یادت باشه: به y_S، مقدار ماکسیمم یا مینیمم گفته می‌شود. پس اگر در سؤالی از شما بپرسند که ماکسیمم این سهمی چقدر است منظورش این است که y_S را پیدا کنید. به x_S هم طول رأس می‌گویند و چنان‌چه $a>0$ باشد x_S همان طول نقطهٔ مینیمم و اگر $a<0$ باشد x_S همان طول نقطهٔ ماکسیمم است.

بررسی
$a>0 : y\geq y_S$





$a<0$
$\forall\ y\leq y_S$

$y_S=-\frac{\Delta}{4a}$

توجه: برای پیداکردن y_S به یکی از دو روش زیر عمل کنید:

۱) از رابطهٔ $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ استفاده کنید. مزیت این روش این است که در روند محاسبات متوجه مثبت یا منفی بودن Δ می‌شوید.

۲) بعد از پیداکردن x_S از رابطهٔ $x_S = \frac{-b}{2a}$ به جای تمام xهای تابع، x_S را جایگذاری کنید.

مثال ۴۱ : مختصات رأس سهمی $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ را محاسبه کنید و بگویید این نقطه ماکسیمم است یا مینیمم؟

تحلیل: ضریب x^2 منفی است پس این سهمی دارای ماکسیمم است. اکنون طول رأس سهمی (ماکسیمم) را از رابطهٔ $x_S = x_{max} = \frac{-b}{2a}$ پیدا می‌کنیم:

$$x_S = x_{max} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

برای پیدا کردن y_S (در اینجا y_{max}) هم به دو روش عمل می‌کنیم تا ببینید فرقی نمی‌کند:

$$y_S = y_{max} = f(x_S) = f(\frac{-b}{2a}) = f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$$

یا:

$$y_S = y_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(4)^2 - 4(-2)(-3)}{\underbrace{4(-2)}_{=-8}} = \frac{16-24}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

جایگذاری در تابع

$S(-1, -1)$ $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$

پس مختصات نقطهٔ ماکسیمم یا همان رأس به صورت $S(1,-1)$ است.

شگردهای پیداکردن علامت a، b و c در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a>0$ $a<0$ $a=0$

$y = \cancel{ax^2} + bx + c$

دهانه به بالا

دهانه به پایین

خط $y = bx + c$

۱) اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد $a > 0$ و اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین باشد $a < 0$ است.

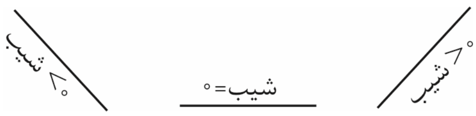
۲) جایی که منحنی به محور yها برخورد می‌کند $(x = 0)$ نشان‌دهندهٔ C است.

۳) برای پیداکردن علامت b به دو روش زیر می‌توان عمل کرد:

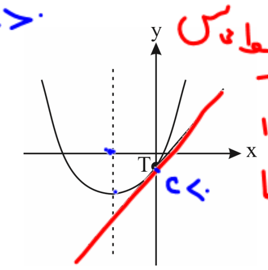
الف) با توجه به این که محور تقارن سمت راست یا چپ مبدأ مختصات قرار گرفته باشد ($x_S = \frac{-b}{2a} > 0$ و یا $x_S = \frac{-b}{2a} < 0$) علامت b را پیدا می‌کنیم.

ب) در نقطه‌ای که سهمی به محور yها برخورد می‌کند به آن یک خط مماس می‌کنیم. علامت شیب این خط همان علامت b است.

یادآوری:



مثال ۴۲: در سهمی‌های زیر علامت a ، b و c را مشخص کنید:



$a>0$

شیب خط مماس در نقطهٔ T مثبته. $b>0$

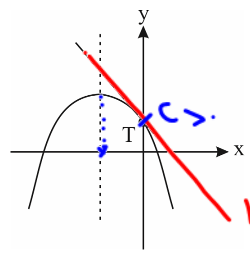
$c<0$

پاسخ: الف) دهانهٔ سهمی رو به بالا است پس $a > 0$. محل برخورد منحنی با محور yها پایین مبدأ است پس $c < 0$. محور تقارن سمت چپ مبدأ است پس:

$$x_S = -\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a>0} b > 0$$

$-b<0$ ضرب در (-1)

روش دوم: برای یافتن b به این صورت است: در نقطهٔ T بر سهمی یک خط مماس می‌کنیم. چون شیب خط مماس، مثبت است پس b هم مثبت است. یادتان نرود، نقطهٔ T، محل برخورد سهمی با محور yها است.



$c>0$ $b<0$

$a<0$ ، $b<0$ و $c>0$

ب) دهانهٔ سهمی رو به پایین است پس $a < 0$. محل برخورد منحنی با محور yها، بالای مبدأ است پس $C > 0$. محور تقارن سمت چپ مبدأ است پس:

$$x_S = -\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a<0} b < 0$$

$-b>0$ ضرب در (-1)

$\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c<0 \end{cases}$ ۲ ریشه دارد $\Delta>0$

$a<0$
$b=0$
$c>0$
$\Delta>0$ ← ۲ ریشه ۲ جا به محور x ها خورده

برای پیدا کردن $\mathbf{b}$ به روش دوم، در نقطهٔ $\mathbf{T}$ (محل برخورد سهمی با محور $\mathbf{y}$ها) بر سهمی یک خط مماس می‌کنیم. علامت شیب این خط منفی است پس $\mathbf{b}$ هم منفی است.

از تعداد نقاط برخورد با محور x ها علامت Δ معلوم میشه
- ۲ جا خورده به x ها $\Delta>0$
- به جا مماس شد به x ها $\Delta=0$
- به محور x ها نخورد $\Delta<0$

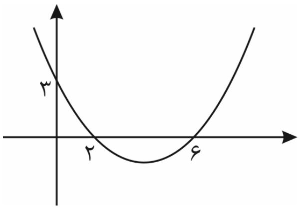
نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نمودار آن

برای نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نمودارش، به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر نمودار سهمی در دو نقطه را به محور $\mathbf{x}$ها برخورد کرده باشد (دارای دو ریشه باشد) یکی از روش‌های خوب، نوشتن معادله به صورت مقابل است: $\mathbf{f(x)=a(x-}$ ریشهٔ اول $\mathbf{)\,(x-}$ ریشهٔ دوم $\mathbf{)}$

عدد $\mathbf{a}$ را با استفاده از معلومات سؤال و یا شکل نمودار پیدا می‌کنیم. مثلاً می‌گویند $|\mathbf{a}|=۱$ است و یا مختصات یک نقطه که معمولاً محل برخورد منحنی با محور $\mathbf{y}$ها است در معادله جاگذاری می‌کنیم و $\mathbf{a}$ پیدا می‌شود.

مثال ۴۳ : اگر نمودار سهمی $\mathbf{y=ax^۲+bx+c}$ به صورت زیر باشد، ضابطهٔ سهمی را مشخص کنید.



پاسخ: این سهمی در نقاط $\mathbf{x=۲}$ و $\mathbf{x=۶}$ به محور $\mathbf{x}$ها برخورد کرده است (ریشه‌ها)، پس:

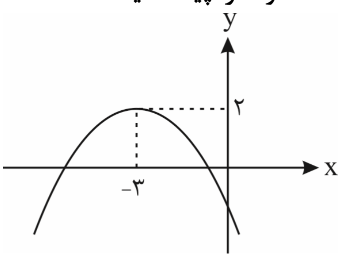
$$\mathbf{f(x)=a(x-۲)(x-۶)} \xrightarrow[\text{در معادله صدق می‌کند}]{(۰,۳)} \mathbf{۳=a(۰-۲)(۰-۶)} \Rightarrow \mathbf{a=\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{f(x)=y=\frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۶)=\frac{۱}{۴}(x^۲-۸x+۱۲)=\frac{۱}{۴}x^۲-۲x+۳}$$

ب) مختصات رأس سهمی $\mathbf{S(x_S,y_S)}$ که همان مختصات $\mathbf{max}$ و یا $\mathbf{min}$ است می‌دهند که در این حالت داریم:

$$\mathbf{f(x)=a(x-x_S)^۲+y_S}$$

مثال ۴۴: در شکل زیر نمودار سهمی به معادلهٔ $\mathbf{f(x)=ax^۲+bx+c}$ داده شده است. اگر $|\mathbf{a}|=۱$ باشد، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را پیدا کنید.



$a=1$ یا $a=-1$ ــــ دهانه به پایین $a<0$

$\boxed{a=-1}$

پاسخ: چون مختصات رأس را داریم پس معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\mathbf{f(x)=a(x-(-۳))^۲+۲} \Rightarrow \mathbf{f(x)=a(x+۳)^۲+۲}$$

از طرفی در سؤال گفته شده که $|\mathbf{a}|=۱$ است پس $\mathbf{a=\pm۱}$ و چون دهانه سهمی رو به پایین است $\mathbf{a=-۱}$ را انتخاب می‌کنیم:

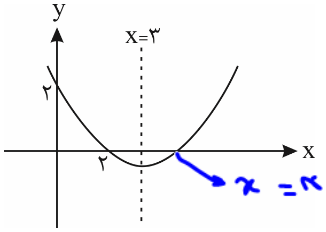
$$\mathbf{f(x)=-(x+۳)^۲+۲=-(x^۲+۶x+۹)+۲=-x^۲-۶x-۹+۲} \Rightarrow \mathbf{f(x)=-x^۲-۶x-۷}$$

پس $\mathbf{b=-۶}$ و $\mathbf{c=-۷}$ می‌باشد.

یادت باشه: یه مدل ترکیبی هم داریم. یعنی محور تقارن و یک ریشه را می‌دهد. در این حالت از خاصیت محور تقارن که $\mathbf{x_S}=\dfrac{\text{ریشه اول + ریشه دوم}}{۲}$ استفاده کرده و ریشهٔ دیگر را به دست می‌آوریم.

طول رأس وسط ۲ ریشه است.

مثال ۴۵ : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید:



پاسخ: با توجه به شکل، $x=3$ محور تقارن است و چنان‌چه یک سهمی دارای دو ریشه باشد، محور تقارن دقیقاً از وسط ریشه‌ها عبور می‌کند:

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow 3=\frac{2+x_2}{2} \Rightarrow x_2=4$$

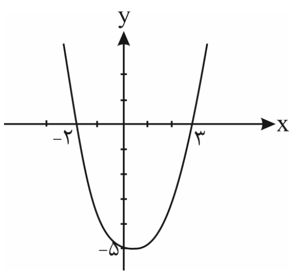
حالا با داشتن دو ریشه معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x-2)(x-4) \xrightarrow[\text{در معادله صدق می‌کند}]{(0,2)} 2=a(0-2)(0-4) \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x-4)=\frac{1}{4}(x^2-6x+8)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

راستی چرا از $f(x)=a(x-x_S)^2+y_S$ استفاده نکردیم؟ چون y_S را نداشتیم.

تست ۴۶: شکل زیر، نمودار تابع درجه دوم به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۵
۲) −۵ ✓
۳) ۶
۴) −۶

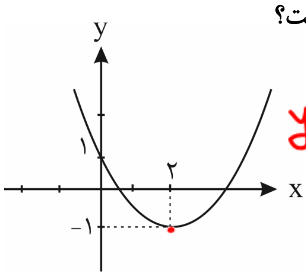
نقطه $A(0,-5)$ روی سهمی است $y=a(x+2)(x-3)$

$-5=a(0+2)(0-3) \rightarrow a=\frac{5}{6}$

$y=\frac{5}{6}(x+2)(x-3)=\frac{5}{6}(x^2-x-6)=\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{6}x-5$

$a+b+c=-5$

تست ۴۷: در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. $b-a$ کدام است؟



$y=a(x-x_s)^2+y_s$

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $-\frac{1}{6}$
۴) $-\frac{5}{2}$ ✓

با داشتن مختصات راس $S(2,-1)$ و $A(0,1)$ داریم:

$A(0,1)\in y=a(x-2)^2-1 \rightarrow 1=a(0-2)^2-1 \rightarrow a=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)-1=\frac{1}{2}x^2-2x+1$

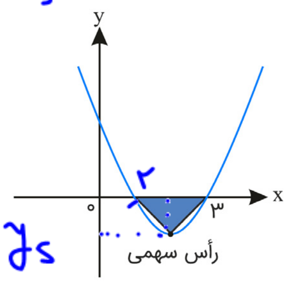
$a=\frac{1}{2}$ ، $b=-2$

$b-a=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

قاعده مثلث: فاصله دو ریشه

ارتفاع مثلث همون y_s

تست ۴۸: با توجه به نمودار تابع درجهٔ دوم $y=3x^2+ax+18$، مساحت مثلث سایه‌زده کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{8}$ ✓

۴) $\frac{3}{16}$

می‌بینم یکی از ریشه‌ها $x=3$ است.

$P=x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{18}{3}=6 \rightarrow \boxed{x_1=\frac{6}{3}=2}$

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{a}{3} \rightarrow \boxed{a=-15}$

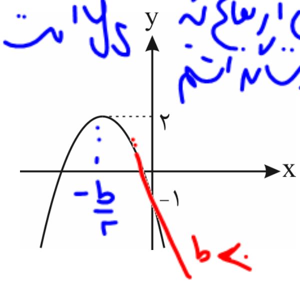
$y=3x^2-15x+18=3(x^2-5x+6)=3(x-2)(x-3)$

مساحت مثلث $=\frac{1}{2}$(قاعده)(ارتفاع) $=\frac{1}{2}(3-2=1)(\frac{3}{4})=\frac{3}{8}$

x_s وسط ۲ ریشه است: $S \left| \begin{array}{l} x_s=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2} \\ y_s=-\frac{3}{4} \end{array}\right.$ تابع

مساحت باید مثبت باشد پس ارتفاع که $|y_s|$ است را مطلق گذاشتم

تست ۴۹: نمودار سهمی $(a\in\mathbb{N})f(x)=(a-2)x^2+bx+c$، به صورت مقابل است. bc کدام است؟



۱) $2\sqrt{3}$ ✓

۲) $-2\sqrt{3}$

۳) $2\sqrt{2}$

۴) $-2\sqrt{2}$

دهانه به پایین است، ضریب x^2 منفیه پس:

$a-2<0 \rightarrow a<2 \rightarrow$ a عدد طبیعی

طبیعی زیر ۲ فقط $a=1$ → تابع

$y=-x^2+bx+c$

$A(0,-1)\in$ تابع $\quad -1=0+0+c \rightarrow \boxed{c=-1} \rightarrow y=-x^2+bx-1$

$\left| \begin{array}{l} x_s=\frac{-b}{2a}=\frac{-b}{-2}=\frac{b}{2} \\ y_s=2 \end{array}\right.$ می‌بینم

$S(\frac{b}{2},2)\in$ تابع $\quad 2=-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{2}-1 \rightarrow 8=-b^2+2b^2-4$

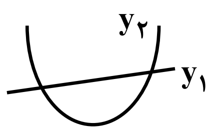
$12=b^2 \rightarrow b=\pm 2\sqrt{3} \xrightarrow{b<0} \boxed{b=-2\sqrt{3}}$

وضعیت یک خط، نسبت به سهمی

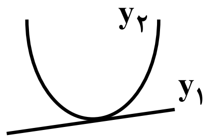
چنانچه خط $y_1=a'x+b'$ را با سهمی $y_2=ax^2+bx+c$ قطع دهیم، معادله‌ی تلاقی آن ها به دست می‌آید. این معادله‌ی تلاقی از درجه‌ی دوم است.

$$\begin{cases} y_2=ax^2+bx+c \\ y_1=a'x+b' \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ax^2+bx+c=a'x+b' \Rightarrow ax^2+(b-a')x+c-b'=0$$

الف) چنانچه Δ در معادله‌ی تلاقی مثبت باشد $(\Delta>0)$ ، خط سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.



ب) اگر Δ در معادله‌ی تلاقی صفر باشد $(\Delta=0)$ ، خط بر سهمی مماس است.

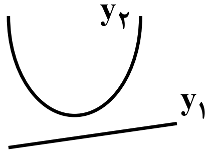


معادل نیمساز ناحیه اول رسم $y=x$ (تابع همانی)

نیمساز ناحیه اول: $y=x$ ، $x\geq 0$

" " " دوم و چهارم $y=-x$

ج) اگر Δ در معادله‌ی تلاقی منفی باشد $(\Delta<0)$ ، خط و سهمی همدیگر را قطع نمی‌کنند.



تست ۵۰ : منحنی به معادله‌ی $y=(2x+1)(x+8)$ با خطوط $y=mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است ؟

(سراسری ریاضی ۸۸ و مشابه سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $5<m<13$ ۲) $15<m<23$ ۳) $7<m<15$ ۴) $9<m<25$

ترجمه: به هم نمی‌خورند

$\begin{cases} y=2x^2+17x+8 \\ y=mx \end{cases}$ معادله تقاطع خط و سهمی را بنویسید

$\Delta<0$ ندارد و

$2x^2+17x+8=mx$

می‌خواهیم ریشه نداشته باشد: $2x^2+(17-m)x+8=0$

$\Delta=(17-m)^2-4(2)(8)<0$

$(17-m)^2<64 \xrightarrow{\text{جذر}} |17-m|<8 \rightsquigarrow -8<17-m<8 \xrightarrow{-17}$

$-25<-m<-9 \xrightarrow{\times(-1)} 25>m>9 \rightsquigarrow 9<m<25 \rightsquigarrow$ گزینه ۴

تست ۵۱ : به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است ؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۳)

$y=x$

$\Delta=0$

۱) -4 ۲) ۴ و -12 ۳) -4 و ۱۲ ۴) ۱۲

$x>0$

تست مهم رفتنی

معادله برخورد خط و سهمی

$2x^2+\underbrace{(m+1)x}_{mx+\cancel{x}}+m+6=\cancel{x} \longrightarrow \boxed{2x^2+mx+(m+6)=0} \xrightarrow{\Delta=0} \Delta=m^2-4(2)(m+6)=0$

$m^2-8m-48=(m+4)(m-12)=0$

$m=-4 \xrightarrow{*} 2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2=0$ ، $\boxed{x=1}$ ✓ در ناحیه اول تماس خطوط

$m=12 \xrightarrow{*} 2x^2+12x+18=2(x^2+6x+9)=2(x+3)^2=0 \rightarrow x=-3$

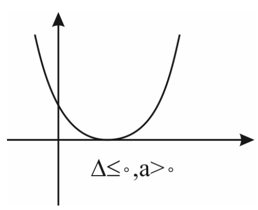
شگردهای وضعیت سهمی در دستگاه مختصات

۱- اگر $a>0$ باشد سهمی قطعاً از ناحیه‌های ۱ و ۲ و اگر $a<0$ باشد قطعاً از ناحیه‌های ۳ و ۴ می‌گذرد.

۲- اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.

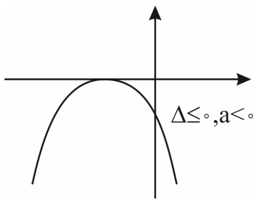
۳- اگر $\Delta\leq 0$ باشد، سهمی فقط از دو ناحیه می‌گذرد. اگر در این حالت $a>0$ باشد، فقط از ناحیه اول و دوم و اگر $a<0$ باشد فقط از ناحیه سوم و چهارم می‌گذرد.

مثلاً اگر $\Delta\leq 0$ و $a>0$ باشد می‌تواند به صورت مقابل باشد:



(الف)

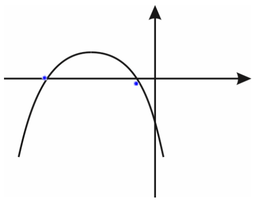
مثلاً اگر $\Delta \le 0$ و $a<0$ باشد می‌تواند به صورت مقابل باشد:



(ب)

البته این که در xهای مثبت و یا منفی بر محور xها مماس باشد تأثیری در عبور از ناحیه‌ها در این ۲ حالت (الف) و (ب) ندارد.

۴- سهمی که فقط از ناحیه اول نمی‌گذرد یعنی از ناحیه‌های دوم و سوم و چهارم می‌گذرد به صورت شکل مقابل است:



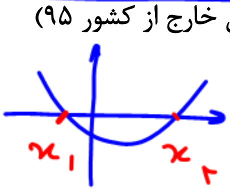
تفسیر: دارای ۲ ریشهٔ متمایز نامثبت و دهانهٔ آن نیز به پایین است. ضمناً از مبدأ می‌تواند عبور کند. پس: $S<0$، $P\ge0$ و $\Delta>0$ است، راستی نامثبت یعنی منفی یا صفر.

تست ۵۲: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ ، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵)

a   b   c

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

یعنی
ضرب دو ریشه منفی است



$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \to \frac{1-m}{m+2} < 0$

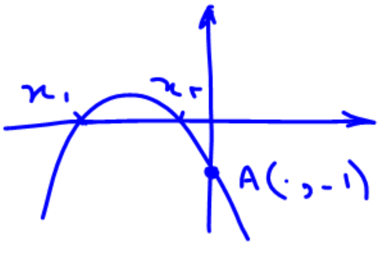
m		-2		1	
	$-$	ن.ت	$+$	0	$-$
	جواب				جواب

①

تست ۵۳: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ ، فقط از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد ؟ (سراسری تجربی)

$c=-1$ $A(0,-1)$

۱) $a\le2$ ۲) $0<a\le2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $a<-6$



(الف) $\boxed{a<3}$ $a-3<0$: دهانه به پایین

$\Delta = a^2-4(a-3)(-1)>0$: با ۲ ریشه دارد $a^2+4a-12>0$

a		-6		2	
$\Delta<0$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\boxed{a<-6 \text{ یا } a>2}$ ب

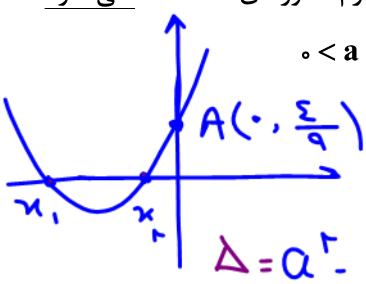
$S: x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{-a}{a-3}<0 \to -a>0$ $\boxed{a<0}$ ج

-6 2 3

تست ۵۴: به ازای چه حدودی از a نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2-(a-4)x+\frac{9}{4}$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-1<a<0$ ۲) $-2<a<-1$ ۳) $1<a<2$ ۴) $0<a<1$

$A(0,\frac{9}{4})$



الف
دهانه به بالا : $\boxed{a>0}$

دو ریشه دارد : $\Delta=(-(a-4))^2-4a(\frac{9}{4})>0$ $(a-4)^2-9a>0$

$\Delta=a^2-8a+16-9a=a^2-17a+16>0$

a		1		16	
	$+$	0	$-$	0	$+$

ب

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{a-4}{a}<0$ $a-4<0$ $\boxed{a<4}$ ج

0 1 4 16

(الف) ∩ (ج): $0<a<4$
ب: $a<1$ یا $a>16$

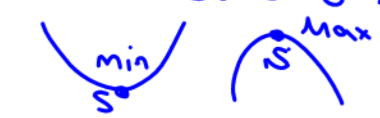
با استفاده از رأس سهمی می‌توانیم بیشترین یا کم‌ترین مقدار تابع درجه دوم را در مسائل مختلف پیدا کنیم.

یادت باشه: در مسائلی از شما بیشترین یا کم‌ترین مقدار پرسیده می‌شود در صورت امکان برای مسئله یک شکل فرضی رسم کنید و متغیرها را روی شکل نمایش دهید. اگر پای دو متغیر در میان بود ارتباط آن‌ها را بنویسید و یکی از آن‌ها را یک طرف تساوی تنها نگه دارید. اکنون خواسته مسئله را به صورت یک ابع شناسایی کنید و اسم آن را بگذارید تابع هدف. احتمالاً تابع هدف دو متغیره است که از قسمت اول رابطهٔ بین ۲ متغیر را نوشتید. کافی است این تابع را تک متغیره کنید. حالا شما به یک تابع درجه دوم رسیدید که مقدار ماکسیمم و مینیمم آن به راحتی از رابطهٔ $-\frac{\Delta}{4a}$ محاسبه می‌شود. برای این که تمام این مراحل را با هم ببینید به تست‌های زیر به شدت توجه کنید.

اکسترمم: Min یا Max

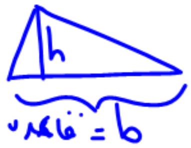
تست ۵۵ : از میان مثلث هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی متر است، مثلثی را اختیار کرده ایم که مساحت آن ماکسیمم است. مساحت مثلث چند سانتی‌متر مربع است ؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶



$y=ax^2+bx+c$

$S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

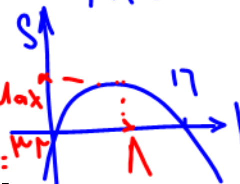


$b+h=16$
$h=16-b$

$S=\frac12 bh=\frac12 b(16-b)$
$S=8b-\frac12 b^2$

$S=\frac12 b(16-b)$

$S_{Max}=\frac{8}{2}(16-8)=32$



تست ۵۶: دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصل‌ضرب آن‌ها می‌نیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$2a+6=b$

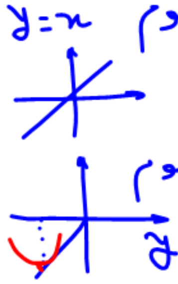
$y=ab=a(2a+6)=2a^2+6a$ سهمی دهانه به بالا با ۲ ریشه

$a=0, -3$ طبق شکل $a=-\frac32$ ضرب را Min می‌کند

$b=2a+6=3$ $a+b=-\frac32+3=\frac32$

نیمساز ربع اول و سوم $y=x$

نیمساز ربع دوم و چهارم $y=-x$ $x\le 0$



تست ۵۷ : نقطهٔ مینیمم تابع با ضابطهٔ $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

$S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $x_S<0$

$S\left(-\frac{a}{2}, \frac{8-a^2}{4}\right)\in y=x$ $\quad \frac{8-a^2}{4}=\frac{-a}{2}\to 8-a^2=-2a\to 0=a^2-2a-8$

$a=4$ $\quad a=-2$

$x_S=-\frac{a}{2}<0\to\boxed{a>0}\to\boxed{a=4}$

معادلات و نامعادلات گویا

یک معادله‌ی گویا معادله‌ای است که صورت و مخرج کسرهای آن، عبارت های چند جمله‌ای باشد. روش کلی حل این معادلات به صورت زیر است :

روش اول :

۱- ابتدا ک . م . م مخرج ها را می‌یابیم.

۲- طرفین معادله را در ک.م.م. مخرج ها ضرب می‌کنیم و جواب های معادله‌ی حاصل را می‌یابیم.

۳- جواب هایی که مخرج کسرهای اصلی را صفر می‌کنند از جواب های حاصل از مرحله‌ی دوم حذف می‌کنیم.

روش دوم :

کاری کن که چپ مساوی فقط یک کسر و راستِ مساوی هم فقط یک کسر داشته باشی! یعنی این شکلی بشه:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{K(x)}{D(x)}$$

حالا ۳ حالت پیش میاد:

الف) بهت بگن مثلاً $\frac{x+۱}{x+۳}=\frac{x-۲}{x-۴}$ رو حل کن:

پاسخ: چپ و راست فقط یک کسر داریم. صورت‌های این کسر مثل هم نیستن. مخرج‌ها هم مثل هم نیستن، پس طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(x-۲)(x+۳)=(x+۱)(x-۴)\Rightarrow x^۲+x-۶=x^۲-۳x-۴\Rightarrow ۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow$ چون هیچ‌کدوم از مخرج‌ها رو صفر نمی‌کنه پس قبوله!

ب) بهت بگن $\frac{x-۴}{x-۲}=\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x(x-۲)}$ رو حل کن. این‌جا باید مخرج مشترک بگیری که چپ و راست یک کسر داشته باشی. ببینید:

$$\frac{۵(x-۲)-۴}{x(x-۲)}=\frac{x-۴}{x-۲}$$

$$\frac{۵x-۱۴}{x}=\frac{x-۴}{۱}$$

و حالا چون عامل $x-۲$ توی مخرجِ جفتشون هست، خیلی راحت حذفش کنی.

حالا دیگه چیزی نیست که از دو طرف ساده بشه، طرفین وسطین کن:

$$۵x-۱۴=x^۲-۴x\ \Rightarrow\ x^۲-۹x+۱۴=۰\ \Rightarrow\ (x-۷)(x-۲)=۰\ \Rightarrow\begin{cases}x=۲\ \Rightarrow \text{مخرج رو صفر می کنه پس غ.ق.ق}\\ x=۷\ \Rightarrow \text{قابل قبول}\end{cases}$$

حالا فرض کن ازت می‌پرسه معادله‌ی $\frac{۳x+۹}{x+۳}=۴$ چند تا جواب داره؟ خوب اگه طرفین وسطین کنیم، داریم:

$۳x+۹=۴x+۱۲\Rightarrow x=-۳\Rightarrow$ مخرج رو صفر می‌کنه، پس غ.ق.ق است و معادله جواب نداره.

ولی می‌تونستی کار بهتری کنی:

$$\frac{۳(x+۳)}{x+۳}=۴$$

اگه صورت و مخرج یک کسر مثل هم باشن، می‌تونی اونا رو با هم ساده کنی:

$\frac{۳\,\cancel{(x+۳)}}{\cancel{(x+۳)}}=۴\ \Rightarrow\ ۳=۴\ \Rightarrow$ مگه می‌شه؟ $\Rightarrow$ معادله جواب نداره

پس یادت باشه: «صورت و مخرجِ یک کسر اگه مثل هم باشن ساده می‌شن، هیچ جوابی هم حذف نمی‌شه.»

حالا اگه معادله‌ی $\frac{۱}{۳}=\frac{x+۴}{۳x+۱۲}$ رو دیدی این‌طوری حلش می‌کنی:

$\frac{\cancel{x+۴}}{۳\,\cancel{(x+۴)}}=\frac{۱}{۳}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}\ \Rightarrow$ بدیهی همواره برقراره به جز ریشه مخرج

این معادله بی‌شمار جواب داره، یعنی همه‌ی xها جواب این معادله هستن به غیر از $x=-۴$ که مخرج رو صفر می‌کنه:

جواب : $x\in\mathbb{R}-\{-۴\}$

پ) این از همه مهمتره!

بهت بگن معادله‌ی $\frac{۶(x^۲-۵x+۶)}{x^۲-۷x+۱۲}=\frac{x^۲-۷x+۱۰}{x-۴}$ رو حل کن:

$x-۲=۰\longrightarrow x=۲$

اولین کار اینه که تا جایی که می‌تونی تجزیه کنی:

$$\frac{\cancel{(x-۲)}(x-۵)}{\cancel{(x-۴)}}=\frac{۶\cancel{(x-۳)}\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۳)}\cancel{(x-۴)}}$$

$x-۵=۶$

$x=۱۱$

از مثال‌های قبلی یاد گرفتیم که توی یک کسر صورت و مخرج اگر مثل هم باشن ساده می‌شن. مخرج‌های ۲ کسر هم اگر مثل هم باشن ساده می‌شن، پس داریم: $(x-2)(x-5)=6(x-2)$

حالا یه نکته‌ی مهم: مخرج با هرچی که ساده می‌شه (با صورتِ بالای سرش یا با مخرج کسرِ دیگه) نگران جوابی نبودیم که حذف بشه، ما می‌تونیم صورتِ ۲ کسر هم اگه مثل هم بودن با هم ساده کنیم ولی این بار باید پرانتزِ حذف‌شده رو مساوی صفر قرار دهیم و جزو جواب‌ها به حساب بیاریم.

$$\cancel{(x-2)}(x-5)=6\cancel{(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} x-5=6 \Rightarrow x=11 \Rightarrow \text{قبوله!} \\ (x-2)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{قبوله!} \end{cases}$$

تست ۵۸: معادله‌ی $\dfrac{2x^3-x}{x^3+1}=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\frac{\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}=\frac{\cancel{x}(2x^2-1)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} \quad \boxed{x_1=0}$$

$$1=\frac{2x^2-1}{x^2-x+1} \longrightarrow x^2-x+1=2x^2-1 \longrightarrow x^2+x-2=0 \longrightarrow \underset{\text{غ ق ق}}{x=1} \;,\; \boxed{-2=x}$$

گاهی اوقات یکی از جواب‌ها رو بهتون میدن و به جاش یک مجهول مثل **a** یا **b** رو ازتون می‌پرسن و یا یکی از جواب‌ها رو می‌دن، با استفاده از اون شما **a** رو پیدا می‌کنید تا بتونید معادله رو از اول حل کنید تا جواب‌های دیگه هم به دست بیان:

تست ۵۹: اگر $x=4$ یک جواب معادله‌ی $\dfrac{a-1}{2x-4}=\dfrac{x-a}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x^2-4}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) جواب دیگری ندارد.

پاسخ: چون $x=4$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{4-a}{16-4-6}-\frac{1}{16-4}=\frac{a-1}{8-4} \Rightarrow \frac{4-a}{6}-\frac{1}{12}=\frac{a-1}{4} \Rightarrow \frac{8-2a-1}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{a-1}{\cancel{4}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2a+7=3a-3$$

$$\Rightarrow -5a=-10 \Rightarrow a=2$$

شکل جدید معادله اینطوریه: $\dfrac{x-2}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{2x-4}$

واسه راحتی کار در مخرج مشترک، $-\dfrac{1}{x^2-4}$ رو بیار سمت راست: $\dfrac{x-2}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{2x-4}+\dfrac{1}{x^2-4}$

حالا مخرج مشترک:

$$\frac{x-2}{(x-3)\cancel{(x+2)}}=\frac{x+2+2}{2(x-2)\cancel{(x+2)}} \Rightarrow \frac{x-2}{x-3}=\frac{x+4}{2(x-2)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2(x-2)^2=(x+4)(x-3)$$

$$\Rightarrow 2(x^2-4x+4)=x^2+x-12 \Rightarrow 2x^2-8x+8=x^2+x-12 \Rightarrow x^2-9x+20=0 \Rightarrow (x-4)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \quad \text{قبوله!} \\ x=5 \quad \text{قبوله!} \end{cases}$$

تست ۶۰: مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=8x(\frac{x+2}{x-2}-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{9}{4}$ ۴) صفر

$$\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(\cancel{x-2})}=8x\left(\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}+2}{\cancel{x-2}}\right)\longrightarrow\frac{-\cancel{8x}}{(x+2)}=4(\cancel{8x})$$

$8x=0$

$\boxed{x_1=0}$

$$\frac{-1}{x+2}=4\longrightarrow -1=4x+8\longrightarrow -9=4x\longrightarrow\boxed{x_2=-\frac{9}{4}}$$

$$x_1+x_2=0-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}$$

۳ =

به این دو مدل تست توجه کنید. سلیقه طراحان قلم‌چی این شکلیه. یک معادله به شما داده می‌شه و ازتون می‌پرسه a چگونه باشه تا این معادله جواب نداشته باشه. یا a و b را چنان بیابید که این معادله‌ی گویا بی‌شمار جواب داشته باشه:

تست ۶۱: اگر معادله‌ی $\frac{2x-2}{x+1}+\frac{a}{x}=1$ جواب حقیقی نداشته باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(9,+\infty)$ ۲) $(1,9)$ ۳) $(-1,9)$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: طبق معمول باید کاری کنیم چپ و راستِ مساوی فقط یک کسر داشته باشیم. حالا این به سلیقه‌ی شما بستگی داره که کدوم ۲ تا رو با هم بگیریم. من واسه سادگی در مخرج مشترک‌گیری این کار رو می‌کنم:

$$\frac{2x-2}{x+1}=1-\frac{a}{x}\Rightarrow\frac{2x-2}{x+1}=\frac{x-a}{x}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}2x^2-2x=x^2-ax+x-a\Rightarrow x^2+(a-3)x+a=0$$

حالا می‌خواهیم این معادله جواب نداشته باشه! شرط این که معادله‌ی درجه دوم ریشه نداشته باشه اینه که $\Delta<0$ باشه یادته که:

$$\Delta=(a-3)^2-4(1)(a)<0\Rightarrow a^2-6a+9-4a<0\Rightarrow a^2-10a+9<0\Rightarrow 1<a<9$$

تست ۶۲: معادله‌ی $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2-x}{x+1}$ بی‌شمار ریشه دارد. دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(5,-1)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(3,-1)$ ۴) نمی‌تواند بی‌شمار ریشه داشته باشد.

پاسخ: مثل همیشه مخرج مشترک می‌گیریم تا چپ و راستِ مساوی فقط یک کسر داشته باشیم:

$$\frac{(2-x)(x-1)+(x+1)^2}{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x-1)}}=\frac{ax+b}{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+1)}}\Rightarrow 2x-2-\cancel{x^2}+x+\cancel{x^2}+2x+1=ax+b\Rightarrow 5x-1=ax+b$$

برای این که این معادله بی‌شمار ریشه (به غیر از $x=\pm1$) داشته باشد باید چپ و راستِ این تساوی همیشه برقرار باشد:

$$\left.\begin{array}{l}5=a\\-1=b\Rightarrow b=-1\end{array}\right\}\Rightarrow(a,b)=(5,-1)$$

مدلِ آخر این معادلات اینطوریه که باید با تغییر متغیر حلّشون کنی. از این روش وقتی استفاده می‌کنی که بخشی از یک معادله و یا برعکسش رو دو بار ببینی.

تست ۶۳: معادله‌ی $-2 = \frac{2x+1}{2x^2+1} + \frac{2x^2+1}{2x+1}$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار

$\frac{2x^2+1}{2x+1} = t \longrightarrow t + \frac{1}{t} = -2 \xrightarrow{\text{طبق نکته}} t = \frac{2x^2+1}{2x+1} = -1$

$2x^2+1 = -2x-1$

$\div 2 \begin{cases} 2x^2+2x+2=0 \\ x^2+x+1=0 \end{cases} \longrightarrow \Delta<0$ ریشه ندارد

$\boxed{\begin{matrix} a+\frac{1}{a}=2 \longleftrightarrow a=1 \\ a+\frac{1}{a}=-2 \longrightarrow a=-1 \end{matrix}}$ نکته

تست ۶۴: تعداد جواب‌های معادلهٔ $(\frac{x^2-x+1}{x})^2 + (\frac{x^2-2x+1}{x})^2 = 1$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

تغییر متغیر $\frac{x^2+1}{x} = v$

$(\frac{x^2+1-x}{x})^2 + (\frac{x^2+1-2x}{x})^2 = 1 \sim (\frac{x^2+1}{x}-1)^2 + (\frac{x^2+1}{x}-2)^2 = 1$

$(v-1)^2+(v-2)^2=1 \longrightarrow v^2-2v+1+v^2-4v+4=1 \longrightarrow 2v^2-6v+4=0 \xrightarrow{\div 2}$

$v^2-3v+2=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} v=1$ یا $v=2$

$\frac{x^2+1}{x}=1 \longrightarrow x^2-x+1=0 \quad \Delta=(-1)^2-4<0$ جواب ندارد

$\frac{x^2+1}{x}=2 \longrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0 \longrightarrow \boxed{x=1}$ گزینه ۲

تست ۶۵ : بهروز یک مجلّه را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی ۹۸)

$\frac{1}{t_{\text{تنبل}}} + \frac{1}{t_{\text{زرنگ}}} = \frac{1}{t_{\text{کل}}}$

۱) ۳۲
۲) ۳۳
۳) ۳۵
۴) ۳۶

$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \sim \frac{t+9+t}{t(t+9)} = \frac{1}{20} \longrightarrow (2t+9)20 = t(t+9)$

$t^2+9t = 40t+180 \longrightarrow t^2-31t-180=0 \quad (t+5)(t-36)=0 \begin{cases} t=36 \checkmark \\ t=-5 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

تست ۶۶ : یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد ؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲)

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

یعنی ۲ برابر رنگ خالص آب و رنگ داشته باشیم

یعنی اگر ۷٫۲ کیلو رنگ داریم ۱۴٫۴ کیلو آب و رنگ داشته باشیم

$\times 2$

$\begin{cases} 11 \times 0.4 = 4.4 & \text{رنگ خالص} \\ 4 \times 0.7 = 2.8 & \text{رنگ خالص} \end{cases}$

$+ \quad 7.2$ رنگ خالص

$15\,kg$ آب و رنگ

$- \; 14.4$

$0.6\,kg$

برابر ۲

$\text{سرعت} = \dfrac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ $\text{زمان} = \dfrac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$

V قایق، V رود

تست ۶۷ : سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟ V (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲   ۲) ۱۵   ۳) ۲۰   ۴) ۲۵

$t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} = ۵ \rightsquigarrow \dfrac{\overset{\text{مسافت رفت}}{۱۲۰۰}}{۱۰۰-V} - \dfrac{\overset{\text{مسافت برگشت}}{۱۲۰۰}}{۱۰۰+V} = ۵ \xrightarrow{\text{طرفین} \div ۱۲۰۰} \dfrac{۱}{۱۰۰-V} - \dfrac{۱}{۱۰۰+V} = \dfrac{۵}{۱۲۰۰}$

$\dfrac{\overset{۲V}{\boxed{V+۱۰۰-۱۰۰+V}}}{۱۰۰۰۰-V^۲} = \dfrac{۱}{۲۴۰} \longrightarrow ۴۸۰V = ۱۰۰۰۰ - V^۲ \longrightarrow V^۲ + ۴۸۰V - ۱۰۰۰۰ = ۰$

-۱۰۰۰۰ ضرب ۲ عدد -۴۸۰ جمع شون

$(V+۵۰۰)(V-۲۰) = ۰ \quad \begin{cases} V = -۵۰۰ & \text{غ ق ق} \\ \boxed{V = ۲۰} \end{cases}$

تست ۶۸ : پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام چند کیلومتر در ساعت است؟ (تجربی ۹۸ خارج)

۱) ۱۲   ۲) ۱۲/۵   ۳) ۱۳/۵   ۴) ۱۵

جمع زمان رفت و برگشت $= ۹$

$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = ۹ \longrightarrow \dfrac{\text{مسافت رفت}}{\text{سرعت رفت}} + \dfrac{\text{مسافت برگشت}}{\text{سرعت برگشت}} = ۹$

$\underset{\text{هم جهت باد}}{\dfrac{۱}{V+۵}} + \underset{\text{خلاف جهت باد}}{\dfrac{۱}{V-۵}} = \dfrac{۹}{۶۰} = \dfrac{۳}{۲۰} \rightsquigarrow \dfrac{(V-۵)+(V+۵)}{V^۲-۲۵} = \dfrac{۳}{۲۰} \rightsquigarrow \dfrac{۲V}{V^۲-۲۵} = \dfrac{۳}{۲۰}$

$۳V^۲ - ۷۵ = ۴۰V \longrightarrow ۳V^۲ - ۴۰V - ۷۵ = ۰ \rightsquigarrow \boxed{V = ۱۵} \ \dfrac{km}{h} \ \dfrac{\text{کیلومتر}}{\text{ساعت}}$

یادت باشه: در مستطیلی به طول a و عرض b اگر $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$ برقرار باشد $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$ خواهد بود (نسبت طلایی). $= ۱/۶۱۸ = \varphi$

تست ۶۹ : در یک مستطیل، نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر نسبت طول به عرض آن است. نسبت $\overset{t}{\boxed{\text{عرض به طول}}}$ مستطیل برابر کدام است؟ $\dfrac{b}{a} =$

۱) $\dfrac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ✓

طول a، عرض b

$\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b} \rightsquigarrow \dfrac{a}{a} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b} \rightsquigarrow ۱ + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر } \frac{b}{a} = t} ۱ + t = \dfrac{۱}{t}$

$\xrightarrow{\text{طرفین} \times t} t + t^۲ = ۱ \longrightarrow t^۲ + t - ۱ = ۰ \quad t = \dfrac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{\text{باید } t>۰} \dfrac{b}{a} = t = \dfrac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$

معادلات گنگ

معادلات گنگ معادلاتی هستند که در آن ها عبارت رادیکالی وجود داشته باشد. انواع روش های حل معادلات گنگ (اصم) بـه صـورت زیـر می‌باشد:

۱– $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$: باید رادیکال را از بین ببرید و حواستان باشد پس از حل، جواب هایی که زیر هر کدام رادیکال ها را منفی می‌کند، قابل قبول نیستند. به عبارتی باید دامنه را محاسبه کنید و جواب هایی را قبول کنید که عضو دامنه است.

تست ۷۰: معادله‌ی $\sqrt{۲-\sqrt{x+۱}}-\sqrt{۷-x}=۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ریشه ندارد ✓

$\sqrt{2-\sqrt{x+1}}=\sqrt{7-x}$ طرفین به توان ۲

$2-\sqrt{x+1}=7-x \longrightarrow 2-7+x=\sqrt{x+1} \longrightarrow x-5=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{۲ طرف به توان ۲}}$

$x^2-10x+25=x+1 \longrightarrow x^2-11x+24=0 \longrightarrow (x-3)(x-8)=0 \begin{cases} x=3 & \text{غقق} \\ x=8 & \text{غقق} \end{cases}$

۲- $\sqrt{f(x)}+g(x)=h(x)$: باید رادیکال را حذف کنیم و استراتژی ما به این صورت است که $\sqrt{f(x)}$ را تنها می‌کنیم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. ضمناً باید حواسمان باشد که چون $\sqrt{f(x)}\geq ۰$ است لذا داریم : $\sqrt{f(x)}=h(x)-g(x)\geq ۰$
یعنی x هایی قابل قبول هستند که در شرط $h(x)-g(x)\geq ۰$ صدق کنند. حواستان باشد که به علت وجود رادیکال برای $f(x)$ باید شرط $f(x)\geq ۰$ هم برقرار باشد تا زیر رادیکال هم منفی نشود.

مثال ۷۱ : چند عدد صحیح وجود دارد که جمع آن ها با جذرشان برابر ۲۰ شود ؟ (مثال کتاب)

$x+\sqrt{x}=20 \longrightarrow \sqrt{x}=20-x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=400+x^2-40x$

$x^2-41x+400=(x-25)(x-16)=0 \begin{cases} x=25 & \text{غقق} \\ x=16 & ✓ \end{cases}$

تست ۷۲ : اگر $x=۴$ یکی از جواب های معادله‌ی $x+a=\sqrt{۵x-x^۲}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است ؟ (سراسری تجربی۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد.

جواب هر معادله در آن معادله صادق است: $4+a=\sqrt{5(4)-(4)^2}=\sqrt{20-16}=\sqrt{4}=2 \longrightarrow 4+a=2$ $(a=-2)$

$x-2=\sqrt{5x-x^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2-4x+4=5x-x^2 \longrightarrow 2x^2-9x+4=0 \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=\frac{1}{2} & \text{غقق} \end{cases}$

زیرا ← $\sqrt{5x-x^2}$ باید خروجی مثبت داشته باشد اما $(x=\frac{1}{2})-2<0$ ، $x=\frac{1}{2}$ غقق است.

تست ۷۳ : اگر $\sqrt{۲a^۲+۴a}+۳a=۲$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵ ✓

$\sqrt{2a^2+4a}=2-3a$ * $\xrightarrow{\text{۲ طرف به توان ۲}} 2a^2+4a=4+9a^2-12a$

$7a^2-16a+4=0 \xrightarrow[\text{ضرب c در a}]{\text{روش دومی}} a^2-16a+28=(a-2)(a-14)=0 \begin{cases} a=2 \\ a=14 \end{cases}$

$\boxed{a_1=\frac{2}{7}} \longrightarrow \frac{a+1}{a}=\frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}}=\frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}}=\frac{9}{2}=4/5$

$a_2=\frac{14}{7}=2 \xrightarrow{*} \sqrt{16}=2-3a<0$ غقق

۳– توجه به دامنه یا برد عبارت :

تست ۷۴: معادله‌ی $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=5$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) یک ریشه‌ی منفی دارد.
۳) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. ۴) ریشه ندارد.

$x-2\geq 0$ $\boxed{x\geq 2}$ الف

$4-2x\geq 0$ $4\geq 2x$ $\boxed{2\geq x}$ ب

$(\text{الف})\cap(\text{ب})=\{2\}$ در معادله صدق نکند

تست ۷۵ : حدود k کدام باشد تا معادله‌ی $\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=k$ دارای جواب باشد ؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $[\sqrt{2},+\infty)$

$x-2\geq 0$

$(x\geq 2)\cap(x\geq 0): x\geq 2 \xrightarrow[\text{دارد}]{x=2} \sqrt{2-2}+\sqrt{2}=k$

$\sqrt{2}=k$

کمترین مقدار k برابر $\sqrt{2}$ است هرچه x بیشتر k هم بیشتر می‌شود.

$\sqrt[2k]{\ }$ $(\ )^{2k}$ $|\ |$ ≥ 0 نامنفی (مثبت یا صفر)

تذکر: جمع چند عبارات نامنفی وقتی صفر می‌شه که تک‌تکشون صفر بشه و اون xای قبوله که همه‌ی عبارت‌ها رو صفر کنه. مثلاً:

تست ۷۶ : مجموعه مقادیر a برای اینکه معادله‌ی $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^3+3x+a}=0$ جواب داشته باشد کدام است ؟

۱) $\{\pm 1\}$ ۲) $\{\pm 4\}$ ۳) $\{0,2\}$ ۴) $\{-2,0\}$

$x^2-1=0 \longrightarrow x=1$ یا $x=-1$

$x^3+3x+a=0 \xrightarrow{x=1} 1+3+a=0 \quad a=-4$

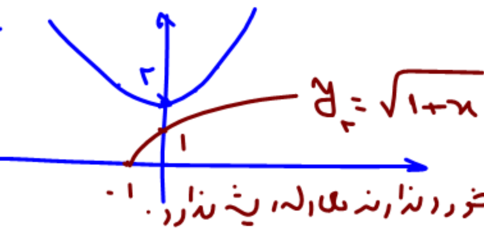
$\xrightarrow{x=-1} -1-3+a=0 \quad a=4$

تست ۷۷: معادله‌ی $\sqrt{1+x}=1+\sqrt{1+x^2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) فقط یک جواب مثبت ۲) فقط یک جواب منفی ۳) دو جواب دارد. ۴) جواب ندارد.

روش رسم درحل معادله:
توابع ۲ طرف تساوی را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم نقاط برخورد تعداد ریشه‌هاست

$y_1=1+\sqrt{1+x^2}$
$D_{y_1}=\mathbb{R}$
$y_{min}=1+\sqrt{1+0}=2$



y_1 و y_2 برخورد ندارند معادله ریشه ندارد

گاهی اوقات با یک تغییر متغیر ساده مسئله به راحتی حل می‌شه. کِی از این روش برسیم؟ وقتی درجه‌ی عبارات بیشتر از یک هست و بخشی از معادله را دو بار می‌بینیم. یا، وقتی دو عبارت کسری داریم که زیر رادیکال هستن و برعکس همدیگه هم هستن؛

تست ۷۸ : حاصل ضرب ریشه های $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است ؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

$\underbrace{x^2+4x+3}_{t}=\sqrt{\underbrace{x^2+4x+3}_{t}+2} \rightsquigarrow t=\sqrt{t+2} \xrightarrow{\text{۲ طرف به توان ۲}} t^2=t+2$

t باید ⊕ باشد چون برابر رادیکاله

$t^2-t-2=0 \begin{cases} t_1=-1 & \text{غ ق ق} \\ t_2=-\frac{c}{a}=2=x^2+4x+3 \to x^2+4x+1=0 \rightsquigarrow x_1x_2=\frac{c}{a}=1 \end{cases}$

انشاءالله فصل اول تجربی خ به فصل یک کامل بشه.

۱۴۰۱/۷/۳۰ مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی حسابان ۱ فصل ۱ درس ۱

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

a_1: جمله اول a_n: جمله n ام d: قدرنسبت

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d) = na_1 + \frac{d}{2}n^2 - n\frac{d}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \dots$$

در دنباله حسابی، فرمول جمع جملات برحسب n از درجه دوم است و ۲ برابر ضریب n^2 قدرنسبت دنباله (قاعده) حسابی است. مثلاً اگر $S_n = n^2 - 3n$ قدرنسبت دنباله حسابی دو برابر ضریب n^2 یعنی ② است.

مثال: مجموع ۱۰ جمله دنباله ... ,۶ ,۴ ,۲ کدام است؟

$d = 2 \quad a_1 = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{10}{2}\left(2(2) + (9)(2)\right) = 5(22) = 110$$

دنباله حسابی یا عددی نام دیگرش تصاعد حسابی یا عددی است.

دنباله (تصاعد) حسابی: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n$

$$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \quad \dots \quad a_1+(n-1)d$$

قدر نسبت: d

diffrence
اختلاف، تفاوت

$$d = a_{n+1} - a_n = (\text{جمله بعدی}) - (\text{جمله قبلی})$$

جمله nام: $a_n = a_1 + (n-1)d$

جمله عمومی

مجموع جمله‌ها از اولی تا nامی: $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$

در هر دنباله داریم: $S_n - S_{n-1} = a_n$

تمرین: چند جمله از ابتدای دنباله‌ی ... , ۳۴ , ۳۷ , ۴۰ را جمع کنیم تا حاصل ۲۳۰ شود؟

$d=-3$ $\quad$ $d=-3$

۱۰	۲۰ ✓
۳۰	۴۰

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$$

$$230=\frac{n}{2}\left(2(40)+(n-1)(-3)\right)=\frac{n}{2}\left(\overbrace{80-3n+3}^{83-3n}\right)$$

$$460=n(83-3n)\longrightarrow 460=83n-3n^2\longrightarrow$$

$$3n^2-83n+460=0 \qquad n^2-83n+1380=0$$

ضرب

$$(n-60)(n-23)=0 \qquad \begin{cases} n=60 \\ n=23 \end{cases}$$

$$n_1=\frac{60}{3}=\boxed{20} \qquad n_2=\frac{23}{3}$$ غ‌ق‌ق