

(فصل ۱ درس ۱ تجربی و درس ۵ حسابان)

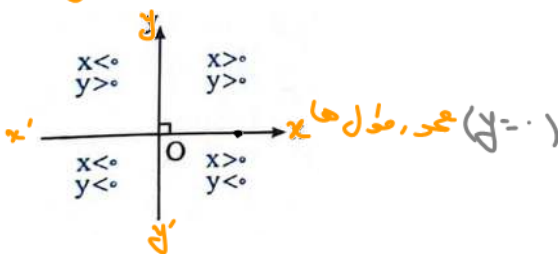
(صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی)

BOX 5: بخش اول هندسه تحلیلی (معادله خط)

با معادله خط، رسم خط، نوشتن معادله خط، دو خط متقاطع، دو خط موازی و دو خط عمود آشنایی دارید. در این بسته، مطالب را یادآوری می‌کنیم و مسائلی را حل می‌کنیم.

الف) معادله خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور x ها) و $y'Oy$ (محور y ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطه A از صفحه، یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در نمودار مقابل مشخص شده است:



نکته: ۱) اگر نقطه‌ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(x, 0)$ می‌باشد.

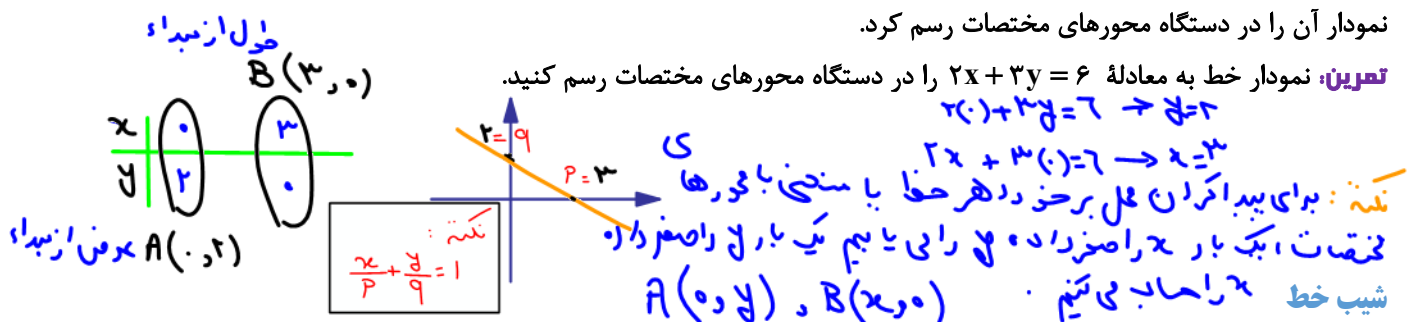
۲) اگر نقطه‌ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(0, y)$ می‌باشد.

معادله خط: معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

ب) رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادله یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محوره‌ای مختصات رسم کرد.



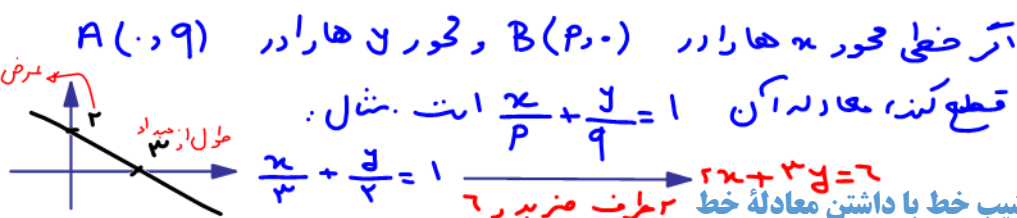
شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر اگر

$$A(x_A, y_A) \text{ و } B(x_B, y_B) \text{ دو نقطه روی یک خط باشند و } x_A \neq x_B \text{، آن‌گاه: } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال: شیب خط گذرنده از نقاط $A(1, -4)$ و $B(3, 2)$ برابر است با:

شیب خط
از مبدا



شیب خط $= -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{a}{b}$

(۱) اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ (یا $ax + by = c$) باشد و $b \neq 0$ ، آن گاه:

$by = -ax + c \rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

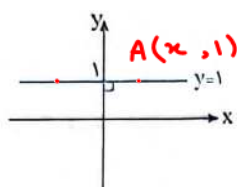
مثال: شیب خط به معادله $2x + 3y = 1$ برابر $-\frac{2}{3}$ است. $-\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{2}{3}$

(۲) اگر معادله خط به صورت $y = mx + h$ باشد، آن گاه شیب خط برابر m (ضرب x) است.

مثال: شیب خط به معادله $y = -\frac{1}{4}x + 3$ برابر $m = -\frac{1}{4}$ است. یا شیب خط $y = \frac{1}{4}x - \sqrt{3}$ برابر $m = \frac{1}{4}$ است.

نکته:

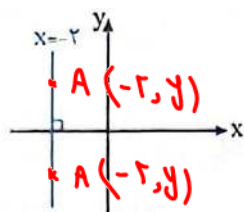
(۱) اگر خط L موازی محور x ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $y = b$ است. به عنوان مثال، خط $y = 1$ موازی محور x ها است و شیب آن برابر صفر است.



معادله محور x ها به صورت $y = 0$ است

توانم، عمودی

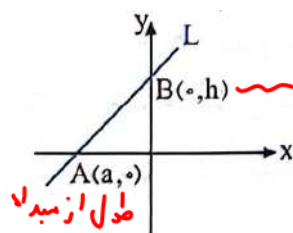
(۲) اگر خط L موازی محور y ها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی شود و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $x = a$ است. به عنوان مثال، خط $x = -2$ موازی محور y ها است و این خط شیب ندارد.



معادله محور y ها به صورت $x = 0$ است

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست

با توجه به شکل مقابل، خط L محور x را در نقطه $A(a, 0)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می گوئیم. هم چنین خط L محور y را در نقطه $B(0, h)$ قطع کرده است. h را عرض از مبدأ خط L می گوئیم.



عرض از مبدأ $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$ معادله خط

طبق نکته بالای صفحه

تعریف نهایی: $m = \infty$ شیب نامتناهی

نکته:

معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ می باشد.

حالا می خواهیم معادله خط را بنویسیم. در دو حالت می توانیم معادله خط را بنویسیم و باید در تمام مسائل نوشتن معادله خط، شرایط یکی از این دو حالت را در نظر بگیریم.

(ب) نوشتن معادله خط

حالت اول: اگر شیب خط و نقطه ای از خط را داشته باشیم، می توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطه $A(x_1, y_1)$ بگذرد، آن گاه معادله خط از رابطه مقابل به دست می آید:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = 5(x - (-1)) \rightarrow y = 5x + 7$$

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1, 3)$ بگذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.

حالت دوم: اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد، آن گاه شیب خط از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادله

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_2 \neq x_1$$

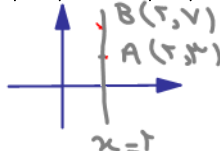
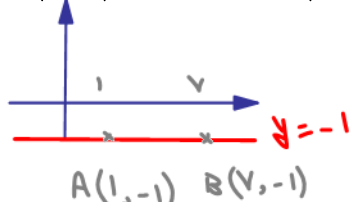
خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطه مقابل استفاده کرد:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \rightarrow y - (-5) = \frac{7 - (-5)}{-2 - 2}(x - (-1))$$

$$y + 5 = -3(x - (-1)) \rightarrow y = -3x + 1$$

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(2, -5)$ و $(-2, 7)$ بگذرد.

نکته: اگر $x_1 = x_2$ ، آن گاه معادله خط گذرنده از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت $x = x_1$ است و اگر $y_1 = y_2$ ، آن گاه معادله



خط به صورت $y = y_1$ می‌باشد.

(ت) وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازی‌اند و یا متقاطع.

حالت اول: دو خط موازی

اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند. **انطباق حالت خاصی از موازی بودن!**

نکته: اگر دو خط با هم موازی باشند، آن گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و برعکس.

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, -4)$ بگذرد و موازی خط $5x - 3y = 1$ باشد.

$$y - (-4) = \frac{5}{3}(x - 3)$$

$$5x - 1 = 3y \rightarrow \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} = y$$

حالت دوم: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، دو خط متقاطع‌اند. در واقع اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادله دو خط در صفحه باشند، آن گاه با حل دستگاه دو معادله دو

محل تلاقی دو خط به دست می‌آید. $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ محل تلاقی دو خط

دو خط را قطع می‌کنیم.

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 5x = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow A(-1, -2)$$

یکی از حالت‌های متقاطع بودن دو خط، عمود بودن آن است. با توجه به ویژگی مهم آن، سؤالات خوبی مطرح می‌شود.

نکته: اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm' = -1$ ، آن گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه هم می‌باشند.

یا قرینه عکس

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 4)$ بگذرد و بر خط به معادله $y = -2x + 3$ عمود باشد. **پاراه دیب:**

$$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow 2y - 8 = x + 1 \rightarrow 2y - x - 9 = 0$$

$$y = mx + h = \frac{1}{2}x + h \rightarrow 4 = \frac{1}{2}(-1) + h \rightarrow h = 4.5 = \frac{9}{2}$$

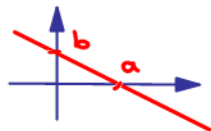
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow 2y = x + 9$$

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط عبور می‌کند.

۲- اگر خط L ، محور x ها را در نقطه با طول a قطع کند، آن گاه a ، L نامیده می‌شود و اگر خط L ، محور y ها را در نقطه با عرض b قطع کند، آن گاه b ، L نامیده می‌شود.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$b = -\frac{b}{a}(0) + b \rightarrow b = b$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

۳- معادله خط گذرنده از نقطه $(0, 7)$ و شیب -2 برابر $y = -2x + 7$ است.

۴- دو خط موازی دارای شیب h برابر هستند.

• درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۵- شیب خط $11 = 2x + 5y$ برابر $-\frac{2}{5}$ است.

۶- شیب هر خط موازی با محور x ها برابر یک است.

۷- دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ بر هم عمود هستند.

۸- نمودار هر یک از خطهای زیر را رسم کنید.

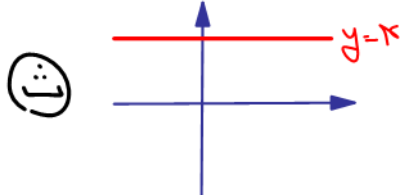
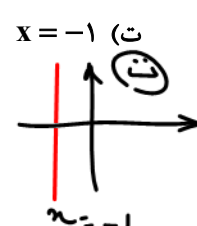
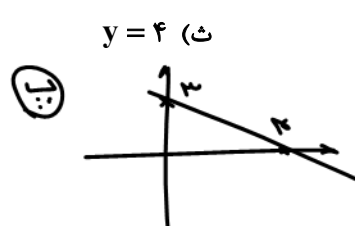
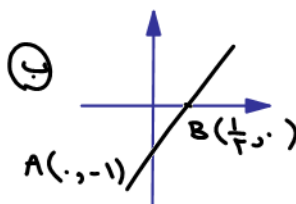
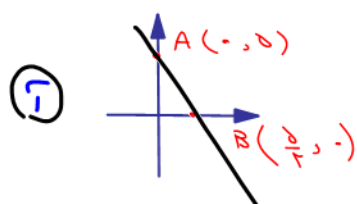
(شهریور ۱۴۰۲)

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۲ کتاب درسی)

پ) $3x + 4y = 12$

ب) $2x - y = 1$

آ) $y = -2x + 5$



۹- در هر یک از قسمت‌های زیر، معادله خط را بنویسید.

آ) خط از نقطه $(3, 0)$ بگذرد و با خط $5x + 3y = 2$ موازی باشد.

ب) خط از نقطه $(4, 2)$ بگذرد و عمود بر خط به معادله $3x + 2y = 4$ باشد.

آ) $m = -\frac{5}{3}$ $y = -\frac{5}{3}x + h$ $A(3, 0) \in y = -\frac{5}{3}x + h \rightarrow 0 = -5 + h \rightarrow h = 5$
 $y = -\frac{5}{3}x + 5$

ب) $m = -\frac{3}{2}$ $m' = \frac{3}{2}$ $y = \frac{3}{2}x + h$ $A(4, 2) \in y = \frac{3}{2}x + h$
 $2 = \frac{3}{2}(4) + h \rightarrow h = 2 - 6 = -4$
 $y = \frac{3}{2}x - 4$

۱۰- معادله خط گذرنده از نقطه $(3, 2)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-1, 6)$ را بنویسید.

شیب $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 6}{2 - (-1)} = -2$ $m' = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2}x + h$ $A(3, 2) \in y = \frac{1}{2}x + h$
 $2 = \frac{1}{2}(3) + h \rightarrow h = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ادامه حل ۱۰ : با شیب $\frac{1}{7}$ و نقطه $(3, 2)$ معادله خط :

$$y = mx + h = \frac{1}{7}x + h$$

$$2 = \frac{1}{7}(3) + h \rightarrow h = \frac{1}{7} \rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$$

ضرب در ۷ $\rightarrow \boxed{7y = x + 1}$

۱۱- معادله خط گذرنده از نقطه $(3, -2)$ و نقطه تلاقی دو خط به معادلات $4x - y = 1$ و $x + 2y = 7$ را بنویسید.

دو خط را قطع می دهیم

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 9x - 4y = 9 \end{cases}$$

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 3 = \frac{-5}{7}(x - 1) \quad \text{جواب}$$

$$x = 1 \rightarrow 4x - y = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow A(1, 3)$$

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۴ کتاب درسی)

۱۲- دو خط به معادلات $3x + (2m + 1)y = 4$ و $mx + 7y = 11$ داده شده است.

(آ) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند. شیبها برابر

(ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند. شیبها قریب دگس

$$\begin{cases} ax + by = c \\ 3x + (2m + 1)y = 4 \\ mx + 7y = 11 \end{cases}$$

$$m_1 = -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{3}{2m+1}$$

$$m_2 = -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{m}{7}$$

$$\frac{-3}{2m+1} = \frac{-m}{7} \rightarrow 21 = m(2m+1) \rightarrow 21 = 2m^2 + m \rightarrow 2m^2 + m - 21 = 0$$

$$\Delta = 179$$

$$m = \frac{3}{2} \text{ و } -\frac{7}{2}$$

جواب ب $\boxed{m = -\frac{7}{2}}$

۱۳- مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط به معادلات $2x + (-m + 4)y = 3$ و $(5 + 3m)x + (m^2 + 4)y = 7$ با هم موازی باشند.

شیب ها برابر

$$-\frac{2}{-m+4} = -\frac{(5+3m)}{m^2+4}$$

$$\frac{-(5+3m)}{m^2+4} = \frac{2}{-m+4} \rightarrow (5+3m)(-m+4) = 2(m^2+4) \rightarrow 5m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$a+c=b \quad \text{آردر} \quad a+c=b$$

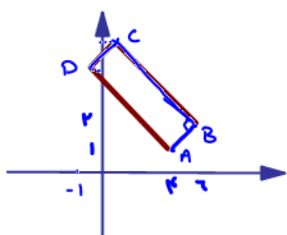
$$\begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

۱۴- مربع ABCD که A(4, 1) و B(6, 2) دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

(آ) شیب ضلع AB را بیابید و معادله آن را بنویسید. کنار هم (ه ی)

(ب) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

(پ) اگر D(-1, 1) یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.



(۱) ضلع AB : $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$

(ب) ضلع BC : $y - 2 = -2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14$

(پ) ضلع DC : $y - 11 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

می بینم نقطه C نقطه برخورد ۲ ضلع BC و DC هست :

$$\begin{cases} y = -2x + 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 2x - 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -y = 2x - 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} - 14 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -2(1) + 14 \rightarrow y = 12$$

$\boxed{C(1, 12)}$

۱۵- مقدار a را طوری به دست آورید که نقاط $(3, 1)$ ، $(5, -3)$ و $(a, 2a - 1)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند.

نقطه روی یک خط هستند بر یک استقامت باشند

کافی است داشتن $A(3, 1)$ ، $B(5, -3)$ معادله خط عبوری از A و B را بنویسیم و سپس نقطه $(a, 2a - 1)$ را در آن بگذاریم :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \rightarrow y - 1 = \frac{-3 - 1}{5 - 3} (x - 3) \rightarrow y = -2x + 7$$

$$2a - 1 = -2a + 7$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

باید ابتدا ۲ خط معلوم را قطع دهیم و نقطه تقاطع را در خط مستقیم دار (m دار) بگذاریم:

۱۶- مقدار m را طوری به دست آورید که سه خط به معادله‌های $x+3y=-1$ ، $3x-2y=8$ و $(m+1)x+my=7$ از یک نقطه

بگذرند.

$$\begin{cases} x+3y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -3x-9y=3 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \xrightarrow{-11y=11} y=-1 \xrightarrow{x+3y=-1} x=2 \rightarrow A(2, -1)$$

نقطه برخورد ۲ خط از خط‌ها

این نقطه A باید در خط بعدی صدق کند:

$$(m+1)2 + (-1)m = 7$$

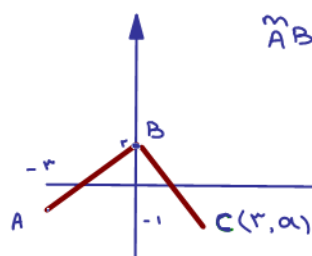
$$2m + 2 - m = 7 \rightarrow m = 5$$

۱۷- مربع ABCD که $A(-3, -1)$ و $B(0, 2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

$$m_{AB} = \frac{2 - (-1)}{0 - (-3)} = \frac{3}{3} = 1 \quad y+1 = 1(x+3) \quad \boxed{y = x+2}$$

(آ) معادله ضلع AB را بنویسید.

(ب) اگر $C(3, a)$ و $D(0, 2a-2)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های C و D را بیابید.



ضلع BC بر AB عمود است. شیب آن عکس دگرینه $m_{BC} = -1$ است.

معادله ضلع BC را بنویسیم:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B)$$

$$y - 2 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x + 2 \quad C(3, a) \in y = -x + 2$$

$$a = -3 + 2 \rightarrow a = -1$$

$$D(0, 2a-2) \xrightarrow{a=-1} D(0, -4)$$

$$\boxed{C(3, -1)}$$

Homework

۱ نقاط $A(2, 0)$ و $C(0, -1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

(۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

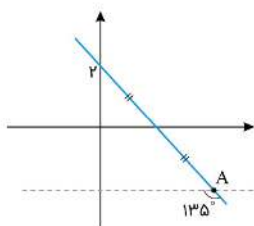
(۱) $(0, \frac{3}{2})$

(۴) $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

(۳) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



(۱) $2\sqrt{5}$

(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ نقطه $(-6, 3)$ یکی از رئوس متوازی الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x - 3y = 4$ و $x + 4y = -3$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر با اضلاع کدام است؟

(۲) $\frac{19}{\sqrt{10}}$

(۱) $\frac{19}{2\sqrt{10}}$

(۴) $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}$

(۳) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ نقاط $A(-1, 4)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1-x, y+3)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

(۲) ۱۴

(۱) ۱۳

(۴) ۱۶

(۳) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ نقاط $A(x, y)$, $B(-1-x, y-3)$, $C(0, -3)$ و $D(-4, 0)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۵/۵
(۳) ۱۵
(۴) ۱۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ نقطه $(4/5, 2)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{17}}{4}$
(۳) $2\sqrt{17}$
(۴) $\sqrt{17}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(1, 2)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) ۲/۵
(۲) ۳/۵
(۳) $\sqrt{46}$
(۴) $2\sqrt{34}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ نقاط $A(0, 1)$ و $B(4, -2)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم، کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۹ نمودارهای دو تابع $y = |x + 2| + |x - 1|$ و $3y + x = 17$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$
(۲) $4\sqrt{5}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) $4\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ نقاط B ، C و $M(3, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A ، کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) -۲
(۳) -۵
(۴) -۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵
(۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ فاصله نقطه A روی خط $x + y = a$ از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 4)$ به ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۳ شیب نیم خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می سازیم، که نقطه B روی نیم خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۸
(۳) $6\sqrt{10}$ (۴) $3\sqrt{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ ، $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟

- (۱) $4/4$ (۲) ۳
(۳) $2/5$ (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس های $A(1, 9)$ ، $B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{10}$
(۳) $2\sqrt{5}$ (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ مثلثی با رأس های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۷ فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۸ نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با ارتفاع AH را روی خط $3x - y = 5$ می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (با تغییر)

- (۱) $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$
(۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹ سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ نمودارهای دو تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ و $y = x + 7$ ، در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

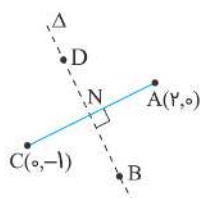
- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) 12
(۳) 13 (۴) $10\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{x}x + 2$ ، کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 9
(۳) 10 (۴) 12

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹



معادله عمودمنصف پاره خط AC را می نویسیم.

$$N = \frac{A + C}{2} = (1, -\frac{1}{2})$$

$$m_{AC} = \frac{0 + 1}{2 - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta : y + \frac{1}{2} = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow \Delta : y = \frac{3}{2} - 2x$$

رئوس B و D از مربع موردنظر روی خط Δ قرار دارد. بنابراین B را به صورت $B(x, \frac{3}{2} - 2x)$ در نظر می گیریم.

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2} - 2x}{x - 2} \times \frac{\frac{5}{2} - 2x}{x - 0} = -1 \Rightarrow (2x - \frac{3}{2})(2x - \frac{5}{2}) = 2x - x^2$$

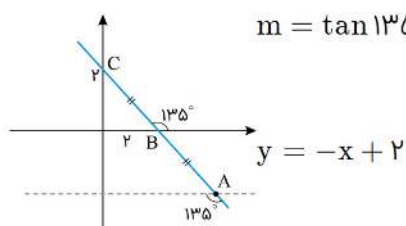
$$\Rightarrow (2x)^2 - 4(2x) + \frac{15}{4} = 2x - x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + \frac{15}{4} = 0 \xrightarrow{\div 5} x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه ها طول نقطه مطلوب $\frac{3}{2}$ است.

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$$



در شکل مشخص است که خط از نقطه $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ گذشته و شیب آن برابر است با $m = \tan 135^\circ = -1$ پس معادله خط عبارتست از:

نقطه B نقطه‌ای به مختصات زیر است:

$$y = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

چون B وسط A و C است پس:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_A + 0}{2} \Rightarrow x_A = 4$$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 0 = \frac{y_A + 2}{2} \Rightarrow y_A = -2$$

بنابراین طول OA عبارتند از:

$$OA = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

نقطه $B(-6, 3)$ روی هیچ‌کدام از خطوط قرار ندارد. محل تقاطع دو خط $\ell_1 : x - 3y = 4$ و $\ell_2 : x + 4y = -3$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\ell_1 : x - 3y = 4 &\Rightarrow y_1 = \frac{x-4}{3} \\ \ell_2 : x + 4y = -3 &\Rightarrow y_2 = \frac{-x-3}{4} \\ \xrightarrow{\text{تقاطع}} \frac{x-4}{3} &= \frac{-x-3}{4} \Rightarrow x = +1, y = -1\end{aligned}$$

پس $A(1, -1)$ رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است. نقطه وسط AB که قطر متوازی‌الاضلاع است را به دست می‌آوریم:

$$AB \text{ نقطه وسط } O : O = \left(\frac{1-6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, +1\right)$$

فاصله O از دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}OH_1 &= \frac{\left| -\frac{5}{2} - 3 - 4 \right|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{2\sqrt{10}} \\ OH_2 &= \frac{\left| -\frac{5}{2} + 4 + 3 \right|}{\sqrt{1+16}} = \frac{9}{2\sqrt{17}}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\begin{aligned}AB \parallel CD : \frac{4-1}{-1-3} &= \frac{y-y-3}{x+1+x} = \frac{-3}{2x+1} \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{-3}{2x+1} \\ \Rightarrow 2x+1 &= 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$AB \perp BC : \frac{-3}{4} \times \frac{y-1}{\frac{3}{2}-3} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(y-1) = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$C\left(\frac{3}{2}, -1\right) \Rightarrow |AB| = 5, |BC| = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{محیط} = 2(|AB| + |BC|) = 15$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$AB \parallel CD : m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{y - y + 3}{x + 1 + x} = \frac{0 + 3}{-4 - 0}$$

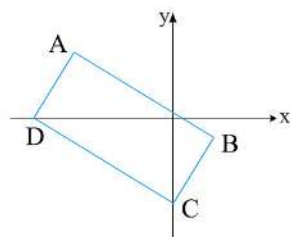
$$\Rightarrow 2x + 1 = -4 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$AD \perp DC : m_{AD} \times m_{DC} = -1 \Rightarrow \frac{y}{x + 4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = -\frac{5}{2}, y = 2 \Rightarrow A\left(-\frac{5}{2}, 2\right), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

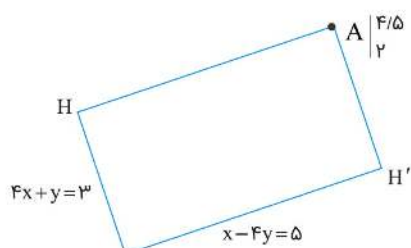
$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BC = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (AB)(BC) = (5)\left(\frac{5}{2}\right) = 12\frac{1}{2}$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

خطوط داده شده بر هم عمودند و نقطه داده شده روی هیچ کدام از خطوط صدق نمی کند. فاصله نقطه A از دو خط را محاسبه می کنیم:



$$AH = \frac{|1 \cdot 4 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AH' = \frac{|4 \cdot \frac{4}{5} - 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 16^2}} = \frac{1/5}{\sqrt{17}} = \frac{1 \times \sqrt{17}}{5 \times 17} = \frac{\sqrt{17}}{85}$$

فاصله وسط قطر از اضلاع مستطیل برابر نصف اضلاع آن می باشد، بنابراین فاصله ها برابر است با $\frac{\sqrt{17}}{4}$ و $\frac{\sqrt{17}}{2}$ در نتیجه بیشترین آن ها $\frac{\sqrt{17}}{2}$ می باشد.

نکته: فاصله دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y - ax = 1 \Rightarrow y = ax + 1$$

$$ay - x = a - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a} + 1$$

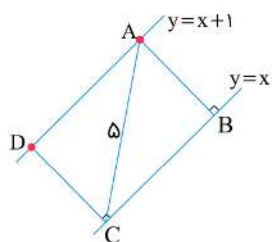
دو ضلع مقابل مستطیل موازی‌اند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$\frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

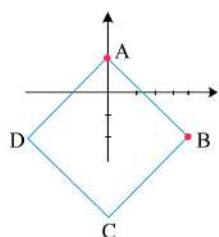
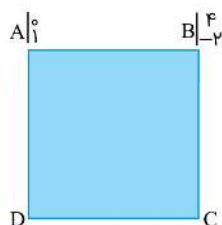
$a = -1$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $A(1, 2)$ در هیچ کدام از دو ضلع مقابل صدق نمی‌کند. فاصله دو خط موازی $y = x + 1$ و $y = x$ برابر عرض مستطیل است.



$$|AB| = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |BC| = \sqrt{2^2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{4-0} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3}$$



AD معادله : $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 1$

فرض کنید مختصات نقطه D به صورت (x, y) باشد، پس:

$$\begin{aligned} AD = 5 &\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25 &\xrightarrow{*} x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \\ \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 25 &\Rightarrow x = \pm 3 \end{aligned}$$

پس مختصات طول نقطه D در ربع سوم -۳ است.

توجه: به روش زیر هم می‌توان مختصات نقطه D را به دست آورد:

اگر $x_D = -3$ باشد، پس: $y_D = -3$

$$AD = \sqrt{9 + 16} = 5$$

که درست است.

$$y = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 3 & ; -2 \leq x < 1 \\ -2x-1 & ; x < -2 \end{cases}, \quad 3y+x=17 \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{17}{3}$$

$$2x+1 = \frac{-x}{3} + \frac{17}{3} \Rightarrow \frac{7}{3}x = \frac{14}{3} \Rightarrow x = 2 \xrightarrow[\text{برخورد}]{\text{نقطه}} (2, 5)$$

$$-2x-1 = \frac{-x}{3} + \frac{17}{3} \Rightarrow \frac{5x}{3} = \frac{-20}{3} \Rightarrow x = -4 \xrightarrow[\text{برخورد}]{\text{نقطه}} (-4, 7)$$

فاصله این دو نقطه را می‌یابیم:

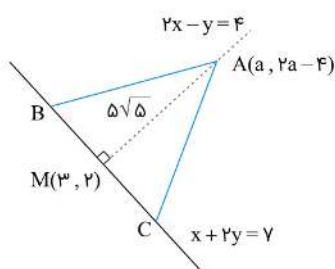
$$|AB| = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

معادله خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM} = \frac{-1}{m_{BC}} = 2$$

$$AM : y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$$



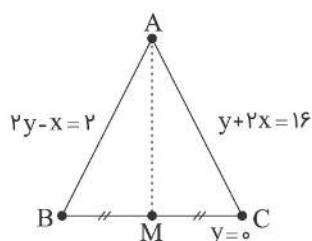
$$|AM| = 5\sqrt{5} \Rightarrow AM^2 = 125$$

$$(a-3)^2 + (2a-6)^2 = 125 \Rightarrow 5(a-3)^2 = 125$$

$$(a-3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = -2 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

مثلت را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصله نقطه A از نقطه M را به دست آوریم:
از تقاطع دو خط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ مختصات نقطه A به دست می‌آید.

$$2 \times \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 2x = 4 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$2y - x = 2 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow B(-2, 0)$$

$$y + 2x = 16 \xrightarrow{y=0} x = 8 \Rightarrow C(8, 0)$$

سپس مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M(3, 0)$$

اکنون فاصله دو نقطه M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(3 - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

چون نقطه A روی خط $x + y = a$ قرار دارد پس مختصات آن به صورت $A(x, a - x)$ است:

$$AB = \sqrt{29} : AB = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{29}$$

به توان دو می‌رسانیم $\rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y = 16 \quad (1)$

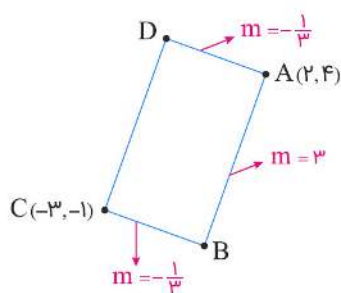
$$AC = 5 : AC = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = 5$$

به توان دو می‌رسانیم $\rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y = 16 \quad (2)$

معادلات (۱) و (۲) از هم کم می‌کنیم $: 4x + 4y = 16$

$$\Rightarrow x + y = 4 \xrightarrow{y=a-x} a = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱



نقطه B روی خط $y - 4 = 3(x - 2)$ قرار دارد: $B(a, 3a - 2)$
از طرفی شیب BC برابر $-\frac{1}{3}$ است:

$$\frac{3a - 2 + 1}{a + 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9a - 3 = -a - 3 \Rightarrow a = 0$$

$$B(0, -2)$$

$$AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط} : 2\sqrt{40} + 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\begin{cases} AB : y + 2x = 7 \\ BC : 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4x = 14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x = 3, y = 1$$

$$\Rightarrow B(3, 1)$$

$$BH = AC \text{ از } B \text{ فاصله} = \frac{|4(1) - 3(3) - 17|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

خط گذرنده از C و B را می‌یابیم:

$$B(3, 3), C(7, 11)$$

$$m = \frac{11 - 3}{7 - 3} = 2$$

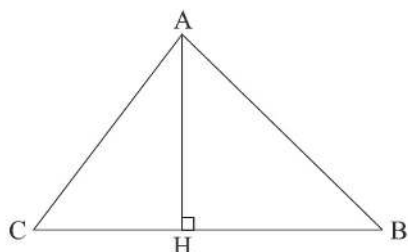
$$y = 2x - 3 \Rightarrow y - 2x + 3 = 0$$

فاصله A تا این خط را می‌یابیم:

$$AH = \frac{|9 - 2 + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصله رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادله خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(7, 3), C(2, -2) \Rightarrow m = \frac{3+2}{7-2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = x - 2 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

بنابراین فاصله نقطه $A(1, 5)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

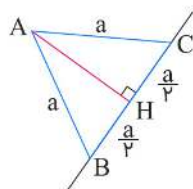
$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9}$$

$$\xrightarrow{2y=x^2} \sqrt{y^2-9} = 0 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

نقطه تلاقی $A(\sqrt{6}, 3)$ است:

$$|AO| = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰



$$\text{محیط} = 3a = \sqrt{270} = 3\sqrt{30} \Rightarrow a = \sqrt{30}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{30} = \frac{3}{3}\sqrt{10}$$

$$AH : y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{5}{3}$$

$$A(b, -\frac{b}{3} + \frac{5}{3}), \quad H(2, 1)$$

$$|AH| = \sqrt{(b-2)^2 + (\frac{2}{3} - \frac{b}{3})^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}|b-2| = \frac{3}{3}\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |b-2| = \frac{9}{3} \Rightarrow \begin{cases} b-2 = \frac{9}{3} \Rightarrow b = \frac{13}{3} \\ b-2 = -\frac{9}{3} \Rightarrow b = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\frac{13}{3}, \frac{-1}{3}), \quad A(\frac{-5}{3}, \frac{5}{3})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

معادله خط موردنظر $y = x - 1$ است، این خط را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس نقاط برخورد $A(-1, -2)$ و $B(2, 1)$ است، وسط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$$

راس سهمی هم $S(1, 2)$ است:

$$|SM| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

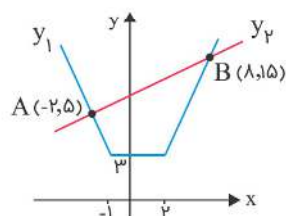
$$y_1 = |x - 2| + |x + 1|, \quad y_2 = x + 7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x + 2 - x - 1 & ; x \leq -1 \\ -x + 2 + x + 1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x - 2 + x + 1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$



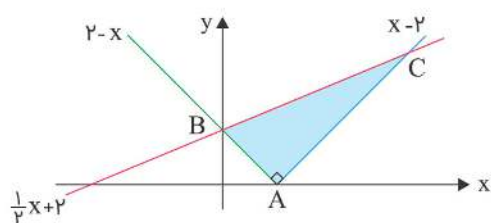
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 1$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -x+1 & ; x < 1 \end{cases}$$



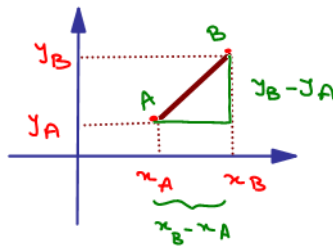
$$\begin{cases} A = (1, 0) \\ x-1 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow C = (4, 2) \\ 1-x = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 1) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

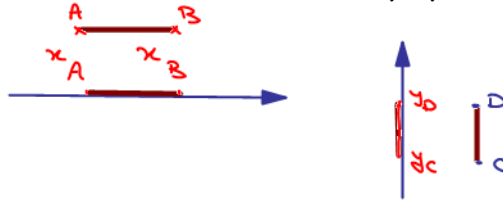
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹



وتر : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
 $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

BOX 6: بخش دوم هندسه تحلیلی

در این بسته، مسائلی چون فاصله دو نقطه، مختصات نقطه وسط پاره‌خط، قرینه نقطه نسبت به نقطه دیگر، معادله عمودمنصف و فاصله نقطه از خط را مطرح و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.



الف) فاصله دو نقطه

$$AB = |x_B - x_A|$$

$$CD = |y_D - y_C|$$

$$AB = |x_2 - x_1| = |7 - (-2)| = 9$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(۱) اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه:

(۲) اگر C و D دو نقطه هم‌طول باشند، آن‌گاه:

مثال: فاصله بین دو نقطه هم‌طول A(۵, -۲) و B(۵, ۷) برابر است با:

(۳) فاصله دو نقطه A(x_۱, y_۱) و B(x_۲, y_۲) برابر است با:

تعریف: (۱) فاصله بین دو نقطه (۳, ۲) و (-۱, ۰) را به دست آورید.

(۲) اگر نقاط A(-۱, ۴) و B(۳, ۳) دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

$$\textcircled{1} AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4(5)} = 2\sqrt{5}$$

نام AB همان طول ضلع مربع است.

$$AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20}$$

$$4\sqrt{5} = \text{مجموع مربع} = \text{یک ضلع مربع}$$

$$17 = (\sqrt{17})(\sqrt{17}) = \text{مساحت مربع} = \text{مربع یک ضلع} = \text{یک ضلع مربع}$$

نکته: فاصله نقطه A(x_۱, y_۱) تا مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ است. به عنوان مثال، فاصله نقطه (۶, ۸) تا مبدأ مختصات برابر

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ می‌باشد.}$$

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

• اگر مختصات نقطه‌ای روی دایره و مرکز دایره داده شده باشد، فاصله بین این دو نقطه برابر اندازه شعاع دایره است.

تعریف: دایره‌ای به مرکز (۳, -۱) از نقطه (۵, ۲) گذشته است. شعاع این دایره را به دست آورید. آیا نقطه (۶, ۲) بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

$$OA = \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = R$$

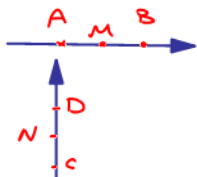
$$OB = \sqrt{(x_0 - x_B)^2 + (y_0 - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} > R = \sqrt{13}$$

پس B خارج دایره است. مختصات نقطه وسط پاره‌خط

اگر بخواهیم مختصات وسط دو نقطه و یا یک پاره‌خط را وقتی که مختصات آن‌ها را در اختیار داریم، به دست بیاوریم، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$

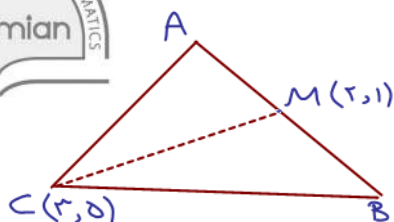


(۱) اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، آن‌گاه:

(۲) اگر C و D دو نقطه دلخواه روی محور yها و N وسط CD باشد، آن‌گاه:

(۳) فرض کنیم A و B دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left(\frac{\text{مجموع طول‌های A و B}}{2}, \frac{\text{مجموع عرض‌های A و B}}{2} \right) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



$$M\left(\frac{5+(-1)}{2}=2, \frac{-1+3}{2}=1\right)$$

تعریف: نقاط $A(5, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(3, 5)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

(۱) مختصات M ، نقطه وسط ضلع AB را مشخص کنید.

(۲) طول میانه CM را به دست آورید.

(۳) معادله میانه CM را بنویسید.

$$(۲) \quad CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(1)^2 + (4)^2} = \sqrt{17}$$

$$(۳) \quad C(3, 5) \quad \begin{aligned} y - y_C &= m(x - x_C) \\ y - 5 &= \frac{1-5}{2-3}(x-3) \\ y - 5 &= \frac{-4}{-1}(x-3) \\ y - 5 &= 4(x-3) \\ y &= 4x - 12 + 5 \\ y &= 4x - 7 \end{aligned}$$

(ب) قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم، آن‌گاه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M است.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_{A'}}{2} & y_M &= \frac{y_A + y_{A'}}{2} \\ x_{A'} &= 2x_M - x_A & y_{A'} &= 2y_M - y_A \end{aligned}$$

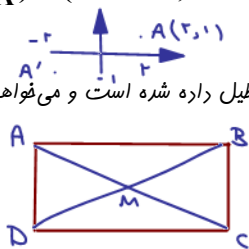
نکته: (۱) اگر A' قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$ باشد، آن‌گاه M وسط پاره خط AA' است و مختصات نقطه

$A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A)$ از فرمول مقابل به دست می‌آید:

مثال: قرینه نقطه $A(3, -1)$ نسبت به نقطه $M(2, 4)$ ، نقطه A' است که در آن:

$$A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A) = (2 \times 2 - 3, 2 \times 4 - (-1)) = (1, 9)$$

(۲) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $P'(-\alpha, -\beta)$ است. یکی از مسائلی که در تمرینات کتاب مطرح شده است این است که مفتحات سه رأس یک مستطیل داده شده است و می‌توانیم مفتحات رأس چهارم را به دست بیاوریم. برای این کار از نکته بصری که برای متوازی‌الاضلاع گفته می‌شود، استفاده می‌کنیم.



نکته: اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

تعریف: اگر $A(2, 1)$ و $B(3, 4)$ و $C(-1, 5)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به دست آورید.

$$\begin{cases} 2 + (-1) = 3 + x_D \\ 1 + 5 = 4 + y_D \end{cases} \quad \begin{aligned} x_D &= -2 \\ y_D &= 2 \end{aligned} \quad D(-2, 2)$$

تذکره: مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکته قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

(ت) عمودمنصف یک پاره خط

عمودمنصف: عمودمنصف پاره خط AB ، ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه و عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به دست می‌آوریم.

تعریف: دو نقطه $A(3, 6)$ و $B(1, 2)$ مفروض‌اند. معادله عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

$$y - y_M = m(x - x_M)$$

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x$$

$$M\left(\frac{1+3}{2}=2, \frac{2+6}{2}=4\right)$$

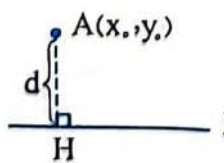
$$m_{AB} = \frac{2-6}{1-3} = 2$$

نکته: یکی از ویژگی‌های مهم عمودمنصف آن است که فاصله هر نقطه روی آن از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

یکی از فرمول‌های خیلی مهم که باید آن را حفظ کنیم، فاصله نقطه از خط است. از این فرمول علاوه بر به دست آوردن فاصله نقطه از خط، برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی و طول ارتفاع در مثلث استفاده می‌کنیم.

(ث) فاصله نقطه از خط

- اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد، فاصله A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از عمود A بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L؛ از فرمول زیر برای محاسبه فاصله نقطه از خط راست استفاده می‌کنیم:
- اگر مختصات نقطه A به صورت (x_0, y_0) و معادله خط L به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، آن‌گاه:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$


- برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

- (۱) همه اجزای معادله خط در یک طرف تساوی باشند.
- (۲) در معادله خط به جای x، طول نقطه (x_0) و به جای y، عرض نقطه (y_0) را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.
- (۳) ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.
- (۴) نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصله بین نقطه و خط می‌باشد.

تمرین: (۱) فاصله نقطه $A(3, 2)$ از خط به معادله $4x + 3y + 1 = 0$ را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی)

(۲) خط $5x - 12y + 4 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره را بیابید.

$$d = \frac{|5x_0 - 12y_0 + 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5(2) - 12(-1) + 4|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|10 + 12 + 4|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2 = R$$

شعاع $R = 2$

نکته: (۱) فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(۲) فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $x = a$ برابر $d = |x_0 - a|$ و از خط $y = b$ برابر $d = |y_0 - b|$ است.

مثال: فاصله نقطه $A(3, 4)$ از خط $x = 2$ برابر $d = |3 - 2| = 1$ و از خط $y = -5$ برابر $d = |4 - (-5)| = 9$ می‌باشد.

فاصله بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.

تمرین: فاصله بین دو خط موازی به معادلات $x + y - 3 = 0$ و $x + y + 5 = 0$ را به دست آورید.

نکته: $A(0, 3)$ نقطه دلخواه از خط $x + y - 3 = 0$ را بیابیم:

$$d = \frac{|x_0 + y_0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 3 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

نکته: برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، ابتدا ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم و داریم:

$$d = \frac{|x_0 + y_0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 3 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

حل: $1x + 1y - 3 = 0 \rightarrow a=1, b=1$
 $1x + 1y + 5 = 0 \rightarrow a=1, b=1$

$$\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{array} \xrightarrow[\text{دو خط موازی هستند.}]{\substack{a=a' \\ b=b'}} d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

پرسش‌های تشریحی:

۱- اگر $A(3, -1)$ و $B(-1, 6)$ دو نقطه باشند، فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط AB به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ کتاب درسی صفحه ۹)

$$OM = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

وسط $M(1, 2)$

۲- نقاط $A(-4, 4)$ ، $B(0, 4)$ و $C(-2, 2)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۶ کتاب درسی و تمرین ۳ صفحه ۹)

آ) مثلث ABC را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

پ) مساحت مثلث را به دست آورید.

۳- اگر نقاط $A(2, 4)$ و $B(5, 8)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

۴- اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. (فرداد ۱۴۰۲)

۵- مثلث با رأس‌های $A(-2, 4)$ و $B(3, -2)$ و $C(5, 4)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۷ کتاب درسی)

آ) مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانهٔ AM را به دست آورید.

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را بنویسید.