



آموزش آنلاین

ریاضی یازدهم ریاضی و تجربی

مدرس: دکتر سامان سلامیان

درس - نکته - تست - سوالات امتحان نهایی

به نام خردمند خرد آفرین

مجموعه پیش‌رو برای کلاس‌های آنلاین سالانه یازدهم تجربی و حسابان ۱ رشته ریاضی دوره متوسطه دوم که در پنج فصل مشترک هستند، گردآوری و تنظیم شده است. هدف این مجموعه؛ نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه است. نکات مهم خلاصه‌وار و برای شب امتحان و آزمون آورده شده است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم. البته برای حل مثال‌های سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد. پس این جزوه؛ خلاصه اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ ابتدا به کمک درسنامه‌ای همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموز قدرت و توان برکه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است. با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور «روش مفهومی» و «حل مسئله به کمک حل مسئله» در این مجموعه به کار گرفته شده است که در تمام این سال‌ها موفق بوده است.

تکلیف (Homework): در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به «هیچ» سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکور آزمایشی برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که «امسال» ریاضی را «می‌خوانم» با من همراه نشوید؛ زیرا اصلاً ریاضی خواندن نیست؛ بلکه نوشتن و مسئله حل کردن و توضیح‌دادن است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید. مهم‌ترین ابزار موفقیت در ریاضی؛ تمرین کردن و حل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات تالیفی؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمونهای آزمایشی استاندارد است؛ به‌طوری‌که با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد. همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین؛ حضور پر رنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع‌اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه؛ تنها راه گرفتن نمره کامل «بیست» در آزمون و درصد خوب در آزمون‌های تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق کردید و یا با خواندن و حل یک تست به طراح آن «آفرین» گفتید که به چه جالبی فلان موضوع را پنهان کرده است یا مورد سوال قرار داده؛ یعنی اینکه دارید؛ مسیر را درست می‌روید. تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با حل مسئله و «تکرار و تمرین» ممکن است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند. تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید؛ تکالیف (Homework) پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را؛ خودتان حل کنید و به کمک پاسخنامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. در هر قسمت از درس ابتدا قسمت‌های مشترک هر دو رشته ابتدا تدریس می‌شود و سپس بنا به وضعیت مخاطبان کلاس؛ قسمت‌های مربوط به کتاب حسابان ۱ درس داده خواهد شد. واضح است که این قسمت‌ها برای دوستان رشته تجربی در امتحانات مدرسه‌شان نخواهد آمد ولی با توجه به سطح کنکورهای اخیر بهتر است برای پیش‌افتادن از رقبای داوطلبان رشته تجربی؛ برای کنکور سراسری این مطالب را در حد کتاب حسابان بدانند. ضمن این که اکثر مطالب مربوط به کتاب حسابان ۱ در کتاب ریاضی ۳ تجربی سال دوازدهم خواهد بود و در کنکور از همه آنها سوال خواهد آمد. دانش‌آموزان رشته ریاضی در کتاب حسابان ۱ فصل ۲ یعنی هندسه و فصل هفت یعنی آمار و احتمال را نداشته و در کتاب هندسه و جبر و احتمال کامل‌تر خواهند خواند. البته می‌توانند در جلساتی که این مباحث تدریس می‌شوند به‌عنوان میهمان سر کلاس باشند.

در حقیقت در این کلاس و مجموعه؛ سال یازدهم هر دو رشته تجربی و ریاضی به‌موازات هم تدریس خواهد شد. قسمت‌های مربوط به هر رشته کاملاً تفکیک شده و مشخص است که دوستان برای امتحان مدرسه متوجه قسمت‌های مربوط به خود باشند. این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود. استفاده از این مجموعه با ذکر منبع بلامانع است. در کلاس درس آنلاین ریاضی یازدهم؛ نحوه بیان موضوع‌های درسی، ورود به مطلب و توضیح درس با این جزوه کاملاً متفاوت است ولی چیدمان مطالب و سوالات، مشابه روند این مجموعه می‌باشد.

فهرست مندرجات

عنوان	صفحه
فصل اول: جبر و معادله	
BOX 1: معادله درجه ۲	۱
BOX 2: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم	۱۳
BOX 3: تابع درجه دوم	۲۵
BOX 4: معادلات گویا و رادیکالی	۵۴
BOX 5: بخش اول هندسه تحلیلی	۷۳
BOX 6: بخش دوم هندسه تحلیلی	۹۸
مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی	۱۱۴
درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن	۱۳۵
فصل دوم: هندسه	
BOX 1: ترسیم‌های هندسی	۱۶۳
BOX 2: نسبت و تناسب - قضیه تالس	۱۸۴
BOX 3: عکس قضیه - برهان خلف - عکس قضیه تالس - قضیه‌های دوشرطی - مثال نقض	۱۸۹
BOX 4: تشابه مثلث‌ها	۲۰۶
فصل سوم: تابع (فصل سوم ریاضی ۲ و فصل دوم حسابان ۱)	
BOX 1: تابع و یادآوری	۲۲۸
BOX 2: انواع تابع (توابع گویا و دامنه آن) - تساوی دو تابع	۲۳۳
BOX 3: توابع رادیکالی و جزء صحیح	۲۴۲
BOX 4: وارون یک تابع - تابع یک‌به‌یک	۲۵۴
BOX 5: اعمال روی توابع	۲۷۲
BOX 6: ترکیب توابع	۲۹۳
فصل چهارم: مثلثات	
BOX 1: یادآوری و واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۳۰۷
BOX 2: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۳۲۶
BOX 3: توابع مثلثاتی	۳۴۹
BOX 4: مثلثات - نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا	۳۶۶

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

BOX 1	تابع نمایی	۳۸۳
BOX 2	تابع لگاریتمی	۴۰۰
BOX 3	ویژگی‌های لگاریتم - معادلات لگاریتمی	۴۱۴
BOX 4	نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی	۴۱۸

فصل ششم: حد و پیوستگی

BOX 1	فرایندهای حدی	۴۵۰
BOX 2	محاسبه حد تابع	۴۶۱
BOX 3	حد گویای صفر صفر، حد تابع قدرمطلق، حد تابع مثلثاتی، حد تابع جزء صحیح	۴۷۷
BOX 4	پیوستگی	۴۹۹
BOX 5	محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفر)	۵۲۸

فصل هفتم: آمار و احتمال

BOX 1	یادآوری احتمال - احتمال شرطی - پیشامدهای مستقل	۵۴۸
BOX 2	آمار توصیفی	۵۶۰

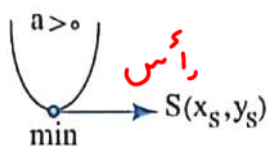
ریاضیات پایه یازدهم

فصل اول: جبر و معادله

BOX 1: معادله درجه ۲ (مشتک تجربی و ریاضی)

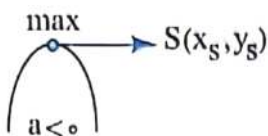
$$y = ax^2 + bx + c$$

(۱) اگر $a > 0$ باشد، سهمی رو به بالا و دارای مینیمم (min) است.



$$S(x_S = -\frac{b}{2a}, y_S = -\frac{\Delta}{4a})$$

(۲) اگر $a < 0$ باشد، سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم (max) است.



به min یا max اکثر می گویند

نکته: برای به دست آوردن مختصات رأس سهمی (min یا max) به روش زیر عمل می‌نماییم:

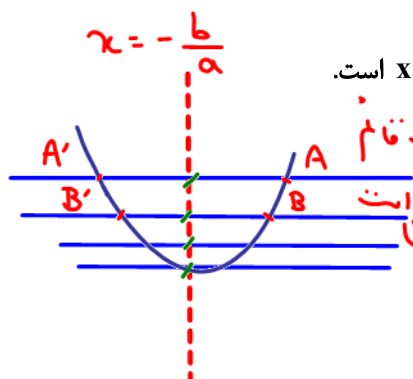
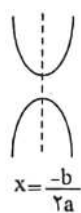
$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

(۱) طول رأس سهمی را می‌یابیم:

(۲) برای تعیین عرض رأس سهمی به دو صورت می‌توان عمل کرد:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} \quad (ب) \quad y_S = f(x_S) = f(-\frac{b}{2a}) \quad (الف)$$

نکته: محور تقارن سهمی خط قائمی گذرنده از رأس سهمی و به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ است.



اواسط وترهای عمودی محور x ها روی متقی از خط قائم
 $x = -\frac{b}{2a}$ با همان محور تقارن سهمی می‌اندازد و راضی است

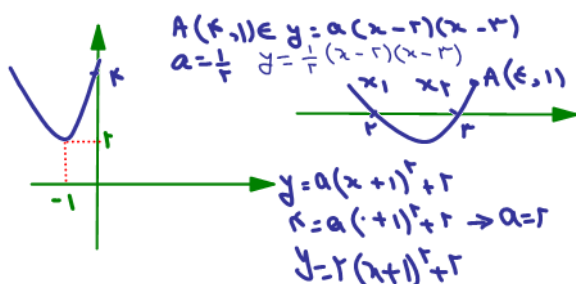
مراحل رسم سهمی

در حالت کلی:

ابتدا مختصات رأس سهمی را تعیین نموده، سپس دو نقطه دلخواه در قبل و بعد طول رأس سهمی (x_S) به عنوان نقطه کمکی مفروض

می‌کنیم.

در حالت خاص:



ریشه دوم، ریشه اول

(الف) با داشتن ۲ ریشه و یک نقطه $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

(ب) با داشتن رأس و یک نقطه $y = a(x - x_S)^2 + y_S$

(ج) با داشتن ۳ نقطه $y = ax^2 + bx + c$

تعیین: نمودار سهمی مقابل را رسم کنید.

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

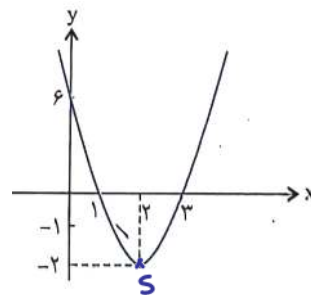
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} \text{if } a+b+c=0 \rightarrow x_1=1, x_2=\frac{c}{a} \\ \text{if } a+c=b \rightarrow x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2(2)} = 2 \Rightarrow y_S = 2(2)^2 - 8 \times 2 + 6 = -2$$

x	1	2	3
y = f(x)	0	-2	0

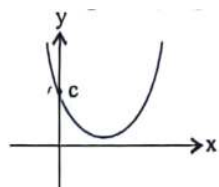
اگر از x حادی تا به 2 طرف بریم و آن x بدست آید. در آن لحظه y هم بدست می آید.
معوضه یا y حادی بدست می آید.
 $y = 2x^2 - 8x + 6 = 0$
 $a+b+c=0$ جمع ضرایب صفر. $x_1 = 1$ $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} = 1.5$



پاسخ:

نکته: برای تعیین محل تلاقی هر منحنی با محور عرض ها کافی است به جای x صفر قرار دهیم و برای تعیین محل تلاقی هر منحنی با محور طول ها کافی است به جای y صفر قرار دهیم.

بنابراین محل برخورد چندجمله ای $f(x) = ax^2 + bx + c$ با محور عرض ها، نقطه $f(0) = c$ خواهد بود.



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

در این بخش می خواهیم ببینیم که چگونه می توانیم ریشه های $f(x)$ را بدست آوریم.

صفه های تابع (ریشه های تابع)

صفه های تابع همان جواب های معادله $f(x) = 0$ در صورت وجود است که عبارت اند از مجموعه مقادیری از x (دامنه f) که به ازای آن ها $f(x)$ صفر است، اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم، صفه های f طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست.

روش های تعیین صفه های معادله درجه دوم

۱) تجزیه: در صورت امکان و سهولت، معادله درجه دوم را با استفاده از یکی از اتحاد های زیر به عوامل درجه اول تجزیه کرده و سپس هر یک از عوامل را برابر صفر قرار می دهیم:
اتحاد های مهم در تجزیه عبارت جبری:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a, b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشد، یک معادله درجه دوم می نامیم.

روش های حل معادله درجه دوم

۱) روش تجزیه

ویژگی حاصل ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آن گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به عبارت دیگر:
 $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ یا $B = 0$.

در حل معادله درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا معادله درجه دوم را به حاصل ضرب دو عبارت جبری تجزیه کرده و سپس از ویژگی فوق استفاده می کنیم.

تمرین: معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ: عبارت درجه دوم $x^2 + 5x + 6$ را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم. باید دو عدد مشخص کنیم که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۶ و حاصل جمع آن‌ها برابر ۵ باشد. این دو عدد، ۲ و ۳ هستند. بنابراین:

تجزیه جمع آری

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

ضرب
جمع آری

(۲) روش ریشه‌گیری

ابتدا نکته زیر را که به قاعده ریشه‌گیری معروف بوده و در حل معادله درجه دوم به کار می‌رود، بیان می‌کنیم:

نکته: فرض کنید a یک عدد حقیقی و $a \geq 0$ باشد، در این صورت:

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $b = 0$ و اعداد a و c مختلف‌العلامه باشند، برای یافتن ریشه‌های این معادله، می‌توان از این

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

روش استفاده کرد. در واقع داریم:

توجه کنید که چون طبق فرض a و c مختلف‌العلامه هستند، پس $-\frac{c}{a}$ مثبت بوده و در نتیجه معادله دارای دو جواب قرینه می‌باشد. بدیهی است که اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله در این حالت ریشه نخواهد داشت.

تمرین: معادله $(2x-1)^2 = 25$ را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$$(2x-1)^2 = 25 \xrightarrow{\text{روش ریشه‌گیری}} 2x-1 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

پاسخ:

هر یک از معادله‌های $2x-1=5$ و $2x-1=-5$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x-1=5 \\ 2x-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=5+1 \\ 2x=-5+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ 2x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

(۳) روش مربع کامل

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

مراحل حل یک معادله درجه دوم به روش مربع کامل، به صورت زیر است:

(۱) جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

(۲) اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر یک شود.

(۳) به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.

(۴) اگر دو طرف معادله مثبت باشد، به روش ریشه‌گیری ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم.

تمرین: معادله $x^2 + 4x = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ: به دو طرف معادله عدد ۴ را اضافه می‌کنیم ($2^2 = 4$) به توان $\div 2 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ (ضریب x):

$$x^2 + 4x + 4 = 4 \Rightarrow (x+2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x+2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ x+2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

نکته: در حل معادلات درجه دوم به روش مربع کامل، عبارت $x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2$ را می‌توان با استفاده از فرمول $x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2$ به

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - \frac{36}{4} = (x+3)^2 - 9$$

مربع کامل تبدیل کرد.

(۴) روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، به عبارت $b^2 - 4ac$ که وجود ریشه‌های معادله به علامت آن بستگی دارد، مبین یا دلتای معادله

معادله درجه دوم حداکثر ۲ ریشه دارد.

می‌گوییم و آن را با حرف Δ نمایش می‌دهیم. در این صورت با توجه به علامت Δ ، داریم:



(آ) اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

(ب) اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه است که به آن ریشه مضاعف یا مکرر مرتبه دوم می‌گوییم و ریشه مضاعف معادله

برابر است با: $x = -\frac{b}{2a} = x_1 = x_2$ $x_1 = x_2$

(پ) اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از روابط زیر به دست می‌آید:

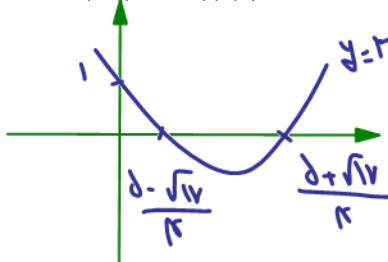
$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



تمرین: ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + 1 = 0$ را با فرمول کلی به دست آورید.

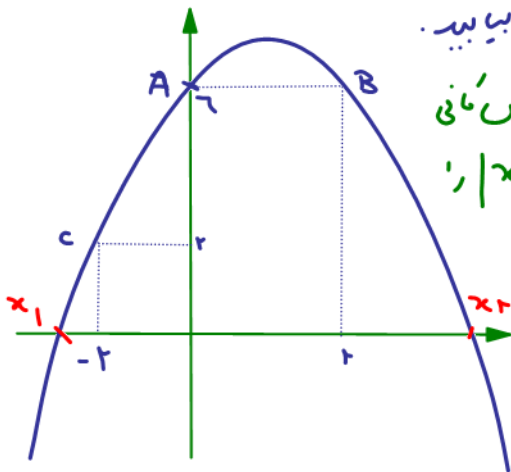
پاسخ: در معادله داده شده، $a = 2$ ، $b = -5$ و $c = 1$ می‌باشد. مقدار Δ را از فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(1) = 25 - 8 = 17 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{17}}{2(2)} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{17}}{2(2)} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$



در سببی مقابل فاصله نقاط برخورد با محور طول‌ها را از هم بیابید.

چون می‌توانیم ۳ نقطه می‌توان معادله سببی را نوشت پس کافی است ریشه‌ها (معنه‌ها) ی معادله را بیابیم: $|x_1 - x_2|$ حساب کنیم.



$$A(0, 7) \in f(x) = 0 + 0 + c = 7 \rightarrow c = 7$$

$$B(2, 7) \in f(x) = 4a + 2b + 7 = 7 \rightarrow 2a + b = 0$$

$$C(-2, 7) \in f(x) = 4a - 2b + 7 = 7 \rightarrow 2a - b = 0$$

$$4a = -2 \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-\frac{1}{2})(7) = 13$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-1} = 1 + \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{-1} = 1 - \sqrt{13}$$

$$|x_1 - x_2| = 2\sqrt{13} \quad \text{یا} \quad |x_1 - x_2| = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{13}}{|-\frac{1}{2}|} = 2\sqrt{13}$$

نکته: $y = ax^2 + bx + c$

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = P = \frac{c}{a}$$

$$D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم: حل معادلاتی که به شکل معادله درجه ۲ منتقل شود.

در بسیاری از موارد با استفاده از تغییر متغیر می توان معادلات را به فرم درجه ۲ مرتب نموده و سپس با روش های گفته شده در ابتدای فصل به حل آن بپردازیم.

تعرین: صفرهای توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $(x^2 + x)^2 - 3(x^2 + x) = -2$ ب) $x - 2\sqrt{x+1} - 2 = 0$ پ) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

ت) $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) = 0$ ث) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$ (تمرین کتاب درسی)

الف) $x^2 + x = t \rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$ جمع ضرایب صفر $\begin{cases} t_1 = 1 = x^2 + x \\ t_2 = \frac{c}{a} = 2 = x^2 + x \end{cases}$

$x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ریشه ۲

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$

ب) $x - 2\sqrt{x+1} - 2 = 0$ $(x+1) - 2\sqrt{x+1} - 3 = 0$

ع.ت.ق $\sqrt{x+1} = t \rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$ $\begin{cases} t_1 = -1 = \sqrt{x+1} \\ t_2 = \frac{c}{a} = -3 = \sqrt{x+1} \end{cases}$ $a+c=b$

پ) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ $x^2 = t \rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$ $\begin{cases} t_1 = -1 = x^2 \\ t_2 = \frac{c}{a} = -3 = x^2 \end{cases}$ ع.ت.ق $\begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$ $a+c=b$

ت) $x + \frac{1}{x} = t \xrightarrow{\text{طرف ضرب در } x} x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x(\frac{1}{x}) = t^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) = 0 \rightarrow t^2 - t - 2 = 0$ $\begin{cases} t_1 = -1 = x + \frac{1}{x} \rightarrow -x = x^2 + 1 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \\ t_2 = \frac{c}{a} = 2 = x + \frac{1}{x} \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$ $a+c=b$ $\Delta < 0$ ریشه ندارد. $\Delta < 0$ ریشه ندارد.

نکته $\begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq 2 & x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \leq -2 & x < 0 \end{cases}$ $x = -1$

$x + \frac{1}{x} \notin (-2, 2)$

مثال: معادله $\tan x + \cotan x = \sqrt{2}$ چند جواب دارد؟ $\tan x = t \rightarrow t + \frac{1}{t} = \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow t \in \emptyset$ $t + \frac{1}{t} \notin (-2, 2)$

ث) $t^2 - 7t + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 = \frac{x^2}{3} - 2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ t_2 = \frac{c}{a} = 6 = \frac{x^2}{3} - 2 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$ جمع ضرایب صفر

Homework

۱ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۲
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲ به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$
(۲) ۱
(۳) 1 و $-\frac{9}{5}$
(۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$
(۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$
(۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$
(۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۵ به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۵
(۳) ۹
(۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) ۳
(۳) -۱
(۴) $-\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
(۲) $5 + 2\sqrt{3}$
(۳) $5 + 4\sqrt{3}$
(۴) $7 + 4\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^2 + x = t$ ، معادله داده‌شده را به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} t - 12 = 0 &\Rightarrow t = 12 \\ t - 6 = 0 &\Rightarrow t = 6 \end{aligned}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -4 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -3 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله اولیه برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 + 3 - 3 + 2 = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

وقتی گفته می‌شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می‌گیریم: اولاً Δ در این معادله بزرگ‌تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در می‌آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها } x_1 \text{ و } x_2} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > 0$ فقط $m = -1$ جواب قابل قبول است.

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که $\Delta > 0$ باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

ریشه‌های معادله موردنظر از معکوس ریشه‌های معادله داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله موردنظر به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است، لذا:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha + 3\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 12\alpha$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{4}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha \cdot 3\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$a = 12\alpha = 12\left(\pm \frac{2}{3}\right) = \pm 8 \Rightarrow 8 - (-8) = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$S = \frac{-(-(a^2 + b^2 - 12))}{1} \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 - 12$$

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \quad (I)$$

$$P = \frac{a + b - 1}{1} : \text{از طرفی} \Rightarrow ab = (a + b) - 1$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه (I)}} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b) + 2 - 12$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 3(a + b) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = 5 \\ a + b = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = -2 \end{cases} \quad \checkmark \text{ قابل قبول}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{1}{\frac{(2-m)}{3}} \Rightarrow \frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m}$$

طرفین وسطین $\rightarrow -2m + 2m^2 + 2 - m = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta > 0$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3x^2 + (-2-1)x + 2+1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3x^2 + (2 \times \frac{7}{2} - 1)x + 2 - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{7}{2}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$a_2, 2a_5, a_8$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند، پس:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1q^4 = \frac{a_1q + a_1q^7}{2} \Rightarrow 4q^3 = 1 + q^6$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3=t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگ‌ترین جمله است و در نتیجه $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

$$\text{جمع } S = \left(\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) + \left(\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{ضرب } P = \left(\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$D = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

BOX 2: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} & (\text{مجموع دو ریشه}) \\ D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} & (\text{تفاضل دو ریشه}) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a^2}} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a^2}} = \sqrt{S^2 - 4P} \\ P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} & (\text{حاصل ضرب دو ریشه}) \end{cases}$$

تعریف: (۱) بدون حل معادله $3x^2 - 9x + 2 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را به دست آورید.

(۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

$$\sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \text{ب) } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

پاسخ: (۱) در معادله داده شده، $a = 3$ ، $b = -9$ و $c = 2$ است. جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{3} = \frac{9}{3} = 3, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

(۲) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ را به دست می‌آوریم: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$ ، $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{7}{1} = 7 \quad \text{آ)$$

ب) عبارت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را برابر A در نظر می‌گیریم و حاصل A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} A^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

$$= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} = 7 + 2\sqrt{1} = 7 + 2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} A = \pm 3$$

چون A عددی مثبت است، پس داریم: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$

در بعضی از مسائل می‌توانیم دو عددی را مشخص کنیم که مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را می‌دانیم. برای این کار باید معادله درجه دومی تشکیل دهیم. با حل معادله، ریشه‌های به دست آمده همان دو عدد مورد نظر هستند.

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، آنگاه برای نوشتن معادله، ابتدا S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل ضرب ریشه‌ها) را به

دست می‌آوریم و سپس معادله مقابل را تشکیل می‌دهیم:

تعریف: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$ باشند.

پاسخ: با فرض $\alpha = 3 + \sqrt{5}$ و $\beta = 3 - \sqrt{5}$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S = \alpha + \beta = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6, \quad P = \alpha\beta = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$ax^2+bx+c \Rightarrow \alpha, \beta \quad S=\alpha+\beta \quad P=\alpha\beta \quad D=|\alpha-\beta|$$



$$① \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$② \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$③ \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm r\sqrt{P}}$$

$$④ \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = D \cdot S (S^2 - 2P)$$

پرسش‌های تشریحی

$$-2x^6 + 11x^3 + 4 = 0$$

$$x^3 = t$$

$$-2t^2 + 11t + 4 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4(-2)(4)}}{2(-2)} = \frac{-11 \pm 13}{-4} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

$$x^3 = -\frac{3}{2} \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

۲- بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $5x^2 - 11x + 1 = 0$ را به دست آورید.

$$a=5 \quad b=-11 \quad c=1$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{11}{5} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}$$

۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$a=1 \quad b=-8 \quad c=4$$

ت	پ	ب	آ
$\alpha^2 + \beta^2$	$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$	$\alpha\beta$	$\alpha + \beta$
مجموع مربعات	$\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{c} = \frac{-(-8)}{4} = 2$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4$	$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 8$
$\alpha^2 + \beta^2 = (S^2 - 2P) = 64 - 8 = 56$			

۴- در معادله درجه دوم $x^2 + (m+3)x - 7 + m = 0$ مقدار m را طوری به دست آورید که:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$

$$S^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

مجموع ریشه‌ها برابر ۴ شود.

ب) حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{3}{4}$ شود.

$$① \quad x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} = -\frac{(m+3)}{1} = -m-3 \Rightarrow -m-3 = 4 \Rightarrow -m = 7 \Rightarrow m = -7$$

$$② \quad x_1 x_2 = P = \frac{c}{a} = -7 + m = -\frac{3}{4} \Rightarrow m = -\frac{3}{4} + 7 = \frac{25}{4} = 6.25$$

۵- در معادله $2x^2 - (2m+1)x + m = 0$ مقدار m را طوری به دست آورید که:

آ) یکی از ریشه‌ها، قرینه ریشه دیگر باشد. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow -(2m+1) = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

ب) یکی از ریشه‌ها، عکس ریشه دیگر باشد. $\alpha \beta = \frac{c}{a} = -1 \rightarrow \alpha = -\beta \rightarrow m = 2$

پ) یکی از ریشه‌ها، یک واحد بیشتر از دو برابر ریشه دیگر باشد. $\beta = 2\alpha + 1$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2m+1}{2} \xrightarrow{*} \alpha + (2\alpha+1) = \frac{2m+1}{2} \rightarrow 3\alpha = \frac{2m+1}{2} - 1 = \frac{2m-1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2m-1}{6} \\ \alpha \beta = \frac{m}{2} \xrightarrow{*} \alpha(2\alpha+1) = \frac{m}{2} \rightarrow 2\alpha^2 + \alpha = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$2\left(\frac{2m-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{6}\right) - \frac{m}{2} = 0 \xrightarrow{\times 18} (2m-1)^2 + 3(2m-1) - 9m = 0$$

$$4m^2 - 4m + 1 + 6m - 3 - 9m = 0 \rightarrow 4m^2 - 7m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \text{ یا } -\frac{1}{4}$$

۶- طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۰ و محیط آن ۱۳ باشد. $\text{طول} = 4, \text{عرض} = 2.5$ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

$$P = \alpha \beta = 10 \quad 2(\alpha + \beta) = 13 \quad S: \alpha + \beta = \frac{13}{2}$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x + 10 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm \sqrt{179 - 4(2)(20)}}{2(2)} = \frac{13 \pm 9}{4} \begin{cases} \frac{13+9}{4} = 5 = \alpha \\ \frac{13-9}{4} = 1 = \beta \end{cases}$$

مقدار ریشه رومی، ریشه هاین
 α, β هفت به صورت
 $x^2 - Sx + P = 0$
باشد.

۷- در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو برابر جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

$$\beta = 2\alpha$$

$$a=2 \quad b=-8 \quad c=m$$

$$S = \alpha + \beta = \alpha + (2\alpha) = -\frac{b}{a} = 4 \rightarrow 3\alpha = 4 \rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \quad \beta = 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \alpha(2\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \rightarrow 2\alpha^2 = \frac{m}{2}$$

$$2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{m}{2}$$

$$m = 2\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{32}{9}$$

نکته تی: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \quad \text{یک ریشه } k \text{ برابر ریشه دیگر باشد داریم}$$

$$\frac{(-8)^2}{2m} = \frac{(2+1)^2}{2} \rightarrow \frac{64}{m} = 9 \rightarrow m = \frac{64}{9}$$

$$x^2 + x = t \rightarrow t^2 - 18t + 72 = (t - 2)(t - 12) \rightarrow \begin{cases} t = 2 = x^2 + x \\ t = 12 = x^2 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Homework

۱. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟
- نکته: ببینیم معادله درجه n چند است؟
حداکثر n ریشه دارد.
- ۲ (۲) -۲
۴ (۴) ۴
۲ (۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲. به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟
- $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \rightarrow a = c$
 $m = m^2 - 2$
 $m^2 - m - 2 = 0$
 $m = -1$ (نکته: $m = 2$ و $m = -1$)
- ۲ (۲) -۱
۴ (۴) ۲
۳ (۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟
- $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 6$
 $\Delta \geq 0$
- ۲ (۲) ۱
۴ (۴) 1 و $\frac{9}{5}$
۳ (۳) 1 و $-\frac{9}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟
- $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۲)
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۱)
 $x^2 + 5x + 2 = 0$ (۴)
 $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۵. به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟

نکته: متنی گفته شده

۲ (۲) ۹
۴ (۴) ۱۸
۱ (۱) ۸
۳ (۳) ۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{(-a)^2}{4(\Delta)} = \frac{(k+1)^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} = 12 \rightarrow a^2 = 4(12) \rightarrow a = 12 \text{ یا } a = -12$$

اختلاف: ۲۴

۶ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۵
(۳) ۹
(۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) ۳
(۳) -۱
(۴) $-\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
(۲) $5 + 2\sqrt{3}$
(۳) $5 + 4\sqrt{3}$
(۴) $7 + 4\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^2 + x = t$ ، معادله داده‌شده را به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} t - 12 = 0 &\Rightarrow t = 12 \\ t - 6 = 0 &\Rightarrow t = 6 \end{aligned}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -4 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -3 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله اولیه برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 + 3 - 3 + 2 = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۹۰

گام اول

وقتی گفته می‌شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می‌گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ‌تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در می‌آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه } x_1 \text{ و } x_2} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > 0$ فقط $m = -1$ جواب قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که $\Delta > 0$ باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

گام اول

ریشه‌های معادله موردنظر از معکوس ریشه‌های معادله داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله موردنظر به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است، لذا:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha + 3\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 12\alpha$$

$$\alpha.\beta = \frac{4}{3} \xrightarrow{\beta=3\alpha} \alpha.3\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$a = 12\alpha = 12\left(\pm \frac{2}{3}\right) = \pm 8 \Rightarrow 8 - (-8) = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$S = \frac{-(-(a^2 + b^2 - 12))}{1} \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 - 12$$

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12(I)$$

$$P = \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = (a + b) - 1$$

$$\xrightarrow[\text{(I)}]{\text{جایگذاری در رابطه}} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b) + 2 - 12$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 3(a + b) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = 5 \\ a + b = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = -2 \end{cases} \quad \checkmark \text{ قابل قبول}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{1}{\frac{(2-m)}{3}} \Rightarrow \frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m}$$

طرفین وسطین $\rightarrow -2m + 2m^2 + 2 - m = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta > 0$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3x^2 + (-2-1)x + 2+1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ غ ق ق} \\ m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3x^2 + (2 \times \frac{7}{2} - 1)x + 2 - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{7}{2}$ است.

$a_2, 2a_5, a_8$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند، پس:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 q^4 = \frac{a_1 q + a_1 q^7}{2} \Rightarrow 4q^3 = 1 + q^6$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3=t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگ‌ترین جمله است و در نتیجه $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

BOX 3: تابع درجه دوم

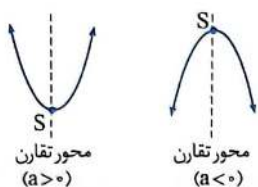
(صفحه ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی)

از سال گذشته با فواصل تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ آشنایی داریم که نمودار آن را سهمی می‌گوییم. در ابتدا برای یادآوری، ویژگی‌های تابع درجه دوم گفته شده است.

تابع درجه دوم

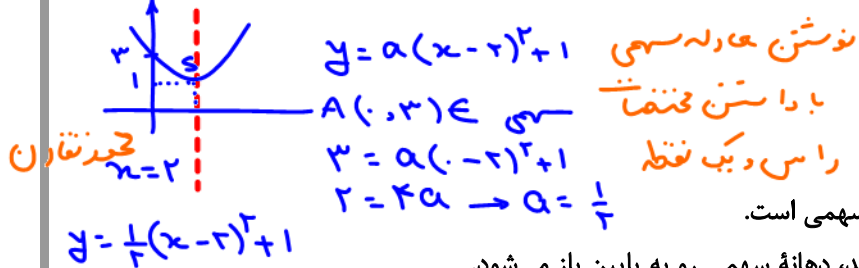
سهمی

• نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a, b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ ، یک سهمی اقم و یا به اختصار یک سهمی می‌گوییم. سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)، همواره به یکی از دو صورت مقابل است:



• در شکل‌های بالا به نقطه S رأس سهمی می‌گوییم.

• اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای پایین‌ترین نقطه یا مینیمم و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای بالاترین نقطه یا ماکزیمم می‌باشد که در هر صورت نقطه مینیمم یا ماکزیمم سهمی همان رأس سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن یا محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.



خواص سهمی به معادله $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$)، رأس این سهمی است.

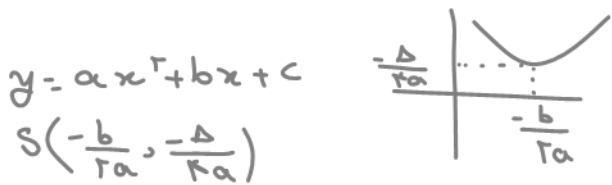
(۱) نقطه $S(\alpha, \beta)$ رأس این سهمی است.

(۲) خط به معادله $x = \alpha$ معادله خط تقارن (محور تقارن) سهمی است.

(۳) اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

نکته: از خاصیت (۲)، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر دو نقطه دلخواه از سهمی، اگر عرض این دو نقطه با هم برابر باشند، آن‌گاه طول این دو

نقطه نسبت به خط $x = \alpha$ قرینه یکدیگرند.



خواص سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)، رأس این سهمی است.

(۱) نقطه به مختصات $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ رأس این سهمی است.

(۲) خط به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ معادله خط تقارن یا محور تقارن این سهمی است.

(۳) اگر $a > 0$ ، دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

تذکره: به جای یافتن عرض نقطه رأس سهمی به کمک رابطه $-\frac{\Delta}{4a}$ ، می‌توان طول رأس یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ را در معادله سهمی قرار داد تا

عرض آن به دست آید.

تمرین: تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم؟ سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را تعیین کنید.

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۱۵)

$$\Delta : 4 - \frac{4}{4} = \frac{3}{1}$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \quad (2)$$

$$y = 3x^2 - 12x + 5 \quad (1)$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{12} = -3$$

پاسخ: (۱) ضرب x^2 عددی مثبت است، پس سهمی دارای مینیمم است. طول نقطه مینیمم، $x = -\frac{b}{2a}$ است: $x = -\frac{-12}{2(3)} = 2$

با قراردادن عدد ۲ به جای x ، کمترین مقدار سهمی به دست می‌آید:
پس کمترین مقدار سهمی برابر -7 است.

(۲) ضرب x^2 عددی منفی است، پس سهمی دارای ماکزیمم است:

پس بیشترین مقدار سهمی برابر ۲ است.
 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-\frac{1}{3})} = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \times 3^2 + 2 \times 3 - 1 = -3 + 6 - 1 = 2$



نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها را صف‌های تابع می‌نامیم. بنابراین برای پیدا کردن صف‌های تابع f باید معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم. در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، می‌توان تعداد صف‌های تابع را به کمک علامت Δ مشخص کرد.

تعریف: صف‌های تابع $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ را مشخص کنید.

پاسخ: ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ ، صف‌های تابع f می‌باشند: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$ ، $a = 3$ ، $b = -4$ ، $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{6} = \frac{6}{6} = 1, \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

نکته: اگر α و β صف‌های تابع درجه ۲ باشند، آن‌گاه ضابطه تابع f به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است که با داشتن یک فرض دیگر می‌توان مقدار a را نیز به دست آورد.

(مشابه مثال صفحه ۶۶ کتاب درسی)

تعریف: معادله سهمی مقابل را بنویسید.

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$A(0, -1) \Rightarrow y = a(x + 3)(x - 1)$$

$$-1 = a(3)(-1) \Rightarrow \frac{1}{3} = a \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x + 3)(x - 1) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$$

پاسخ: با توجه به نمودار، اعداد $\alpha = -3$ و $\beta = 1$ ، صف‌های تابع f هستند. پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x + 3)(x - 1)$ می‌باشد. مختصات نقطه $(0, -1)$ در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$f(0) = -1 \Rightarrow a(0 + 3)(0 - 1) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)(x - 1) = \frac{1}{3}(x^2 - x + 3x - 3) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$$

نکته: محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور عرض‌ها، برابر $f(0) = c$ می‌باشد. پس عدد c در تابع درجه ۲ با ضابطه



بحث روی علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ نشان‌دهنده محل برخورد نمودار آن با محور y ها است.

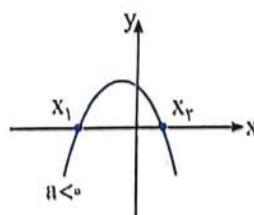
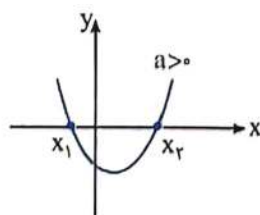
در این قسمت می‌فهمیم بدون به دست آوردن ریشه‌های معادله درجه دوم و فقط با استفاده از علامت S و P علامت ریشه‌های معادله (در صورت وجود) را

مشخص کنیم. **اول بود $c > 0$ اگر $0 < \Delta$ ریشه‌ها حقیقی و متمایز باشد، یعنی $\Delta > 0$ باشد. برای بحث در علامت ریشه‌ها، ابتدا**

فرض کنیم معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز باشد، یعنی $\Delta > 0$ باشد. برای بحث در علامت ریشه‌ها، ابتدا

$P = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب ریشه‌ها) را به دست می‌آوریم:

(۱) اگر $P < 0$ ، آن‌گاه دو ریشه معادله مختلف‌العلامت‌اند (یکی مثبت و دیگری منفی) و نمودار تابع f به یکی از دو حالت زیر است:



نکته: اگر $\frac{c}{a} < 0$ ، آن گاه Δ حتماً مثبت است، لذا فقط شرط $\frac{c}{a} < 0$ را بررسی می‌کنیم.

به عنوان مثال، در معادله درجه دوم $3x^2 + 11x - 1 = 0$ ، $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$ عددی منفی است، پس (Δ حتماً مثبت است) معادله دارای دو ریشه، یکی مثبت و دیگری منفی است.

تمرین: به ازای چه مقادیری از m ، معادله $(m-3)x^2 + 4mx - m + 5 = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد؟
 $\alpha \beta = \frac{c}{a} < 0$

پاسخ: اگر $P = \frac{c}{a}$ عددی منفی باشد، آن گاه معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-m+5}{m-3} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < 3 \text{ یا } m > 5$$

(۲) اگر $P > 0$ (حاصل ضرب دو عدد، عددی مثبت است)، آن گاه دو ریشه متحدالعلامت‌اند (هر دو ریشه مثبت و یا هر دو ریشه منفی هستند).
برای تشخیص مثبت بودن هر دو ریشه و یا منفی بودن آن‌ها، S (جمع ریشه‌ها) را تشکیل می‌دهیم:
(آ) اگر $S > 0$ (جمع دو عدد)، آن گاه هر دو ریشه مثبت‌اند.
(ب) اگر $S < 0$ (جمع دو عدد)، آن گاه هر دو ریشه منفی‌اند. بنابراین:

نکته: (۱) شرط وجود دو ریشه حقیقی مثبت آن است که $S = -\frac{b}{a} > 0$ ، $P = \frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$.

(۲) شرط وجود دو ریشه حقیقی منفی آن است که $S = -\frac{b}{a} < 0$ ، $P = \frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$.

تمرین: بدون حل معادله، علامت ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ را مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا Δ را به دست می‌آوریم: معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد. $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 12 = 37 > 0 \Rightarrow$

همچنین $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ عددی مثبت است و در نتیجه هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. $S = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$ را به دست می‌آوریم:

S عددی منفی است و چون S جمع دو عدد (هر دو مثبت یا هر دو منفی) است، پس دو عدد باید منفی باشند. لذا معادله دارای دو ریشه حقیقی منفی می‌باشد.



(۳) اگر $P = 0$ ، آن گاه $c = 0$ می‌باشد و در نتیجه ریشه‌ها $\alpha = 0$ و $\beta = -\frac{b}{a}$ می‌باشند.

اگر نمودار تابع درجه دوم داده شود و بخواهیم از روی نمودار، علامت a ، b و c را تعیین کنیم باید به نکته زیر خیلی توجه کنیم.

نکته: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ و ($a \neq 0$) داده شده است، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a ، b و c را با توجه به توضیحات مشخص کنیم.

علامت a : اگر سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ می‌باشد.

علامت b : طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است. با توجه به علامت a و علامت x ، علامت b تعیین می‌شود.

۹- بدون حل و تعیین ریشه‌ها، علامت ریشه‌های هر یک از معادله‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $x^2 - 11x + 3 = 0$ $\alpha \beta = \frac{c}{a} = 3$ هر دو ریشه هم علامت و $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 11$ و هر دو ریشه مثبتند $\Delta > 0$.

ب) $5x^2 + 12x + 7 = 0$

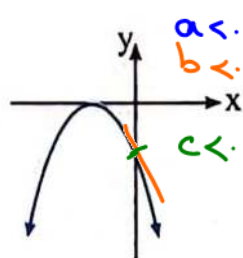
$\Delta < 0$ هر دو ریشه هم علامت $P = \alpha \beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{5}$.

$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{12}{5}$ هر دو ریشه منفی

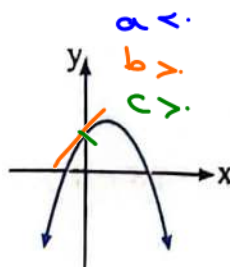
$\Delta = 144 - 4(5)(7) < 0$.

۱۰- در هر یک از قسمت‌های زیر، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنید.

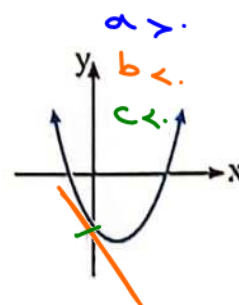
(مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی)



(پ)



(ب)

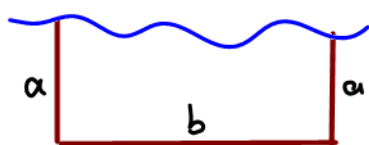


(آ)

۱۱- قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها

هزینه نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۱۵)

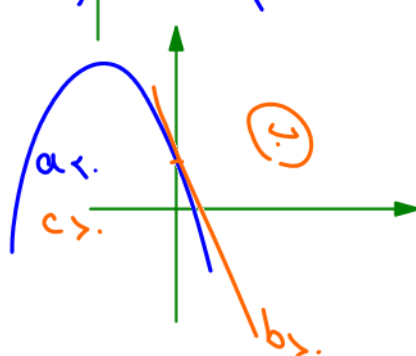
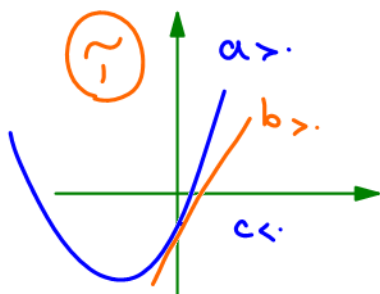


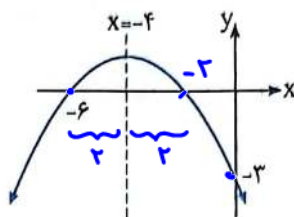
$2a + b = 120$
 $S = ab = a(120 - 2a) = -2a^2 + 120a$
سهمی دهانه به پایین
بارش $a = 70, a = 0$
 $S_{max} = 4(120 - 70) = 1800$

۱۲- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را با شرایط زیر رسم کنید:

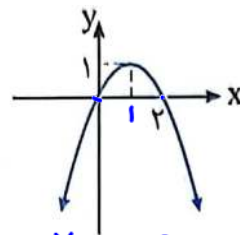
(آ) $c < 0, b > 0, a > 0$

(ب) $c > 0, b < 0, a < 0$





(ب)



(آ)

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$A(1, 1) \in y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$1 = a(1)(-1)$$

$$a = -1 \rightarrow y = -x(x - 2)$$

$$A(-3, -2) \in y = a(x + 7)(x + 2)$$

$$-2 = a(7)(2) \rightarrow a = -\frac{1}{7}$$

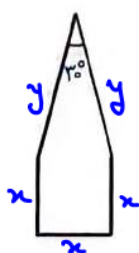
$$y = -\frac{1}{7}(x + 7)(x + 2)$$

۱۴- حدود m را طوری مشخص کنید که معادله $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12 = 0$ ، دو ریشه حقیقی منفی داشته باشد.

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} > 0, \quad -\frac{b}{a} < 0, \quad \Delta < 0 \\ \frac{c}{a} &= \frac{12}{m-2} > 0 \rightarrow m-2 > 0 \rightarrow m > 2 \\ -\frac{b}{a} &= \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \rightarrow m+1 < 0 \rightarrow m < -1 \\ \Delta &= 4(m+1)^2 - 48 < 0 \rightarrow (m+1)^2 < 12 \rightarrow -\sqrt{12} < m+1 < \sqrt{12} \rightarrow -\sqrt{12} - 1 < m < \sqrt{12} - 1 \end{aligned}$$

۱۵- پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس 30° قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر

باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟ (مشابه مثال صفحه ۱۴ کتاب درسی)



$$3x + 2y = 6 \rightarrow y = \frac{6 - 3x}{2}$$

$$S = x^2 + \frac{1}{2}xy \sin 30^\circ = x^2 + \frac{1}{4}xy = x^2 + \frac{1}{4}x(6 - 3x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2$$

$$S = x^2 + \frac{1}{4}(36 + 9x^2 - 36x) = \frac{13}{4}x^2 - 9x + 9$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{2 \cdot \frac{13}{4}} = \frac{36}{13} = 2.77 \text{ m} = 277 \text{ cm}$$

۱۶- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم با فرض $\pi = 3$ ۲۱۰۰ متر باشد،

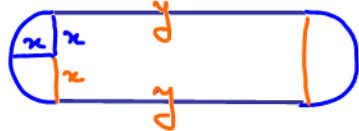
(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

دو نیم‌دایره

$$2y + 2\left(\frac{2x^2}{2}\right) = 2100$$

(آ) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود.



$$2y + 2x = 2100 \rightarrow y + x = 1050 \rightarrow y = 1050 - x$$

(ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۱) $S = S_{\text{مستطیل}} + (2S_{\text{دایره}})$

$$S = S_{\text{مستطیل}} + (2S_{\text{دایره}}) = 2xy + x^2 = 2x(1050 - x) + x^2 = -2x^2 + 2100x$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2100}{2(-2)} = \frac{2100}{4} = 525$$

$$S = S_{\text{مستطیل}} + (2S_{\text{دایره}}) = 2xy + x^2 = 2x(1050 - x) + x^2 = -2x^2 + 2100x$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2100}{2(-2)} = \frac{2100}{4} = 525$$

نتیجه: بهترین مساحت استادیوم وقتی است که به شکل دایره باشد. یعنی ۲ تا نیم‌دایره به هم می‌چسبند.

Homework

۱ صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15$ را به دست آورید.

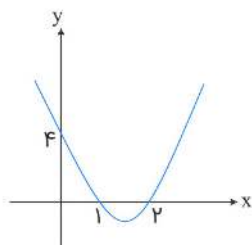
۲ راکتی که به طور عمودی رو به بالا کشیده شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ است.

الف چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می‌گردد؟

۳ معادله سهمی زیر را بنویسید.



۴ محیط مستطیلی ۱۵۰ متر است. حداکثر مساحت این مستطیل کدام است؟

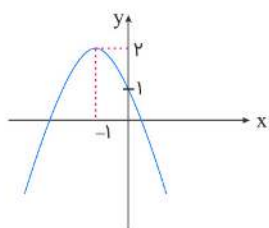
$$\frac{5625}{4} \quad (2)$$

$$\frac{21875}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3625}{4} \quad (1)$$

$$\frac{16875}{4} \quad (3)$$

۵ اگر ضابطه نمودار زیر به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟



$$(1) -1$$

$$(2) 1$$

$$(3) 2$$

$$(4) -2$$

۶ به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

(۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$

(۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

۷ اگر صفرهای نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 3x + m^2 - 2$ معکوس یکدیگر باشند، مجموع صفرهای تابع کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $-\frac{3}{2}$

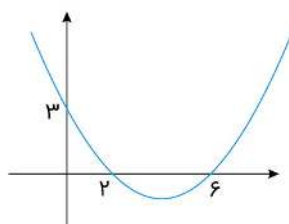
(۳) -3 (۴) $-\frac{4}{3}$

۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار تابع $f(x) = (m-2)x^2 + 5x + m + 1$ از چهار ناحیه مختصاتی می‌گذرد؟

(۱) $-2 < m < 1$ (۲) $-1 < m < 2$

(۳) $m > 1$ یا $m < -2$ (۴) $m > 2$ یا $m < -1$

۹ نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر است. $f(-1)$ کدام می‌باشد؟



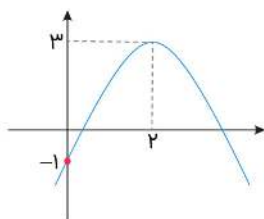
(۱) $\frac{21}{4}$

(۲) $\frac{19}{4}$

(۳) $\frac{11}{2}$

(۴) $\frac{8}{2}$

۱۰ نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر است، مقدار $f(\frac{1}{p})$ کدام است؟



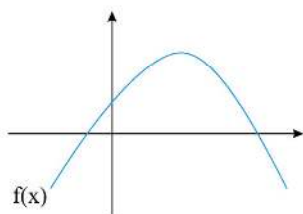
- (۱) $\frac{5}{4}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{7}{4}$
(۴) $-\frac{5}{4}$

۱۱ قرار است کنار رودخانه، محوطه مستطیلی شکل ایجاد کنیم، برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود، اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن این محوطه چقدر است؟



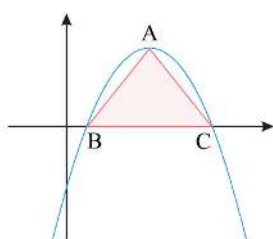
- (۱) ۱۲۰۰
(۲) ۱۲۵۰
(۳) ۲۵۰۰
(۴) ۲۵۵۰

۱۲ اگر سهمی زیر مربوط به $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آنگاه مقدار $abc - bc\Delta$ کدام است؟ ($\Delta = b^2 - 4ac$)



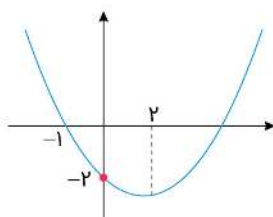
- (۱) مثبت
(۲) منفی
(۳) صفر
(۴) نامشخص

۱۳ نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ به صورت زیر است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۶
(۴) ۱۲

۱۴ نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ مطابق شکل زیر است. $f(-\frac{4}{3})$ کدام است؟



- (۱) $\frac{27}{38}$
(۲) $\frac{17}{38}$
(۳) $\frac{38}{45}$
(۴) $\frac{17}{45}$

۱۵ اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم

(۳) سوم (۴) چهارم

۱۶ به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ (با تغییر)

(۱) $a < -4$, $a \neq -5$ (۲) $a > -4$

(۳) $a < 4$ (۴) $a > 4$

۱۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

(۱) $-1 < m < 0$ (۲) $m < 0$

(۳) $2 < m < 8$ (۴) $m > 8$

۱۸ به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) هیچ مقدار a (۲) تمام مقادیر a

(۳) ۱ (۴) ۲

۱۹ معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m+6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام است؟

(۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$

(۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

۲۰ نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟

(۱) ۱ (۲) $1/5$

(۳) ۲ (۴) ۳

۲۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$

(۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۲۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

(۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$

(۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$

۲۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای منفی، قطع می‌کند؟

(۱) $m > 2$

(۲) $-1 < m < 2$

(۳) هر مقدار m

(۴) هیچ مقدار m

۲۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a + 3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طولهای منفی قطع می‌کند؟

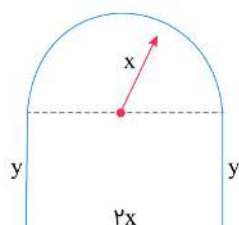
(۱) $a < -9$

(۲) $a < -3$

(۳) $a > -1$

(۴) $-3 < a < 0$

۲۵ یک پنجره به شکل مستطیل است که در بالای آن یک نیم‌دایره قرار دارد (مطابق شکل). اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، عرض مستطیل (y) چقدر می‌تواند باشد که حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\pi \simeq 3$) (شعاع نیم‌دایره x است).



(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{6}{5}$

(۴) $\frac{6}{7}$

۲۶ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، داریم $fa + 2b + c < 0$ ، اگر $b^2 < 4ac$ باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

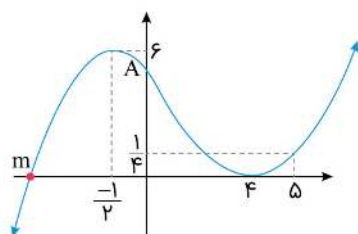
(۱) $a > 0$

(۲) $c > 0$

(۳) $ac > 0$

(۴) $b < 0$

۲۷ در شکل زیر نمودار دو سهمی در نقطه A مشترکند. مقدار m کدام است؟



(۱) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{4}$

(۲) $\frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

۲۸ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) است. مجموع مربعات صفرهای دیگر تابع کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

۲۹ تعداد ریشه‌های معادله $x^2 - 4x = |x - 1|$ کدام است؟

۱ (۲)

بدون ریشه (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۳۰ به ازای کدام مقادیر m ، معادله $|x| + |x - 3| = m$ فاقد جواب است؟

$m > 3$ (۲)

$m < 3$ (۱)

$m \geq 3$ (۴)

$m = 3$ (۳)

پاسخ Homework

۱

$$x^y + \mathfrak{F}x = t \Rightarrow t^y - \mathfrak{Y}t - 1\mathfrak{A} = 0$$

$$\Rightarrow (t + \mathfrak{Y})(t - \mathfrak{A}) = 0$$

$$t = -\mathfrak{Y}, t = \mathfrak{A} \Rightarrow \begin{cases} x^y + \mathfrak{F}x = \mathfrak{A} \Rightarrow x = 1, -\mathfrak{A} \\ x^y + \mathfrak{F}x = -\mathfrak{Y} \Rightarrow x = -1, -\mathfrak{Y} \end{cases}$$

۲ الف

$$t_s = \frac{-b}{\mathfrak{Y}a} = \frac{-100}{-10} = 10 \text{ s}$$

ب

$$h(10) = 100(10) - \mathfrak{A}(10)^y = 1000 - \mathfrak{A}00 = \mathfrak{A}00 \text{ m}$$

ج

$$h = 0 \Rightarrow 100t - \mathfrak{A}t^y = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A}t(\mathfrak{Y}0 - t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ ق ق غ} \\ t = 10 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۳

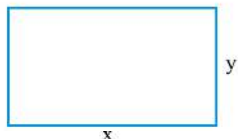
$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$f(x) = a(x - 1)(x - \mathfrak{Y})$$

$$A \Big|_{\mathfrak{F}}^0 : \mathfrak{F} = a(-1)(-\mathfrak{Y}) \Rightarrow a = \mathfrak{Y}$$

$$f(x) = \mathfrak{Y}(x - 1)(x - \mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y}(x^y - \mathfrak{Y}x + \mathfrak{Y})$$

$$f(x) = \mathfrak{Y}x^y - \mathfrak{Y}x + \mathfrak{F}$$



محیط : $2(x + y) = 150$

$x + y = 75 \Rightarrow y = 75 - x$

مساحت : $S = x \cdot y = x(75 - x)$

$$S = -x^2 + 75x \Rightarrow \max \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-75}{2(-1)} = \frac{75}{2} \\ S_{\max} = -\left(\frac{75}{2}\right)^2 + \frac{75^2}{2} = 75^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow S_{\max} = 75^2 \left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow S_{\max} = \frac{5625}{4} \end{array} \right.$$

رأس سهمی : $(m, k) : f(x) = a(x - m)^2 + k$

رأس سهمی : $(-1, 2) : f(x) = a(x + 1)^2 + 2$

نقطه روی منحنی : $(0, 1) \in f : 1 = a(0 + 1)^2 + 2 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -(x + 1)^2 + 2 = -x^2 - 2x + 1$

$a + b + c = -2$

برای اینکه تابع دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$$

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(m - 6)(-3) > 0$$

$$4m^2 + 4(3m - 18) > 0$$

$$m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m + 6)(m - 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ \text{یا} \\ m < -6 \end{cases}$$

$$2) -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m - 6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6$$

$$3) \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m - 6} > 0 \Rightarrow m - 6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

اشتراک جوابها: $3 < m < 6$

صفرهای تابع $f(x)$ همان ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ است، پس شرط معکوس بودن ریشه‌ها $a = c$ و $\Delta > 0$ است.

$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

$$m = m^2 - 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1: -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \Rightarrow \Delta > 0 \checkmark \\ m = 2: 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 16 < 0 \end{cases} \text{ (غقق) بدون ریشه}$$

$$m = -1: -x^2 + 3x - 1 = 0$$

مجموع ریشه‌ها:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$$

گزینه ۲

۸

شرط آنکه نمودار تابع سهمی از چهار ناحیه بگذرد:

$$a.c < 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) < 0$$

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$(m-2)(m+1)$	+	0	-	0	+

$-1 < m < 2$

گزینه ۱

۹

صفرهای تابع سهمی $\alpha = 2$ و $\beta = 6$ می‌باشند، پس داریم:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) \Rightarrow f(x) = a(x - 2)(x - 6)$$

و نمودار از نقطه $(0, 3)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در ضابطه صدق می‌کند:

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6) \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{4}(-3)(-7) = \frac{21}{4}$$

گزینه ۲

۱۰

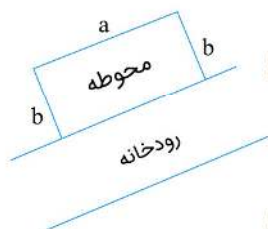
نکته: اگر $S(m, k)$ رأس سهمی باشد، ضابطه سهمی به صورت $f(x) = a(x - m)^2 + k$ می‌باشد.

$$S(2, 3)$$

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \xrightarrow{(0, -1) \in f} -1 = a(0 - 2)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + 3 = -\frac{9}{4} + 3 = \frac{3}{4}$$



$$P = a + 2b \Rightarrow a + 2b = 100 \Rightarrow a = 100 - 2b$$

$$S = a \cdot b \Rightarrow S = (100 - 2b) \times b \Rightarrow S = -2b^2 + 100b$$

بنابه نمودار درجه دوم:

$$S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(100^2 - 0)}{4(-2)} = \frac{10000}{8} = 1250 \text{ m}^2$$

نمودار max دارد: $a < 0$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0$$

محل تلاقی f با محور y ها: $c > 0$

چون صفرهای تابع f دوتا می باشد، معادله دو ریشه حقیقی دارد: $\Delta > 0$

$$\begin{matrix} a & \cdot & b & \cdot & c & - & b & \cdot & c & \cdot & \Delta \\ (-) & (+) & (+) & - & (+) & (+) & (+) & (+) & (+) & (+) & \end{matrix} = (-) - (+) = (-)$$

$$A: \text{رأس سهمی} \begin{cases} x = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \\ y = -9 + 18 - 5 = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 : -x^2 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 : B(1, 0) \\ x = 5 : C(5, 0) \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \times h}{2}$$

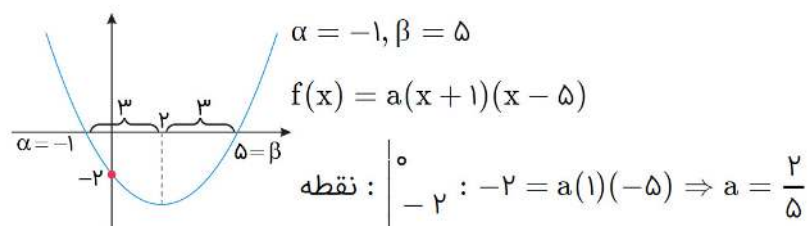
$$\Rightarrow ABC \text{ مساحت مثلث } S_{ABC} = \frac{(4)(4)}{2} = 8$$

h ارتفاع مثلث است.

نکته: اگر α و β صفرهای تابع سهمی $f(x)$ باشند، داریم:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

نکته: $x = -\frac{b}{2a}$ (طول رأس سهمی) معادله محور تقارن سهمی است.



$$f(x) = \frac{2}{5}(x+1)(x-5) \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{5}\left(-\frac{4}{3}+1\right)\left(-\frac{4}{3}-5\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{38}{45}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

α ریشه معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} + \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1 < \alpha \quad \times$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{-1}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 > \alpha \quad \checkmark$$

بنابراین $\alpha = -\frac{1}{5}$ و $\beta = 1$ قابل قبول است.

$$y = -5x^2 + 4x + 1$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5}, \quad y_s = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

بنابراین S در ناحیه اول قرار دارد.

مجموع ضرایب معادله برابر با صفر است، بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله $x = 1$ می‌باشد. حال معادله را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad \left| \frac{x-1}{x^2 + ax + 4} \right. \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ ax^2 + (4-a)x - 4 \\ \underline{-(ax^2 - ax)} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

معادله دارای سه ریشه مثبت است، در نتیجه باید معادله $x^2 + ax + 4$ دو ریشه متمایز مثبت داشته باشد. پس در معادله $x^2 + ax + 4$ شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -4 \text{ یا } a > 4 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \quad \checkmark \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -4$$

همچنین ریشه معادله $x^2 + ax + 4$ نباید $x = 1$ باشد ($a \neq -5$). بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$a < -4, \quad a \neq -5$$

شرط آنکه معادله درجه دومی، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > 0$ ، $S = \frac{-b}{a} > 0$ و $P = \frac{c}{a} > 0$ باشند.

$$x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m-2)}{1} > 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$$

از اشتراک دو شرط بالا $-1 < m < 2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست ولی ما شرط $\Delta > 0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0$$

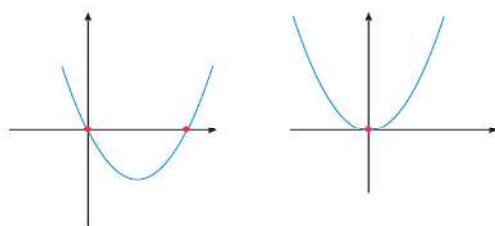
$$\Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ \text{یا} \\ m < 0 \end{cases}$$

از اشتراک $-1 < m < 2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1 < m < 0$

$$y = ax^2 + (3 + 2a)x = x(ax + 3 + 2a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + 3 + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3 + 2a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیه سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



$$\text{سهمی روبه بالا} \Rightarrow a > 0 \quad (*)$$

$$\text{ریشه غیر صفر} > 0 \Rightarrow -\frac{3 + 2a}{a} > 0 \Rightarrow \frac{3 + 2a}{a} < 0$$

$$\xrightarrow{a > 0} 3 + 2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

بنابراین طبق (*) برای a مقداری یافت نشد.

برای اینکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت باشد باید $\Delta > 0$ ، $p > 0$ و $s > 0$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times 2 \times (m + 6) = m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m - 12)(m + 4)}_p > 0$$

x	$-\infty$	-4	12	$+\infty$	
p(x)	$\frac{+}{\infty}$	$\circ$	-	$\circ$	$\frac{+}{\infty}$

$$\Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12$$

$$۲) p > 0 \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$۳) s > 0 \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m + 6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، در نتیجه داریم:

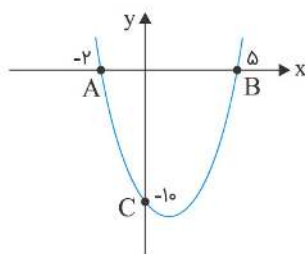
$$m \in (-6, -4)$$

$$y = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow y = (x - 5)(x + 2)$$

$$\xrightarrow{y=0} x = -2, x = 5$$

باتوجه به صفرهای تابع، نمودار تابع محور xها را در نقاط $A(-2, 0)$ و $B(5, 0)$ قطع می‌کند. همچنین محور yها را در نقطه $C(0, -10)$ قطع می‌کند.

همچنین به علت مثبت بودن ضریب x^2 ، دهانه این سهمی روبه‌بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:



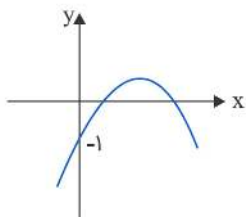
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور xها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به سمت xهای مثبت انتقال دهیم.

$$(-\infty, -6) \cup [-6, 2] = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

روش دوم:

باتوجه به اینکه $a < 3$ است حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از $a < 3$ کم می‌کنیم.

چون عرض از مبدأ -1 است و $a < 3$ پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{باید دو ریشه داشته باشد}$$

$$2) > 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}$$

$$3) > 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (I)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad (II)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow 2 < a < 3$$

به ازای بازه به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می‌کند. پس با کم کردن این بازه از $a < 3$ خواسته سؤال محقق می‌شود.

$$(-\infty, 3) - (2, 3) = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

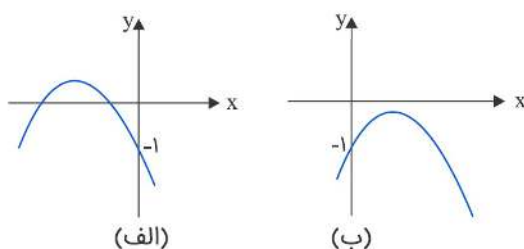
در نتیجه به ازای بازه فوق برای a نمودار تابع از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول عبور نکند این است که ضریب x^2 یا همان a منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

روش اول:

تابع صورت سؤال را می‌توان در دو حالت زیر فرض کرد:



$$f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -1$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > 0, S < 0, \Delta > 0$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq 0$ باشد.
برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (\text{I})$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{a}{a - 3} < 0 \xrightarrow{a - 3 < 0} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{II})$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a - 3} > 0 \quad (\text{III})$$

(با توجه به اینکه $a - 3 < 0$ ، همواره برقرار است.)

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \cap (\text{III}) \Rightarrow a < -6$$

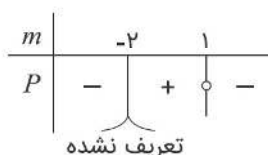
برای حالت (ب):

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی‌گذرد داریم:

این منحنی باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد؛ درنتیجه کافی است حاصل‌ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$



$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، $\Delta > 0$ می‌شود.

گام اول

الف) منحنی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگتر از صفر است.
ب) منحنی در دو نقطهٔ منفی محور x ها را قطع می‌کند بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده داریم:

$$a = (m-2), \quad b = -2(m+1), \quad c = 12$$

حال هر سه شرط گفته‌شده را بررسی می‌کنیم:

$$I) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(m-2)(12) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 48m + 96 > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0 \xrightarrow{+4} m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$II) S < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$III) P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک بین دو مجموعهٔ جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی موردنظر به ازای هیچ مقدار m ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

الف) نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
ب) هر دو ریشه معادله منفی است، بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.
ج) مجموعه مقادیر قابل قبول برای a ، اشتراک بین سه مجموعه جواب به دست آمده است.

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \quad (I)$$

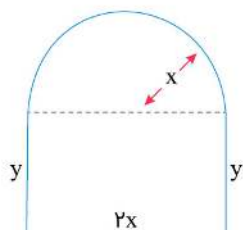
$$۲) S = x_1 + x_2 = -\frac{a+3}{a} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0 \quad (II)$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (III)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -9$$



محیط پنجره:

$$2y + 2x + \pi x = 6$$

$$\xrightarrow{\pi \simeq 3} 2y = -5x + 6 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 3 \quad (I)$$

برای اینکه بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید بیشترین مساحت را دارا باشد، پس:

$$\text{مساحت: } S = 2xy + \frac{\pi}{2}x^2 \xrightarrow{\pi \simeq 3} S = 2x\left(-\frac{5}{2}x + 3\right) + \frac{3}{2}x^2$$

$$S = -5x^2 + 6x + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow S = -\frac{7}{2}x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2\left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{6}{7}$$

در رابطه (I) قرار دهید:

$$y_{\max} = -\frac{5}{2}\left(\frac{6}{7}\right) + 3 = \frac{-15}{7} + 3 = \frac{6}{7}$$

باتوجه به اینکه $a + 2b + c < 0$ است، پس $f(2) < 0$ است، ازطرفی چون $b^2 < 4ac$ است، درنتیجه $b^2 - 4ac < 0$ و نهایتاً $\Delta < 0$ خواهد بود، پس سهمی محور xها را قطع نمی‌کند و دهانه آن رو به پایین است و درنتیجه $a < 0$ و $c < 0$ خواهد بود.

$$a < 0, c < 0 \Rightarrow ac > 0$$

سهمی سمت راست را به صورت $y = a(x - 4)^2$ در نظر می‌گیریم و نقطه $(5, \frac{1}{4})$ را در آن صدق می‌دهیم.

$$\frac{1}{4} = a(5 - 4)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x - 4)^2$$

نقطه مشترک دو سهمی $(0, 4)$ خواهد بود. معادله سهمی سمت چپ را به صورت $y = a(x + \frac{1}{4})^2 + 6$ در نظر می‌گیریم و نقطه $(0, 4)$ را در آن صدق می‌دهیم:

$$4 = a(0 + \frac{1}{4})^2 + 6 \Rightarrow \frac{a}{4} = -2 \Rightarrow a = -8 \Rightarrow y = -8(x + \frac{1}{4})^2 + 6$$

حال صفرهای سهمی سمت چپ را پیدا می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow -8(x + \frac{1}{4})^2 + 6 = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{x < 0} x + \frac{1}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

صدق ریشه در معادله:

$$x = -2 : (-2)^3 + k(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 \\ \Rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$f(x) = x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$$

$$f(x) = 0 : (x^2 - 1)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = +1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع مربعات}} (-1)^2 + (1)^2 = 2$$

گزینه ۳

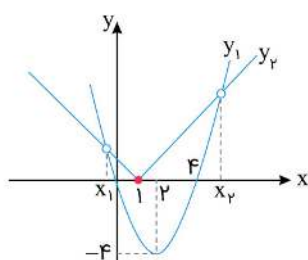
۲۹

حل به روش هندسی:

$$x^2 - 4x = |x - 1|$$

$$y_1 = x^2 - 4x \Rightarrow \min \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$y_2 = |x - 1|$$

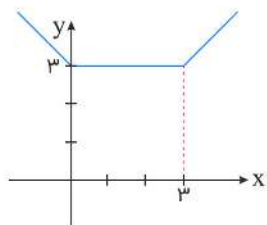


۲ ریشه دارد.

گزینه ۱

۳۰

به کمک رسم نمودار می‌توانیم به جواب سوال برسیم:



باتوجه به شکل اگر m پایین‌تر از $y = 3$ باشد معادله جواب نخواهد داشت.

BOX 4: معادلات گویا و رادیکالی

(صفحه ۱۹ تا ۲۴ کتاب درسی)

با عبارت‌های گویا در سال قبل آشنا شده‌اید. در این قسمت معادلات گویا را حل می‌کنیم. هم‌پنین روش حل معادلات رادیکالی را خواهیم گفت.

الف) معادلات گویا

تعریف: کسرهایی را که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند.

مقدار یک عبارت گویا وقتی بامعنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، مقدار آن عبارت گویا تعریف نشده است.

حل معادلات گویای $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

برای حل این نوع معادلات طرفین وسطین می‌کنیم، معادله به دست آمده را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن که مخرج هیچ یک از دو کسر را صفر نکند، قابل قبول است.

تمرین: معادله $\frac{4x-1}{x+2} = \frac{x+5}{2x}$ را حل کنید.

پاسخ: $x=0$ و $x=-2$ ریشه‌های مخرج کسر هستند.

$$\frac{4x-1}{x+2} = \frac{x+5}{2x} \Rightarrow 2x(4x-1) = (x+2)(x+5) \Rightarrow 8x^2 - 2x = x^2 + 5x + 2x + 10 \Rightarrow 7x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(7)(-10) = 81 + 280 = 361 = 19^2 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm 19}{14} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{5}{7}$$

هیچ یک از جواب‌های به دست آمده، ریشه مخرج نیستند، پس هر دو جواب قابل قبول است.

یادآوری: کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م):

مخرج مشترک بین دو یا چند کسر، همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است و برای محاسبه ک.م.م مخرج کسرها، کافی است در صورت امکان مخرج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک را به دست آوریم.

نکته: برای حل معادلات گویا، دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم و عبارت جبری به دست آمده را حل می‌کنیم. از بین جواب‌های به دست آمده، آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکند.

تمرین: (۱) معادله $\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x} = 1 - \frac{2}{x-2}$ را حل کنید.

(۲) اگر $x=1$ جواب معادله $\frac{x+2}{x-a} + \frac{2x}{x+a} = -1$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: (۱) ک.م.م مخرج کسرها برابر $x(x-2)$ است. دو طرف معادله را در $x(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

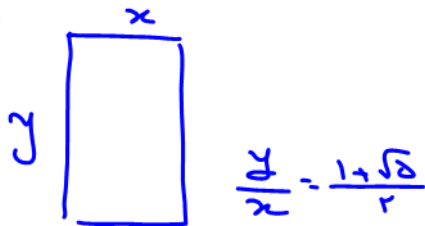
$$5(x-2) - 4 = x(x-2) - 2(x) \Rightarrow 5x - 10 - 4 = x^2 - 2x - 2x \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 56 = 25 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 7$$

چون $x=2$ مخرج کسر معادله را صفر می‌کند، غیر قابل قبول است و لذا معادله فقط یک ریشه حقیقی $x=7$ دارد.

(۲) با قراردادن عدد ۱ به جای x در معادله و حل معادله برحسب a ، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x+2}{x-a} + \frac{2x}{x+a} = -1 \xrightarrow{x=1} \frac{1+2}{1-a} + \frac{2(1)}{1+a} = -1$$



مستطیل طلایی است. اگر $y = 1$ باشد، آن گاه $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

عدد طلایی: عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را عدد طلایی می‌گوییم.

(ب) معادلات رادیکالی

تعریف: هر معادله‌ای را که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود داشته باشد، یک معادله رادیکالی می‌گوییم.

مثال: معادلات $x + \sqrt{x-1} = 4$ و $2x + \sqrt[3]{x+2} = 5$ ، معادلاتی رادیکالی هستند.

نکته: برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری به طرفین تساوی جابه‌جا کرد که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با توان‌رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادله اولیه صدق می‌کنند.

تمرین: معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

$$(1) \quad \sqrt{x-2}-3=0 \quad (2) \quad x+\sqrt{x+4}=2$$

پاسخ:

$$(1) \quad \sqrt{x-2}-3=0 \Rightarrow \sqrt{x-2}=3 \xrightarrow{\text{بفغان می‌رسانیم}} x-2=9 \Rightarrow x=9+2=11$$

با قراردادن $x=11$ در معادله اولیه ($\sqrt{x-2}-3=0$)، مشاهده می‌کنیم که تساوی عددی به وجود می‌آید:

$$\sqrt{11-2}-3=\sqrt{9}-3=3-3=0$$

$$(2) \quad x+\sqrt{x+4}=2 \Rightarrow 2-x=\sqrt{x+4} \xrightarrow{\text{بفغان می‌رسانیم}} (2-x)^2=x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=x+4$$

$$\Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

$$x+\sqrt{x+4}=2 \xrightarrow{x=0} 0+\sqrt{4}=2 \Rightarrow 2=2$$

$x=0$ در معادله اولیه صدق می‌کند:

پس $x=0$ جواب معادله می‌باشد.

$x=5$ در معادله اولیه صدق نمی‌کند، پس $x=5$ جواب معادله نمی‌باشد:

$$x+\sqrt{x+4}=2 \xrightarrow{x=5} 5+\sqrt{5+4}=2 \Rightarrow 5+3 \neq 2$$

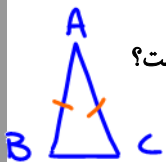
نکته: حتماً جواب‌هایی که در معادله رادیکالی به دست می‌آورید را در معادله اولیه قرار دهید و از آن‌جا جواب‌های صحیح را انتخاب کنید. ممکن است بعضی از جواب‌ها در معادله اولیه صدق نکنند.

تمرین: مثلث متساوی‌الساقین ABC با رأس‌های $A(\alpha, -1)$ ، $B(2, 1)$ و $C(1, -2)$ و قاعده BC مفروض است. α کدام است؟

پاسخ: مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$AB=AC \Rightarrow \sqrt{(2-\alpha)^2+(1+1)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-2+1)^2} \xrightarrow{\text{بفغان می‌رسانیم}} (2-\alpha)^2+4=(1-\alpha)^2+1$$

$$\Rightarrow 4-4\alpha+\alpha^2+4=1-2\alpha+\alpha^2+1 \Rightarrow -4\alpha+2\alpha=2-8 \Rightarrow -2\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=3$$



$$\frac{\cancel{a}(-\cancel{a})(1+a)}{\cancel{1-a}} \rightarrow \cancel{(1-a)}(1+a) \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{1-a}} + (1-a)\cancel{(1+a)} \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{1+a}} = -(1-a)(1+a)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{r}(1+a)+\mathfrak{r}(1-a)=-1+a^{\mathfrak{r}} \Rightarrow \mathfrak{r}+\mathfrak{r}a+\mathfrak{r}-\mathfrak{r}a=-1+a^{\mathfrak{r}} \Rightarrow a+\mathfrak{a}=-1+a^{\mathfrak{r}} \Rightarrow a^{\mathfrak{r}}-a-\mathfrak{a}=0.$$

$$\Rightarrow (\mathbf{a} - \mathbf{r})(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} - \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a} + \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{r} \\ \mathbf{a} = -\mathbf{r} \end{cases}$$

کاربرد معادلات گویا

فهرست سؤال از کاربرد معادلات گویا در کتاب درسی مطرح شده است. نحوه نوشتن معادله‌ها تقریباً یکسان است. به دقت به مثال حل شده توجه کنید.

تمرین: دو نقاش A و B با هم در ۶ ساعت ساختمانی را رنگ‌آمیزی می‌کنند. اگر نقاش A بخواهد به تنهایی این ساختمان را رنگ‌آمیزی کند، ۵ ساعت زودتر از نقاش B این کار را انجام می‌دهد. نقاش B به تنهایی در چند ساعت این ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کند؟

پاسخ: فرض کنیم نقاش B در x ساعت، این ساختمان را رنگ آمیزی می کند، پس در هر ساعت $\frac{1}{x}$ ساختمان را رنگ آمیزی می کند. چون نقاش A، ۵ ساعت زودتر از نقاش B این کار را انجام می دهد، پس نقاش A در $x - 5$ ساعت این ساختمان را رنگ آمیزی می کند و در نتیجه در یک ساعت، $\frac{1}{x - 5}$ ساختمان توسط نقاش A رنگ آمیزی می شود. از آن جایی که دو نفری در ۶ ساعت این ساختمان را رنگ آمیزی

$$\frac{1}{t_{\text{قبل}}} + \frac{1}{t_{\text{بعد}}} = \frac{1}{t_{\text{كل}}}$$

می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{1}{6}$ ساختمان رنگ‌آمیزی می‌شود، داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\Delta} - \frac{1}{\cancel{x}} \xrightarrow{\times \cancel{x} (x-\Delta)} \cancel{x} (x-\Delta) \times \frac{1}{\cancel{x}} \frac{(x-\Delta)}{\cancel{x-\Delta}} - \frac{1}{\cancel{x-\Delta}} = \cancel{x} (x-\Delta) \times \frac{1}{\cancel{x}} \Rightarrow \cancel{x} (x-\Delta) + \cancel{x} = \cancel{x} (x-\Delta)$$

$$\Rightarrow fX - 3_0 + fX = x^T - \Delta x \Rightarrow x^T - 17x + 3_0 = 0, \Delta = (-17)^T - f(1)(3_0) = 169$$

$$\xrightarrow{x>0} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17 + \sqrt{169}}{2} = \frac{17 + 13}{2} = 15$$

مستطیل طلائی:

مستطیلی را که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد، مستطیل طلایی می‌گوییم. می‌خواهیم نسبت طول به عرض را در مستطیل طلایی به دست آوریم. فرض کنیم طول مستطیل، x و عرض آن، y باشد. طبق فرض، داریم:

$$\frac{\text{مجموع طول وعرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right) (*) \longrightarrow 1 + \frac{1}{A} = A$$

$x = \text{طول}$
 y

فرض کنیم $A = \frac{X}{Y}$ باشد، در این صورت $\frac{Y}{X}$ ، عکس $\frac{X}{Y}$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} 1 + \frac{1}{A} = A \xrightarrow{\times A} A + 1 = A^r \Rightarrow A^r - A - 1 = 0.$$

$$\Delta = \mathbf{b}^T - \mathbf{f} \mathbf{a} c = 1 - \mathbf{f}(-1) = \Delta \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \frac{-\mathbf{b} + \sqrt{\Delta}}{2\mathbf{a}} = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{2(1)} = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \mathbf{A} = \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{\Delta}}{2\mathbf{a}} = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \leftarrow \text{من هنا}$$

$\rightarrow A = \frac{\text{ضول}}{\text{عرض}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots$
 عدد طلایی
 $\neq$ عدد = Golden Number

عدد $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ عددی منفی است، پس نمی‌تواند نسبت دو عدد مثبت باشد و در نتیجه غیر قابل قبول است. پس $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نسبت طول به عرض

پرسش‌های تشریحی

۱- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

ناستی است دهرز برابر ۱- نمی شود با

مجموعه جواب معادله $\sqrt{x+3} + 1 = 0$ برابر تهی است. درست $\sqrt{x+3} = -1$ (شهریور ۱۴۰۲)

۲- معادله زیر را حل کنید. $(x^2 - x - 2)(x - 2 + x^2 - 2x) = x(x - 1)$ (فرورداد ۹۶)

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - (1+x)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - (x^2 - 2x + x - 2)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - x + 2}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{-x + 4}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$-x + 4 = x(x-2)$$

$$-x + 4 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x + x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ یا } x = -2$$

با $x = 2$ ولی $x = 2$ این خارج دوتا از کسر هاست پس فقط $x = -2$ درسته!

۳- به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟ جواب هر معادله در آن معادله صدق می کند. (دی ۹۵)

$$\frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{27+k}{1-78-32}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{27+k}{-109}$$

$$-109 \cdot \frac{7}{8} = 27+k$$

$$-76.25 = 27+k$$

$$k = -103.25$$

۴- مجموع یک عدد صحیح با معکوسش برابر با -2 می باشد. تشکیل معادله و حل آن، مقدار این عدد را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

$$x + \frac{1}{x} = -2$$

$$x^2 + 1 = -2x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

نکته: $\begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq 2 & x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \leq -2 & x < 0 \end{cases}$

۵- یک خط متروی بین شهری، ۷۵ کیلومتر طول دارد. اگر در مسیر برگشت، به سرعت قطار ۱۰ کیلومتر در ساعت افزوده شود، آن گاه زمان بازگشت ۱۵ دقیقه کمتر می شود. طول زمان رفت و برگشت این قطار را محاسبه کنید. (مشابه فعالیت ۲ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

$$V = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$$

$$t_1 - t_2 = 15 \text{ دقیقه}$$

$$\frac{75}{V} - \frac{75}{V+10} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{75(V+10) - 75V}{V(V+10)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{750}{V(V+10)} = \frac{1}{4}$$

$$3000 = V^2 + 10V$$

$$V^2 + 10V - 3000 = 0$$

$$V = 50 \text{ یا } V = -60$$

۶- دو نفر با هم می توانند در ۴ ساعت، ساختمانی را رنگ آمیزی کنند. اگر سرعت کار یکی از آن ها ۴ برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام بدهند؟ (مشابه مثال صفحه ۲۱ کتاب درسی)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4 + 1}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$5 = x$$

۷- علی و رضا ویرایش یک مجله ادبی را انجام می دهند. اگر رضا به تنهایی این کار را انجام دهد، ۶ ساعت و اگر دو نفر با هم انجام دهند، ۴ ساعت زمان نیاز است. علی به تنهایی در چند ساعت ویرایش مجله را انجام می دهد؟ (مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۸- علی و رضا ویرایش یک مجله ادبی را انجام می دهند. اگر رضا به تنهایی این کار را انجام دهد، ۶ ساعت و اگر دو نفر با هم انجام دهند، ۴ ساعت زمان نیاز است. علی به تنهایی در چند ساعت ویرایش مجله را انجام می دهد؟

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$x = 12$$

جمع مضارب صفر $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$

۸- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(فرداد ۱۴۰۲) $\sqrt{2-x} = 1-2x \rightarrow 2-x = 1+4x^2-4x \rightarrow 4x^2-3x-1=0$ $2x = 1-\sqrt{2-x}$ (آ)

(شوربور ۱۴۰۲) $4x^2 = 2x-1 \rightarrow 4x^2-2x+1=0$ $2x = \sqrt{4x-1}$ (ب)

(فرداد ۱۴۰۲) $2-x = x^2 \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x=1$ $\sqrt{2-x} = x$ (پ)

درس جدید: یکی از روشهای حل معادله، تبدیل معادله به فرم $ax^2+bx+c=0$ است. در این روش، هر دو طرف معادله را به یک سمت می‌نویسیم و سعی می‌کنیم آن را به فرم استاندارد درآوریم. در این روش، باید دقت کنیم که هر دو طرف معادله را به یک سمت بنویسیم و سعی کنیم آن را به فرم استاندارد درآوریم.

۹- بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

(ب) $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{3-x} = 0$ (آ) $\sqrt{x+1} = -1$ $\sqrt{x+1} = 0$

(ت) $\sqrt{x-4} - \sqrt{3-x} = 4$ (پ) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 7 = 0$

(ث) $\sqrt{x-4} - \sqrt{3-x} = 4$ $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = -7$

ناممکن است که هرگز ۷- منی نشود!

ناممکن (مثبت یا صفر): $\sqrt{x+1} = -1$ یا $\sqrt{x+1} = 0$

۱۰- با تشکیل یک معادله، عدد صحیحی پیدا کنید که مجموع آن با جذرش برابر ۲۰ باشد.

$x + \sqrt{x} = 20 \rightarrow \sqrt{x} = 20-x \rightarrow x = 400-40x+x^2$

$x^2-41x+400=0 \rightarrow (x-16)(x-25)=0$ $x=16$ $x=25$

۱۱- اگر $x=2$ یک جواب معادله $\frac{2x^2}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد: جواب هر معادله در آن معادله صدق می‌کند.

(فرداد ۹۵) $\frac{2(2)^2}{a+2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$

$\frac{4}{a+2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$ $\frac{4}{a+2} = \frac{a-a+2}{2} = 1$

$\frac{4}{a+2} = 1 \rightarrow a+2=4 \rightarrow a=2$

(ب) به ازای $a=2$ ریشه‌های این معادله را در صورت وجود به دست آورید.

$\frac{2x^2}{x+2} = \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x}$

$\frac{2x^2}{x+2} = \frac{2-2+x}{x} = \frac{x}{x} = 1$ $2x^2 = x+2 \rightarrow 2x^2-x-2=0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

۱۲- معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

نکته: آن جمع چند ناممکن (مثبت یا صفر) صفر شود نمی‌تواند صفر شود.

$\sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x=2$ $\sqrt{1-x} = 0 \rightarrow x=1$

معادله جواب ندارد

عددی نیست که $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$ را برآورده کند

که ۲ طرف را صفر کند

لذا ضمناً عبارت مثبت

۵۸

Homework (1)

۱ نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
(۳) $\frac{5}{6} + \frac{5}{2}\sqrt{5}$ (۴) $\frac{5}{4}(1 + \sqrt{5})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ از تقسیم اندازه قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
(۳) $\frac{2}{1 + \sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{3 + \sqrt{5}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ معادله $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴ معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲
(۳) ۱ (۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

پاسخ (1) Homework

گزینه ۴

۱

عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.



$$\frac{\Delta x + y}{4x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \Delta x + y = 2x(1 + \sqrt{5})$$

پس طول مستطیل طلایی را می‌توان $2x(1 + \sqrt{5})$ در نظر گرفت:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(4x)(2x(1 + \sqrt{5}))}{(4x)(\Delta x)} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{\Delta x} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۳

۲

به $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی می‌گوییم. در مستطیل به طول و عرض a و b ، قطر برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{4}{2 + 2\sqrt{5}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

گزینه ۱

۳

در سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{2\sqrt{2-x}}{-x-2} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

با طرفین وسطین داریم:

$$10(2-x) = (2-x)(-x-2)$$

$2-x$ را خط می‌زنیم و جواب $x=2$ حاصل می‌شود، اما چون ریشه مخرج معادله اولیه است آن را نمی‌پذیریم.

$$-x-2=10 \Rightarrow x=-12$$

هیچ جواب مثبتی در کار نیست.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۴

۴

دامنه معادله فقط $x=2$ است، بنابراین جواب معادله یا $x=2$ است و یا اینکه جواب حقیقی ندارد. $x=2$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{4-3} = \sqrt{2+0} - \sqrt{2-2} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}$$

پس $x=2$ جواب معادله نیست و در نتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۵

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9}$$

$$\xrightarrow{2y=x^2} \sqrt{y^2-9} = 0 \xrightarrow{y \geq 3} y=3 \Rightarrow x=\sqrt{6}$$

نقطه تلاقی $A(\sqrt{6}, 3)$ است:

$$|AO| = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Homework (2)

۱. ژیلّا به تنهایی کاری را در دو ساعت انجام می‌دهد. اگر مینا به او کمک کند این کار را در یک ساعت و بیست دقیقه انجام می‌دهد. مینا به تنهایی این کار را در چند دقیقه انجام خواهد داد؟

معادلات داده شده را حل کنید.

$$2x - \sqrt{x} = 6$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{x^3+1} + \frac{2}{x^2-x+1}$$

درستی و نادرستی عبارات داده شده را مشخص نمایید.

۴. معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد به صورت $x^2 + Sx - P = 0$ است.

۵. مستطیل طلایی مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر نسبت طول به عرض آن است.

۶. معادله $\sqrt{x+2} = 4-x$ را حل کنید.

۷. معادله زیر را حل کنید.

$$x + \sqrt{2x+10} = 7$$

۸. معادله $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$ را حل کنید.

۹. حاصل جمع ریشه‌های معادله $\sqrt{x^2+4x+3} = x^2+4x+3$ کدام است؟

(۱) -۸ (۲) -۲

(۳) -۶ (۴) -۴

۱۰. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4} - 1$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۴

(۳) ۸ (۴) ۳

۱۱ اگر $x = a$ ریشه معادله $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$ باشد، حاصل $\frac{a+1}{2a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{33}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) ۱

۱۲ تعداد ریشه‌های معادله $\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = \frac{-3}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) بدون ریشه

۱۳ بهروز یک مجله را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو باهم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- (۱) ۳۲
(۲) ۳۳
(۳) ۳۵
(۴) ۳۶

۱۴ اگر $x = \alpha$ ریشه معادله $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = 1$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\sqrt{x-x^3} - 5\alpha = \sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) صفر
(۳) -۱
(۴) ۲

۱۵ معادله $\sqrt{x^3-x} + \sqrt{x+2} = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) بدون ریشه حقیقی

۱۶ دو برادر تکلیف درس ریاضی را باهم در ۲ ساعت انجام می‌دهند. اگر برادر بزرگ‌تر ۳ برابر برادر کوچک‌تر تکلیف ریاضی را انجام دهد، برادر بزرگ‌تر به‌تنهایی این تکلیف درس ریاضی را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) ۸
(۳) $\frac{16}{3}$
(۴) $\frac{8}{3}$

۱۷ اگر یکی از جواب‌های معادله $\frac{12-x}{x^2+x} = \frac{x}{x+1} + \frac{A}{x}$ برابر ۱ باشد، جواب دیگر کدام است؟

- (۱) ۷
(۲) -۷
(۳) -۱
(۴) ریشه دیگری ندارد.

۱۸ معادله $\sqrt{3-x} + \sqrt{16+x} + \sqrt{x-3} = 4$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) بدون جواب

۱۹ اگر محیط یک مستطیل برابر ۱۶ واحد و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول مستطیل کدام است؟

- (۱) $2(\sqrt{5} + 1)$ (۲) $4(\sqrt{5} + 1)$
(۳) $4(\sqrt{5} - 1)$ (۴) $2(\sqrt{5} - 1)$

۲۰ ریشه‌های معادله $2 - x + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 0$ چگونه هستند؟

- (۱) فقط یک ریشه منفی دارد. (۲) یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.
(۳) فقط یک ریشه مثبت دارد. (۴) معادله ریشه حقیقی ندارد.

۲۱ اگر $x = a$ ریشه معادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$ باشد، حاصل $\frac{2a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{31}{15}$ (۲) $\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{33}{16}$

۲۲ تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+3} + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) بدون ریشه

۲۳ دو کارگر کاری را در ۴ روز تمام می‌کنند، اما اگر کارگر اول به تنهایی آن کار را انجام دهد، ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم (وقتی به تنهایی کار را انجام دهد) تمام می‌کند، کارگر اول در چند روز کار را تمام می‌کند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۵
(۳) ۱۰ (۴) ۵

۲۴ اگر $x = -1$ ریشه معادله $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+A}{x+4} = \frac{x-A}{x-3}$ باشد، ریشه دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۲۵ معادله $\frac{x+4}{x+5} + \frac{3x+5}{x^2+5x} = \frac{x+1}{x}$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) بدون ریشه (۴) ۳

پاسخ (2) Homework

۱

مینا در x دقیقه : $\frac{1}{x} + \frac{1}{120} = \frac{1}{80}$
ژیلا در ۱۲۰ دقیقه

$$\xrightarrow{\times 240x} 240 + 2x = 3x$$

$$\Rightarrow x = 240 \text{ min}$$

۲

$$\sqrt{x} = 2x - 6 \xrightarrow{\text{توان } 2} x = 4x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 0 \Rightarrow \Delta = 24^2 - 4(4)(36)$$

$$= 576 - 576 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{24 \pm 0}{8}$$

$$= \left\{ \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \right.$$

در معادله صدق نمی‌کند) غ.ق.ق

۳

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{2}{x^2-x+1}$$

$$\xrightarrow{\times (x+1)(x^2-x+1)} x^2 - x + 1 = 1 - 2x + 2(x+1)$$

$$x^2 - x + 1 = 1 - 2x + 2x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

۴

نادرست. جواب درست $x^2 - 5x + 6 = 0$ می‌باشد.

۵

درست

۶

$$\sqrt{x+2}=4-x \quad (1)$$

$$x+2=(4-x)^2 \Rightarrow x+2=x^2-8x+16$$

$$\Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=7 \end{cases}$$

$x=7$ جواب معادله نیست زیرا در معادله صادق نیست. (غ.ق.ق $= -3 = \sqrt{9}$)

۷

$$x+\sqrt{2x+10}=7 \Rightarrow \sqrt{2x+10}=7-x$$

$$2x+10=49-14x+x^2$$

$$x^2-16x+39=0 \Rightarrow (x-3)(x-13)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=13 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

۸

$$(x-3)(x+4)\left(\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}\right)$$

$$2x(x+4)+(x+1)(x-3)=(x+4)(x-1)$$

$$\Rightarrow 2x^2+8x+x^2-2x-3=x^2+3x-4$$

$$2x^2+3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ ق.ق} \\ x=-\frac{1}{2} \text{ ق.ق} \end{cases}$$

گزینه ۴

۹

$$x^2+4x+3=t : t=\sqrt{t+2}$$

$$t^2=t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 : -1 \neq \sqrt{-1+2} \text{ غ.ق.ق} \\ t=2 : 2 = \sqrt{2+2} \text{ ق.ق} \end{cases}$$

$$t=2 : x^2+4x+3=2 \Rightarrow x^2+4x+1=0$$

$$\text{ریشه‌ها} : \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{3} \\ x_2 = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -4$$

$$(S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -4 \text{ یا می‌توان گفت: } -4)$$

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x+1 = 3x+4+1-2\sqrt{3x+4}$$

$$2\sqrt{3x+4} = x+4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(3x+4) = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

$$\text{حاصل ضرب ریشه ها} = 0 \times 4 = 0$$

$$\sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{x+3}$$

به توان ۲ برسانید:

$$3x+1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x+3 \Rightarrow 8\sqrt{x+3} = 18 - 2x$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x+3} = 9 - x$$

به توان ۲ برسانید:

$$16(x+3) = 81 - 18x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x - 16x + 81 - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق.ق. } \checkmark \\ x=33 \text{ غ.ق.ق. } \times \end{cases}$$

$$a = 1 : \frac{a+1}{2a} = \frac{1+1}{2(1)} = 1$$

ک.م.م.مخرج ها: $2x(2-x)$

$$2x(2-x) \times \left(\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = \frac{-3}{2} \right) \Rightarrow 2x^2 + 4(2-x) = -3x(2-x)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8 - 4x = -6x + 3x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \text{ ق.ق.} \\ x=-2 \text{ ق.ق.} \end{cases} \Rightarrow 2 = \text{تعداد ریشه ها}$$

اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند x ساعت فرض شود، آنگاه زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کند $x + 9$ ساعت خواهد بود.

بهروز در یک ساعت $\frac{1}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد و فرهاد در یک ساعت $\frac{1}{x+9}$ کل کار و هر دو باهم در یک ساعت $\frac{1}{36}$ کل کار را انجام می‌دهند.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} &= \frac{1}{36} \xrightarrow{\times 36x(x+9)} 36(x+9) + 36x = x(x+9) \\ \Rightarrow 36x + 180 + 36x &= x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0 \\ \Rightarrow (x - 36)(x + 5) &= 0 \xrightarrow{x > 0} x = 36\end{aligned}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 1 - \sqrt{x+1}$$

به توان ۲ برسانید:

$$x+2 = 1 - 2\sqrt{x+1} + x+1 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x+1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\sqrt{\sqrt{x-x^3} - 5\alpha} = \sqrt{5} \xrightarrow{\alpha=-1} \sqrt{\sqrt{x-x^3} + 5} = \sqrt{5}$$

به توان ۲ برسانید:

$$\sqrt{x-x^3} + 5 = 5 \Rightarrow \sqrt{x-x^3} = 0$$

$$\Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$x_1 x_2 x_3 = (0)(1)(-1) = 0$$

توجه:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ جواب مشترک}$$

$$\sqrt{x^3 - x} + \sqrt{x + 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

ریشه مشترک وجود ندارد، پس معادله بدون ریشه حقیقی است.

t_1 : زمان انجام تکلیف برادر بزرگتر

t_2 : زمان انجام تکلیف برادر کوچکتر

چون سرعت انجام تکلیف برادر بزرگتر ۳ برابر سرعت انجام تکلیف برادر کوچکتر می‌باشد، پس:

$$t_1 = \frac{1}{3}t_2 \Rightarrow t_2 = 3t_1$$

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{t_1} + \frac{1}{3t_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3+1}{3t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3t_1 = 8 \Rightarrow t_1 = \frac{8}{3} \text{ ساعت}$$

صدق ریشه در معادله:

$$x = 1: \frac{12-1}{1+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{A}{1} \Rightarrow \frac{11}{2} = \frac{1}{2} + A \Rightarrow A = 5$$

طرفین معادله را در $x(x+1)$ ضرب نمایید:

$$\frac{12-x}{x^2+x} = \frac{x}{x+1} + \frac{5}{x} \Rightarrow 12-x = x^2 + 5(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad \checkmark \text{ ق.ق} \\ x = -7 \quad \checkmark \text{ ق.ق} \end{cases}$$

گزینه ۳

۱۸

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3-x} : 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} : x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D = \{3\}$$

امتحان دامنه:

$$x = 3 \Rightarrow 0 + \sqrt{16+0} = 4 \Rightarrow 4 = 4$$

معادله فقط یک جواب دارد.

گزینه ۳

۱۹

اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم:
رابطه (۱):

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$$

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است:

$$2(L+W) = 16 \Rightarrow L+W = 8 \Rightarrow W = 8-L$$

بنا به رابطه (۱):

$$\frac{L}{8-L} = \frac{8}{L} \Rightarrow L^2 = 64 - 8L \Rightarrow L^2 + 8L - 64 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = 4(\sqrt{5}-1) \\ L = -4(\sqrt{5}+1) < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

گزینه ۳

۲۰

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2$$

به توان ۲ برسانید:

$$2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (در معادله اولیه صدق نمی‌کند)} \\ x = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

گزینه ۳

۲۱

$$\sqrt{2x-5} = \sqrt{x+1} - 1$$

به توان ۲ برسانید:

$$2x-5 = x+1+1-2\sqrt{x+1} \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 7-x$$

به توان ۲ برسانید:

$$4(x+1) = 49 - 14x + x^2 \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

بررسی جواب‌ها:

$$(x-15)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=15 : \sqrt{15+1} - \sqrt{30-5} = 1 \Rightarrow -1 \neq 1 \\ x=3 : \sqrt{3+1} - \sqrt{6-5} = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

پس $a=3$ می‌باشد:

$$\frac{2a+1}{a} = \frac{2(3)+1}{3} = \frac{7}{3}$$

گزینه ۴

۲۲

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+3} = -2$$

سمت چپ معادله همواره مثبت و سمت راست آن همواره منفی است، پس بدون ریشه حقیقی می‌باشد.

گزینه ۴

۲۳

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{4}$$

$$t_2 = t_1 + 15 : \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1 + 15} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t_1(t_1 + 15) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1 + 15} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4(t_1 + 15) + 4t_1 = t_1(t_1 + 15) \Rightarrow 4t_1 + 60 + 4t_1 = t_1^2 + 15t_1 \Rightarrow t_1^2 + 7t_1 - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (t_1 + 12)(t_1 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -12 \text{ ق ق } \\ t_1 = 5 \text{ ق ق } \end{cases}$$

صدق ریشه در معادله:

$$x = -1: \frac{-2}{-1-3} + \frac{-1+A}{-1+4} = \frac{-1-A}{-1-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{-1+A}{3} = \frac{1+A}{4} \Rightarrow A = 1$$

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \Rightarrow 2x(x+4) + (x+1)(x-3) = (x-1)(x+4)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 3 = 3x - 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

ک.م.م.مخرجها: $x(x+5)$

طرفین معادله را در ک.م.م.مخرجها ضرب کنید:

$$x(x+4) + (3x+5) = (x+1)(x+5) \Rightarrow x^2 + 4x + 3x + 5 = x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow 7x + 5 = 6x + 5 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{چون ریشه مخرج است})$$

(فصل ۱ درس ۱ تجربی و درس ۵ حسابان)

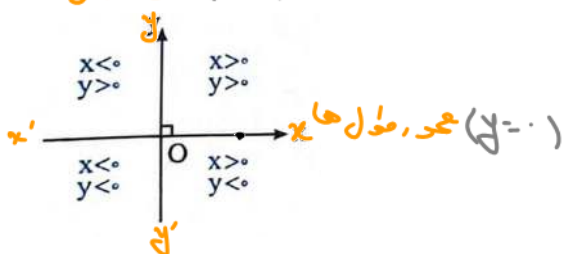
(صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی)

BOX 5: بخش اول هندسه تحلیلی (معادله خط)

با معادله خط، رسم خط، نوشتن معادله خط، دو خط متقاطع، دو خط موازی و دو خط عمود آشنایی دارید. در این بسته، مطالب را یادآوری می‌کنیم و مسائلی را حل می‌کنیم.

الف) معادله خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور x ها) و $y'Oy$ (محور y ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطه A از صفحه، یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در نمودار مقابل مشخص شده است:



نکته: ۱) اگر نقطه‌ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(x, 0)$ می‌باشد.

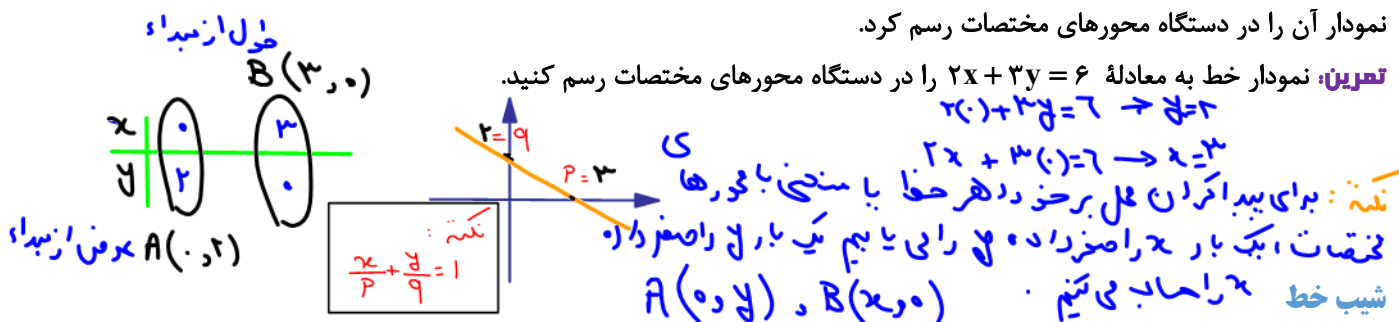
۲) اگر نقطه‌ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(0, y)$ می‌باشد.

معادله خط: معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

ب) رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادله یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محوره‌ای مختصات رسم کرد.



شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر اگر

$$A(x_A, y_A) \text{ و } B(x_B, y_B) \text{ دو نقطه روی یک خط باشند و } x_A \neq x_B \text{، آن‌گاه: } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال: شیب خط گذرنده از نقاط $A(1, -4)$ و $B(3, 2)$ برابر است با:

شیب خط
موازی

آر خطی محور x ها را در $B(p, 0)$ و محور y ها را در $A(0, q)$ قطع کند، معادله آن $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ است. مثال: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \rightarrow 4x + 3y = 12$

نکته

$$\text{ضریب } x = -\frac{a}{b} = -\frac{\text{ضریب } y}{\text{ضریب } x}$$

(۱) اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ (یا $ax + by = c$) باشد و $b \neq 0$ ، آن گاه:

$$by = -ax - c \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

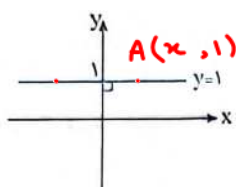
مثال: شیب خط به معادله $2x + 3y = 1$ برابر $-\frac{2}{3}$ است. $-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{2}{3}$

(۲) اگر معادله خط به صورت $y = mx + h$ باشد، آن گاه شیب خط برابر m (ضریب x) است.

مثال: شیب خط به معادله $y = -\frac{1}{4}x + 3$ برابر $m = -\frac{1}{4}$ است. یا شیب خط $y = \frac{1}{4}x - \sqrt{3}$ برابر $m = \frac{1}{4}$ است.

نکته:

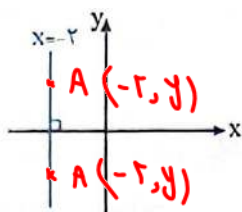
(۱) اگر خط L موازی محور x ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $y = b$ است. به عنوان مثال، خط $y = 1$ موازی محور x ها است و شیب آن برابر صفر است.



معادله محور x ها به صورت $y = 0$ است.

توانم، عمودی

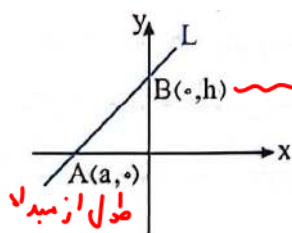
(۲) اگر خط L موازی محور y ها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی شود و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $x = a$ است. به عنوان مثال، خط $x = -2$ موازی محور y ها است و این خط شیب ندارد.



معادله محور y ها به صورت $x = 0$ است.

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست

با توجه به شکل مقابل، خط L محور x را در نقطه $A(a, 0)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می گوئیم. هم چنین خط L محور y را در نقطه $B(0, h)$ قطع کرده است. h را عرض از مبدأ خط L می گوئیم.



معادله خط: $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$

طبق نکته بالای صفحه

تعریف: $m = \infty$ (عمودی)

نکته: معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ می باشد.

حالا می خواهیم معادله خط را بنویسیم. در دو حالت می توانیم معادله خط را بنویسیم و باید در تمام مسائل نوشتن معادله خط، شرایط یکی از این دو حالت را در نظر بگیریم.

(ب) نوشتن معادله خط

حالت اول: اگر شیب خط و نقطه ای از خط را داشته باشیم، می توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطه $A(x_1, y_1)$ بگذرد، آن گاه معادله خط از رابطه مقابل به دست می آید:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = 2(x - (-1)) \rightarrow y = 2x + 4$$

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1, 3)$ بگذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.

حالت دوم: اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد، آن گاه شیب خط از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادله

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_2 \neq x_1$$

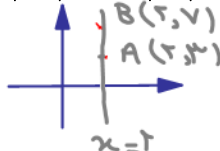
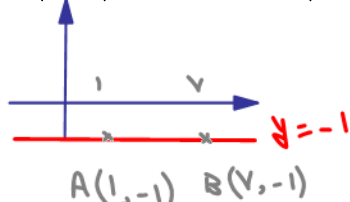
خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطه مقابل استفاده کرد:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \rightarrow y - (-5) = \frac{7 - (-5)}{-2 - 2}(x - (-2))$$

$$y + 5 = -3(x + 2) \rightarrow y = -3x + 1$$

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(2, -5)$ و $(-2, 7)$ بگذرد.

نکته: اگر $x_1 = x_2$ ، آن گاه معادله خط گذرنده از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت $x = x_1$ است و اگر $y_1 = y_2$ ، آن گاه معادله



خط به صورت $y = y_1$ می‌باشد.

(ت) وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازی‌اند و یا متقاطع.

حالت اول: دو خط موازی

اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند. **انطباق خاص از موازی بودن!**

نکته: اگر دو خط با هم موازی باشند، آن گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و برعکس.

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, -4)$ بگذرد و موازی خط $5x - 3y = 1$ باشد.

$$y - (-4) = \frac{5}{3}(x - 3)$$

$$y + 4 = \frac{5}{3}(x - 3)$$

حالت دوم: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، دو خط متقاطع‌اند. در واقع اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادله دو خط در صفحه باشند، آن گاه با حل دستگاه دو معادله دو

محل تلاقی دو خط به دست می‌آید. $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ محل تلاقیات خط

دو خط را قطع می‌کنیم. **دستگاه حل می‌کنیم.**

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 5x = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow A(-1, -2)$$

یکی از حالت‌های متقاطع بودن دو خط، عمود بودن آن است. با توجه به ویژگی مهم آن، سؤالات خوبی مطرح می‌شود.

نکته: اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm' = -1$ ، آن گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه هم می‌باشند.

با قرینه عکس

تعریف: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 4)$ بگذرد و بر خط به معادله $y = -2x + 3$ عمود باشد. **پاراه دیبر:**

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow 2y - 8 = x + 1 \rightarrow 2y - x - 9 = 0$$

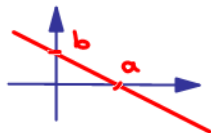
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط عبور می‌کند.

۲- اگر خط L ، محور x ها را در نقطه با طول a قطع کند، آن گاه a ، L را از خط L نامیده می‌شود و اگر خط L ، محور y ها را در نقطه با عرض b قطع کند، آن گاه b ، L را از خط L نامیده می‌شود.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$b = -\frac{b}{a}(0) + b \rightarrow b = b$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

۳- معادله خط گذرنده از نقطه $(0, 7)$ و شیب -2 برابر $y = -2x + 7$ است.

۴- دو خط موازی دارای شیب h برابر هستند.

• درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۵- شیب خط $11 = 2x + 5y$ برابر $-\frac{2}{5}$ است.

۶- شیب هر خط موازی با محور x ها برابر یک است.

۷- دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ بر هم عمود هستند.

۸- نمودار هر یک از خطهای زیر را رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۲ کتاب درسی)

پ) $3x + 4y = 12$

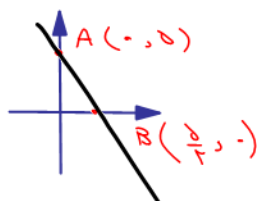
ب) $2x - y = 1$

آ) $y = -2x + 5$

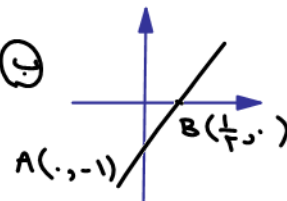
ث) $y = 4$

ت) $x = -1$

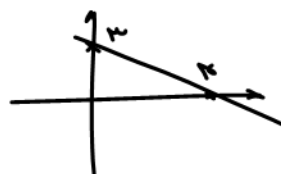
۱)



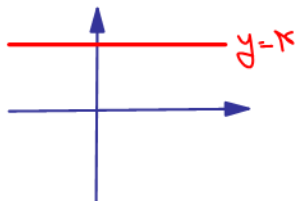
۲)



۳)



۴)



۹- در هر یک از قسمت‌های زیر، معادله خط را بنویسید.

آ) خط از نقطه $(3, 0)$ بگذرد و با خط $5x + 3y = 2$ موازی باشد.

ب) خط از نقطه $(4, 2)$ بگذرد و عمود بر خط به معادله $3x + 2y = 4$ باشد.

۱) $m = -\frac{5}{3}$

$$y = -\frac{5}{3}x + 5$$

$$y = \frac{5}{3}x + h \rightarrow A(3, 0) \in y = -\frac{5}{3}x + h \rightarrow 0 = -5 + h \rightarrow h = 5$$

۲) $m = -\frac{3}{2}$

$$y = -\frac{3}{2}x + h$$

$$y = \frac{3}{2}x + h \rightarrow A(4, 2) \in y = \frac{3}{2}x + h \rightarrow 2 = \frac{3}{2}(4) + h \rightarrow h = 2 - 6 = -4$$

۱۰- معادله خط گذرنده از نقطه $(3, 2)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-1, 6)$ را بنویسید.

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{شیب} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{-1 - 2} = -2$$

ادامه حل ۱۰ : با شیب $\frac{1}{2}$ و نقطه $(3, 2)$ معادله خط :

$$y = mx + h = \frac{1}{2}x + h$$

$$2 = \frac{1}{2}(3) + h \rightarrow h = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

ضرب در ۲ $\rightarrow \boxed{2y = x + 1}$

۱۱- معادله خط گذرنده از نقطه $(3, -2)$ و نقطه تلاقی دو خط به معادلات $4x - y = 1$ و $x + 2y = 7$ را بنویسید.

دو خط را قطع می دهیم

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 9x = 9 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow 4x - y = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow A(1, 3)$$

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 3 = \frac{-5}{2} (x - 1) \quad \text{جواب}$$

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۴ کتاب درسی)

۱۲- دو خط به معادلات $3x + (2m+1)y = 4$ و $mx + 7y = 11$ داده شده است.

(ا) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند. شیبها برابر

(ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند. شیبها قریب و عکس

$$\begin{cases} ax + by = c \\ 3x + (2m+1)y = 4 \\ mx + 7y = 11 \end{cases}$$

$$m_1 = -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = \frac{-3}{2m+1}$$

$$m_2 = -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = \frac{-m}{7}$$

$$\frac{-3}{2m+1} = \frac{-m}{7} \rightarrow 21 = m(2m+1) \rightarrow 21 = 2m^2 + m \rightarrow 2m^2 + m - 21 = 0 \xrightarrow{\text{حل درجه ۲}} m = 3, -\frac{7}{2}$$

جواب ۱ : $\boxed{m = 3, -\frac{7}{2}}$

۱۳- مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط به معادلات $2x + (-m+4)y = 3$ و $(5+3m)x + (m^2+4)y = 7$ با هم موازی باشند.

شیب ها برابر

$$\frac{-2}{-m+4} = \frac{-(5+3m)}{m^2+4}$$

$$\frac{-(5+3m)}{m^2+4} = \frac{2}{-m+4} \rightarrow (5+3m)(-m+4) = 2(m^2+4) \rightarrow 5m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$a+c=b \quad \text{آرد} \quad a+c=b \quad \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = \frac{-c}{a} = \frac{12}{5} \end{cases}$$

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۴ کتاب درسی)

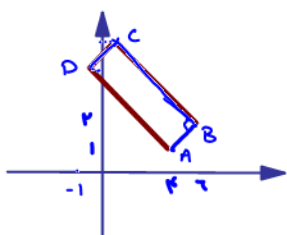
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

۱۴- مربع ABCD که A(4, 1) و B(6, 2) دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

(ا) شیب ضلع AB را بیابید و معادله آن را بنویسید. نقطه هم (ه)

(ب) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

(پ) اگر D(-1, 1) یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.



(۱) ضلع AB : $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$

(۲) ضلع BC : $y - 2 = -2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14$

(۳) ضلع DC : $y - 11 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

می بینیم نقطه C نقطه برخورد ۲ ضلع BC و DC هست :

ضلع DC با AB موازی است $m_{AB} = m_{DC} = \frac{1}{2}$

شیب این ها $m_{AB} = m_{DC} = \frac{1}{2}$

مادی است

$$\begin{cases} y = -2x + 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 2x - 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -y = 2x - 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 2x - 14 \\ 0 = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} - 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 2x - 14 \\ 0 = \frac{1}{2}x - \frac{17}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 2x - 14 \\ x = 17 \end{cases} \rightarrow y = 12 \rightarrow C(17, 12)$$

۱۵- مقدار a را طوری به دست آورید که نقاط $(3, 1)$ ، $(5, -3)$ و $(a, 2a-1)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند.

نقطه روی یک خط هستند برای استقامت باشند

کافی است داشتن $A(3, 1)$ ، $B(5, -3)$ معادله خط عبوری از A و B را بنویسیم و سپس نقطه $C(a, 2a-1)$ را در آن بگذاریم :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \rightarrow y - 1 = \frac{-3 - 1}{5 - 3} (x - 3) \rightarrow y - 1 = -2(x - 3) \rightarrow y = -2x + 7$$

$$\begin{cases} 2a - 1 = -2a + 7 \\ 4a = 8 \\ a = 2 \end{cases}$$

باید ابتدا ۲ خط معلوم را قطع دهیم و نقطه تقاطع را در خط مستقیم دار (m دار) بگذاریم:

۱۶- مقدار m را طوری به دست آورید که سه خط به معادله‌های $x+3y=-1$ ، $3x-2y=8$ و $(m+1)x+my=7$ از یک نقطه

بگذرند.

$$\begin{cases} x+3y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -3x-9y=3 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \xrightarrow{-11y=11} y=-1 \xrightarrow{x+3y=-1} x=2 \rightarrow A(2, -1)$$

نقطه برخورد ۲ خط از خط‌ها

این نقطه A باید در خط بعدی صدق کند:

$$(m+1)2 + (-1)m = 7$$

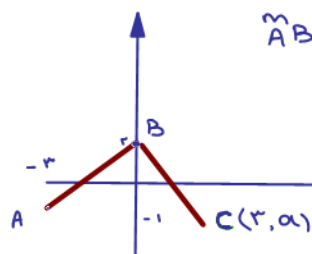
$$2m + 2 - m = 7 \rightarrow m = 5$$

۱۷- مربع ABCD که $A(-3, -1)$ و $B(0, 2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

$$m_{AB} = \frac{2 - (-1)}{0 - (-3)} = \frac{3}{3} = 1 \quad y+1 = 1(x+3) \quad \boxed{y = x+2}$$

(آ) معادله ضلع AB را بنویسید.

(ب) اگر $C(3, a)$ و $D(0, 2a-2)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های C و D را بیابید.



ضلع BC بر AB عمود است. آن‌ها عکس دگرینه $m_{BC} = -1$ است. $m_{AB} = 1$

معادله ضلع BC را بنویسیم:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B)$$

$$y - 2 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x + 2 \quad C(3, a) \in y = -x + 2$$

$$a = -3 + 2 \rightarrow a = -1$$

$$D(0, 2a-2) \xrightarrow{a=-1} D(0, -4)$$

$$\boxed{C(3, -1)}$$

Homework

۱ نقاط $A(2, 0)$ و $C(0, -1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

(۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

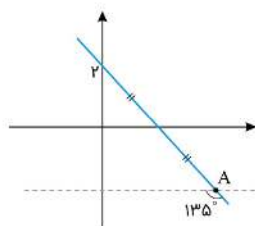
(۱) $(0, \frac{3}{2})$

(۴) $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

(۳) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



(۱) $2\sqrt{5}$

(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ نقطه $(-6, 3)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x - 3y = 4$ و $x + 4y = -3$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر با اضلاع کدام است؟

(۲) $\frac{19}{\sqrt{10}}$

(۱) $\frac{19}{2\sqrt{10}}$

(۴) $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}$

(۳) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ نقاط $A(-1, 4)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1-x, y+3)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

(۲) ۱۴

(۱) ۱۳

(۴) ۱۶

(۳) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ نقاط $A(x, y)$, $B(-1-x, y-3)$, $C(0, -3)$ و $D(-4, 0)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۵/۵
(۳) ۱۵
(۴) ۱۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ نقطه $(4/5, 2)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{17}}{4}$
(۳) $2\sqrt{17}$
(۴) $\sqrt{17}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(1, 2)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) ۲/۵
(۲) ۳/۵
(۳) $\sqrt{46}$
(۴) $2\sqrt{34}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ نقاط $A(0, 1)$ و $B(4, -2)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم، کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۹ نمودارهای دو تابع $y = |x + 2| + |x - 1|$ و $3y + x = 17$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$
(۲) $4\sqrt{5}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) $4\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ نقاط B ، C و $M(3, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A ، کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) -۲
(۳) -۵
(۴) -۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵
(۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ فاصله نقطه A روی خط $x + y = a$ از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 4)$ به ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۳ شیب نیم خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می سازیم، که نقطه B روی نیم خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۸
(۳) $6\sqrt{10}$ (۴) $3\sqrt{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ ، $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟

- (۱) $4/4$ (۲) ۳
(۳) $2/5$ (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس های $A(1, 9)$ ، $B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{10}$
(۳) $2\sqrt{5}$ (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ مثلثی با رأس های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۷ فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۸ نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با ارتفاع AH را روی خط $3x - y = 5$ می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (با تغییر)

- (۱) $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$
(۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹ سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ نمودارهای دو تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ و $y = x + 7$ ، در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

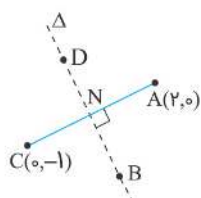
- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) 12
(۳) 13 (۴) $10\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{x}x + 2$ ، کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 9
(۳) 10 (۴) 12

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹



معادله عمودمنصف پاره خط AC را می نویسیم.

$$N = \frac{A+C}{2} = (1, -\frac{1}{2})$$

$$m_{AC} = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta : y + \frac{1}{2} = -2(x-1)$$

$$\Rightarrow \Delta : y = \frac{3}{2} - 2x$$

رئوس B و D از مربع موردنظر روی خط Δ قرار دارد. بنابراین B را به صورت $B(x, \frac{3}{2} - 2x)$ در نظر می گیریم.

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2} - 2x}{x-2} \times \frac{\frac{5}{2} - 2x}{x-0} = -1 \Rightarrow (2x - \frac{3}{2})(2x - \frac{5}{2}) = 2x - x^2$$

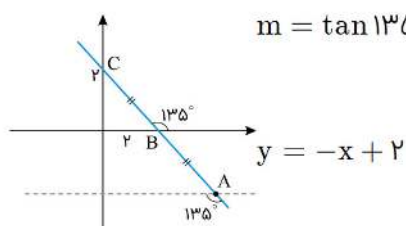
$$\Rightarrow (2x)^2 - 4(2x) + \frac{15}{4} = 2x - x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + \frac{15}{4} = 0 \xrightarrow{\div 5} x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه ها طول نقطه مطلوب $\frac{3}{2}$ است.

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$$



در شکل مشخص است که خط از نقطه $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ گذشته و شیب آن برابر است با $m = \tan 135^\circ = -1$ پس معادله خط عبارتست از:

نقطه B نقطه‌ای به مختصات زیر است:

$$y = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

چون B وسط A و C است پس:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_A + 0}{2} \Rightarrow x_A = 4$$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 0 = \frac{y_A + 2}{2} \Rightarrow y_A = -2$$

بنابراین طول OA عبارتند از:

$$OA = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

نقطه $B(-6, 3)$ روی هیچ‌کدام از خطوط قرار ندارد. محل تقاطع دو خط $\ell_1 : x - 3y = 4$ و $\ell_2 : x + 4y = -3$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\ell_1 : x - 3y = 4 &\Rightarrow y_1 = \frac{x-4}{3} \\ \ell_2 : x + 4y = -3 &\Rightarrow y_2 = \frac{-x-3}{4} \\ \xrightarrow{\text{تقاطع}} \frac{x-4}{3} &= \frac{-x-3}{4} \Rightarrow x = +1, y = -1\end{aligned}$$

پس $A(1, -1)$ رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است. نقطه وسط AB که قطر متوازی‌الاضلاع است را به دست می‌آوریم:

$$AB \text{ نقطه وسط } O : O = \left(\frac{1-6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, +1\right)$$

فاصله O از دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}OH_1 &= \frac{\left| -\frac{5}{2} - 3 - 4 \right|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{2\sqrt{10}} \\ OH_2 &= \frac{\left| -\frac{5}{2} + 4 + 3 \right|}{\sqrt{1+16}} = \frac{9}{2\sqrt{17}}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\begin{aligned}AB \parallel CD : \frac{4-1}{-1-3} &= \frac{y-y-3}{x+1+x} = \frac{-3}{2x+1} \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{-3}{2x+1} \\ \Rightarrow 2x+1 &= 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$AB \perp BC : \frac{-3}{4} \times \frac{y-1}{\frac{3}{2}-3} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(y-1) = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$C\left(\frac{3}{2}, -1\right) \Rightarrow |AB| = 5, |BC| = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{محیط} = 2(|AB| + |BC|) = 15$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$AB \parallel CD : m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{y - y + 3}{x + 1 + x} = \frac{0 + 3}{-4 - 0}$$

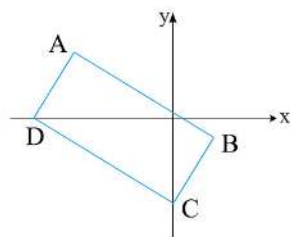
$$\Rightarrow 2x + 1 = -4 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$AD \perp DC : m_{AD} \times m_{DC} = -1 \Rightarrow \frac{y}{x + 4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = -\frac{5}{2}, y = 2 \Rightarrow A\left(-\frac{5}{2}, 2\right), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

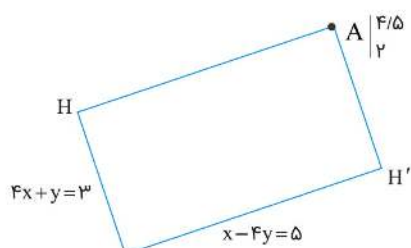
$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BC = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (AB)(BC) = (5)\left(\frac{5}{2}\right) = 12\frac{1}{2}$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

خطوط داده شده بر هم عمودند و نقطه داده شده روی هیچ کدام از خطوط صدق نمی کند. فاصله نقطه A از دو خط را محاسبه می کنیم:



$$AH = \frac{|1 \cdot 4 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AH' = \frac{|4 \cdot \frac{4}{5} - 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 16^2}} = \frac{1/5}{\sqrt{17}} = \frac{1 \times \sqrt{17}}{5 \times 17} = \frac{\sqrt{17}}{85}$$

فاصله وسط قطر از اضلاع مستطیل برابر نصف اضلاع آن می باشد، بنابراین فاصله ها برابر است با $\frac{\sqrt{17}}{4}$ و $\frac{\sqrt{17}}{2}$ در نتیجه بیشترین آن ها $\frac{\sqrt{17}}{2}$ می باشد.

نکته: فاصله دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y - ax = 1 \Rightarrow y = ax + 1$$

$$ay - x = a - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a} + 1$$

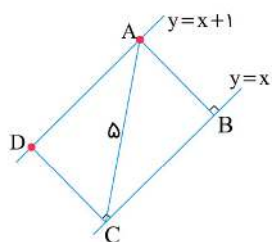
دو ضلع مقابل مستطیل موازی‌اند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$\frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

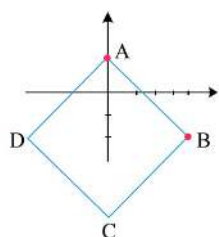
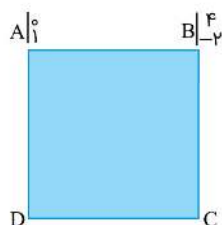
$a = -1$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $A(1, 2)$ در هیچ کدام از دو ضلع مقابل صدق نمی‌کند. فاصله دو خط موازی $y = x + 1$ و $y = x$ برابر عرض مستطیل است.



$$|AB| = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |BC| = \sqrt{2^2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{4-0} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3}$$



AD معادله : $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 1$

فرض کنید مختصات نقطه D به صورت (x, y) باشد، پس:

$$\begin{aligned} AD = 5 &\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 25 &\xrightarrow{*} x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \\ \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 25 &\Rightarrow x = \pm 3 \end{aligned}$$

پس مختصات طول نقطه D در ربع سوم -۳ است.

توجه: به روش زیر هم می‌توان مختصات نقطه D را به دست آورد:

اگر $x_D = -3$ باشد، پس: $y_D = -3$

$$AD = \sqrt{9 + 16} = 5$$

که درست است.

$$y = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 3 & ; -2 \leq x < 1 \\ -2x-1 & ; x < -2 \end{cases}, \quad 3y+x=17 \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{17}{3}$$

$$2x+1 = \frac{-x}{3} + \frac{17}{3} \Rightarrow \frac{7}{3}x = \frac{14}{3} \Rightarrow x = 2 \xrightarrow[\text{برخورد}]{\text{نقطه}} (2, 5)$$

$$-2x-1 = \frac{-x}{3} + \frac{17}{3} \Rightarrow \frac{5x}{3} = \frac{-20}{3} \Rightarrow x = -4 \xrightarrow[\text{برخورد}]{\text{نقطه}} (-4, 7)$$

فاصله این دو نقطه را می‌یابیم:

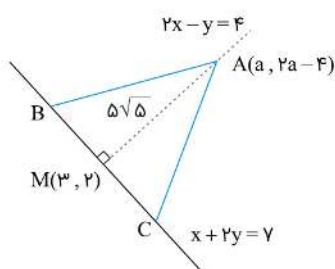
$$|AB| = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

معادله خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM} = \frac{-1}{m_{BC}} = 2$$

$$AM : y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$$



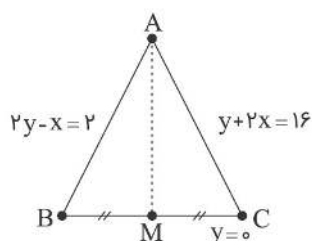
$$|AM| = 5\sqrt{5} \Rightarrow AM^2 = 125$$

$$(a-3)^2 + (2a-6)^2 = 125 \Rightarrow 5(a-3)^2 = 125$$

$$(a-3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = -2 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

مثلت را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصله نقطه A از نقطه M را به دست آوریم:
از تقاطع دو خط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ مختصات نقطه A به دست می‌آید.

$$2 \times \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 2x = 4 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$2y - x = 2 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow B(-2, 0)$$

$$y + 2x = 16 \xrightarrow{y=0} x = 8 \Rightarrow C(8, 0)$$

سپس مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M(3, 0)$$

اکنون فاصله دو نقطه M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(3 - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

چون نقطه A روی خط $x + y = a$ قرار دارد پس مختصات آن به صورت $A(x, a - x)$ است:

$$AB = \sqrt{29} : AB = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{29}$$

به توان دو می‌رسانیم $\rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y = 16 \quad (1)$

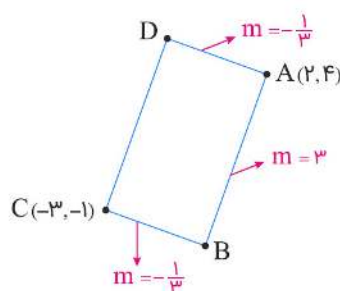
$$AC = 5 : AC = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = 5$$

به توان دو می‌رسانیم $\rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y = 16 \quad (2)$

معادلات (۱) و (۲) از هم کم می‌کنیم $: 4x + 4y = 16$

$$\Rightarrow x + y = 4 \xrightarrow{y=a-x} a = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱



نقطه B روی خط $y - 4 = 3(x - 2)$ قرار دارد: $B(a, 3a - 2)$
از طرفی شیب BC برابر $-\frac{1}{3}$ است:

$$\frac{3a - 2 + 1}{a + 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9a - 3 = -a - 3 \Rightarrow a = 0$$

$$B(0, -2)$$

$$AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط} : 2\sqrt{40} + 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\begin{cases} AB : y + 2x = 7 \\ BC : 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4x = 14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x = 3, y = 1$$

$$\Rightarrow B(3, 1)$$

$$BH = AC \text{ از } B \text{ فاصله} = \frac{|4(1) - 3(3) - 17|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

خط گذرنده از C و B را می‌یابیم:

$$B(3, 3), C(7, 11)$$

$$m = \frac{11 - 3}{7 - 3} = 2$$

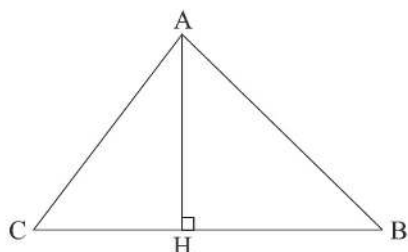
$$y = 2x - 3 \Rightarrow y - 2x + 3 = 0$$

فاصله A تا این خط را می‌یابیم:

$$AH = \frac{|9 - 2 + 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC ، کافی است که فاصله رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادله خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(7, 3), C(2, -2) \Rightarrow m = \frac{3+2}{7-2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = x - 2 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

بنابراین فاصله نقطه $A(1, 5)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

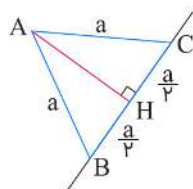
$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9}$$

$$\xrightarrow{2y=x^2} \sqrt{y^2-9} = 0 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

نقطه تلاقی $A(\sqrt{6}, 3)$ است:

$$|AO| = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰



$$\text{محیط} = 3a = \sqrt{270} = 3\sqrt{30} \Rightarrow a = \sqrt{30}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{30} = \frac{3}{3}\sqrt{10}$$

$$AH : y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{5}{3}$$

$$A(b, -\frac{b}{3} + \frac{5}{3}), \quad H(2, 1)$$

$$|AH| = \sqrt{(b-2)^2 + (\frac{2}{3} - \frac{b}{3})^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}|b-2| = \frac{3}{3}\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |b-2| = \frac{9}{3} \Rightarrow \begin{cases} b-2 = \frac{9}{3} \Rightarrow b = \frac{13}{3} \\ b-2 = -\frac{9}{3} \Rightarrow b = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\frac{13}{3}, \frac{-1}{3}), \quad A(\frac{-5}{3}, \frac{5}{3})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

معادله خط موردنظر $y = x - 1$ است، این خط را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس نقاط برخورد $A(-1, -2)$ و $B(2, 1)$ است، وسط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$$

راس سهمی هم $S(1, 2)$ است:

$$|SM| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

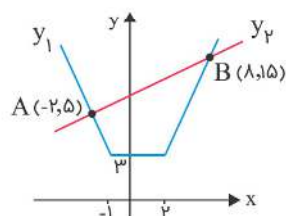
$$y_1 = |x - 2| + |x + 1|, \quad y_2 = x + 7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x + 2 - x - 1 & ; x \leq -1 \\ -x + 2 + x + 1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x - 2 + x + 1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$



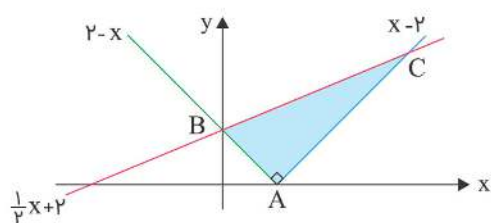
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 1$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -x+1 & ; x < 1 \end{cases}$$



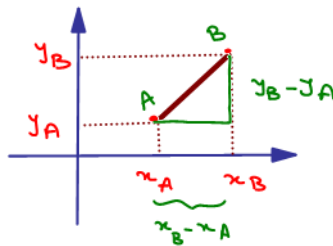
$$\begin{cases} A = (1, 0) \\ x-1 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow C = (4, 3) \\ 1-x = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 1) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2} = 5$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 5}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

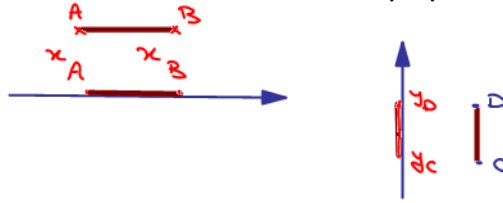
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹



وتر : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
 $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

BOX 6: بخش دوم هندسه تحلیلی

در این بسته، مسائلی چون فاصله دو نقطه، مختصات نقطه وسط پاره‌خط، قرینه نقطه نسبت به نقطه دیگر، معادله عمودمنصف و فاصله نقطه از خط را مطرح و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.



الف) فاصله دو نقطه

$$AB = |x_B - x_A|$$

$$CD = |y_D - y_C|$$

$$AB = |x_2 - x_1| = |7 - (-2)| = 9$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(۱) اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه:

(۲) اگر C و D دو نقطه هم‌طول باشند، آن‌گاه:

مثال: فاصله بین دو نقطه هم‌طول A(۵, -۲) و B(۵, ۷) برابر است با:

(۳) فاصله دو نقطه A(x_۱, y_۱) و B(x_۲, y_۲) برابر است با:

تعریف: (۱) فاصله بین دو نقطه (۳, ۲) و (-۱, ۰) را به دست آورید.

(۲) اگر نقاط A(-۱, ۴) و B(۳, ۳) دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

$$\textcircled{1} AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4(5)} = 2\sqrt{5}$$

نام فاصله AB همان طول ضلع مربع است.

$$AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20}$$

$$4\sqrt{5} = \text{مجموع مربع} = \text{یک ضلع مربع}$$

$$17 = (\sqrt{17})(\sqrt{17}) = \text{مساحت مربع} = \text{مربع یک ضلع} = \text{یک ضلع مربع}$$

نکته: فاصله نقطه A(x_۱, y_۱) تا مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ است. به عنوان مثال، فاصله نقطه (۶, ۸) تا مبدأ مختصات برابر

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ می‌باشد.}$$

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

• اگر مختصات نقطه‌ای روی دایره و مرکز دایره داده شده باشد، فاصله بین این دو نقطه برابر اندازه شعاع دایره است.

تعریف: دایره‌ای به مرکز (۳, -۱) از نقطه (۵, ۲) گذشته است. شعاع این دایره را به دست آورید. آیا نقطه (۶, ۲) بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

$$OA = \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = R$$

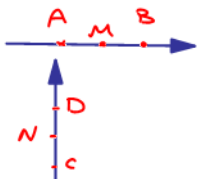
$$OB = \sqrt{(x_0 - x_B)^2 + (y_0 - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} > R = \sqrt{13}$$

پس B خارج دایره است. مختصات نقطه وسط پاره‌خط

اگر بخواهیم مختصات وسط دو نقطه و یا یک پاره‌خط را وقتی که مختصات آن‌ها را در اختیار داریم، به دست بیاوریم، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$

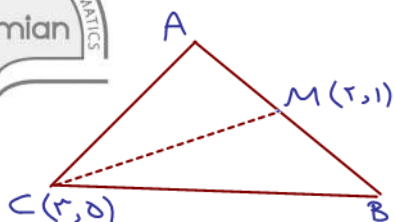


(۱) اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، آن‌گاه:

(۲) اگر C و D دو نقطه دلخواه روی محور yها و N وسط CD باشد، آن‌گاه:

(۳) فرض کنیم A و B دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left(\frac{\text{مجموع طول‌های A و B}}{2}, \frac{\text{مجموع عرض‌های A و B}}{2} \right) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



$$m\left(\frac{5-1}{2}=2, \frac{3-1}{2}=1\right)$$

تعریف: نقاط $A(5, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(3, 5)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

(۱) مختصات M ، نقطه وسط ضلع AB را مشخص کنید.

(۲) طول میانه CM را به دست آورید.

(۳) معادله میانه CM را بنویسید.

$$(۲) \quad CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(1)^2 + (4)^2} = \sqrt{17}$$

$$(۳) \quad C(3, 5) \quad \begin{aligned} y - y_C &= m(x - x_C) \\ y - 5 &= \frac{1-5}{2-3}(x-3) \\ y - 5 &= \frac{-4}{-1}(x-3) \\ y - 5 &= 4(x-3) \\ y &= 4x - 12 + 5 \\ y &= 4x - 7 \end{aligned}$$

(ب) قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم، آن‌گاه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M است.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_{A'}}{2} & y_M &= \frac{y_A + y_{A'}}{2} \\ x_{A'} &= 2x_M - x_A & y_{A'} &= 2y_M - y_A \end{aligned}$$

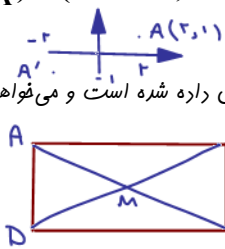
نکته: (۱) اگر A' قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$ باشد، آن‌گاه M وسط پاره خط AA' است و مختصات نقطه

$A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A)$ از فرمول مقابل به دست می‌آید:

مثال: قرینه نقطه $A(3, -1)$ نسبت به نقطه $M(2, 4)$ ، نقطه A' است که در آن:

$$A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A) = (2 \times 2 - 3, 2 \times 4 - (-1)) = (1, 9)$$

(۲) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $P'(-\alpha, -\beta)$ است. یکی از مسائلی که در تمرینات کتاب مطرح شده است این است که مختصات سه رأس یک مستطیل داده شده است و می‌توانیم مختصات رأس چهارم را به دست بیاوریم. برای این کار از نکته بصری که برای متوازی‌الاضلاع گفته می‌شود، استفاده می‌کنیم.



نکته: اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

تعریف: اگر $A(2, 1)$ و $B(3, 4)$ و $C(-1, 5)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به دست آورید.

$$\begin{cases} 2 + (-1) = 3 + x_D \\ 1 + 5 = 4 + y_D \end{cases} \quad \begin{aligned} x_D &= -2 \\ y_D &= 2 \end{aligned} \quad D(-2, 2)$$

تذکره: مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکته قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

(ت) عمودمنصف یک پاره خط

عمودمنصف: عمودمنصف پاره خط AB ، ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه و عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به دست می‌آوریم.

تعریف: دو نقطه $A(3, 6)$ و $B(1, 2)$ مفروض‌اند. معادله عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

$$y - y_M = m(x - x_M)$$

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x$$

$$m\left(\frac{1+3}{2}=2, \frac{2+6}{2}=4\right)$$

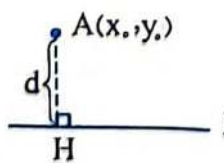
$$M(2, 4) \quad m_{AB} = \frac{2-6}{3-1} = -2$$

نکته: یکی از ویژگی‌های مهم عمودمنصف آن است که فاصله هر نقطه روی آن از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

یکی از فرمول‌های خیلی مهم که باید آن را حفظ کنیم، فاصله نقطه از خط است. از این فرمول علاوه بر به دست آوردن فاصله نقطه از خط، برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی و طول ارتفاع در مثلث استفاده می‌کنیم.

(ث) فاصله نقطه از خط

- اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد، فاصله A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از عمود A بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L؛ از فرمول زیر برای محاسبه فاصله نقطه از خط راست استفاده می‌کنیم:
- اگر مختصات نقطه A به صورت (x_0, y_0) و معادله خط L به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، آن‌گاه:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$


- برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

- (۱) همه اجزای معادله خط در یک طرف تساوی باشند.
- (۲) در معادله خط به جای x، طول نقطه (x_0) و به جای y، عرض نقطه (y_0) را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.
- (۳) ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.
- (۴) نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصله بین نقطه و خط می‌باشد.

تمرین: (۱) فاصله نقطه $A(3, 2)$ از خط به معادله $4x + 3y + 1 = 0$ را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی)

(۲) خط $5x - 12y + 4 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره را بیابید.

$$d = \frac{|5x_0 - 12y_0 + 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5(2) - 12(-1) + 4|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|10 + 12 + 4|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2 = R$$

شعاع $R = 2$

نکته: (۱) فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(۲) فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $x = a$ برابر $d = |x_0 - a|$ و از خط $y = b$ برابر $d = |y_0 - b|$ است.

مثال: فاصله نقطه $A(3, 4)$ از خط $x = 2$ برابر $d = |3 - 2| = 1$ و از خط $y = -5$ برابر $d = |4 - (-5)| = 9$ می‌باشد.

فاصله بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.

تمرین: فاصله بین دو خط موازی به معادلات $x + y - 3 = 0$ و $x + y = 5$ را به دست آورید.

نکته: برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، ابتدا ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم و داریم:

$$d = \frac{|x_0 + y_0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

حاصل از فرمول:

$$d = \frac{|x_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$1x + 1y - 3 = 0 \rightarrow a=1, b=1$
 $1x + 1y - 5 = 0 \rightarrow a=1, b=1$

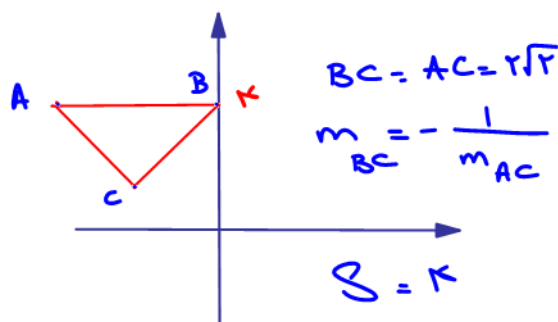
$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \xrightarrow[\text{دو خط موازی هستند.}]{\substack{a=a' \\ b=b'}} d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

پرسش‌های تشریحی:

۱- اگر $A(3, -1)$ و $B(-1, 6)$ دو نقطه باشند، فاصله مبدأ مختصات را از وسط AB به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ کتاب درسی صفحه ۹)

$$OM = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5} \quad \text{وسط } M(1, 2)$$

۲- نقاط $A(-4, 4)$ ، $B(0, 4)$ و $C(-2, 2)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۶ کتاب درسی و تمرین ۳ صفحه ۹)



(آ) مثلث ABC را رسم کنید.

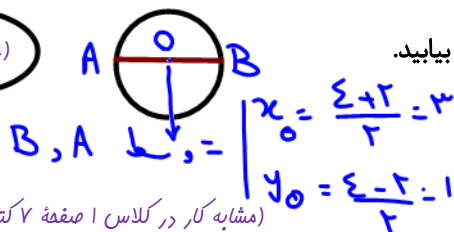
(ب) نشان دهید مثلث ABC مثلث متساوی الساقین و قائم‌الزاویه است.

(پ) مساحت مثلث را به دست آورید.

۳- اگر نقاط $A(2, 4)$ و $B(5, 8)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = \text{ضلع مربع} \quad S_{\square} = (5)^2 = 25 \quad \text{محیط} = 4(5) = 20$$

(فرداد ۱۴۰۲)



۴- اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید.

$$O(3, 1)$$

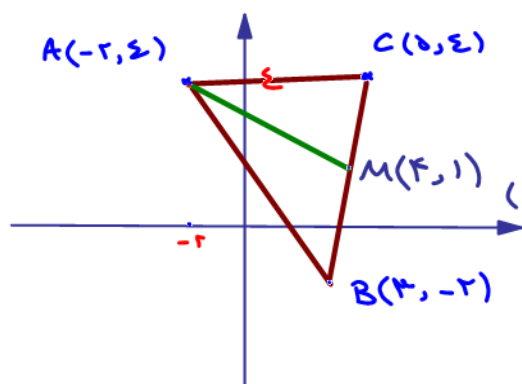
(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۷ کتاب درسی)

۵- مثلث با رأس‌های $A(-2, 4)$ و $B(3, -2)$ و $C(5, 4)$ را در نظر بگیرید.

(آ) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید. $M(4, 1)$

(ب) طول میانه AM را به دست آورید.

(پ) معادله میانه AM را بنویسید.



$$AM = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} = 3\sqrt{5}$$

$$m_{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

۶- با توجه به مختصات نقاط داده شده، به سوالات زیر پاسخ دهید.

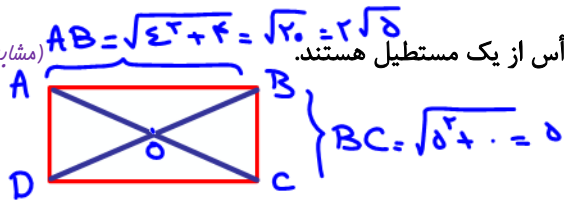
الف) نقطه $M(5, -1)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه $A(3, 2)$ و B است. مختصات نقطه B را بیابید. $B(7, -8)$
 (ب) قرینه نقطه $A(-3, 4)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 2)$ به دست آورید. AA' وسط BB' مشخص کنید. $B(3, 0)$
 (ت) قرینه نقطه $(-3, 5)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید. $(3, -5)$

$$\begin{cases} 5 = \frac{3+x_B}{2} \\ -1 = \frac{2+y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 7 \\ y_B = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = \frac{-3+x_{A'}}{2} \\ 2 = \frac{4+y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 1 \\ y_{A'} = 0 \end{cases}$$

نکته: قرینه $M(x, y)$ نسبت به مبدأ $M'(-x, -y)$

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۹ کتاب درسی)



۷- نقاط $A(-2, -1)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-3, 1)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

(ب) مساحت مستطیل را به دست آورید.

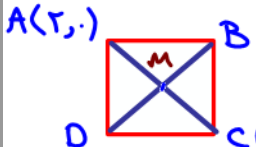
$$S = (AB)(BC) = 4\sqrt{2} \cdot 4 = 16\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + (-3) = 2 + x_D \\ -1 + 1 = 1 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -7 \\ y_D = -1 \end{cases}$$

۸- دو نقطه $A(3, -4)$ و $B(-1, 0)$ مفروض اند. معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

$$AB \perp M, M(\frac{3-1}{2}=1, \frac{-4-0}{2}=-2) \quad m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-4)}{-1 - 3} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y + 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow y + x + 1 = 0$$



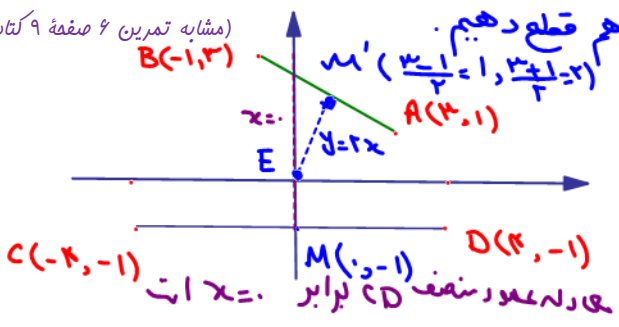
۹- نقاط $(2, 0)$ و $(4, 2)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادله قطرهای این مربع را بنویسید.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-0}{4-2} = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

$$m_{BD} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow y - 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 4$$

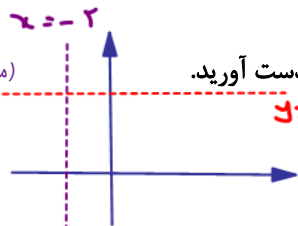
۱۰- نقاط $A(3, 1)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(-4, -1)$ و $D(4, -1)$ مفروض اند. نقطه ای مشخص کنید که فاصله آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد.

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۹ کتاب درسی)



$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{-1-3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{ME} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۹ کتاب درسی)



۱۱- فاصله نقطه $(4, -2)$ را از دو خط به معادلات $x = -2$ و $y = 5$ به دست آورید.

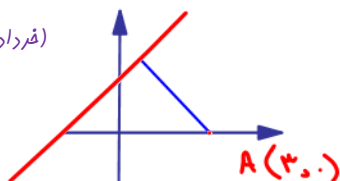
$$x = -2 : \text{فاصله } 7 : |4 - (-2)| = 7$$

$$y = 5 : \text{فاصله } 11 : |-2 - 5| = 11$$

$A(4, -2)$

۱۲- نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع را به دست

(فرداد ۱۴۰۲)



آوردید. فاصله A از خط برابر طول ضلع مربع است.

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-x + y - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad S = (d)^2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

۱۳- اندازه شعاع و مساحت دایره به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $2y + x = 5$ را به دست آورید. فاصله ۱۵ از خط برابر شعاع است

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی)



$$R = OH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-x + 2y - 5|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{4\pi}{5}$$

$O(-1, 2)$

نکته: فاصله خط موازی

(مشابه تمرین ۸ صفحه ۹ کتاب درسی)

۱۴- ابتدا نشان دهید دو خط داده شده با هم موازی اند و سپس فاصله بین آن ها را به دست آورید.

$$2x + 2y = 7, \quad x = -y + 4$$

$$2y = -2x + 7 \quad y = -x + 3.5$$

$$y = -x + \frac{7}{2} \quad m = -1$$

شیب ها مساوی: خط ها موازی

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$2x + 2y - 7 = 0$$

$$2x + 2y - 8 = 0 \quad \text{فاصله خط موازی}$$

$$d = \frac{|-7 - (-8)|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۵- اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی ۱۱۰ کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب 37° و 45° و طول و

(مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب 31° و 37° باشد، فاصله بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟

$$A(45, 37) \\ B(31, 37)$$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(14 \times 11)^2 + (0)^2} = 14 \times 11 = 154 \text{ km}$$

$$(\Delta x = 45 - 31 = 14) \times 11 = 154 \text{ km} = 14 \times 11$$

$$(\Delta y = 37 - 37 = 0) \times 11 = 0 \text{ km} = 0 \times 11$$

۱۶- اگر قرینه نقطه $(a + 1, b - 3)$ نسبت به نقطه $(3, 5)$ ، نقطه $(b - 2, -a)$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

$$\begin{cases} x = 3 = \frac{(b-2) + (a+1)}{2} \\ y = 5 = \frac{(-a) + (b-3)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b - 1 = 7 \\ -a + b - 3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 8 \\ -a + b = 13 \end{cases}$$

$$2b = 21$$

$$b = 10.5$$

$$a + b = 8$$

$$a = -2.5$$

$$ax + by = c$$

$$m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$$

$$m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3} \quad m' = -\frac{3}{2}$$

۱۷- خطوط $3x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 5$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(1,1)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل را به دست

آورید. در معادله ۲ خط داده شده صدق می کنند لذا ردی هیچکدام از این دو ضلع نیست

آورد. می بینیم که $m \cdot m' = -1$ پس ۲ خط داده شده عمودند. نامیده $A(1,1)$ از هر کدام از خط ها برابر طول عرض مستطیل است.

$$d_1 = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} \quad d_2 = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5} \quad S = d_1 \cdot d_2 = \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{25}$$

۱۸- مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$ ، $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است.

(آ) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

(ب) طول میانه AM را به دست آورید.

(پ) معادله ارتفاع BH را محاسبه کنید.

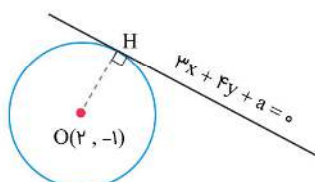
(ت) نقطه تلاقی میانه AM و ارتفاع BH را به دست آورید.

(ث) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۷ اگر $A(8, \frac{1}{4})$, $B(4, 0)$ و $C(0, -3)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۸

۸ اگر مساحت دایره شکل زیر 25π باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۲۵
(۲) ۲۳
(۳) ۲۱
(۴) ۱۹

۹ اگر $A(2, 5)$, $B(2, 3)$ و $C(-1, 5)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی الاضلاع
(۲) متساوی الساقین
(۳) قائم الزاویه
(۴) متساوی الساقین قائم الزاویه

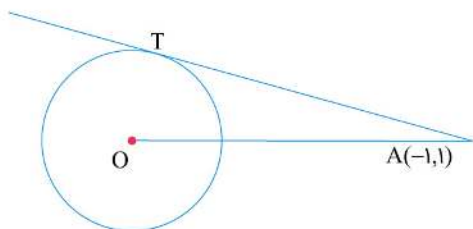
۱۰ خط d از نقطه $(-1, 2)$ عبور کرده و بر خط $\frac{y-1}{3} = \frac{x}{4}$ عمود است، چه مساحتی خط d با محورهای مختصات می‌سازد؟

- (۱) $\frac{8}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{5}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

۱۱ دو خط $d_1: \frac{2y-1}{4} = \frac{x}{3}$ و $d_2: 3y = x - \frac{1}{4}$ بر دایره‌ای مماس هستند. محیط دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}\pi$
(۲) $\frac{\sqrt{10}}{10}\pi$
(۳) $\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$
(۴) $\frac{2\sqrt{10}}{5}\pi$

۱۲ خط $3x + 4y - 1 = 0$ بر دایره به مرکز $O(-3, 3)$ مماس است. طول پاره خط AT کدام است؟ (T نقطه مماس خط بر دایره)



- (۱) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
(۲) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
(۳) $\frac{14}{5}$
(۴) $\frac{7}{5}$

$$ax + 4y - 1 = 0$$

$$y = \frac{|a + 1 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} \Rightarrow 4a^2 + 64 = (a + 1)^2$$

$$4a^2 + 64 - a^2 - 14a - 19 = 0$$

$$3a^2 - 14a + 45 = 0 \Rightarrow \Delta = 196 - \overbrace{4(45)}^{180} = 16$$

$$a = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Homework

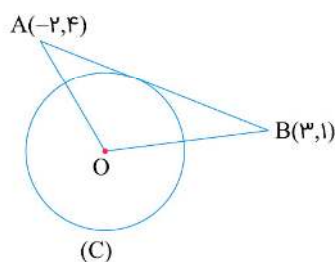
۱ اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۲ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $16 = y + 2x$, $2 = y - x$ و $0 = y$ هستند، اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

(۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵

(۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

۳ $O(-1, -1)$ مرکز دایره C می باشد که بر ضلع AB مماس است، مساحت دایره C کدام است؟



(۱) $\frac{142\pi}{17}$

(۲) $\frac{128\pi}{17}$

(۳) $\frac{242\pi}{17}$

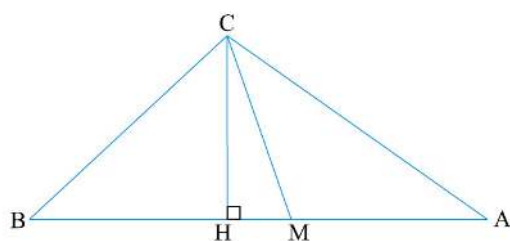
(۴) $\frac{228\pi}{17}$

۴ معادله عمودمنصف پاره خط AB که در آن مختصات نقاط A و B به صورت $A(1, \beta)$ و $B(\alpha, -1)$ است، خط $4y - 2x - 3 = 0$ است. مقدار $\alpha \cdot \beta$ کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) -۱۵

(۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۵ سه نقطه $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ و $C(4, 3)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر ارتفاع CH و CM میانه مثلث باشند، طول MH کدام است؟



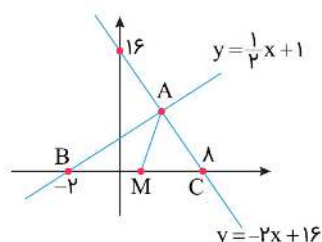
(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶ فاصله بین دو خط $x - 5y = 6$ و $2x = 10y + 1$ را بیابید.



$$y = 0 : y + 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \quad C(8, 0)$$

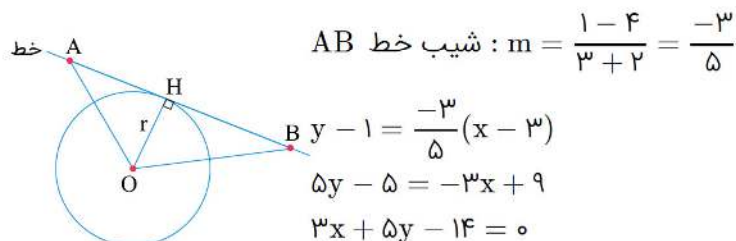
$$y = 0 : 2y - x = 2 \Rightarrow x = -2 \quad B(-2, 0)$$

$$BC \text{ خط } M : \begin{cases} x = \frac{8 + (-2)}{2} = 3 \\ y = \frac{0 + 0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 16 \\ y = \frac{1}{5}x + 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow -2x + 16 = \frac{1}{5}x + 1 \Rightarrow -\frac{11}{5}x = -15$$

$$\Rightarrow x = \frac{150}{11}, y = \frac{16}{11} \Rightarrow A(\frac{150}{11}, \frac{16}{11})$$

$$AM = \sqrt{(\frac{150}{11} - 3)^2 + (\frac{16}{11} - 0)^2} = \frac{15}{11}$$



$$r = OH = \frac{|-3 - 5 - 14|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{22}{\sqrt{34}}$$

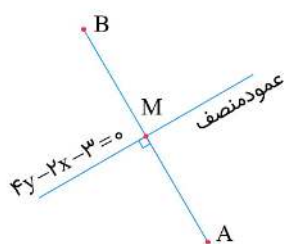
مساحت دایره:

$$S = \pi r^2 = \frac{242\pi}{17}$$

$$AB \text{ وسط پاره خط } M \begin{cases} x = \frac{1+\alpha}{2} \\ y = \frac{\beta-1}{2} \end{cases}$$

مختصات نقطه M در خط عمودمنصف صدق می‌کند:

$$4\left(\frac{\beta-1}{2}\right) - 2\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow 2\beta - 2 - 1 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow 2\beta - \alpha = 6$$



شرط عمود بودن دو خط: $m \times m_{AB} = -1$

$$AB \text{ خط : } m_{AB} = \frac{-1-\beta}{\alpha-1}$$

$$\text{شیب عمودمنصف : } m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{-1-\beta}{\alpha-1}\right) = -1$$

$$2\alpha - 2 = 1 + \beta \Rightarrow \beta - 2\alpha = -3$$

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha = 6 \\ \beta - 2\alpha = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4, \beta = 5 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 20$$

معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد:

$$m_{AB} = \frac{0-3}{3-0} = -1 \Rightarrow y = -1(x-3) \Rightarrow y = -x+3$$

معادله خطی که ارتفاع CH روی آن قرار دارد.

$$AB \perp CH : m_{CH} = \frac{-1}{-1} = 1 : y-3 = 1(x-4) \Rightarrow y = x-1$$

$$\begin{cases} y = -x+3 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=1 \Rightarrow H(2,1)$$

وسط پاره خط AB:

$$M \begin{cases} x = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow MH = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow MH = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x-5y-6=0$$

$$2x-10y-1=0 \xrightarrow{\div 2} x-5y-\frac{1}{2}=0$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-6-(-\frac{1}{2})|}{\sqrt{1+25}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{26}} = \frac{5}{2\sqrt{26}}$$

روش اول:

$$BC \text{ ضلع} : m_{BC} = \frac{-3-0}{0-4} = \frac{3}{4}$$

معادله خط ضلع BC:

$$y-0 = \frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow 4y-3x+12=0$$

فاصله رأس A از ضلع BC (ارتفاع AH):

$$AH = \frac{|4(\frac{1}{4}) - 3(1) + 12|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (0+3)^2} = 5$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$

روش دوم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |1(0+3) + 4(-3-\frac{1}{4}) + 0(\frac{1}{4}-0)|$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |24-14| = 5$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow 25\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 5$$

$$r = OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$5 = \frac{|3(2) + 4(-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow |2+a| = 25$$

$$\begin{cases} 2+a = 25 \Rightarrow a = 23 \\ 2+a = -25 \Rightarrow a = -27 \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (3-5)^2} = 2$$

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-5)^2} = 3$$

$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$$

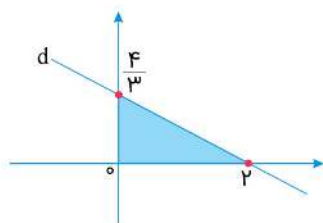
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 13 = 9 + 4 \quad \text{مثلث قائم الزاویه}$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2} \quad \text{شیب خط}$$

$$\text{شرط عمود بودن: } m_2 = \frac{-1}{m_1} \Rightarrow m_2 = \frac{-2}{3}$$

$$d \text{ خط: } y-2 = \frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

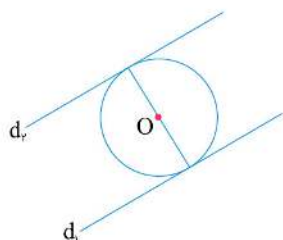


$$S: \text{مساحت مثلث} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

$$d_1 : 6y - 3 = 2x \Rightarrow 2x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow x - 3y + \frac{3}{2} = 0$$

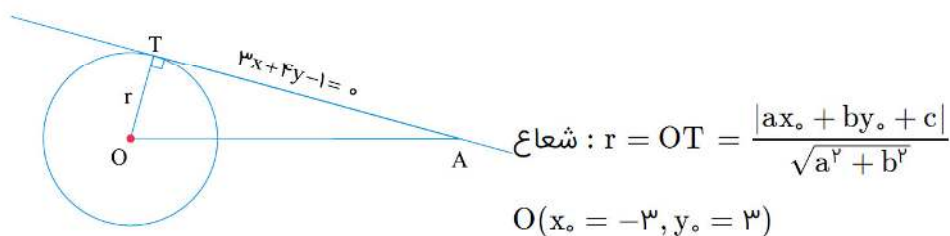
$$d_2 : 3y = x - \frac{1}{2} \Rightarrow x - 3y - \frac{1}{2} = 0$$

دو خط d_1 و d_2 موازیند، پس فاصله دو خط مذکور برابر قطر دایره است.



$$D = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{محیط دایره} = \pi D = \frac{\sqrt{10}}{5} \pi$$



$$r = \frac{|3(-3) + 4(3) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

$$OA = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (1 - 3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$OA^2 = r^2 + AT^2 \Rightarrow AT = \sqrt{8 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{196}{25}} = \frac{14}{5}$$

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی (ویژه حسابان فصل ۱ درس ۱)

روش گاوس

S: Sumation

در دنباله حسابی با جمله اول a_1 و جمله آخر a_n داریم:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} S = 1+2+\dots+9 \\ S = 9+8+\dots+1 \end{cases} \\ \hline 2S &= 9(1+9) \\ S &= \frac{9(10)}{2} = 9(5) = 45 \end{aligned}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(\text{اولی} + \text{آخری})$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

از آن جا که در دنباله حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n})$$

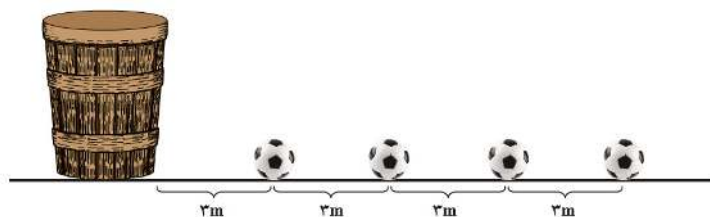
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + dn - d) = \frac{d}{2}n^2 + \dots$$

مثال: اگر مجموع سه های یک دنباله حسابی از دستور $S_n = n(n+3)$ بدست آید قدر نسبت دنباله حسابی کدام است؟
 $S_n = 0n^2 + 3n$
 $\frac{d}{2} = 1 \rightarrow d = 2(1) = 2$

می بینیم مجموع جملات دنباله حسابی برحسب n از درجه دوم است و دو برابر ضریب n^2 قدرنسبت دنباله حسابی است.

تمرین: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دوندۀ ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



نکته: در تمام دنباله ها داریم:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

مثال: اگر در یک دنباله جمع n جمله از دستور $S_n = 2n(n-2)$ بدست آید. فرمول جمله عمومی را بیابید.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n(n-2) - 2(n-1)((n-1)-2) = (2n^2 - 4n) - (2n^2 - 4n + 6) = 4n - 6$$

$$a_1 = 7, 12, 18, \dots \dots \dots S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$d=5 \quad d=6$

پاسخ: دهنده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $3+3=6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهد.

اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2} (12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

تعیین: روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

پاسخ: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل

تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19}{2} (1 + 19) = 190$$

تذکره: این مسئله را با استفاده از ترکیبات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot (19)}{2 \cdot 1} = 190$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n$

$a_1 \quad a_1 q \quad a_1 q^2 \quad \dots \quad a_1 q^{n-1} \rightarrow a_1 = q^{n-1}$

$a_n = a_1 q^{n-1}$ **جمله عمومی دنباله هندسی**

مجموع جملات دنباله هندسی

در هر دنباله هندسی داریم:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \\ - [q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n] \end{cases} \quad \text{طرفین ضرب در } q$$

$$S_n - S_n q = (a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + \dots + a_1 q^n)$$

$$S_n (1 - q) = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

تعیین: مجموعه ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots \quad S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{8} (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{8} (1 - 1024)}{-1} = \frac{1}{8} (1024 - 1) = \frac{1023}{8}$$

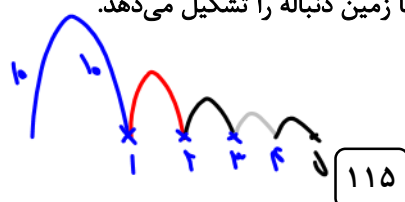
$q=2 \quad q=2$

تعیین: توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۰ متری برسد. این توپ پس از n بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

پاسخ: ارتفاع توپ قبل از n آمین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. داریم:

$$A_1 = 10, A_2 = \frac{10}{4}, A_3 = \frac{10}{16}, \dots, A_n = \frac{10}{4^{n-1}}$$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین دنباله را تشکیل می‌دهد.

$$20, \frac{20}{4}, \frac{20}{16}, \dots, \frac{20}{4^{n-1}}$$


$$20, \frac{20}{2}, \frac{20}{4}, \dots$$

$q = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

دنباله فوق یک دنباله هندسی با مجموع $S_n = 20 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$ داریم:

$$S_5 = 20 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^5}{\frac{3}{4}} = \frac{80}{3} (1 - (\frac{1}{4})^5) = \frac{80}{3} (1 - \frac{1}{1024}) = 26 \frac{64}{64}$$

$$(\frac{1}{4})^5 = (\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای:

۱- اگر $3x+4, x^2, 2x+3$ تشکیل یک دنباله حسابی صعودی (افزایشی) بدهند، مجموع بیست جمله اول آن کدام است؟

۶۲۷/۵ (۴)

۶۸۷/۵ (۳)

۵۸۷/۵ (۲)

۵۲۷/۵ (۱)

۲- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ ، مجموع اعداد واقع در دسته نهم کدام است؟

$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916, 3025, 3136, 3249, 3364, 3481, 3600, 3721, 3844, 3969, 4096, 4225, 4356, 4489, 4624, 4761, 4900, 5041, 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929, 6084, 6241, 6400, 6561, 6724, 6889, 7056, 7225, 7396, 7569, 7744, 7921, 8100, 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801, 10000\}$

۱۲۷۳ (۴)

۱۲۵۱ (۳)

۱۲۴۷ (۲)

۱۲۴۱ (۱)

۳- در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول، ۳ برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله پنجم ۱۴ باشد، جمله هفتم کدام است؟

$$\begin{cases} S_{20} = 3S_{12} \rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \cdot \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) \\ a_5 = a_1 + 4d = 14 \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases}$$

۲۸ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

۴- در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله نهم و یازدهم برابر ۴۰ است، مجموع نوزده جمله اول این دنباله کدام است؟

۳۸۰ (۴)

۳۱۰ (۳)

۲۱۰ (۲)

۱۸۰ (۱)

۵- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۹ (۴)

۸/۵ (۳)

۸ (۲)

۷/۵ (۱)

۶- مقدار x از معادله $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + x = 6560$ کدام است؟

۵۶۶۱ (۴)

۳۴۷۴ (۳)

۶۵۶۱ (۲)

۴۳۷۴ (۱)

۷- مربعی به طول ضلع ۲ cm مفروض است. اگر اواسط اضلاع مربع را به هم متصل کنیم و این را همچنان ادامه دهیم، مجموع مساحت‌های



۱۰ مربع اول به وجود آمده کدام است؟ (مربع به طول ضلع ۲، مربع اول در نظر گرفته شود).

$\frac{1023}{128}$ (۴)

$\frac{511}{128}$ (۳)

$\frac{1023}{256}$ (۲)

$\frac{511}{64}$ (۱)

۸- تویی داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب

کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. این توپ پس از x بار برخورد به زمین $\frac{80}{3}$ متر مسافت طی می‌کند، x کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

۹- در یک دنباله هندسی، مجموع هفت جمله اول، شانزده برابر مجموع هفت جمله دوم آن دنباله است. جمله سی‌ونهم این دنباله چند برابر

جمله چهل و نهم آن است؟

۶۴ (۴)

۵۱۲ (۳)

۲۵۶ (۲)

۱۲۸ (۱)

۱۰- تعداد جملات یک دنباله هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن چهار برابر جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ نامه:

در هر دنباله حسابی داریم: $a + c = 2b$ دنباله حسابی
 $2x + 3, x^2, 3x + 4$
 جمع الطرفين برابر دبل الوسطی است

۱- گزینه «۴»

دنباله ثابت افزایشی نیست — غ. ق. ق. $x = -1, 1, 1, 1$
 $2x^2 = (2x + 3) + (3x + 4) \Rightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1, 1, 1, 1 \\ x = \frac{7}{2}: 10, \frac{49}{4}, \frac{29}{2} \Rightarrow d = \frac{9}{4} \end{cases}$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2(10) + 19(\frac{9}{4})) = 10(\frac{251}{2}) = 627 \frac{1}{2}$$

۲- گزینه «۱»

$\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{65, 66, \dots, 81\}$

دسته نهم ... دسته دوم دسته اول

دسته نهم یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 65$ و $d = 1$ و جمله آخر ۸۱ است، در نتیجه:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 81 = 65 + (n-1)(1) \Rightarrow n = 17$$

تعداد جملات دنباله حسابی $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(65 + 81) = 1241$$

$n = \frac{81 - 65}{1} + 1 = 17$

۳- گزینه «۱»

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 3(6)(2a_1 + 11d)$$

$$10a_1 + 95d = 18a_1 + 99d \Rightarrow 8a_1 + 4d = 0 \Rightarrow 2a_1 + d = 0$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 14$$

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 0 \\ a_1 + 7d = 14 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2, d = 4$$

$$a_7 = a_1 + 6d = -2 + 24 = 22$$

۴- گزینه «۴»

$$a_9 + a_{11} = 40 \Rightarrow (a_1 + 8d) + (a_1 + 10d) = 40 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 40$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = \frac{19}{2} \times 40 = 380$$

۵- گزینه «۲»

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = 15 \Rightarrow 7a_1 + 21d = 15$$

$$S_9 = (a_1 + \dots + a_7) + (a_8 + \dots + a_9) = 15 + 30 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \Rightarrow a_1 + 4d = 5$$

$$\begin{cases} 7a_1 + 21d = 15 \\ a_1 + 4d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{7}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 5 = 8$$

۶- گزینه «۱»

هندسی : دنباله هندسی $(6^2 = 2 \times 18)$

$$q = 3$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow 6560 = \frac{2(1-3^n)}{1-3} \Rightarrow 3^n - 1 = 6560$$

$$3^n = 6561 \Rightarrow 3^n = 3^8 \Rightarrow n = 8$$

جمله هشتم: است :

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 2 \times 3^7 = 4374$$

$$x = 4374$$

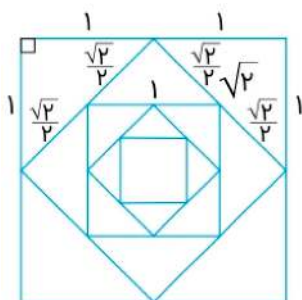
۷- گزینه «۴»

تفسیر: هرگاه اعداد (وسط‌های) اضلاع مربعی را به هم وصل کنیم مربع جدید دیگری ساخته می‌شود که مساحت آن نصف مساحت مربع اول است.

مساحت مربع اول: $A_1 = 4$

مساحت مربع دوم: $A_2 = 2$

مساحت مربع سوم: $A_3 = 1$



هندسی : دنباله هندسی $4, 2, 1, \dots \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{4(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = 8(1-\frac{1}{1024}) \Rightarrow S_{10} = 8(\frac{1023}{1024}) = \frac{1023}{128}$$

۸- گزینه «۳»

$$h_1 = 9, h_2 = 3, h_3 = 1, \dots$$

$$l_1 = 18, l_2 = 6, l_3 = 2, \dots$$

ارتفاع توپ قبل از x آمین پرتاب:

و مسافت طی شده توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین:

$$S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad \text{قدرنسبت: } q = \frac{1}{3}$$

در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{18}{3} = \frac{18(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3^n} = \frac{18}{18} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^4} \Rightarrow n = 4$$

۹- گزینه «۲»

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مجموع هفت جمله دوم = ۱۶ = مجموع هفت جمله اول

$$\Rightarrow a_1 + \dots + a_7 = 16(a_8 + \dots + a_{14})$$

$$\frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = 16 \frac{a_8(1-q^7)}{1-q} \Rightarrow a_1 = 16a_8 \rightarrow \cancel{q^7} = 16 \cancel{q^7} \rightarrow \frac{1}{16} = q^7$$

$$a_1 = 16(a_1 q^7) \Rightarrow q^7 = \frac{1}{16}$$

نکته: در دنباله هندسی داریم: $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$

$$\frac{a_{25}}{a_{49}} = q^{25-49} = q^{-24} = \frac{1}{q^{24}} = \left(\frac{1}{q^7}\right)^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256} = 256$$

$$\frac{\cancel{q^{25}}}{\cancel{q^{49}}} = \frac{1}{q^{24}} = \frac{1}{(q^7)^2} = \frac{1}{(\frac{1}{16})^2} = \frac{1}{\frac{1}{256}} = 256$$

۱۰- گزینه «۱»

مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

قدرنسبت بین جملات فرد: $q' = q^2$

$$m = \frac{n}{2} : S_m = \frac{a_1(1-q'^m)}{1-q'} \Rightarrow S_m = \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}$$

تعداد جملات فرد:

$$S_n = 2S_m$$

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 2 \frac{a_1(1-q^{\frac{n}{2}})}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \frac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-q^2} \Rightarrow 1+q = 2 \Rightarrow q = 1$$

Homework (1)

۱ اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, ... مجموع اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟

۴۰۲۰ (۲)

۴۱۲۰ (۱)

۳۹۸۰ (۴)

۴۰۱۰ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۲ در یک دنباله حسابی، مجموع ۹ جمله اول برابر ۹۰ و جمله هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جملات متوالی، کدام است؟

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۳ جمله‌های دوم و پنجم یک دنباله هندسی، به ترتیب، $\frac{1}{p}$ و ۴ هستند. مجموع هشت جمله اول دنباله، کدام است؟

۶۳/۷۵ (۲)

۶۳/۵ (۱)

۶۷/۷۵ (۴)

۶۴/۵ (۳)

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هربار برخورد به زمین اندازه $\frac{8}{10}$ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

۵۷ (۲)

۵۴ (۱)

۶۶ (۴)

۶۰ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم دنباله ۶ است. جمله یازدهم دنباله، کدام است؟

-۱۴/۸ (۲)

-۱۳/۶ (۱)

-۱۶/۸ (۴)

-۱۵/۶ (۳)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

پاسخ (1) Homework

گزینه ۳

۱

$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$

آخرین عدد دسته اول برابر با ۱، آخرین عدد دسته دوم برابر با $2 = 3$ ، آخرین عدد دسته سوم برابر با $6 = 1 + 2 + 3$ و ... به همین ترتیب آخرین عدد دسته $20^{\text{ام}}$ برابر با $\frac{20 \times 21}{2} = 210$ است. همچنین در دسته $20^{\text{ام}}$ بیست عدد وجود دارد، پس اولین عدد دسته $20^{\text{ام}}$ برابر با $191 = 210 - 20 + 1$ است. پس مجموع اعداد دسته $20^{\text{ام}}$ برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(191 + 210) = 10(401) = 4010$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

گزینه ۱

۲

نکته ۱: در یک دنباله حسابی مجموع n جمله با جمله اول a_1 و قدر نسبت d (اختلاف مشترک) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

نکته ۲: در دنباله حسابی جمله n ام دنباله از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ محاسبه می‌شود.

مجموع ۹ جمله اول برابر با ۹۰ و جمله هفتم برابر با ۱۳ است. تفاضل جملات متوالی یعنی همان قدر نسبت (اختلاف مشترک) دنباله را به دست می‌آوریم.

$$S_9 = 90 \Rightarrow 90 = \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) \Rightarrow 2a_1 + 8d = 20 \Rightarrow a_1 + 4d = 10 \quad (*)$$

$$a_7 = 13 \Rightarrow 13 = a_1 + 6d \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \begin{array}{l} a_1 + 4d = 10 \\ a_1 + 6d = 13 \end{array} \xrightarrow{(-)} 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2} = 1.5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

نکته ۱: در یک دنباله هندسی اگر جمله اول دنباله a_1 و نسبت مشترک (قدر نسبت) دنباله r باشد، مجموع n جمله اول دنباله از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ محاسبه می‌شود.
نکته ۲: در دنباله هندسی جمله a_n از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.
ابتدا نسبت مشترک (قدر نسبت) دنباله هندسی یعنی r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = \frac{1}{2} \\ a_5 = a_1 r^4 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r} = r^3 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

با استفاده از جمله دوم دنباله، a_1 را به دست می‌آوریم:

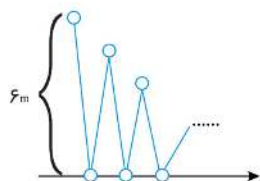
$$a_2 = a_1 r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 1$$

بنابراین S_8 برابر است با:

$$S_8 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{255}{256})}{-\frac{1}{2}} = \frac{255}{4} = 63\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

مسیری که توپ طی می‌کند به صورت زیر است:



$$S = 6 + 6 \times 2 \times 0/8 + 6 \times 2 \times (0/8)^2 + \dots + 6 \times 2 \times (0/8)^{98} + 6 \times 2 \times (0/8)^{99}$$

$$S = 6 + 12(0/8 + (0/8)^2 + \dots + (0/8)^{99})$$

$$S = 6 + 12 \times 0/8 \times \frac{1 - (0/8)^{99}}{1 - 0/8}$$

دقت کنید که $(0/8)^{99}$ بسیار کوچک است و می‌توانیم از آن صرف نظر کنیم:

$$S = 6 + 12 \times 4 = 6 + 48 = 54$$

تذکر: مجموع جملات دنباله هندسی از کتاب‌های ریاضی گروه تجربی حذف شده است، ولی این سوال در کنکور ۱۴۰۰ مطرح شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$S_{10} = -26 \Rightarrow \frac{10}{2}(2a + 9d) = -26 \Rightarrow 10a + 45d = -26$$

$$\frac{a_{15}}{a_6} = 6 \Rightarrow \frac{a + 14d}{a + 5d} = 6 \Rightarrow 6a + 30d = a + 14d \Rightarrow 5a + 16d = 0$$

$$\begin{cases} 10a + 45d = -26 \\ 5a + 16d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + 45d = -26 \\ -10a - 32d = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 13d = -26 \Rightarrow d = -2$$

$$5a + 16(-2) = 0 \Rightarrow 5a = 32 \Rightarrow a = 6/5$$

$$a_{11} = a + 10d = 6/5 + 10(-2) = -13/5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

Homework (2)

- ۱ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 3^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۳۶۴ شود؟
- ۲ در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول $\frac{5}{4}$ برابر مجموع سه جمله اول آن دنباله است. قدر نسبت را بیابید.
- ۳ در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۱۰ و مجموع ۵ جمله بعدی برابر ۳۵ است، مجموع بیست جمله اول دنباله را به دست آورید.
- ۴ در دنباله حسابی $1, 2, 5, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟
- ۵ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند، چقدر می‌شود؟
- ۶ حداقل چند جمله از دنباله هندسی $1, 4, 16, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟
- ۷ طول ضلع مربعی یک متر است، ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم، پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ می‌شود؟
- ۸ به ازای یک مقدار x ، اعداد $x, x, x, 8 - x, x, 12 + x$ ، به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی‌اند. نسبت $\frac{S_8}{S_4}$ کدام است؟ (S_n) مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

$$\frac{82}{81} \quad (2)$$

$$\frac{26}{27} \quad (4)$$

$$\frac{80}{81} \quad (1)$$

$$\frac{28}{27} \quad (3)$$

- ۹ اگر $4 + 3x, x^2, 3x + 2$ تشکیل یک دنباله حسابی صعودی (افزایشی) بدهند، مجموع بیست جمله اول آن کدام است؟

$$587/5 \quad (2)$$

$$627/5 \quad (4)$$

$$527/5 \quad (1)$$

$$687/5 \quad (3)$$

- ۱۰ در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

$$8 \quad (2)$$

$$9 \quad (4)$$

$$7/5 \quad (1)$$

$$8/5 \quad (3)$$

۱۱

در یک دنباله هندسی غیرثابت، مجموع هشت جمله اول، $\frac{17}{16}$ برابر مجموع چهار جمله اول آن دنباله است. نسبت جمله هفتم به جمله پنجم کدام است؟ (جملات دنباله همگی مثبت هستند.)

- | | |
|-------------------|--------------------|
| (۱) $\frac{1}{2}$ | (۲) $\frac{1}{4}$ |
| (۳) $\frac{1}{8}$ | (۴) $\frac{1}{16}$ |

۱۲

در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، حاصل ضرب سه جمله ابتدایی ۲۱۶ و جمله چهارم $\frac{3}{4}$ می باشد، حاصل جمع ده جمله اول آن کدام است؟

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (۱) $\frac{1023}{128}$ | (۲) $\frac{3069}{128}$ |
| (۳) $\frac{1023}{256}$ | (۴) $\frac{3069}{256}$ |

۱۳

مقدار x از معادله $x = 6560 + \dots + 54 + 18 + 6 + 2$ کدام است؟

- | | |
|----------|----------|
| (۱) ۴۳۷۴ | (۲) ۶۵۶۱ |
| (۳) ۳۴۷۴ | (۴) ۵۶۶۱ |

۱۴

مربعی به طول ضلع ۲cm مفروض است. اگر اوساط اضلاع مربع را به هم متصل کنیم و این را همچنان ادامه دهیم، مجموع مساحت های ۱۰ مربع اول به وجود آمده کدام است؟ (مربع به طول ضلع ۲، مربع اول در نظر گرفته شود.)

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| (۱) $\frac{511}{64}$ | (۲) $\frac{1023}{256}$ |
| (۳) $\frac{511}{128}$ | (۴) $\frac{1023}{128}$ |

۱۵

تعداد جملات یک دنباله هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن چهار برابر جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (۱) ۳ | (۲) ۲ |
| (۳) $\frac{1}{2}$ | (۴) $\frac{2}{3}$ |

۱۶

اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ مجموع اعداد واقع در دسته نهم کدام است؟

- | | |
|----------|----------|
| (۱) ۱۲۴۱ | (۲) ۱۲۴۷ |
| (۳) ۱۲۵۱ | (۴) ۱۲۷۳ |

۱۷

در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول، ۳ برابر مجموع دوازده جمله اول آن است، اگر جمله پنجم ۱۴ باشد، جمله هفتم کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۲۲ | (۲) ۲۴ |
| (۳) ۲۶ | (۴) ۲۸ |

در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله نهم و یازدهم برابر ۴۰ است، مجموع نوزده جمله اول این دنباله کدام است؟

۱۸

(۲) ۲۱۰

(۱) ۱۸۰

(۴) ۳۸۰

(۳) ۳۱۰

۱۹

تویی داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد، این توپ پس از x بار برخورد به زمین $\frac{80}{3}$ متر مسافت طی می‌کند، x کدام است؟

(۲) ۵

(۱) ۶

(۴) ۳

(۳) ۴

۲۰

در یک دنباله هندسی، مجموع هفت جمله اول، شانزده برابر مجموع هفت جمله دوم آن دنباله است. جمله سی‌وپنجم این دنباله چند برابر جمله چهل‌ونهم آن است؟

(۲) ۲۵۶

(۱) ۱۲۸

(۴) ۶۴

(۳) ۵۱۲

۲۱

در یک دنباله هندسی مجموع ده جمله اول $\frac{211}{243}$ برابر مجموع پنج جمله اول آن است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۴) $-\frac{1}{5}$

(۳) $-\frac{2}{3}$

پاسخ (2) Homework

۱

$$1, 3, 9, \dots$$

$$q = 3$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\frac{(1)(1 - 3^n)}{1 - 3} = 369 \Rightarrow 3^n - 1 = 728 \Rightarrow 3^n = 729$$

$$3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$$

۲

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{\frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q}}{\frac{a_1(1 - q^3)}{1 - q}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - q^6}{1 - q^3} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{(1 - q^3)(1 + q^3)}{1 - q^3} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 1 + q^3 = \frac{5}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$S_{\Delta} = 10 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{\Delta} = 10$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{\Delta}) + (a_{\Delta} + a_{\Delta-1} + \dots + a_{10}) = 10 + 30$$

$$S_{10} = 40$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{cases} S_{\Delta} = 10 : \frac{\Delta}{2}(2a_1 + \Delta d) = 10 \Rightarrow 2a_1 + \Delta d = 4 \\ S_{10} = 40 : \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 40 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2(0) + 19(1)) = 190$$

$$S_n > 120$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\frac{n}{2}(2(-1) + (n-1)(3)) > 120$$

$$d = 3 - (-1) = 4$$

$$\frac{n}{2}(3n - 5) > 120 \Rightarrow n(3n - 5) > 240$$

$$3n^2 - 5n - 240 > 0$$

$$\Rightarrow n > 10 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \text{ حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع نمایید}$$

$$6, 12, 18, \dots \quad a_n = 6n \quad d = 6$$

$$100 \leq a_n < 1000$$

$$100 \leq 6n < 1000$$

$$\frac{100}{6} \leq n < \frac{1000}{6} \Rightarrow n = \{17, 18, \dots, 166\}$$

$$6 \text{ تعداد اعداد سه رقمی مضرب } 6 = 166 - 17 + 1 = 150$$

$$6 \text{ اعداد طبیعی سه رقمی مضرب } 6 = \{102, 108, \dots\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow S_{150} = \frac{150}{2}(2(102) + (150-1)(6)) = 82350$$

$$q = \frac{4}{1} = 4 \text{ قدرنسبت}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{1(1-4^n)}{1-4} > 500 \Rightarrow \frac{4^n-1}{3} > 500$$

$$4^n - 1 > 1500 \Rightarrow 4^n > 1501 \Rightarrow n \geq 6$$

حداقل ۶ جمله اول دنباله هندسی باید جمع شوند.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

پس از حداقل ۷ مرحله، ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود.

گزینه ۲

$$12 + x, x, 8 - x \Rightarrow x^2 = (12 + x)(8 - x) \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 & \text{غقق} \\ x = 6 & \text{دنباله نزولی: } 12, -8, 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{دنباله نزولی: } 18, 6, 2 \end{cases}$$

$$18, 6, 2 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S_8}{S_6} = 1 + q^6 \Rightarrow \frac{S_8}{S_6} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{82}{81}$$

$$2x + 3, x^2, 3x + 4$$

$$2x^2 = (2x + 3) + (3x + 4) \Rightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 : 1, 1, 1 \text{ غق ق} \\ x = \frac{7}{2} : 10, \frac{49}{2}, \frac{49}{2} \Rightarrow d = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{70} = \frac{70}{2}(2(10) + 19(\frac{9}{2})) = 10(\frac{251}{2}) = 1255$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = 15 \Rightarrow 7a_1 + 21d = 15$$

$$S_9 = (a_1 + \dots + a_7) + (a_8 + \dots + a_9) = 15 + 30 = 45$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \Rightarrow a_1 + 4d = 5$$

$$\begin{cases} 7a_1 + 21d = 15 \\ a_1 + 4d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{7}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 5 = 8$$

$$\frac{S_8}{S_7} = \frac{17}{16} \Rightarrow 1 + q^7 = \frac{17}{16} \Rightarrow q^7 = \frac{1}{16} \xrightarrow{\text{جملات دنباله مثبت}} q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_8} = q^2 = \frac{1}{4}$$

جمله اول $\frac{a}{q}$, جمله دوم a , جمله سوم aq , جمله چهارم $\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{a}{q}\right)(a)(a \cdot q) = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a_4}{a_2} = q^2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{6} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ غق}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{12\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 24\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$S_{10} = 24\left(\frac{1023}{1024}\right) = \frac{3069}{128}$$

هندسی : $2, 6, 18, \dots$ ($6^2 = 2 \times 18$)

$$q = 3$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow 6560 = \frac{2(1 - 3^n)}{1 - 3} \Rightarrow 3^n - 1 = 6560$$

$$3^n = 6561 \Rightarrow 3^n = 3^8 \Rightarrow n = 8$$

جمله هشتم:

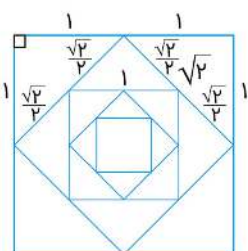
$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 2 \times 3^7 = 4374$$

$$x = 4374$$

مساحت مربع اول: $A_1 = ۴$

مساحت مربع دوم: $A_2 = ۲$

مساحت مربع سوم: $A_3 = ۱$



هندسی : $۴, ۲, ۱, \dots \Rightarrow q = \frac{1}{۲}$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{۴(1 - (\frac{1}{۲})^{10})}{1 - \frac{1}{۲}} = ۸(1 - \frac{1}{10۲۴})$$

$$S_{10} = ۸(\frac{10۲۳}{10۲۴}) = \frac{10۲۳}{۱۲۸}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ مجموع } n \text{ جمله اول}$$

قدرنسبت بین جملات فرد: $q' = q^۲$
تعداد جملات فرد:

$$m = \frac{n}{۲} : S_m = \frac{a_1(1 - q'^m)}{1 - q'} \Rightarrow S_m = \frac{a_1(1 - (q^۲)^{\frac{n}{۲}})}{1 - q^۲}$$

$$S_n = ۴S_m$$

$$\frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = ۴ \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q^۲} \Rightarrow \frac{1 - q^۲}{1 - q} = ۴ \Rightarrow 1 + q = ۴ \Rightarrow q = ۳$$

گزینه ۱

۱۶

$\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\dots$, $\{65, 66, \dots, 81\}$
دسته اول , دسته دوم , $\dots$, دسته نهم

دسته نهم یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 65$ و $d = 1$ و جمله آخر ۸۱ است، در نتیجه:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 81 = 65 + (n - 1)(1) \Rightarrow n = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(65 + 81) = 1241$$

گزینه ۱

۱۷

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_{70} = 3S_{17} \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 3(6)(2a_1 + 11d)$$

$$10a_1 + 95d = 18a_1 + 99d \Rightarrow 8a_1 + 4d = 0 \Rightarrow 2a_1 + d = 0$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 14$$

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 0 \\ a_1 + 9d = 14 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2, d = 4$$

$$a_{17} = a_1 + 16d = -2 + 64 = 62$$

گزینه ۴

۱۸

$$a_9 + a_{11} = 40 \Rightarrow a_1 + 8d + a_1 + 10d = 40 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 40$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = \frac{19}{2} \times 40 = 380$$

ارتفاع توپ قبل از X امین پرتاب:

$$h_1 = 9, h_2 = 3, h_3 = 1, \dots$$

و مسافت طی شده توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین:

$$l_1 = 18, l_2 = 6, l_3 = 2, \dots$$

$$S_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n \quad \text{قدرنسبت: } q = \frac{1}{3}$$

در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow \frac{18}{3} = \frac{18(1 - (\frac{1}{3})^n)}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3^n} = \frac{18}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^2} \Rightarrow n = 2$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

(مجموع هفت جمله دوم) $= 16$ = مجموع هفت جمله اول

$$\Rightarrow a_1 + \dots + a_7 = 16(a_8 + \dots + a_{14})$$

$$\frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q} = 16 \left(\frac{a_8(1 - q^7)}{1 - q} \right) \Rightarrow a_1 = 16a_8$$

$$a_1 = 16(a_1 q^7) \Rightarrow q^7 = \frac{1}{16}$$

نکته: در دنباله هندسی داریم: $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$

$$\frac{a_{35}}{a_{49}} = q^{35-49} = q^{-14} = \frac{1}{q^{14}} = \left(\frac{1}{q^7}\right)^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256} = \frac{1}{256}$$

نکته: در دنباله هندسی داریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = 1 + q^5 \Rightarrow 1 + q^5 = \frac{211}{243} \Rightarrow q^5 = -\frac{32}{243} \Rightarrow q = -\frac{2}{3}$$

۴ قدر مطلق نقطه M نسبت به مرکز O هت اگر فاصله M، M' از O بخوانیم
آن را فاصله |x| غایتش می دهیم که فاصله x از صفر است.
فاصله عددی است مثبت که حد اقل صفری شود فاصله منفی نداریم.

مثبت خودش
منفی قرینش

درس ۴: قدر مطلق و ویژگی های آن

بجوابه: $|x - a|$

فاصله x از a

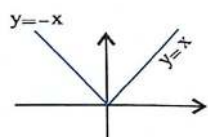
فاصله x از -2: $|x - (-2)| = |x + 2|$

(ویژه حسابان فصل ۱ درس ۴ و کنکور هر دو رشته)

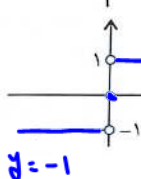
$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

قدر مطلق عدد حقیقی x که با |x| نمایش داده می شود، در اصل فاصله آن عدد بر روی محور طول ها تا مبدأ مختصات می باشد که همواره عددی مثبت است. به عنوان مثال $|5| = 5$ و $|-2| = 2$ است.

تابع $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می نامند که به فرم های زیر نمایش داده می شود:



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = x \cdot \text{sgn}(x) = \max(x, -x) = \sqrt[n]{x^n} \sqrt[n]{x^n}$$



$$y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x^2} = |x| \quad \sqrt{17^2} = 17$$

نکته: تابع $\text{sgn}(x)$ (تابع علامت) به صورت مقابل تعریف می شود:

تعریف: به ازای هر $x \in [2, +\infty)$ مقدار عبارت $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ را تعیین کنید.

$$\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2x+1)^2} = |x-2| - |2x+1| \xrightarrow{x \geq 2} = x-2 - (2x+1) = -x-3$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-1| - |\sqrt{3}+1| + |\sqrt{3}-2| = (\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1) + (2-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

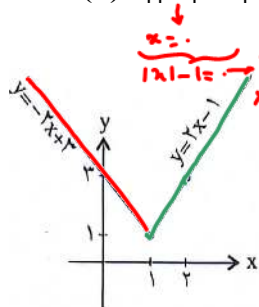
$$\sqrt{3} = 1,732$$

تعریف: ضابطه توابع زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. (تابع چند ضابطه ای)

$$f(x) = 2|x-1| + 1 \quad (\text{الف}) \quad f(x) = ||x|-1| \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = 2|x-1| + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) + 1 = 2x-1 & x \geq 1 \\ 2(-(x-1)) + 1 = -2x+3 & x < 1 \end{cases}$$

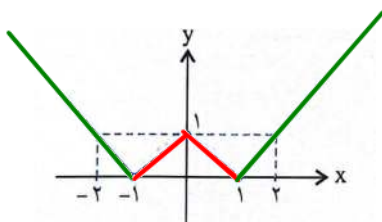


$$\begin{matrix} y=x & y=x^3 & y=x^2=|x| \\ y=|x| & y=|x^3| & y=|x^2| \end{matrix}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = |-x-1| = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$$y = |x-1|$$

خواص قدر مطلق

۱) $|x| \geq 0$

۲) $|-x| = |x|$

۳) $|xy| = |x||y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

$|x+y| \leq |x|+|y|$ $|x-y| \geq |x|-|y|$

$|x^n| = |x|^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\xrightarrow{n=2k} |x^{2k}| = |x|^{2k} = x^{2k}$

۵) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

$|2x-1| = |x|$ $\xrightarrow{\text{حالت ۱}} \begin{cases} 2x-1=x \rightarrow x=1 \\ 2x-1=-x \rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$

۶) $|x| = a \begin{cases} \xrightarrow{a>0} x = \pm a \\ \xrightarrow{a<0} \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

$|x|=7 \rightarrow x=7$ یا -7 $|x|=-9 \rightarrow x \in \emptyset$ $\xrightarrow{\text{نشان نداد خروجی ندرستی شغل}}$

تمرین: به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt{x^2-2x+1} = 1-x$ همواره برقرار است؟

$x \leq -1$ (۴)

$x \leq 1$ (۳)

$x \geq 1$ (۲)

$-1 < x < 1$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

از آن جا که از قدر مطلق قرینه بیرون آمده است، پس عبارت داخل قدر مطلق کوچک تر یا مساوی صفر بوده است:

$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

نکته: فاصله دو نقطه a و b بر روی محور x ها برابر است با: $|a-b|$ **فاصله را با قدر مطلق نشان می دهیم.**

تمرین: اعدادی روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه به طول ۱ و -3 برابر ۵ باشد.

$|x-1| + |x-(-3)| = 5 \Rightarrow |x-1| + |x+3| = 5$

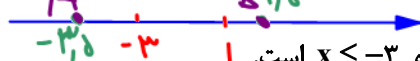
پاسخ: ابتدا با تعیین علامت خود را از شرط در حلقه فرض می کنیم. سپس در هر بازه معادله را حل می کنیم و جواب را با فرض چک می کنیم.

x	-3	1
x-1	-	-
x+3	-	+

$x \leq -3: -x+1-x-3=5 \Rightarrow -2x=7 \Rightarrow x=\frac{-7}{2} = -3.5$ $\checkmark$

$-3 \leq x \leq 1: -x+1+x+3=5 \Rightarrow 4=5 \Rightarrow$ غیر قابل قبول

$x \geq 1: x-1+x+3=5 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} = 1.5$ $\checkmark$



• دقت کنید که جواب هر ضابطه، حتماً باید در بازه مورد نظر باشد مثلاً $x = \frac{-7}{2}$ متعلق به بازه $x \leq -3$ است.

$|U| \leq a \xrightarrow{a>0} -a \leq U \leq a \Leftrightarrow U^2 \leq a^2$

نکته: نامعادلات شامل قدر مطلق:

$|U| \geq a \xrightarrow{a>0} U \geq a \cup U \leq -a \Leftrightarrow U^2 \geq a^2$

$|x-1| < 3 \rightarrow -3 < x-1 < 3 \rightarrow -2 < x < 4$
 $|x-1| > 7 \rightarrow x-1 < -7 \text{ یا } x-1 > 7 \rightarrow x < -6 \text{ یا } x > 8$

تمرین: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

پ) $|x^3-8| \leq |x^2+2x+4|$

ب) $(x-1)^2 - |x-1| - 2 \leq 0$ $\xrightarrow{\text{فرض: } t=x-1} t^2 - |t| - 2 \leq 0$

الف) $|x^2-1| = 2$

ج) $|(x-1)-4| \leq 3$

ث) $|x-1| \leq |x+2|$

ت) $|x-4| + |x^2+3x+2| = 0$

پاسخ:

الف) $|x| = a \xrightarrow{a>0} x = \pm a \Rightarrow x^2-1 = \pm 2 \begin{cases} x^2=3 \Rightarrow |x|=\sqrt{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ x^2=-1 \text{ غ.ق.ی} \end{cases}$ **جواب ۲**

ب) $|x|^{2k} = |x^{2k}| = x^{2k}$, $|x| \leq a \xrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a \Rightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 2 \leq 0$

$(x-1)^2 = |x-1|^2 = t^2$

$t^2 - t - 2 \leq 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$

ادامه از
مغیبت

$$-1 < |x-1| \leq 2 \rightarrow x \in \mathbb{R} \text{ (ب)}$$

$$|x-1| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$[-1, 3]: (x-1) \text{ (اثبت)}$$

$$\Rightarrow (|x-1|-2)(|x-1|+1) \leq 0 \Rightarrow |x-1|-2 \leq 0 \Rightarrow |x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$x-1=t \quad t^2-t-2 \leq 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) \leq 0$$

$$|xy| = |x||y| \Rightarrow |x^2-8| = |(x-2)(x^2+2x+4)| \leq |x^2+2x+4| = x^2+2x+4$$

$$|x^2-8| \leq x^2+2x+4$$

از آن جا که عبارت x^2+2x+4 دارای $\Delta < 0$ و $a > 0$ ، پس همواره مثبت است و از قدرمطلق خارج می شود.

$$\Rightarrow |x-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

جمع چند عبارت همواره مثبت زمانی صفر است که تک تک آن ها صفر باشند و دارای ریشه مشترک باشند.

$$\left. \begin{array}{l} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-1, -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ریشه مشترک}} x=-2$$

برای حذف قدرمطلق می توان دو طرف رابطه را به توان ۲ رساند.

$$(x-1)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2-2x+1 \leq x^2+4x+4 \Rightarrow -6x \leq 3 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$|x-1|-4 \leq 3 \Rightarrow -3 \leq |x-1|-4 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq |x-1| \leq 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 7 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8 \\ 1 \leq 1-x \leq 7 \Rightarrow -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

تعریف: حدود a را طوری بیابید که معادله $|x-1|+|a-1|=2$ دارای جواب نباشد.

$$|x-1|=2-|a-1| \xrightarrow{\text{عدد منفی}} 2-|a-1| < 0 \Rightarrow |a-1| > 2$$

$$\Rightarrow a-1 > 2 \cup a-1 < -2 \Rightarrow a > 3 \cup a < -1$$

$$\begin{cases} xy \geq 0 \Rightarrow |x+y| = |x|+|y| \\ xy < 0 \Rightarrow |x+y| < |x|+|y| \end{cases}$$

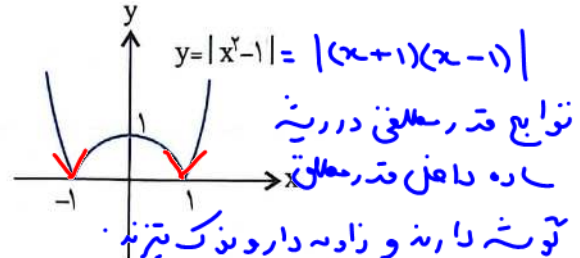
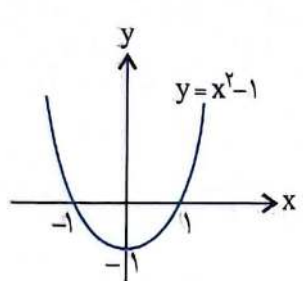
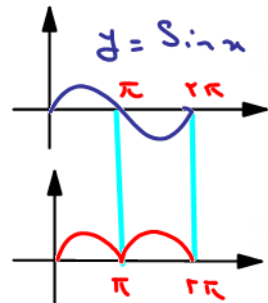
$$|x^2+2x-3| = |x^2-1| + |2x-2|$$

$$|a+b| = |a|+|b| \Rightarrow ab \geq 0 \Rightarrow (x^2-1)(2x-2) \geq 0 \Rightarrow 2(x-1)^2(x+1) \geq 0 \Rightarrow (x+1) \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

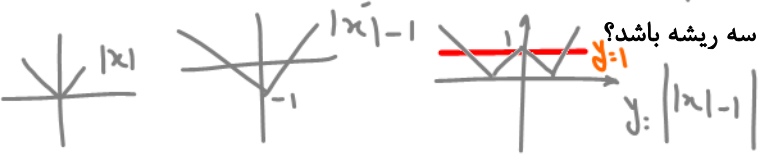
$$(x+1)(x-1) \quad 2(x-1)$$

نمودارهای قدرمطلق

برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ ابتدا $f(x)$ را رسم کرده، سپس بخشی از نمودار که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.



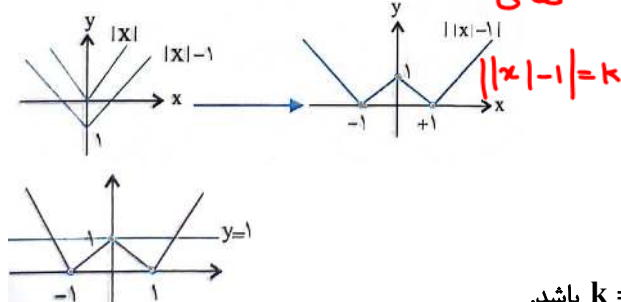
رسم: یکی از روش های حل معادله تبدیل معادله به تابع قابل رسم است. توابع ۲ طرفی را در ریب دستگاه مختصات می کشیم مقدار نقاط برخورد را به دست می آوریم.



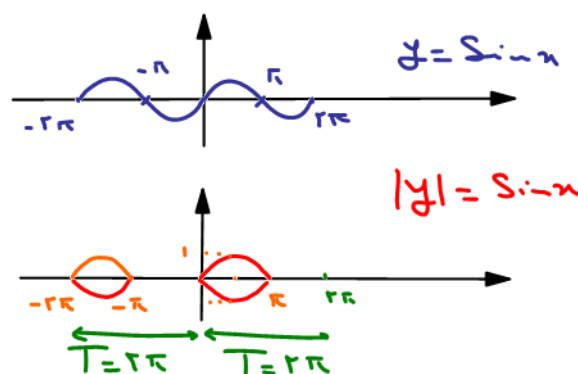
تعریف: مقدار k چه قدر باشد تا معادله $||x|-1|=k$ دارای سه ریشه باشد؟
پاسخ: $k=1$

بحث
ردي
تعداد
جواب
هاي

if $\begin{cases} k < 0 \\ k > 1 \\ k = 1 \\ 0 < k < 1 \end{cases}$



نکته رسم $|y| = f(x)$ با داشتن $y = f(x)$

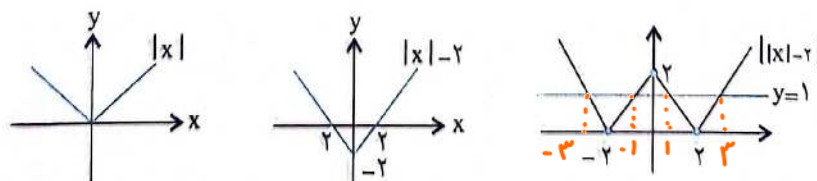


بنابراین برای این که خط افقی $y = k$ نمودار را در ۳ نقطه قطع کند باید $k = 1$ باشد.

تمرین: ابتدا نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید. سپس معادله $f(x) = 1$ را به روش هندسی و جبری حل نمایید. (تمرین کتاب درسی)

$|u| = k \xrightarrow{k > 0} u = \pm k$

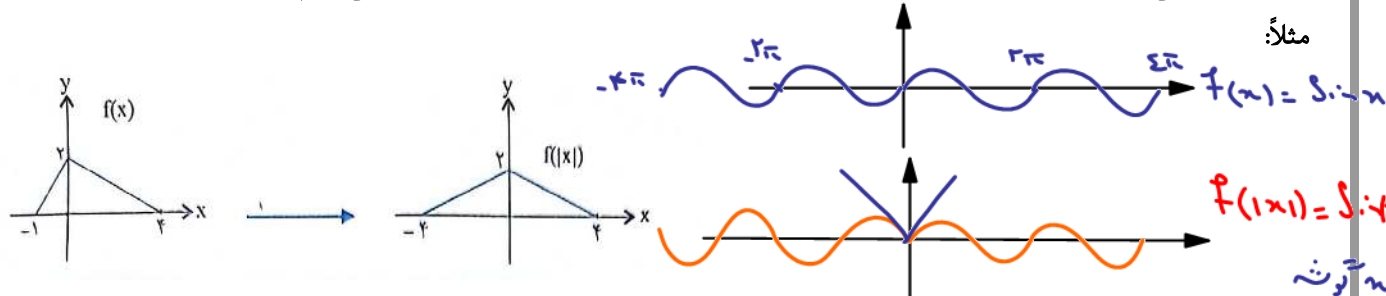
پاسخ:



معادله دارای ۴ جواب است که به روش جبری جوابهای معادله عبارتاند از:

$$||x| - 2| = 1 \begin{cases} |x| - 2 = 1 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3 \\ |x| - 2 = -1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

برای رسم نمودار تابع $f(|x|)$ ابتدا $f(x)$ را رسم کرده، سپس بخشی از نمودار که سمت چپ محور y می باشد را حذف کرده و به جای آن قرینه بخشی از نمودار که سمت راست محور y قرار دارد را نسبت به محور y جایگزین می کنیم:

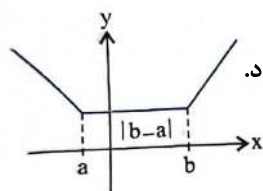


نمودار توابع خاص

(۱) تابع گلدان $y = |x - a| + |x - b|$

نمودار تابع به فرم روبه رو می باشد که دارای خصوصیات زیر است:

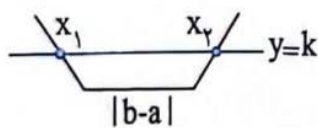
- کف گلدان $|b - a|$ است که برای تعیین آن کافی است ریشه یکی از قدرمطلقها را به دلخواه در تابع قرار داد.
- دارای دو خط با شیب ۲ و -۲ است.



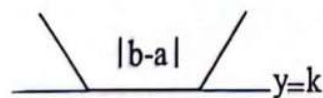
- محور تقارن آن خط عمودی واقع در وسط ریشهها به معادله $x = \frac{a + b}{2}$ است.

- برد تابع گلدانی $(|b - a|, +\infty)$ است.

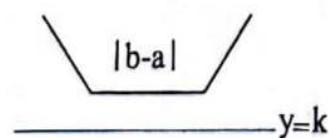
نکته: بحث در تعداد جوابهای معادلات شامل گلدان: $|x - a| + |x - b| = k$



الف) اگر $k > |b-a|$ باشد، دارای دو جواب است:



ب) اگر $k = |b-a|$ باشد، معادله دارای بی‌شمار جواب $(a \leq x \leq b)$ است:



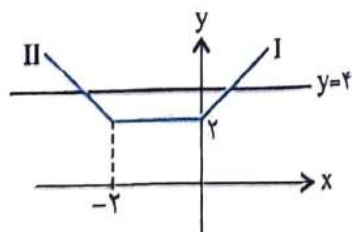
پ) اگر $k < |b-a|$ باشد معادله دارای جواب نیست:

تمرین: حدود m را طوری بیابید که معادله $|x-2| + |x+1| = m-1$ دارای دو جواب باشد.

پاسخ: $|b-a| = |2-(-1)| = 3 \Rightarrow m-1 > 3 \Rightarrow m > 4$

تمرین: جواب‌های معادله $|x+2| + |x| = 4$ را تعیین کنید.

پاسخ: از آن‌جا که خط $y=4$ بالاتر از کف گلدان می‌باشد پس دارای دو جواب است که برای تعیین جواب‌ها کافی است معادله خطوط مورب گلدان را با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق تعیین کنیم.

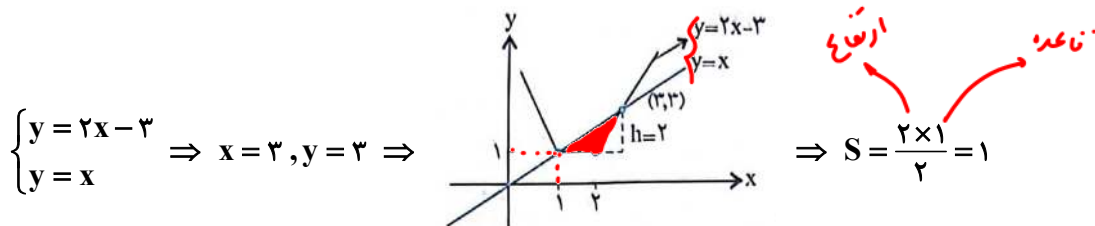


I) $x > 0 \Rightarrow y = x+2+x = 2x+2 \Rightarrow 2x+2=4 \Rightarrow x=1$

II) $x < -2 \Rightarrow y = -x-2-x = -2x-2 \Rightarrow -2x-2=4 \Rightarrow x=-3$

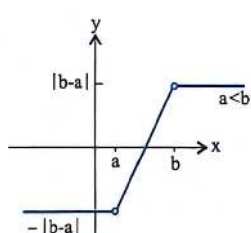
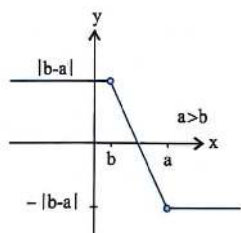
تمرین: مساحت محدود به منحنی نمودار تابع $f(x) = |x-2| + |x-1|$ و خط $y=x$ چه قدر است؟

پاسخ: ابتدا نمودار تابع گلدان را رسم کرده که برای تعیین مساحت محصور بین منحنی و خط $y=x$ ، به معادله شاخه سمت راست گلدون احتیاج داریم. از آن‌جا که $x > 2$ است، معادله خط مذکور به صورت $y=2x-3$ است؛ پس محل تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم:



(2) تابع سرسره: $y = |x-a| - |x-b|$

نمودار تابع به فرم زیر می‌باشد که دارای خصوصیات زیر است:



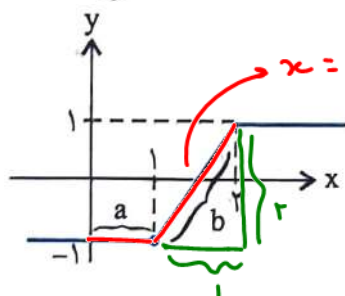
• نمودار این توابع متشکل از دو نیم خط و یک پاره خط با شیب $+2$ یا -2 است.

• برد تابع $|b-a| \leq x$ است.

• مرکز تقارن، نقطه‌ای روی محور x ‌ها و به طول $\frac{a+b}{2}$ است.

تمرین: طول خط شکسته نمودار تابع $y = |x-1| - |x-2|$ در بازه $0 \leq x \leq 2$ چند است؟

پاسخ:

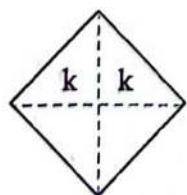


$$a = 1$$

$$b^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow a + b = 1 + \sqrt{2}$$

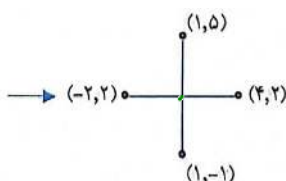
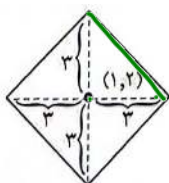
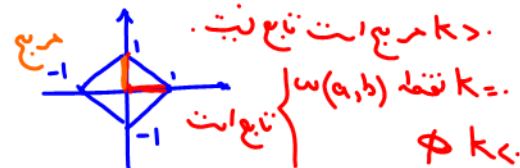
۳) تابع مربعی: $\omega(a, b)$

توابع به فرم $|x - a| + |y - b| = k$ در صفحه مختصات، محیط یک مربع به مرکز (a, b) و قطر $2k$ و مساحت $2k^2$ است.



$$\omega(1, 1) = |x + y| = 1$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 & x + y = 1 \rightarrow y = -x + 1 \\ x \geq 0, y < 0 & x - y = 1 \rightarrow y = x - 1 \\ x < 0, y < 0 & -x - y = 1 \rightarrow y = -x - 1 \\ x < 0, y \geq 0 & -x + y = 1 \rightarrow y = x + 1 \end{cases}$$



$$\omega(1, 2)$$

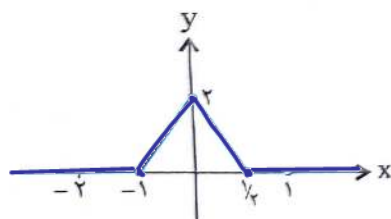
در توابع مربعی به فرم $|mx - a| + |m'y - b| = k$ اگر $m \neq m'$ باشد، نمودار به صورت لوزی به مرکز $(\frac{a}{m}, \frac{b}{m'})$ تبدیل می‌شود.

۴) تابع به صورت مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق درجه اول:

نمودار تابع $y = b_1 |x - a_1| + b_2 |x - a_2| + \dots + b_n |x - a_n|$ متشکل از دو نیم‌خط و $(n - 1)$ پاره‌خط می‌باشد. برای رسم شکل ابتدا مقدار تابع به ازای ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق را تعیین کرده و از به هم وصل کردن این نقاط، $(n - 1)$ پاره‌خط حاصل می‌شود و برای تعیین دو نیم‌خط ابتدا و انتهای شکل کافی است عددی به دلخواه بعد از آخرین ریشه و قبل از اولین ریشه در تابع جای گذاری شود.

تمرین: نمودار تابع $y = |x + 1| + |2x - 1| - 3|x|$ را رسم کنید.

پاسخ:



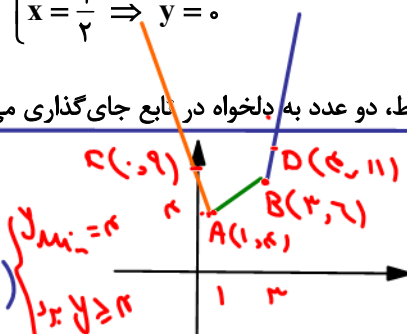
$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

x	-2	1
y	0	0

برای تعیین دو نیم‌خط، دو عدد به دلخواه در تابع جای گذاری می‌شود.

$$y = |2x - 1| + |3x - 1|$$

$$C(0, 1), B(1, 2), A(1, 1), D(2, 1)$$



Homework (1)

۱ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x - 1|$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲ مجموع جوابهای معادله $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$
(۲) ۴
(۳) $\frac{16}{3}$
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴ نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به طرف Xهای منفی و یک واحد به طرف Yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $-3/5$
(۲) -3
(۳) $-2/5$
(۴) -2

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ اگر رابطه $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیرصفر X و Y و Z چگونه اند؟

- (۱) مساوی هم
(۲) هم علامت
(۳) مثبت
(۴) منفی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

پاسخ (1) Homework

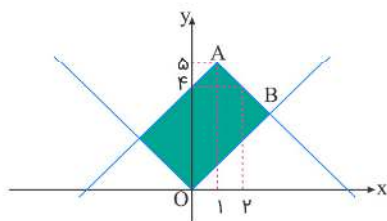
گزینه ۴

۱

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = 5 - x - 1 $	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = x $	۱	۰	۱



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$5 - |x - 1| = |x| \Rightarrow |x| + |x - 1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x + x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \\ -x - x + 1 = 5 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(3, 3)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$|BO| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S = |AB| \times |BO| = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$$

معادله $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

x	-2	$\frac{1}{2}$
$2x-1$	-	-
$x+2$	-	+

$$(1) : x \leq -2 \Rightarrow -2x + 1 - x - 2 = 3 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \notin (-\infty, -2]$$

$$(2) : -2 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow x = 0 \in (-2, \frac{1}{2}]$$

$$(3) : x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (\frac{1}{2}, +\infty)$$

پس معادله دو جواب $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ دارد و مجموع آن‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

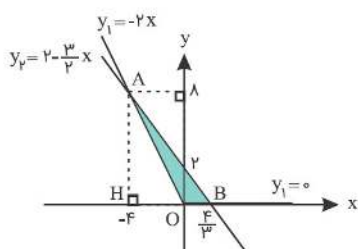
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{2}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\triangle ABO$ برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

اگر نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم، معادله به صورت $y = \left| \frac{1}{2}(x + 4) \right| - 2$ تبدیل می‌شود و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم معادله به صورت $y = \left| \frac{1}{2}(x + 4) \right| - 2 + 1$ تبدیل می‌شود که برای محاسبه محل تقاطع آنها، دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y_1 = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \\ y_2 = \left| \frac{1}{2}(x + 4) \right| - 1 \end{cases} \xrightarrow{y_1=y_2} \frac{1}{2}|x| - 2 = \frac{1}{2}|x + 4| - 1 \xrightarrow{\times 2} |x| - |x + 4| = 2$$

$$x < -4 \Rightarrow -x + x + 4 = 2 \Rightarrow 4 = 2 \text{ غ.ق.ق}$$

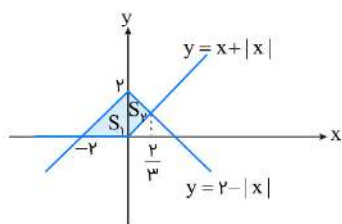
$$-4 \leq x \leq 0 \Rightarrow -x - x - 4 = 2 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$$

$$x > 0 \Rightarrow x - x - 4 = 2 \Rightarrow -4 = 2 \text{ غ.ق.ق}$$

تذکر: به جای حل معادله $|x| - |x + 4| = 2$ می‌توانیم گزینه‌ها را در این معادله امتحان کنیم که گزینه "۲" یعنی $x = -3$ در معادله صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

طبق نامساوی مثلثی داریم: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $|a + b| \leq |a| + |b|$ و تساوی در صورتی برقرار است که $ab \geq 0$ باشد. یعنی باید a و b هر دو هم علامت باشند تا تساوی برقرار شود.

حال اگر این مطلب را به رابطه $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ تعمیم دهیم و با توجه به این که x و y و z سه عدد غیر صفرند، باید x و y و z هم علامت باشند تا تساوی برقرار شود. (البته جواب سؤال را با عددگذاری و امتحان گزینه ها هم می‌توانستیم به دست آوریم).

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

Homework (2)

۱ نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

دو معادله زیر را حل کنید.

۲ $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

۳ $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

۴ مجموع ریشه‌های معادله $||x-1| - 2| = 1$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۶ (۴) ۸

۵ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a \cdot b > 0$ ، کدام گزینه همواره برقرار نیست؟

(۱) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (۲) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

(۳) $|a - b| = |a| - |b|$ (۴) $|a + b| = |a| + |b|$

۶ مجموعه جواب نامعادله $|1-x| + |2x+1| > |3x|$ کدام است؟

(۱) $x < 1$ (۲) $-\frac{1}{2} < x < 1$

(۳) $-\frac{1}{2} < x < 0$ (۴) $x > -\frac{1}{2}$

۷ جواب نامعادله $|\frac{2x-1}{x-3}| > 1$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - [-2, \frac{4}{3}], x \neq 3$ (۲) $\mathbb{R} - (-2, \frac{4}{3}), x \neq 3$

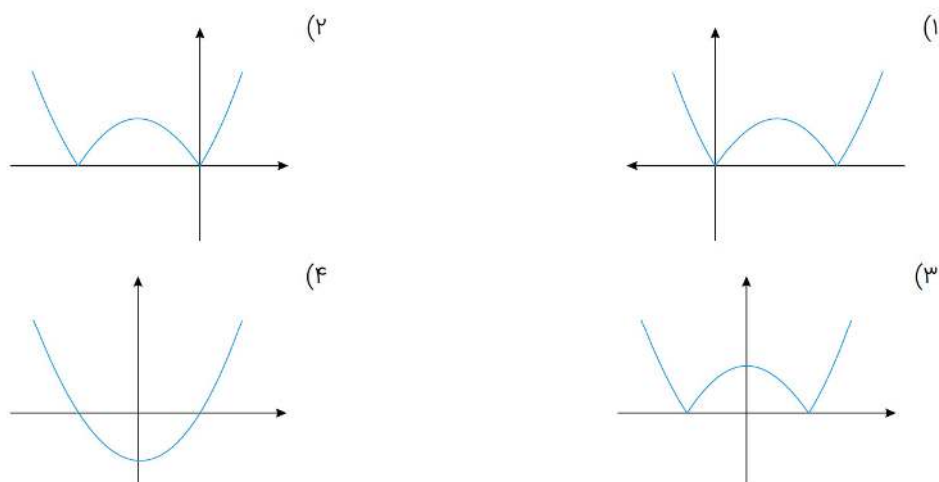
(۳) $[-2, 3]$ (۴) $(-\infty, \frac{4}{3}]$

۸ در مجموعه جواب نامعادله $(x-4) \cdot |x+1| < 3x-9$ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۵ (۴) بی‌شمار

۹ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ کدام است؟



۱۰ تعداد ریشه‌های معادله $|x^2 - 2x| = 2$ کدام است؟

- (۱) یک ریشه
(۲) دو ریشه
(۳) سه ریشه
(۴) بدون ریشه

۱۱ مساحت بین نمودار $y = 9 - |x|$ و محور x ‌ها کدام است؟

- (۱) ۸۱
(۲) ۱۶۲
(۳) $\frac{۸۱}{۲}$
(۴) ۲۷

۱۲ مساحت بین نمودار $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$ و خط $y = ۵$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۱۳ مجموع ریشه‌های معادله $||x - ۲| - ۱| = ۳$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۱۴ در مجموعه جواب نامعادله $۲ < |2x - ۱| < ۵$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) بدون عدد صحیح

۱۵ مساحت محدود بین دو نمودار تابع $y = |x - ۱|$ و $y = ۲ - |x|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۳}{۲}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{۵}{۲}$
(۴) ۳

۱۶ نسبت حاصل ضرب ریشه‌های معادله $||x - 2| - 3| = 2$ به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{-48}{7}$ (۲) $\frac{-63}{8}$
(۳) $\frac{63}{8}$ (۴) $\frac{48}{7}$

۱۷ به ازای هر $x < -1$ حاصل $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2x - 1$
(۳) -3 (۴) $-2x + 1$

۱۸ معادله $|3x - 9| = 7 - x$ را حل نمایید.

۱۹ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = |x - 1| + 3x - 2$$

۲۰ معادله زیر را حل کنید.

$$|5x - 2| = |3x - 1| + |1 - 2x|$$

۲۱ معادله $|x^2 - 1| = 3$ را به روش هندسی حل کنید.

۲۲ معادلات زیر را حل نمایید.

$$|x| = x^2 - 2x$$

الف

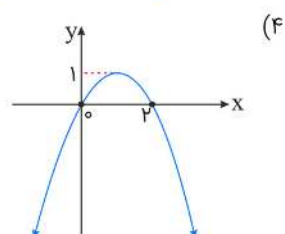
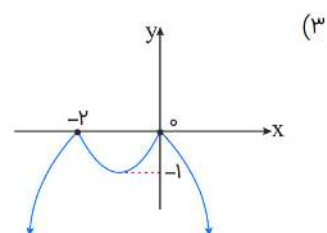
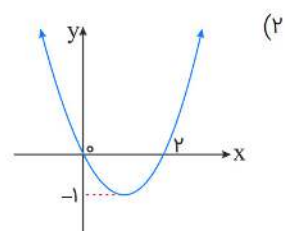
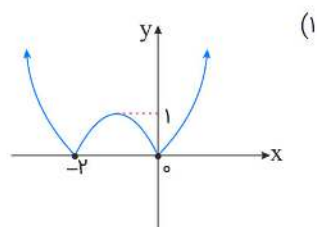
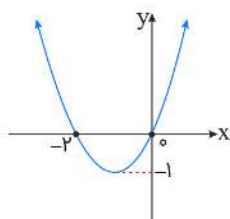
$$\sqrt{3x + 1} + x = 3$$

ب

۲۳ به ازای چه مقداری از k معادله $|x - 2| - |x + 3| = k$ دارای بی‌شمار جواب است؟

- (۱) ۵ (۲) -5
(۳) ± 5 (۴) هیچ‌کدام

۲۴ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $-|f(x)|$ به کدام صورت است؟



۲۵ معادله $|1 - x| = x + 1$ دارای چند ریشه مثبت است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی شمار

۲۶ معادله $x^2 + 3x + 3 = |x - \frac{3}{4}|$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) صفر
(۲) یک
(۳) دو
(۴) بی شمار

۲۷ حاصل عبارت $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۳/۵
(۳) ۴
(۴) ۴/۵

۲۸ مجموعه جواب نامعادله $|x| > x^2 - 2$ کدام است؟

(۲) $(-2, 2)$

(۱) $(-1, 1)$

(۴) $(-2, 1)$

(۳) $(-1, 2)$

۲۹ به ازای اعداد حقیقی a و b ، کدام گزینه نادرست است؟

(۲) $|a| - |b| \leq |a - b|$

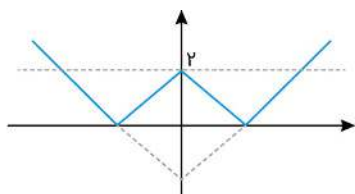
(۱) $|a| + |b| \leq |a + b|$

(۴) هیچ کدام

(۳) $\sqrt{a^2} = |a|$

پاسخ (2) Homework

۱



چهار جواب دارد. $y = 1 \Rightarrow$

$$||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \times 1 = 3 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 1 \times 1 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$x > 3 : \frac{2-x}{x-3} = 1 \Rightarrow 2-x = x-3 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ غ.ق.ق}$$

$$x < 3 : \frac{2-x}{3-x} = 1 \Rightarrow 2-x = 3-x \Rightarrow 2 = 3 \text{ غ.ق.ق}$$

$$|x-1| = 2x+1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 : x-1 = 2x+1 \Rightarrow x = -2 \text{ غ.ق.ق} \\ x < 1 : -x+1 = 2x+1 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$

گزینه ۲

$$\begin{cases} |x-1| - 2 = 1 \Rightarrow |x-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ x-1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \\ |x-1| - 2 = -1 \Rightarrow |x-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ x-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 4 + (-2) + 2 + 0 = 4$$

گزینه ۳

گزینه‌های "۱"، "۲" و "۴" برقرار و صحیح هستند، ولی گزینه "۳" مثال نقض دارد.

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \xrightarrow{a \cdot b > 0} |a-b| = |a| - |b| \Rightarrow |2-5| = |2| - |5| \Rightarrow 3 \neq -3$$

روش اول: امتحان گزینه‌ها:
گزینه "۴"

$$x = 1 : 0 + 3 > 3 \Rightarrow \text{حذف} \Rightarrow \text{غقق}$$

گزینه "۱"

$$x = -1 : 2 + 1 > 3 \Rightarrow \text{حذف} \Rightarrow \text{غقق}$$

$$x = 0 : 1 + 1 > 0 \Rightarrow \text{حذف می‌شود} \Rightarrow \text{قق}$$

روش دوم: خواص قدرمطلق

$$|a - b| = |b - a| \Rightarrow |1 - x| = |x - 1|$$

$$\underbrace{|x - 1|}_a + \underbrace{|2x + 1|}_b > \underbrace{|3x|}_{a+b}$$

بنا به خاصیت:

$$|a| + |b| > |a + b| \Rightarrow a \cdot b < 0$$

$$(x - 1) \cdot (2x + 1) < 0$$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
(x-1)(2x+1)	+	o	-	o	+
		$\frac{\epsilon}{2}$			
		$(-\frac{1}{2}, 1)$			

$$\frac{|2x-1|}{|x-3|} > 1 \xrightarrow{x \neq 3} |2x-1| > |x-3|$$

به توان ۲ برسانید:

$$(2x-1)^2 > (x-3)^2 \quad (I)$$

$$4x^2 - 4x + 1 > x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 > 0 \Rightarrow x < -2 \cup x > \frac{4}{3} \quad (II)$$

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$3x^2 + 2x - 8$	+	○	-	○	+
		ع		ع	

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} (-\infty, -2) \cup (\frac{4}{3}, +\infty) - \{3\} \text{ یا } \mathbb{R} - [-2, \frac{4}{3}], x \neq 3$$

چون منظور سؤال اعداد طبیعی نامعاده هستند، پس باید محدوده $x > 0$ را در نظر بگیرید، در نتیجه عبارت داخل قدر مطلق مثبت خواهد شد و قدر مطلق برداشته می‌شود:

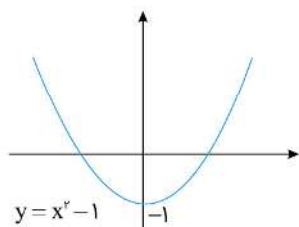
x		1		5	
$x^2 - 6x + 5$	+	○	-	○	+
		ع		ع	

$$(x-4) \cdot (x+1) < 3x-9 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 3x - 9$$

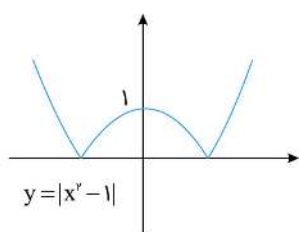
$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$(1, 5) \Rightarrow \text{اعداد طبیعی} = \{2, 3, 4\}$$

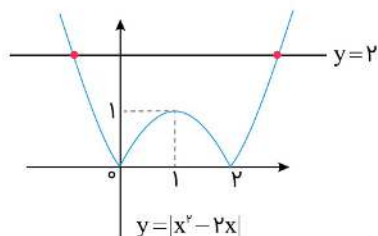
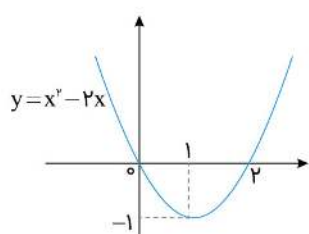
مرحله اول: نمودار x^2 را یک واحد در راستای قائم پایین بیاورید:



مرحله دوم: آن قطعه از منحنی که زیر محور x ها است را به صورت قرینه نسبت به محور x ها بالا بیاورید:



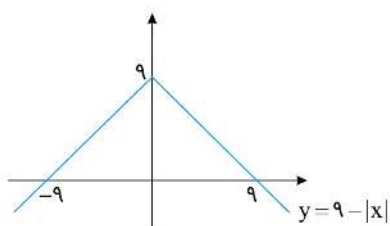
روش هندسی:



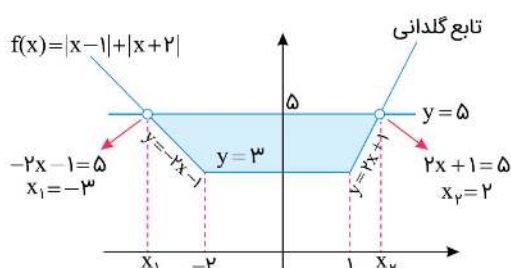
دو ریشه دارد. $|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow$

شکل حاصل یک مثلث است:

$$y = 0 : 9 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{cases}$$



$$S = \frac{9(18)}{2} = 81$$



$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times (\text{مجموع دو قاعده})}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دوزنقه}} = \frac{(5 + 3)(2)}{2} = 8$$

$$||x - 2| - 1| = 3$$

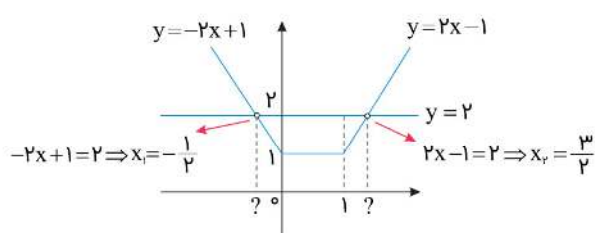
$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 2| - 1 = 3 \Rightarrow |x - 2| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \Rightarrow x_1 = 6 \\ x - 2 = -4 \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases} \\ |x - 2| - 1 = -3 \Rightarrow |x - 2| = -2 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 6 + (-2) = 4$$

$$2 < |2x - 1| < 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 < 2x - 1 < 5 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 3 \\ \text{یا} \\ -5 < 2x - 1 < -2 \Rightarrow -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 3)$$

اعداد صحیح در جواب نامعادله: $\{-1, 2\}$



$$y_1 = y_2 \Rightarrow 2 - |x| = |x - 1|$$

$$\underbrace{|x - 1| + |x|}_{\text{تابع گلدانی}} = \underbrace{2}_{\text{تابع ثابت}}$$

$$\text{مساحت : } S = \frac{(2+1)(1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$|x - 2| - 3 = 2 \Rightarrow |x - 2| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x_1 = 7 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$|x - 2| - 3 = -2 \Rightarrow |x - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x_3 = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 7(-3)(3)(1) = -63$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = 7 + (-3) + (3) + 1 = 8$$

$$\text{نسبت} = \frac{-63}{8}$$

$$A = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$$

$$A = |x+1| - |x-2| \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{x < -1} A = -(x+1) + (x-2)$$

$$A = -x-1+x-2 = -3$$

$$|3x-9| = 7-x \xrightarrow{7-x \geq 0} \begin{cases} 3x-9 = 7-x \\ \text{یا} \\ 3x-9 = -7+x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ ق.ق} \\ 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ ق.ق} \end{cases}$$

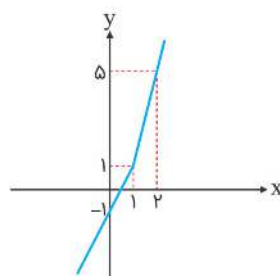
$$y = |x-1| + 3x-2 \Rightarrow y = \begin{cases} x-1+3x-2 & ; 1 \leq x \\ -x+1+3x-2 & ; x < 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 4x-3 & ; 1 \leq x \\ 2x-1 & ; x < 1 \end{cases}$$

x	1
x-1	-
	0
	+

x	1	2
y	1	5

x	1	0
y	1	-1



۲۰ می‌دانیم اگر $|a+b| = |a| + |b|$ آنگاه $ab \geq 0$ و همچنین $|a| = |-a|$ پس:

$$|1-2x| = |2x-1| \Rightarrow \underbrace{|5x-2|}_{a+b} = \underbrace{|3x-1|}_a + \underbrace{|2x-1|}_b$$

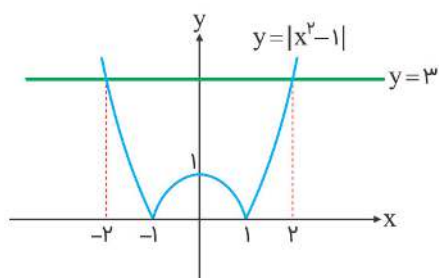
$$\xrightarrow{ab \geq 0} (3x-1)(2x-1) \geq 0$$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
p	+	○	-	○	+

$$(-\infty, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$y = 3$$

$$y = |x^2 - 1|$$



$$x = 2, \quad x = -2$$

ریشه‌های معادله

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق } \\ x = 1 \text{ غ ق } \end{cases} \end{cases}$$

ب

$$\sqrt{3x+1} = 3 - x \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 3x+1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 8 \end{cases}$$

$x = 8$ غیر قابل قبول است، زیرا (۱) را منفی می‌کند.

گزینه ۳

۲۳

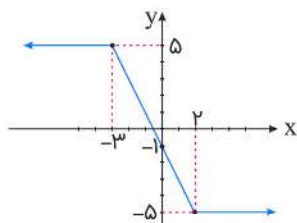
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

x	-3	2
x - 2	-	+
x + 3	-	+

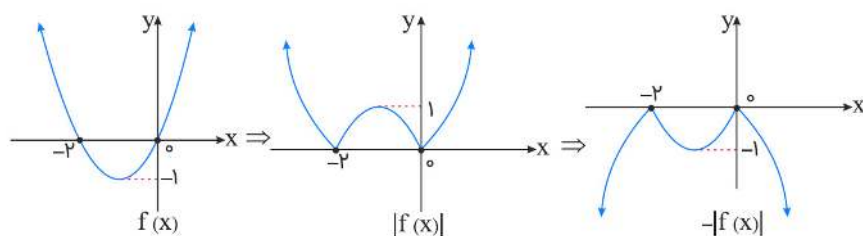
$$\Rightarrow \begin{cases} x < -3 \Rightarrow x + 2 + x + 3 = 5 \\ -3 \leq x \leq 2 \Rightarrow -x + 2 - x - 3 = -2x - 1 \\ x > 2 \Rightarrow x - 2 - x - 3 = -5 \end{cases}$$

باتوجه به شکل، نمودارهای $y = |x - 2| - |x + 3|$ و $y = k$ به ازای $k = 5$ و $k = -5$ بی‌شمار نقطه برخورد دارند.



گزینه ۳

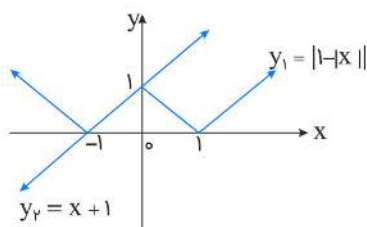
۲۴



گزینه ۱

۲۵

از روش هندسی کمک می‌گیریم. همان‌طور که دیده می‌شود، تمام بازه $[-1, 0]$ ریشه‌های این معادله $(y_1 = y_2)$ می‌باشند که شامل هیچ عدد مثبتی نمی‌باشد.



گزینه ۳

۲۶

از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = x - \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{9}{2} = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد}$$

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = -x + \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 4x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{3}{2} \\ x_2 = -2 + \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{3}{2} \end{cases}$$

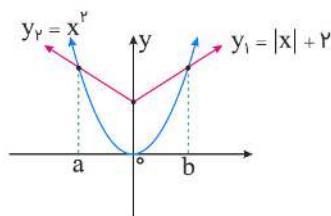
پس دو ریشه دارد.

گزینه ۱

۲۷

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{4+2\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1| = \sqrt{3}+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=3$$

از روش هندسی استفاده می‌کنیم.



$$\underbrace{|x| + 2}_{y_1} > \underbrace{x^2}_{y_2}$$

باتوجه به نمودار، در بازه (a, b) داریم $y_1 > y_2$. حال محل برخورد دو نمودار، یعنی a و b را می‌یابیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| + 2 = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{x \geq 0} x = 2 \Rightarrow b = 2 \\ x < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{x < 0} x = -2 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

پس مجموعه جواب این نامعادله $(-2, 2)$ است.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

فصل دوم: هندسه

BOX 1: ترسیم‌های هندسی

(صفحه ۲۶ تا ۳۰ کتاب درسی)

در بسته اول، برقی از ترسیم‌های هندسی که به کمک فطکاش و پرگار انجام می‌شود را بررسی می‌کنیم.

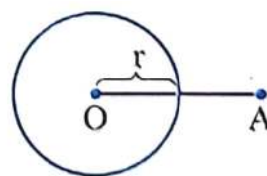
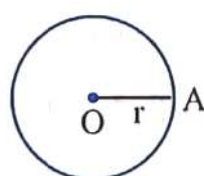
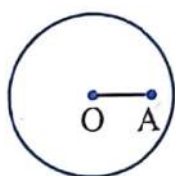
ترسیم‌های هندسی

از خط‌کش برای رسم خطی که از دو نقطه معلوم می‌گذرد و همچنین برای رسم پاره‌خط با طول معلوم استفاده می‌کنیم. از پرگار برای رسم دایره‌ای که مرکز و شعاع آن معلوم باشد، استفاده می‌کنیم.

دایره

دایره به مرکز O و اندازه شعاع r را با $C(O, r)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم هر نقطه که روی دایره قرار دارد به فاصله r از نقطه O قرار دارد و همچنین هر نقطه‌ای که فاصله آن از نقطه O برابر r باشد، روی دایره $C(O, r)$ قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، دایره $C(O, 6)$ ، دایره‌ای به مرکز O و اندازه شعاع $r = 6$ است. فاصله هر نقطه روی این دایره (روی محیط دایره) از نقطه A برابر ۶ واحد است.

نکته: ۱) هر نقطه‌ای که درون دایره باشد، فاصله آن از نقطه O ، کمتر از r و هر نقطه‌ای که خارج از دایره باشد، فاصله آن از نقطه O ، بیشتر از r می‌باشد.

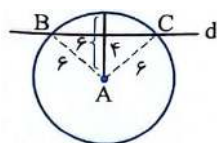


$A \Rightarrow OA < r$ درون دایره قرار دارد. $A \Rightarrow OA = r$ روی دایره قرار دارد. $A \Rightarrow OA > r$ خارج دایره واقع است.

۲) برای پیدا کردن نقطه (نقاط) به فاصله معلوم از نقطه ثابت O ، با استفاده از پرگار دایره‌ای به مرکز O و شعاع فاصله معلوم رسم می‌کنیم. تمرین: خط d و نقطه A خارج آن به فاصله ۴ متر از آن قرار دارد. نقاطی روی خط d مشخص کنید که فاصله آن‌ها تا نقطه A برابر ۶ متر باشد.

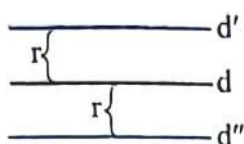
تمرین: خط d و نقطه A خارج آن به فاصله ۴ متر از آن قرار دارد. نقاطی روی خط d مشخص کنید که فاصله آن‌ها تا نقطه A برابر ۶ متر باشد.

پاسخ: مجموعه‌ای از نقاط که فاصله آن‌ها تا نقطه A برابر ۶ متر باشد، تمام نقاط روی دایره به مرکز A و اندازه شعاع $r = 6$ متر است. به مرکز A و اندازه شعاع ۶ متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی خط d و دایره رسم‌شده، جواب می‌باشد.



مطابق شکل، دو نقطه B و C روی خط d ، جواب می‌باشند.

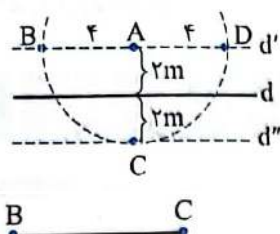
نکته: تمام نقاطی از صفحه که به فاصله r از خط ثابت d می‌باشند، مجموعه نقاط روی دو خط d' و d'' که موازی خط d و به فاصله r از خط d هستند، می‌باشند:



تمرین: ۱) نقطه A به فاصله ۲ متر از خط d قرار دارد. نقطه‌هایی به فاصله ۴ متری از نقطه A و ۲ متری از خط d مشخص کنید.

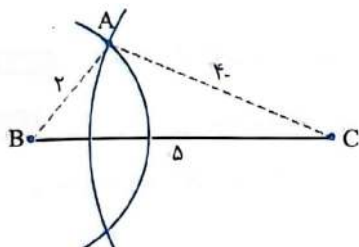
۲) مثلی با طول اضلاع ۲، ۴ و ۵ واحد رسم کنید.

پاسخ: ۱) به مرکز A و شعاع ۴ متر دایره ای رسم می کنیم. تمام نقاط روی این دایره به فاصله ۴ متر از نقطه A می باشند. از طرفی تمام نقاط به فاصله ۲ متر از خط d، نقاط روی دو خط به موازات d و به فاصله ۲ متر از آن می باشند. نقاط تلاقی دایره و این دو خط موازی (d' و d'')، جواب خواهند بود. بنابراین نقاط B، C و D، جواب مسئله می باشند.



۲) ابتدا پاره خط BC به طول ۵ واحد رسم می کنیم.

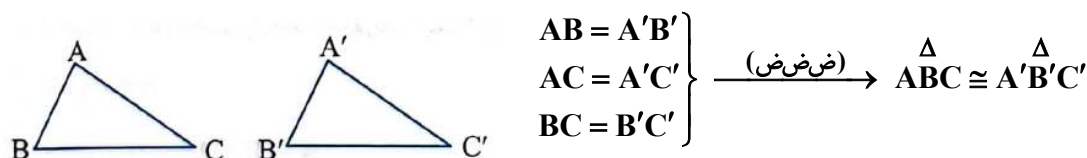
نقطه ای مانند A می خواهیم که فاصله آن تا نقطه C برابر ۴ و فاصله تا نقطه B برابر ۲ باشد. به مرکز C و شعاع ۴ واحد و به مرکز B و شعاع ۲ واحد دایره هایی رسم می کنیم. محل تلاقی این دو دایره جواب می باشد:



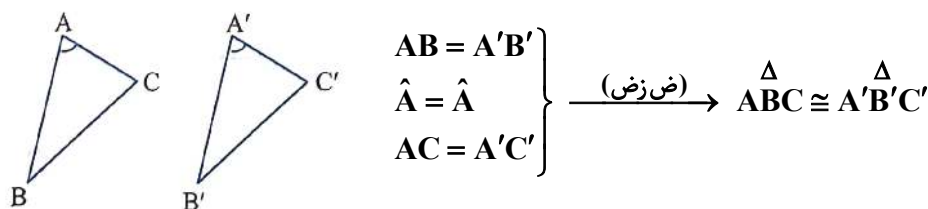
یادآوری از همنهشتی مثلث ها

• دو مثلث در سه حالت همنهشت هستند:

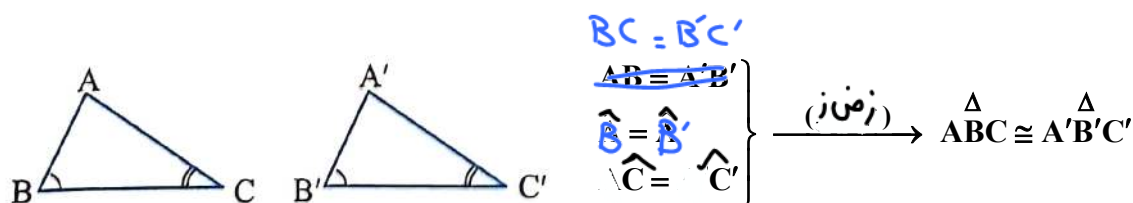
حالت اول: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری برابر باشند، آن گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.



حالت دوم: اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.



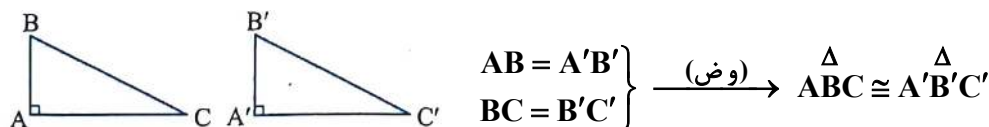
حالت سوم: اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آنها از یک مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.



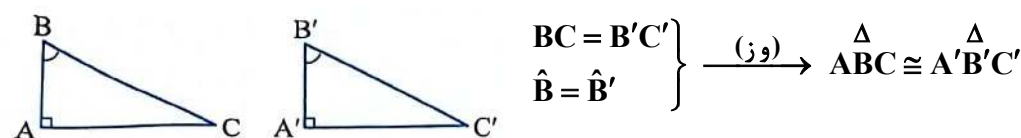
تذکره: در نوشتن اجزای متناظر دقت کنید که اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های برابر، با هم برابر هستند.

• دو مثلث قائم‌الزاویه به دو حالت زیر نیز همنهشت می‌باشند:

حالت اول: اگر وتر و یک ضلع قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه، با وتر و یک ضلع قائمه از مثلث قائم‌الزاویه دیگری برابر باشد، آن دو مثلث با هم همنهشت هستند.



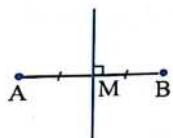
حالت دوم: اگر وتر و یک زاویه تند از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم‌الزاویه دیگر با هم برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.



با تعریف عمودمنصف یک پاره‌خط آشنایی دارید. ابتدا تعریف عمودمنصف را می‌آوریم و سپس یک ویژگی مهم از عمودمنصف را به صورت یک قضیه می‌نویسیم.

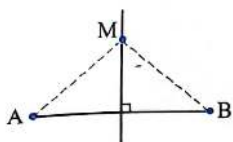
برخی خواص عمودمنصف

تعریف: عمودمنصف پاره‌خط AB، خطی است که از نقطه M وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است.



قضیه: هر نقطه‌ای که فاصله آن از دو نقطه به یک اندازه باشد، حتماً روی عمودمنصف پاره‌خط واصل این دو نقطه قرار دارد و برعکس.

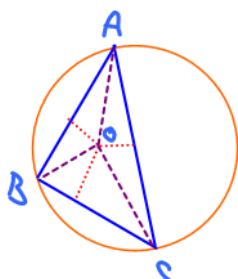
مثال: در شکل مقابل، عمودمنصف پاره‌خط AB رسم شده است و نقطه M روی این عمودمنصف قرار دارد. طبق ویژگی عمودمنصف MA = MB است.



نکته: اگر سه عمودمنصف مثلث ABC را رسم کنیم، همدیگر را در یک نقطه مانند O قطع می‌کنند و اگر O را به A، B و C وصل کنیم،

آن‌گاه OA = OB = OC و دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA، از B و C می‌گذرد. این دایره را دایره محیطی مثلث ABC می‌گوییم.

همانند عمودمنصف پاره‌خط، با تعریف نیمساز یک زاویه آشنایی دارید. بعد از بیان تعریف نیمساز یک زاویه، یک ویژگی مهم از آن را به عنوان یک قضیه می‌نویسیم.

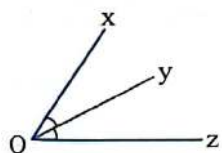


$OA = OB$ O روی عمودمنصف AB
 $OA = OC$ O روی عمودمنصف AC
 $OB = OC$ O روی عمودمنصف BC
 $OA = OB = OC = R$ شعاع دایره محیطی

برخی خواص نیمساز

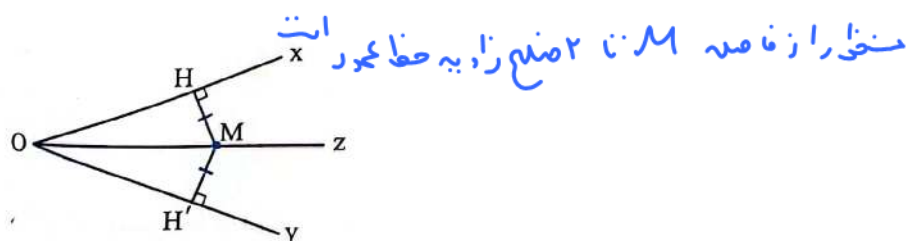
تعریف: نیمساز یک زاویه، خطی است که آن زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

در شکل روبه‌رو، اگر Oy نیمساز زاویه xOz باشد، آن‌گاه داریم: $x\hat{O}y = y\hat{O}z$



قضیه: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

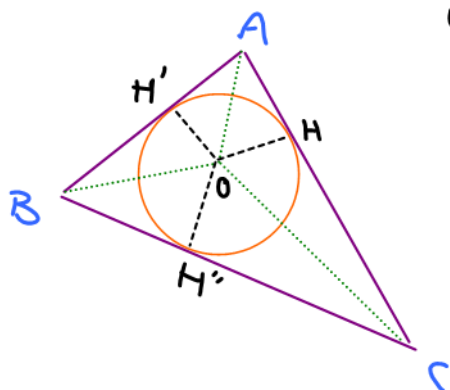
مثال: در شکل مقابل، نیمساز زاویه xOy رسم شده است (Oz). اگر از نقطه M روی نیمساز، دو عمود بر اضلاع زاویه رسم کنیم، آن‌گاه $MH = MH'$.



نکته: اگر سه نیمساز مثلث ABC را رسم کنیم، همدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند و اگر از O سه عمود بر سه ضلع رسم کنیم تا اضلاع را در H ، H' و H'' قطع کنند، آن‌گاه $OH = OH' = OH''$ و دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH ، بر سه ضلع مثلث مماس است. این دایره را دایره محاطی مثلث ABC می‌گوییم.

O محل هرسه نیم‌رها

شعاع دایره محاطی $OH = OH' = OH'' = r$



پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۱- از یک نقطه خارج یک خط، **فقط یک** خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد.

۲- **بی‌شمار** نقطه در صفحه وجود دارد که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است.

۳- نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت برابر مقداری ثابت است، روی **دایره** قرار دارد.

۴- نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از دو ضلع زاویه به یک اندازه است، روی **نیزار** قرار دارند.

۵- مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد **عمود منصف‌ها** می‌باشد.

۶- مرکز دایره‌ای که بر سه ضلع مثلث مماس است، نقطه برخورد **نیزارها** می‌باشد.

• درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای سه سوال زیر را مشخص کنید.

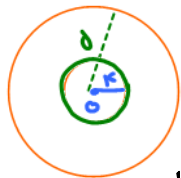
۷- از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، **بی‌شمار** خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد.

۸- نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه ثابت O ، ۴ واحد باشد، درون دایره $C(O, 5)$ قرار دارند.

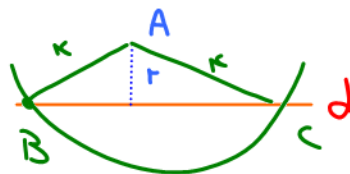
۹- نقطه A به فاصله ۲ واحد از خط d قرار دارد. فقط یک نقطه روی خط d و به فاصله ۲ واحد از نقطه A وجود دارد.

۱۰- خط d و نقطه A غیر واقع بر آن و به فاصله ۲ از آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d و به فاصله ۴ از نقطه A مشخص کنید. C, B

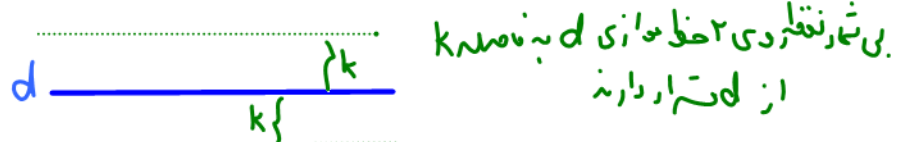
(مشابه فعالیت ۵ صفحه ۲۶ کتاب درسی)



به مرکز A شعاع k دایره‌ای رسم می‌کنیم
نقطه d را از C قطع می‌کنیم

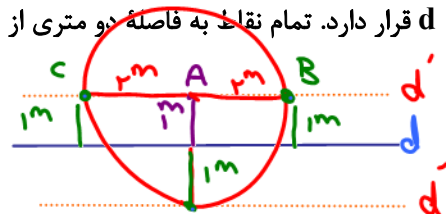


۱۱- تمام نقاطی که به فاصله k از خط داده شده d باشد را مشخص کنید.



۱۲- نقطه A به فاصله یک متری از خط d قرار دارد. تمام نقاط به فاصله دو متری از نقطه A و یک متری از خط d را مشخص کنید.

به فاصله یک متری از d خط d' می‌کشیم
دایره به مرکز A شعاع ۲ می‌کشیم



(مشابه فعالیت ۶ صفحه ۲۶ کتاب درسی)

هر جا این خط را
قطع کرد جواب است
۲ جواب دارد B و D

۱۳- مراحل رسم مثلث با طول اضلاع ۵، ۷ و ۸ واحد را توضیح دهید. D

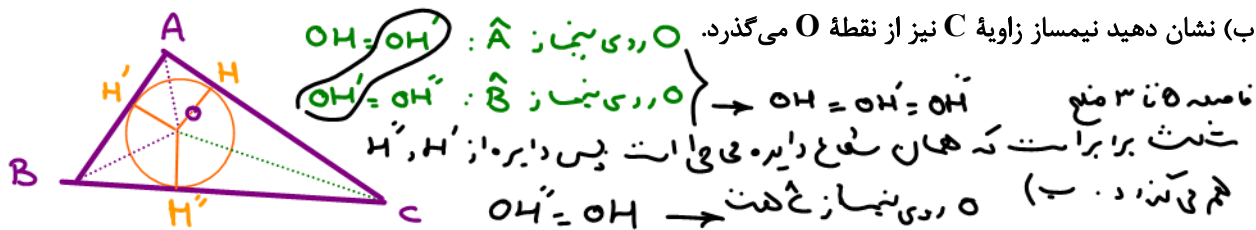


ابتدا ضلع بزرگتر
 $8 = AB$ را می‌کشیم
رسم می‌کنیم به مرکز B
شعاع ۷ و به مرکز A
شعاع ۵ که آن‌ها را
هر جا که با هم برخورد کردند رأس سوم مثلث یعنی C است

۱۴- مثلث دلخواه ABC را رسم کنید. نیمسازهای زاویه‌های A و B را رسم کنید تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند. از نقطه O سه عمود OH, OH', OH'' را بر سه ضلع مثلث رسم کنید.

(تمرین ۳ صفحه ۳۰ کتاب درسی)

(آ) به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. نشان دهید این دایره از نقاط H', H'' و H نیز می‌گذرد.

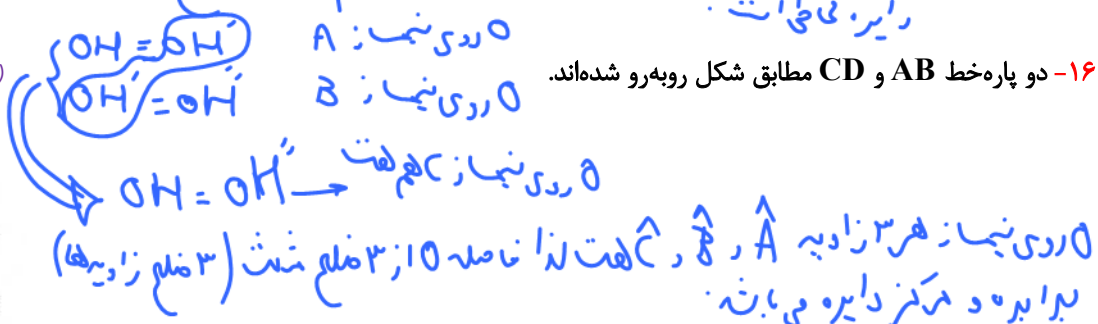


۱۵- در مثلث ABC، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند. دایره‌ای رسم کنید که بر سه ضلع مثلث مماس باشد. طریقه رسم دایره را توضیح دهید.

(شماره ۱۳۰۲)

همان شکل سوال قبل است. به مرکز O شعاع OH (فاصله عمودی است که از O به AC رسم شد) دایره‌ای کشیم به هر ۳ ضلع مثلث از داخل مماس می‌شود و همان دایره می‌باشد.

(تمرین ۱ صفحه ۲۹ کتاب درسی)



(آ) نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد. محل برخورد عمود منصف AB و CD نقطه O خواهد بود.

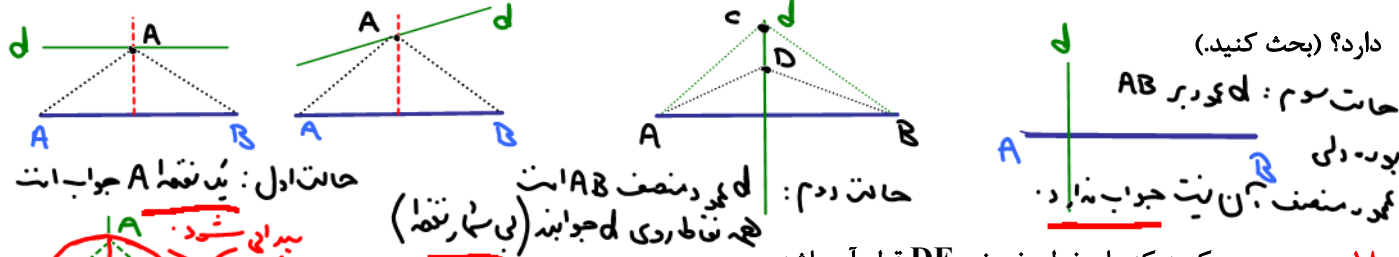
(ب) نقطه مورد نظر در قسمت (آ) را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی ABCD نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OB = OC \\ OC = OD \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

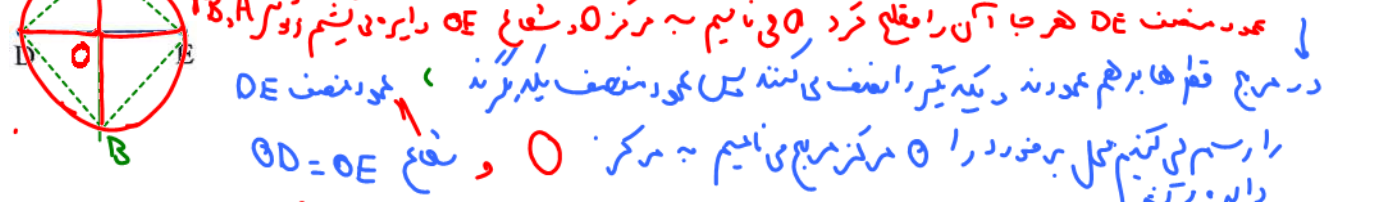
دایره G از رأس‌های ABCD عبور می‌کند.

نتیجه:

۱۷- دو نقطه A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد. مسئله چند جواب دارد؟ (بحث کنید).



۱۸- مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد. عمود منصف DE هر جا آن را قطع کرد O می‌نامیم به مرکز O شعاع OE دایره‌ای کشیم دایره A و B در مرز قمار هم عمودند و نیمه تیر نصف می‌شوند پس عمود منصف پاره خط DE را رسم می‌کنیم محل برخورد را O مرکز مربع می‌نامیم به مرکز O و شعاع OD = OE دایره‌ای کشیم.



Homework (1)

۱ فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC ، همواره یکسان است؟

- (۱) تلاقی سه ارتفاع
(۲) تلاقی سه میانه
(۳) تلاقی سه نیمساز
(۴) تلاقی سه عمودمنصف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ در مثلث متساوی الساقین ABC ، $\hat{A} = 80^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۲۰
(۳) ۲۵
(۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴ در مثلث متساوی الساقین ABC ، نقطه M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطه N قطع می‌کند. اگر $\hat{N}BC = 54^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\hat{MNB}$ چند درجه است؟

- (۱) ۴۸
(۲) ۵۶
(۳) ۶۶
(۴) ۷۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه B در نقطه M در خارج مثلث متقاطع‌اند. کدام گزینه درست است؟ (با تغییر)

- (۱) $\hat{A} > \hat{B}$
(۲) $\hat{A} < \hat{B}$
(۳) $\hat{B} > 2\hat{C}$
(۴) $\hat{B} < 2\hat{C}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

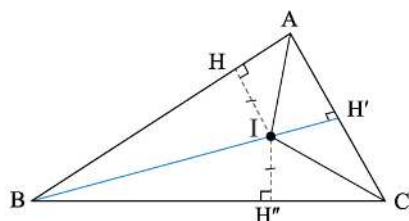
پاسخ (1) Homework

گزینه ۳

۱

فرض کنیم نقطه I محل هم‌رسمی نیم‌سازهای داخلی مثلث ABC است؛ پس I از هر دو ضلع مثلث به یک فاصله است. در نتیجه I از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

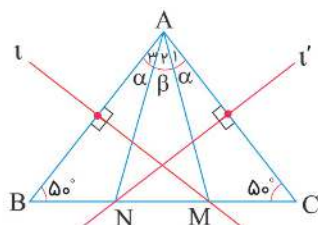
$$\begin{aligned} IH &= IH' \\ IH' &= IH'' \Rightarrow IH = IH' = IH'' \end{aligned}$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲



طبق فرض، $AB = AC$ ، پس $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 50^\circ$ می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس $MA = MB$ و $NA = NC$. یعنی مثلث‌های MAB و NAC متساوی‌الساقین‌اند. در نتیجه:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 &= 50^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{A}_3 &= 50^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \alpha$$

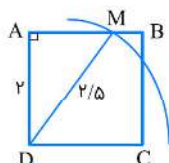
حال با فرض $\hat{A}_2 = \beta$ داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 50^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \beta = 20^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

مربع ABCD را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle DAM$ ، فاصله نقطه M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

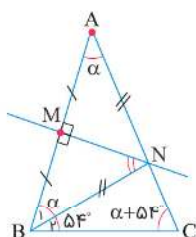
$$AM^2 + 2^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow AM^2 + 4 = \frac{4}{25} \Rightarrow AM^2 = \frac{4}{25} - 4 = -\frac{96}{25}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{\frac{4}{25} - 4} = \frac{1}{5}, \quad MB = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

بنابراین فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{1}{5}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط، به یک فاصله است.



پس $NA = NB$ و مثلث NAB متساوی‌الساقین است. در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{A} = \alpha$. از طرف دیگر، مثلث ABC هم متساوی‌الساقین است ($AC = AB$)، در نتیجه $\hat{C} = \hat{B} = \alpha + 54^\circ$ و داریم:

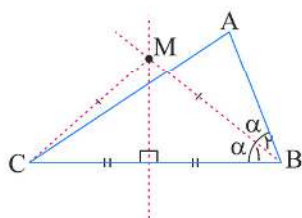
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + (\alpha + 54^\circ) + (\alpha + 54^\circ) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$$

$$\triangle MNB : \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است، پس مثلث MBC متساوی الساقین است و داریم:



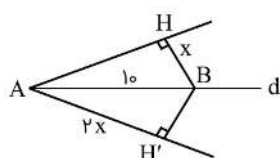
$$\widehat{MCB} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{MCB} > \widehat{ACB}} \frac{1}{2}\widehat{B} > \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{B} > 2\widehat{ACB}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

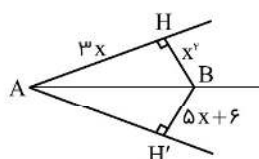
Homework (2)

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- ۱ فاصله هر نقطه داخل دایره از مرکز دایره است.
- ۲ هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از است.
- ۳ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه است.
- ۴ مجموعه نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله r باشد نامیده می شود.
- ۵ در شکل مقابل نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد، محیط چهارضلعی $AHH'B$ کدام است؟



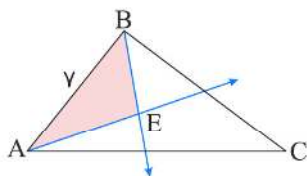
- ۶ نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد، طول AB کدام است؟



- ۷ شیوه ترسیم خط موازی با یک خط از نقطه ای خارج خط با رسم شکل توضیح دهید.
- ۸ شیوه ترسیم خط عمود بر یک پاره خط را از نقطه ای روی خط با رسم شکل توضیح دهید.
- ۹ شیوه ترسیم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.
- ۱۰ شیوه ترسیم عمود منصف یک پاره خط را با رسم شکل توضیح دهید.
- ۱۱ شیوه ترسیم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.
- ۱۲ مثلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴، ۵ و ۷ باشد. (رسم با توضیح)

۱۳

در شکل زیر، E محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی زوایای A و B است. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۸ و محیط مثلث ABC، برابر ۲۵ باشد، مساحت قسمت سفیدرنگ کدام است؟



(۱) ۶۴

(۲) ۳۶

(۳) ۷۲

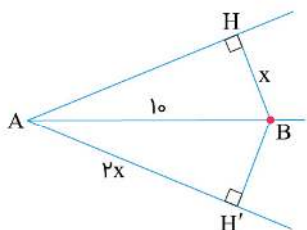
(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۱۴

مثلی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

در شکل زیر، نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. محیط چهار ضلعی AHBH' کدام است؟

۱۵



(۱) $12\sqrt{5}$

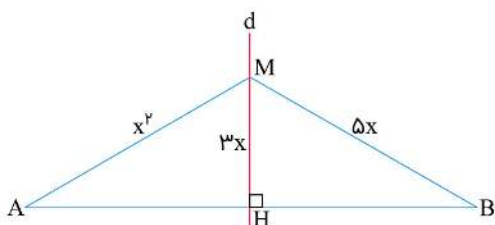
(۲) $8\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt{20}$

(۴) $3\sqrt{20}$

خط d، عمودمنصف AB می‌باشد. باتوجه به شکل، طول پاره خط AB کدام است؟

۱۶



(۱) ۲۰

(۲) ۳۰

(۳) ۴۰

(۴) ۵۵

۱۷

نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر از خط L قرار دارد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر و از خط L به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۸

پاره خط AB به طول ۶ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف AB می‌توان یافت که فاصله آن از نقاط A و B برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

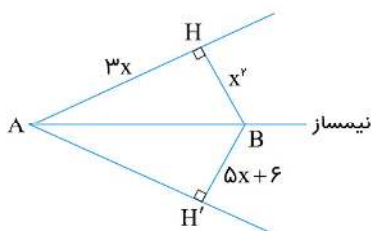
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) نقطه‌ای یافت نمی‌شود.

۱۹ نقطه B روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ قرار دارد، طول AB کدام است؟



(۱) ۳۶

(۲) ۱۸

(۳) $18\sqrt{5}$

(۴) $13\sqrt{5}$

۲۰ فرض کنید نقطه A به فاصله ۶ سانتی متری از خط d باشد، روش رسم مثلث متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده بر خط d منطبق باشد، توضیح دهید (شکل ترسیم شود).

۲۱ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمود منصف های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می کنند. کوچک ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

(۴) ۳۰

(۳) ۲۵

۲۲ مثلثی را داخل یک دایره طوری رسم کرده ایم که رئوس مثلث، روی محیط دایره قرار گیرند. مرکز این دایره چگونه مشخص می شود؟

(۲) محل برخورد نیمسازهای مثلث است.

(۱) محل برخورد ارتفاع های مثلث است.

(۴) محل برخورد میانه های مثلث است.

(۳) محل برخورد عمود منصف های مثلث است.

۲۳ اگر $x - 11$ ، $x - 7$ و $2x$ طول اضلاع یک مثلث باشند، برای x چند مقدار صحیح یافت می شود؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) هیچ مقدار

(۳) ۳

۲۴ نقطه A خارج از خط d و به فاصله ۳ سانتی متر از آن قرار دارد. چند مثلث متساوی الساقین به رأس A که قاعده اش روی خط d باشد، می توان رسم کرد که مساحتش برابر ۱۲ باشد؟

(۲) دو

(۱) سه

(۴) صفر

(۳) یک

۲۵ نقطه A به فاصله ۳ سانتی متر از خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی متر و از خط L به فاصله ۲ سانتی متر باشند؟

(۲) یک

(۱) صفر

(۴) سه

(۳) دو

پاسخ (2) Homework

۱ کمتر از شعاع است.

۲ دو سر پاره خط به یک فاصله است.

۳ از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۴ دایره

۵ B روی نیمساز A می باشد پس $BH' = BH$ ، با توجه به همنهشتی دو مثلث AHB و AH'B بنا به حالت وتر و یک ضلع قائم داریم: $AH' = AH$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH^2 + AH^2 \\ \Rightarrow 10^2 &= x^2 + 4x^2 \\ \Rightarrow 5x^2 &= 100 \Rightarrow x^2 = 20 \\ \Rightarrow x &= \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow x = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

در نتیجه محیط چهارضلعی برابر است با:

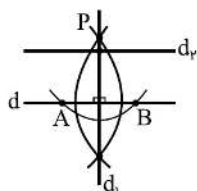
$$4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

۶ B روی نیمساز A می باشد، پس $BH' = BH$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق غ} \\ x = 6 \text{ ق ق} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} BH = 36 \\ AH = 18 \end{cases} \Rightarrow AB^2 &= BH^2 + AH^2 \\ \Rightarrow AB^2 &= (36)^2 + (18)^2 \Rightarrow AB = 18\sqrt{5} \end{aligned}$$

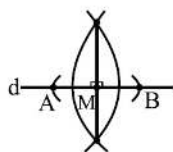
۷

خط d و نقطه P را در نظر بگیرید، ابتدا به مرکز P کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. حال دهانه پیرگار را بیش از نصف پاره‌خط AB باز کرده و دو کمان به مرکز A و B می‌زنیم و عمود منصف AB را رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم. این عمود منصف از نقطه P می‌گذرد. حال با استفاده از قانون رسم خطی عمود از نقطه‌ای روی آن خط، خط d_2 را رسم می‌کنیم که با خط d موازی است.



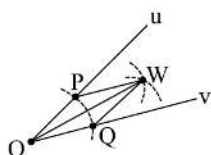
۸

خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد. برای این کار ابتدا دهانه پیرگار را کمی باز می‌کنیم و به مرکز M ، ۲ کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. از آنجایی که $MA = MB$ پس می‌توانیم با رسم عمود منصف پاره خط AB خطی عمود بر خط d رسم کنیم.



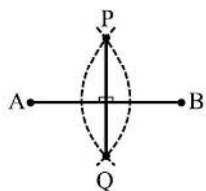
۹

زاویه uOv را در نظر بگیرید، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov در نقاطی مانند P و Q قطع کند. طول پاره‌خط‌های OP و OQ با هم برابرند. حال دهانه پیرگار را بیش از نصف طول PQ باز کنید و یکبار به مرکز P و یکبار به مرکز Q کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل هم‌دیگر را در نقطه W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW با هم برابرند. با رسم PW و QW و OW دو مثلث OPW و OQW ایجاد می‌شود که این دو مثلث بنا به حالت (ض ض ض) با هم منتهضت هستند. بنابراین خط OW نیمساز زاویه uOv می‌باشد.



دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یکبار به مرکز A و یکبار هم به مرکز B کمانی بزنید تا این دو کمان مطابق شکل همدیگر را در دو نقطه P و Q قطع کنند.

۱۰



از وصل کردن دو نقطه P و Q عمود منصف رسم می‌شود.

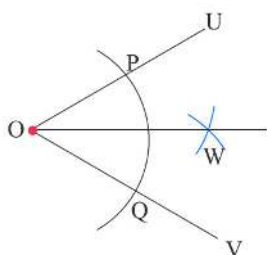
۱- به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های زاویه را در P و Q قطع کند.

۱۱

۲- دهانه پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید.

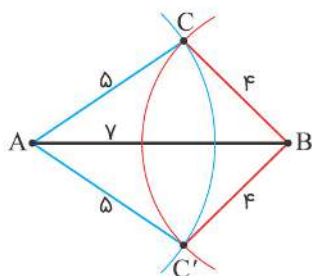
۳- دو کمان به مرکز P و Q بزنید.

۴- O را به W وصل کنید، نیمساز به دست می‌آید.

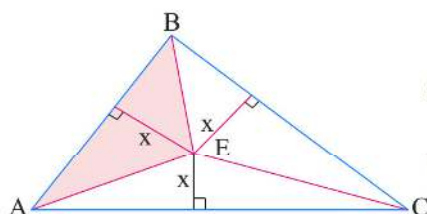


ابتدا ضلع AB به طول ۷ واحد را رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۵ واحد یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۴ واحد هم کمانی دیگر رسم می‌کنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقاط C و C' قطع کنند. دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABC'$ جواب مسئله هستند.

۱۲



می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است، پس:



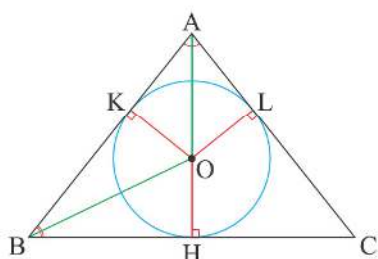
$$S_{\triangle ABE} = 28 \Rightarrow \frac{7 \times x}{2} = 28 \Rightarrow x = 8 \quad (1)$$

$$7 + BC + AC = 25 \Rightarrow BC + AC = 18 \quad (2)$$

$$S_{\text{سفید}} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACE} = \frac{BC \times x}{2} + \frac{AC \times x}{2} = \frac{x}{2}(BC + AC)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} S_{\text{سفید}} = 8 \times 18 = 72$$

اضلاع مثلث بر این دایره مماس‌اند.



$$\left. \begin{array}{l} OA \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } \hat{A} \Rightarrow OL = OK \\ OB \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } \hat{B} \Rightarrow OH = OK \end{array} \right\} \Rightarrow OL = OH = OK$$

$$BH = BH' = x$$

$$AB^2 = BH'^2 + AH'^2$$

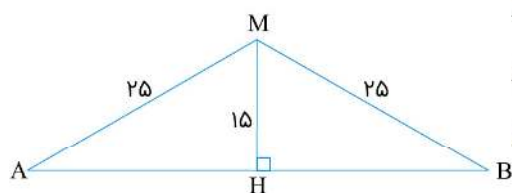
$$100 = x^2 + 4x^2 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$$

$$AH' = AH = 2x = 4\sqrt{5}$$

$$\text{محیط} = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

بنا به خاصیت عمودمنصف: $MA = MB$

$$x^2 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

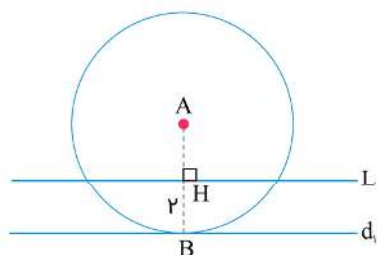


$$MA^2 = MH^2 + AH^2 \Rightarrow 625 = 225 + AH^2$$

$$AH^2 = 400 \Rightarrow AH = 20$$

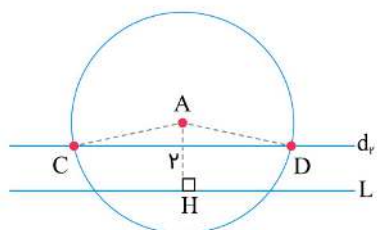
$$AB = 2AH = 40$$

A مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است. خط d_1 مماس بر دایره و شرایط مسئله را دارا است، پس نقطه B یکی از نقاط می‌باشد.

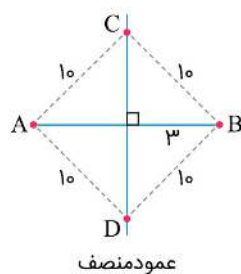


$$AH = 3$$

خط d_2 با خط L، ۲ cm فاصله دارد و شرایط مسئله را دارا است و نقاط C و D دیگر نقاط موردنظر مسئله می‌باشد.



باتوجه به تعریف عمودمنصف، ۲ نقطه C و D را می‌توان یافت:



B روی نیمساز است، پس داریم:

$$BH = BH'$$

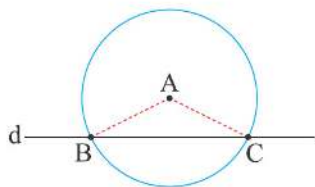
$$x^2 = 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 6 \text{ ق ق} \end{cases}$$

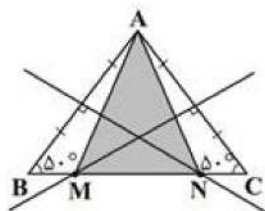
$$BH = x^2 = 6^2 = 36, AH = 3(6) = 18$$

$$\triangle ABH : AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow AB^2 = (36)^2 + (18)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 18^2 \times 4 + 18^2 = 18^2(4 + 1) = 18^2 \times 5 \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع بیش از ۶ سانتی‌متر رسم کنیم و نقاط برخورد این دایره با خط d را B و C بنامیم. در این صورت $\triangle ABC$ ، جواب مسئله است.





$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 50^\circ$$

از طرفی نقطه M روی عمودمنصف AC است، پس:

$$AM = MC \Rightarrow \hat{MAC} = 50^\circ \Rightarrow \hat{AMC} = 100^\circ$$

به طور مشابه $\hat{ANB} = 100^\circ$ و در نتیجه:

$$\triangle AMN : \hat{MAN} = 180^\circ - (100^\circ + 100^\circ) = 20^\circ$$

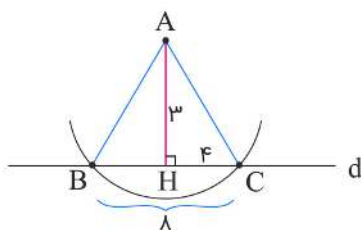
محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث، همان مرکز دایره است.

طول اضلاع باید مثبت باشند و همچنین در نامساوی مثلثی صدق کنند.

$$\begin{cases} 11 - x > 0 \Rightarrow x < 11 \\ x - 7 > 0 \Rightarrow x > 7 \\ 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 7 < x < 11 \quad (1)$$

$$\begin{cases} 11 - x + x - 7 > 2x \Rightarrow x < 2 \\ 11 - x + 2x > x - 7 \Rightarrow 11 > -7 \\ x - 7 + 2x > 11 - x \Rightarrow x > \frac{9}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

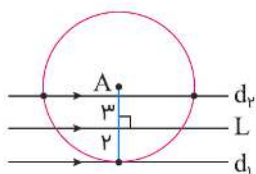


$$\left. \begin{array}{l} AH = 3 \\ S = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow BC = 8 \Rightarrow CH = 4$$

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

به مرکز A و شعاع ۵ یک دایره رسم می‌کنیم. چون $5 > 3$ است، بنابراین دایره رسم شده خط d را در دو نقطه B و C قطع خواهد کرد. مثلث ABC، مثلث موردنظر است.

دو خط d_1 و d_2 در فاصله ۲ سانتی‌متر از خط L قرار گرفته‌اند، بنابراین سه نقطه با شرایط موردنظر وجود دارد:



تعریف نسبت و تناسب و ویژگی‌های آن، همچنین قضیه پراکاربدر تالس و نتایج آن در این بسته آورده شده است.

الف) نسبت و تناسب

نسبت و تناسب: اگر a و b دو عدد حقیقی و $b \neq 0$ باشد، کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت و تساوی بین دو نسبت می‌گوییم.

تذکر: در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، a و d را طرفین و b و c را وسطین می‌گوییم.

$$ad = bc$$

خواص تناسب

تناسب دارای خواصی است که از آن‌ها می‌توان در حل مسائل استفاده کرد و همچنین نتایج قضیه تالس را اثبات کرد.

۱) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $ad = bc$ ، این عمل را طرفین‌وسطین کردن می‌گوییم.

تعریف: از معادله $\frac{2x+1}{5} = \frac{x-3}{4}$ ، مقدار x را به دست آورید.

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{x-3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 4(2x+1) = 5(x-3) \Rightarrow 8x+4 = 5x-15$$

پاسخ:

$$\Rightarrow 8x - 5x - 15 - 4 \Rightarrow 3x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

۲) تبدیل حاصل ضرب به تناسب: اگر b و d دو عدد حقیقی غیرصفر و $ad = bc$ ، آن‌گاه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳) معکوس کردن تناسب: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۴) تعویض جای طرفین با وسطین: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

۵) ترکیب نسبت در صورت: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

۶) ترکیب نسبت در مخرج: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2+2}{5} = \frac{1+1}{2} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2}{2}$$

توجه: در ترکیب نسبت در صورت، صورت کسر را با مخرج آن جمع می‌کنیم و در مخرج تغییری نمی‌دهیم. همچنین در ترکیب نسبت در مخرج، مخرج کسر را با صورت کسر جمع می‌کنیم، بدون آن که تغییری در صورت کسر ایجاد کنیم.

تعریف: اگر $\frac{x}{4-x} = \frac{1}{7}$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

$$\frac{x}{4-x} = \frac{1}{7} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{x}{x+(4-x)} = \frac{1}{1+7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{32}{15}$$

پاسخ:

۷) تفذیل نسبت در صورت: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

۸) تفذیل نسبت در مخرج: اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

تعریف: اگر $\frac{x}{x+4} = \frac{2y}{2y+5}$ باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست آورید.

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2y}{2y+5} \Rightarrow \frac{x}{x+4-x} = \frac{2y}{2y+5-2y} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2y}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8}{5}$$

پاسخ: ابتدا از تفصیل نسبت در مخرج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2y}{2y+5} \Rightarrow \frac{x}{(x+4)-x} = \frac{2y}{(2y+5)-2y} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2y}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8}{5}$$

قریب: روستا

بعد از تعریف نسبت و تناسب و بیان ویژگی‌های آن‌ها، به تعریف استدلال استقرایی، استنتاجی و قضیه تالس می‌پردازیم.

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گوییم. استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری از جزء به کل است.

مثال: از حرارت دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه، نتیجه می‌گیرند که طول میله‌های فلزی در اثر حرارت، زیاد می‌شود. نوع استدلال برای این نتیجه‌گیری، استدلال استقرایی است.

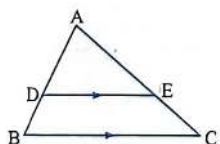
استدلال استنتاجی: به استدلالی که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی باشد که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی می‌گوییم.

نکته: ۱) نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که از استدلال استقرایی به دست آمده باشد، مطمئن بود. اما وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.
۲) استدلال استنتاجی نتیجه‌گیری از کل به جزء است.

قضیه: هر حکمی را که همیشه برقرار باشد، قضیه می‌گوییم. اما ما به برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند نیز قضیه می‌گوییم.

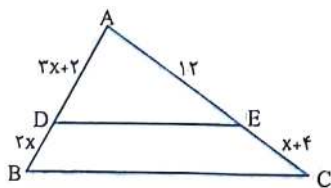
در این قسمت صورت قضیه تالس آورده شده است. اثبات آن در تمرینات این بسته وجود دارد.

اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند، برابر است. به عبارت دیگر، در مثلث ABC شکل مقابل، داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{رابطه جزء به جزء})$$

تمرین: در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ می‌باشد. طول پاره خط AB را به دست آورید.



$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{3x+2}{2x} = \frac{12}{x+4} \Rightarrow (x+4)(3x+2) = 24x$$

پاسخ:

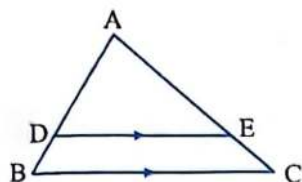
$$\Rightarrow 3x^2 + 2x + 12x + 8 = 24x \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0, \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(3)(8) = 100 - 96 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+2}{2(3)} = 2 \Rightarrow AB = 5x+2 = 12 \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-2}{2(3)} = \frac{4}{3} \Rightarrow AB = 5x+2 = \frac{20}{3} + 2 = \frac{26}{3} \end{cases}$$

• از قضیه تالس و خواص تناسب می‌توان تناسب‌های دیگری را نتیجه گرفت:

نتایج قضیه تالس

نتیجه ۱: در مثلث ABC روبه‌رو، اگر $DE \parallel BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ و $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ زیرا:



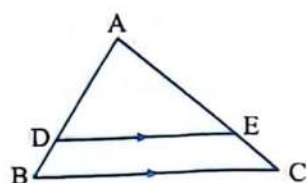
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow{\text{تفصیل نسبت در صورت}} \frac{AB-AD}{AB} = \frac{AC-AE}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

نتیجه ۲: در مثلث ABC شکل بالا، اگر $DE \parallel BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ زیرا:

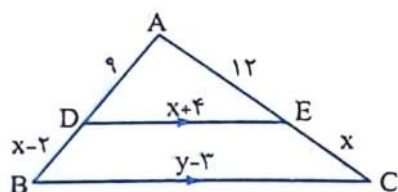
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

تعمیم قضیه تالس: در مثلث ABC روبه‌رو، اگر $BC \parallel DE$ ، آن‌گاه:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (\text{رابطه جزء به کل})$$

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۴۱ کتاب درسی)



تعرین: در شکل روبه‌رو، DE موازی BC است. مقادیر x و y را به دست آورید.

$$\frac{9}{x-2} = \frac{12}{x} \rightarrow 9x - 18 = 12x - 24 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

$$\frac{9}{9+x-2} = \frac{x+4}{y-3} \rightarrow \frac{9}{9+x-2} = \frac{x+4}{y-3} \rightarrow \frac{9}{7+x} = \frac{x+4}{y-3}$$

$$\frac{9}{7+x} = \frac{x+4}{y-3} \rightarrow 9(y-3) = (x+4)(7+x) \rightarrow 9y - 27 = 7x + 4x + 28 + 4x \rightarrow 9y - 27 = 15x + 28$$

$$9y = 15x + 55 \rightarrow 9y = 15(2) + 55 \rightarrow 9y = 30 + 55 \rightarrow 9y = 85 \rightarrow y = \frac{85}{9}$$

پاسخ: برای آن که DE و BC در تناسب باشند، باید از تعمیم قضیه تالس استفاده کنیم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{9}{9+(x-2)} = \frac{12}{12+x} = \frac{x+4}{y-3} \Rightarrow \frac{9}{x+7} = \frac{12}{12+x} = \frac{x+4}{y-3}$$

ابتدا از تساوی $\frac{9}{7+x} = \frac{12}{12+x}$ مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{9}{7+x} = \frac{12}{12+x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 9(12+x) = 12(7+x) \Rightarrow 36 + 9x = 84 + 12x \Rightarrow 36 - 84 = 12x - 9x \Rightarrow -48 = 3x \Rightarrow x = -16$$

از تناسب $\frac{12}{12+x} = \frac{x+4}{y-3}$ مقدار y را با قراردادن عدد ۸ به جای x، به دست می‌آوریم:

$$\frac{12}{12+8} = \frac{8+4}{y-3} \Rightarrow \frac{12}{20} = \frac{12}{y-3} \Rightarrow y-3 = 20 \Rightarrow y = 23$$

پرسش‌های تشریحی:

• در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- روش نتیجه‌گیری از جزء به کل، استدلال **استقرایی** می‌باشد.

۲- اگر $\frac{a}{a+5} = \frac{b}{b+4}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{a}{b}$ برابر $\frac{5}{4}$ می‌باشد.

۳- استدلال بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال **استنتاجی** می‌باشد.

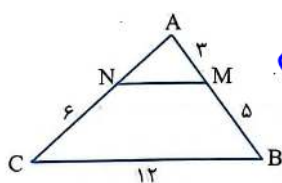
(مشابه تمرین ۲ صفحه ۴۱ کتاب درسی)

۴- نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست آورید.

$$\frac{2x+4}{2y+5} = \frac{x}{y} \rightarrow y(2x+4) = x(2y+5) \rightarrow 2xy+4y = 2xy+5x \rightarrow \frac{4y}{5} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{x}{y}$$

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۴۱ کتاب درسی)

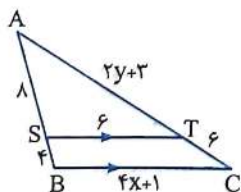
۵- در شکل مقابل، $BC \parallel MN$ است. طول پاره‌خط‌های MN و AN را به دست آورید.



تالس جزئ بکل: $\frac{AN}{AN+7} = \frac{MN}{12} = \frac{3}{3+5=8} \rightarrow MN = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{9}{2} = 4,5$

$\frac{AN}{AN+7} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{AN}{AN+7} = \frac{1}{4} \rightarrow 4AN = AN+7 \rightarrow 3AN = 7 \rightarrow AN = \frac{7}{3} = 2,33$

(فرداد ۱۴۰۲) تالس جزئ بکل



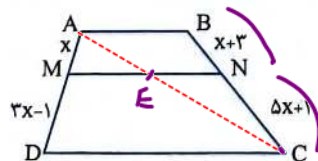
$\frac{1}{1+4} = \frac{2}{4x+1} \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{2}{4x+1} \rightarrow 4x+1 = 10 \rightarrow 4x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25$

$3(7) = 2(4x+1) \rightarrow 21 = 8x+2 \rightarrow 19 = 8x \rightarrow x = \frac{19}{8} = 2,375$

۶- در شکل زیر $ST \parallel BC$ است. مقدار x و y را به دست آورید.

$\frac{2y+3}{2y+9} = \frac{7}{11} \rightarrow 11(2y+3) = 7(2y+9) \rightarrow 22y+33 = 14y+63 \rightarrow 8y = 30 \rightarrow y = \frac{15}{4} = 3,75$

۷- در دوزنقه مقابل، اگر $MN \parallel AB$ باشد، مقدار x را به دست آورید.



$\triangle ADC: \frac{x}{3x-1} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{x}{3x-1} = \frac{EC}{EA} \rightarrow \frac{x}{3x-1} = \frac{5x+1}{x+3} \rightarrow x(x+3) = (3x-1)(5x+1)$

$x^2+3x = 15x^2+3x-5x-1 \rightarrow 15x^2-7x-1 = 0$

پایخ: $15x^2-7x-1=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{7}{5} = 1,4 \end{cases}$
 $x_1 = \frac{1}{3}$
 $x_2 = 1,4$

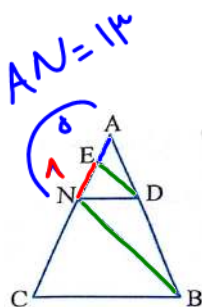
۸- اگر $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{2}$ و $2x+y-z=12$ باشد، هر یک از مقادیر x ، y و z را به دست آورید.

پاسخ: تناسب داده شده را مساوی t قرار می دهیم و سپس x ، y و z را بر حسب t می نویسیم و آن ها را در معادله $2x+y-z=12$ قرار می دهیم. معادله اخیر را بر حسب t حل می کنیم:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = t \\ \frac{y-3}{4} = t \\ \frac{z+5}{2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=2t \\ y-3=4t \\ z+5=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t-1 \\ y=4t+3 \\ z=2t-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x+y-z=2(2t-1)+(4t+3)-(2t-5)=6t+6=12 \Rightarrow 6t=6 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=2t-1=2-1=1 \\ y=4t+3=4+3=7 \\ z=2t-5=2-5=-3 \end{cases}$$

۹- در شکل مقابل $DE \parallel BN$ ، $DN \parallel BC$ ، $AE=5$ و $EN=8$ ، اندازه AC را به دست آورید.



نسبت جزء به کل: $\triangle ANB$: $ED \parallel NB$: $\frac{AE}{AN} = \frac{ED}{NB} = \frac{AD}{AB}$
 $5+8=13$
 $\triangle ABC$: $DN \parallel BC$: نسبت جزء به کل: $\frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DN}{BC}$
 $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{13}$
 $AC = \frac{13(13)}{5} = \frac{169}{5}$

BOX 3: عکس قضیه – برهان خلف – عکس قضیه تالس – قضیه‌های دوشروطی – مثال نقض

صفحه ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی

در این بسته، مفاهیمی چون عکس قضیه، قضیه‌های دوشروطی و مثال نقض داریم. هم‌پنین روشی برای اثبات برقی از قضیه‌ها وجود دارد که این روش، برهان خلف است. عکس قضیه فیثاغورس و قضیه تالس به کمک برهان خلف ثابت می‌شوند.

$$\text{فرض } P \Rightarrow \text{حکم } Q$$

الف) عکس قضیه

تعریف: هر قضیه دارای قسمت شرطی و نتیجه است. قسمت شرطی را **فرض قضیه** و نتیجه جمله را **حکم قضیه** می‌گوییم.

مثال: در قضیه «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اضلاع روبه‌رو با هم برابرند»، متوازی‌الاضلاع بودن چهارضلعی فرض قضیه و برابری اضلاع روبه‌رو، حکم این قضیه است.

عکس قضیه: اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، **عکس قضیه** حاصل می‌شود.

نکته: عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیه «جمع دو عدد فرد، عددی زوج است.» به صورت زیر می‌باشد:

قضیه: اگر a و b دو عدد فرد باشند، آن‌گاه $a + b$ عددی زوج است.

عکس قضیه: اگر $a + b$ عددی زوج باشد، آن‌گاه a و b دو عدد فرد می‌باشند.

در این مثال، عکس قضیه نادرست است، برای مثال، $۱۴ = ۶ + ۸$ عددی زوج است، ولی هیچ‌یک از اعداد ۶ و ۸ فرد نمی‌باشند.

تذکره: معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم در عکس آن ثابت باشند.

• در استدلال استنتاجی، اثبات مستقیم از فرض به حکم داریم اما در اثبات به کمک برهان خلف، اثبات مستقیم نمی‌باشد.

ب) اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

• در استدلال استنتاجی، مستقیماً از درستی فرض، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم. نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسه به کار می‌رود، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در این روش، برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه با استفاده از استدلال استنتاجی به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

• در زندگی روزانه نیز از اثبات غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، در یک تست چهارگزینه‌ای، اگر بتوانیم با دلیل پاسخ‌های نادرست را رد کنیم، آن‌گاه با اطمینان پاسخ درست را انتخاب می‌کنیم.

مراحل اثبات به روش برهان خلف:

B (حکم) $\Rightarrow A$ (فرض): مسئله

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ درست} \\ \text{و} \\ B \text{ نادرست} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(۱) \text{ درست نیست.} \\ \text{یا} \\ (۲) \text{ تناقض منطقی} \end{array} \right\}$$

استدلال، منطقی و حقایق

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق، به یکی از نتایج (۱) یا (۲) می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

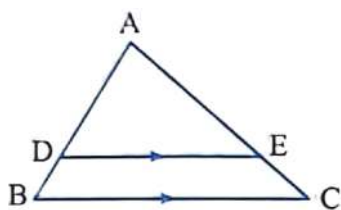
تعیین: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید «اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی زوج باشد، آن‌گاه n نیز عددی زوج است.»

پاسخ: ابتدا n عددی زوج است. : حکم، n^2 عددی زوج است. فرض
فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد و n فرد باشد.

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

پس n^2 یک عدد فرد می شود که با فرض مسئله در تناقض است. پس n باید عددی زوج باشد.

عکس قضیه تالس: در شکل روبه رو، اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، آن گاه $DE \parallel BC$.



قضیه دوشروطی: گاهی عکس یک قضیه درست است، در این صورت عکس قضیه، خود نیز یک قضیه است. در این حالت قضیه و عکس قضیه را به صورت یک قضیه بیان می کنیم. چنین قضیه ای را قضیه دوشروطی می گوئیم. قضیه های دوشروطی را با نماد $\Leftrightarrow$ (بخوانید: اگر و تنها اگر) بیان می کنیم.

تعرین: عکس قضیه زیر را بنویسید و سپس آن را به صورت یک قضیه دوشروطی بنویسید.

قضیه: در مثلث ABC ، اگر $AB = AC$ باشد، آن گاه $\hat{B} = \hat{C}$

پاسخ: عکس قضیه: در مثلث ABC ، اگر $\hat{B} = \hat{C}$ ، آن گاه $AB = AC$

قضیه دوشروطی: در مثلث ABC ، $AB = AC$ است اگر و تنها اگر $\hat{B} = \hat{C}$

مثال نقض: به مثالی که نشان می دهد یک حکم کلی لزوماً همواره درست نیست، مثال نقض می گوئیم.

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- عکس قضیهٔ تالس به کمک ... **پرهان** ... اثبات می‌شود.

۲- برای اثبات ... **نادرستی** ... حکم کلی «همهٔ اعداد اول، فرد هستند»، از **مثال نقض** استفاده می‌کنیم.

۳- برای نوشتن عکس قضیه باید جای حکم و فرض را **عکس کنیم**.

۴- در هر مثلث هر پاره‌خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند، ... **موازی** ... ضلع سوم است.

• کدام یک از عبارت‌های چهار سوال زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۵- **ن** عکس یک قضیه همواره درست است.

۶- **ن** در استدلال استقرایی از کل به جز می‌رسیم.

۷- **>** از نماد $\Leftrightarrow$ برای قضیه‌های دوطرفه استفاده می‌کنیم.

۸- **>** مثال نقض نوعی استدلال است که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری کلی همواره برقرار نمی‌باشد.

۹- عکس هر یک از قضیه‌های زیر را بنویسید.

(آ) در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

(ب) در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای رسم‌شده بر دو ساق با هم برابرند. **آریسازهای وارد بر ۲ ساق برابر باشند مثلث متساوی الساق است.**

(پ) اگر در مثلثی دو ارتفاع نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر، کوچک‌تر است از ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر.

اگر در مثلثی ارتفاع دو ارتفاع بر ضلع نباشند، آن‌گاه ضلع بزرگ‌تر باشد، دو ارتفاع نابرابرند.
(ت) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند.

اگر در مثلثی قطرها به یکدیگر نصف کنند، آن‌گاه شکل سترای الاضلاع است.
(ث) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل باشند، آن‌گاه آن چهارضلعی در یک دایره محاط است.
۱۰- برای رد حدس‌های کلی زیر، مثال نقض ارائه کنید.

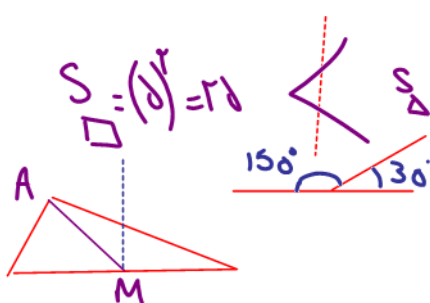
(آ) ارتفاع‌های هر مثلث داخل مثلث واقع است.

(ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

(پ) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آن‌گاه هر دو زاویه قائمه هستند.

(ت) در هر مثلث، میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

(ث) به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + n + 41$ عددی اول است.



(فرداد ۱۴۰۲)

اگر $n=41$ باشد داریم:
$$41^2 + 41 + 41 = 1711$$

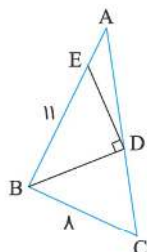
$$41(41 + 1 + 1) = 41(43)$$

تو بنیم به ازای $n=41$

عدد اول نیست زیرا اینم از ۴۱ به ۴۳ هم بخش پذیره

Homework (1)

۱ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



(۱) $6/6$

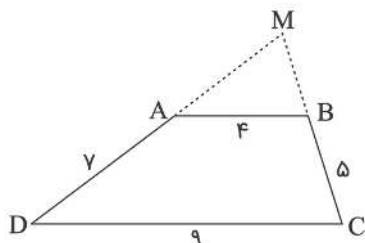
(۲) $5/4$

(۳) $3/6$

(۴) $2/4$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اندازه اضلاع دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB ، کدام است؟



(۱) $13/2$

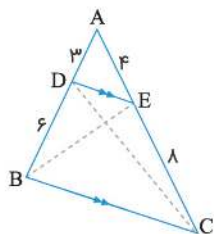
(۲) $13/6$

(۳) $14/4$

(۴) $14/8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳ در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟



(۱) $1/2$

(۲) $2/3$

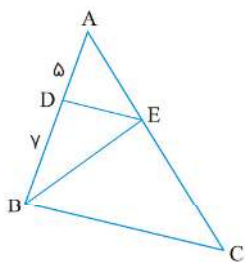
(۳) $3/4$

(۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

در مثلث ABC ، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE ، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟

۴



(۱) $1/5$

(۲) $1/7$

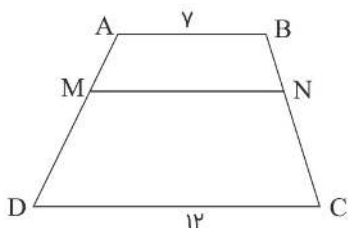
(۳) $2/1$

(۴) $2/4$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه MN ، کدام است؟

۵



(۱) ۸

(۲) $8/75$

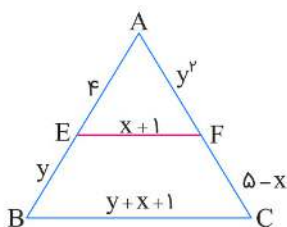
(۳) ۹

(۴) $9/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - 2x$ کدام است؟

۶



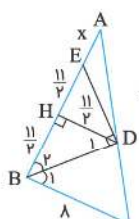
(۱) -۴

(۲) -۳

(۳) ۲

(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰



عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH \parallel BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B} = 90^\circ$ و در نتیجه

DH = BH = EH = $\frac{11}{\sqrt{2}}$ ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$ خواهد بود، پس

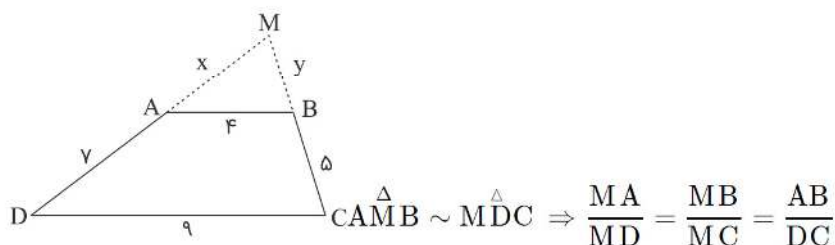
اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

$$c \quad \frac{\frac{11}{p}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{x + \frac{11}{p}}{x + 11} \Rightarrow \frac{11}{\lambda} = \frac{px + 11}{x + 11} \Rightarrow 11x + 11 = 1px + 11\lambda$$

$$\Rightarrow \omega x = 133 \Rightarrow x = 6/6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

می‌دانیم در دوزنقه ABCD، دو قاعده AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

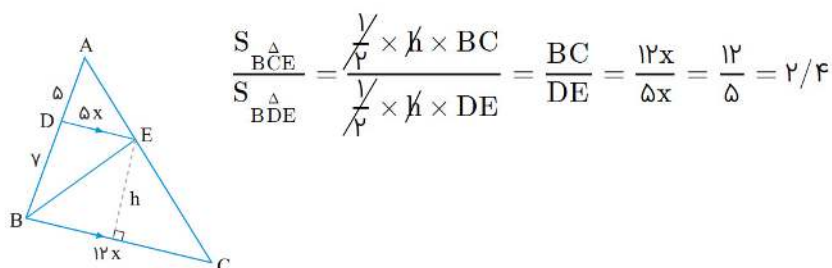
حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \triangle AMB = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

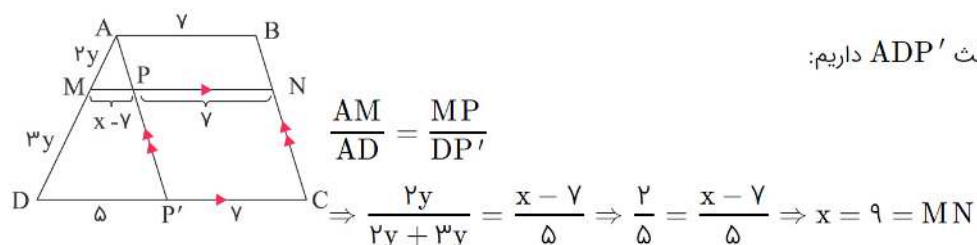
قاعده هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱



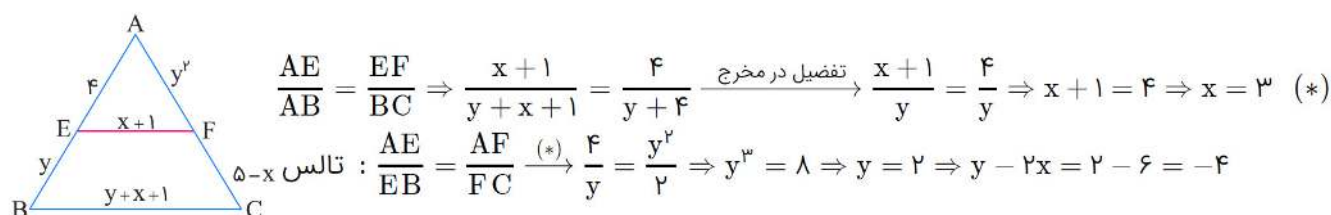
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

در دوزنقه ABCD از نقطه A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

چون $EF \parallel BC$ طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

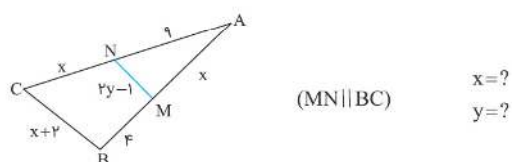


کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

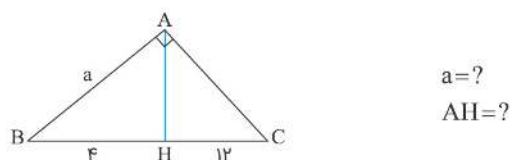
Homework (2)

در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.

۱

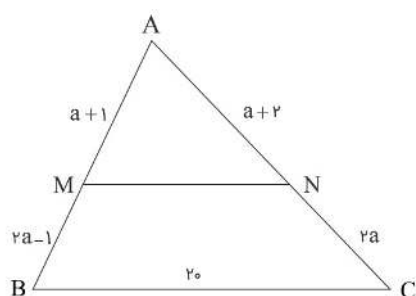


۲



شیوه ترسیم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.

در شکل زیر، محیط چهارضلعی MNCB کدام است؟ (MN موازی BC است). ($BC = 20$)



۳۲ (۱)

۳۵ (۲)

۳۷ (۳)

۳۹ (۴)

کدام گزینه درست است؟

۵

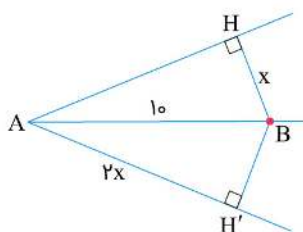
(۱) حاصل ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۲) اگر شعاع دایره یک عدد گنگ باشد، در این صورت محیط آن نیز عددی گنگ است.

(۳) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند.

(۴) فاصله هر نقطه از روی نیمساز تا اضلاع زاویه باهم برابر است.

۶ در شکل زیر، نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. محیط چهار ضلعی $AHBH'$ کدام است؟



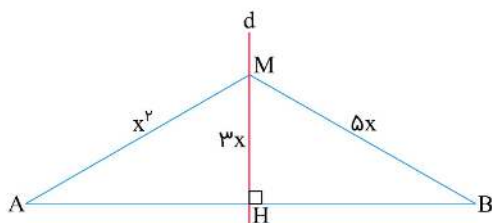
(۱) $12\sqrt{5}$

(۲) $8\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt{20}$

(۴) $3\sqrt{20}$

۷ خط d ، عمودمنصف AB می‌باشد. باتوجه به شکل، طول پاره خط AB کدام است؟



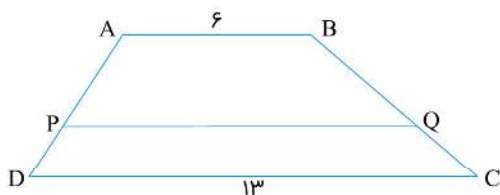
(۱) ۲۰

(۲) ۳۰

(۳) ۴۰

(۴) ۵۵

۸ در ذوزنقه زیر، PQ موازی AB و $\frac{AP}{PD} = 2$ می‌باشد. طول PQ کدام است؟



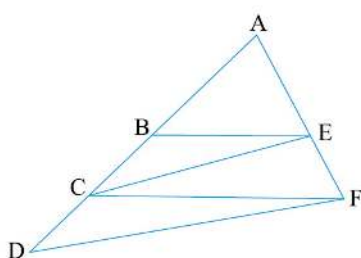
(۱) $\frac{32}{3}$

(۲) $\frac{31}{3}$

(۳) $\frac{29}{3}$

(۴) $\frac{35}{3}$

۹ در شکل زیر، $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اگر $AB = 8$ و $BC = 5$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟



(۱) $\frac{55}{8}$

(۲) ۸

(۳) $\frac{65}{8}$

(۴) ۷

۱۰ اگر $\frac{2a+6}{5b+3} = \frac{2a+4}{5b+2}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۲) ۵

(۴) ۳

(۱) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

۱۱ نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر از خط L قرار دارد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر و از خط L به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۲ پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف AB می‌توان یافت که فاصله آن از نقاط A و B برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) نقطه‌ای یافت نمی‌شود.

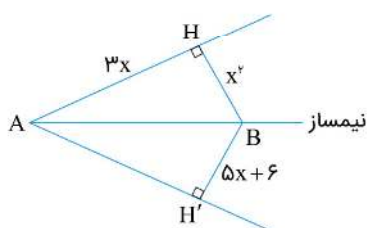
۱۳ نقطه B روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ قرار دارد، طول AB کدام است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۱۸

(۳) $18\sqrt{5}$

(۴) $13\sqrt{5}$



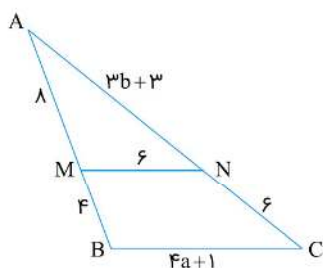
۱۴ در شکل زیر، $MN \parallel BC$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۳

(۳) ۹

(۴) ۵



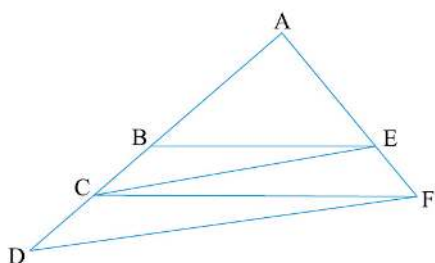
۱۵ در شکل زیر، $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟

(۱) $۴/۵$

(۲) $۴/۸$

(۳) $۵/۴$

(۴) $۵/۶$



۱۶ در کدام یک از قضایای زیر، عکس قضیه درست نیست؟

(۱) در مثلث متساوی الساقین، دو ارتفاع مثلث با هم برابرند.

(۲) قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند.

(۳) در مثلث متساوی الاضلاع، سه زاویه با هم برابرند.

(۴) قطرهای مستطیل با هم برابرند.

۱۷ اگر $\frac{a-b}{2a+b} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{3a-b}{a-2b}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۴) $\frac{16}{11}$

(۱) $\frac{16}{7}$

(۳) $\frac{15}{7}$

پاسخ (2) Homework

۱

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8} \Rightarrow y = \frac{29}{10}$$

۲

$$h^2 = BH \times CH = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$a^2 = BH \times BC = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow a = 8$$

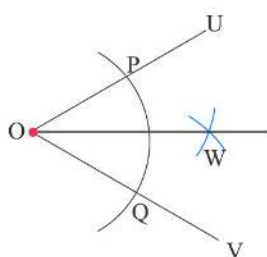
۳

۱- به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیمخطهای زاویه را در P و Q قطع کند.

۲- دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید.

۳- دو کمان به مرکز P و Q بزنید.

۴- O را به W وصل کنید، نیمساز به دست می‌آید.



۴

گزینه ۳

بنا به قضیهٔ تالس داریم (MN موازی BC):

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{a+1}{3a} = \frac{a+2}{3a+2} = \frac{x}{20}$$

$$3a^2 + 3a + 2a + 2 = 3a^2 + 6a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{a+1}{3a} = \frac{x}{20} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 10$$

$$MNCB \text{ محیط } : 10 + 4 + 20 + 3 = 37$$

گزینه ۴

۵

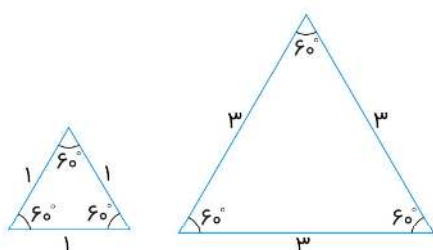
برای گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" مثال نقض وجود دارد.
گزینه "۱":

$$0 \times \sqrt{2} = 0 \in \text{اعداد گویا}$$

گزینه "۲":

$$\text{اعداد گویا } P = 2\pi r \xrightarrow{r=\frac{1}{\pi}} P = 2\pi \times \frac{1}{\pi} = 2 \in \text{اعداد گویا}$$

گزینه "۳":



گزینه ۱

۶

$$BH = BH' = x$$

$$AB^2 = BH'^2 + AH'^2$$

$$100 = x^2 + 4x^2 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$$

$$AH' = AH = 2x = 4\sqrt{5}$$

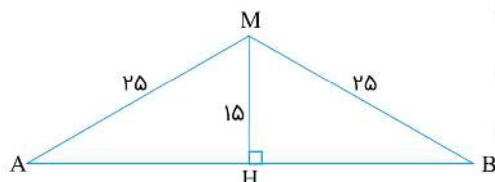
$$\text{محیط} = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

گزینه ۳

۷

بنا به خاصیت عمود منصف: $MA = MB$

$$x^2 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$



$$MA^2 = MH^2 + AH^2 \Rightarrow 625 = 225 + AH^2$$

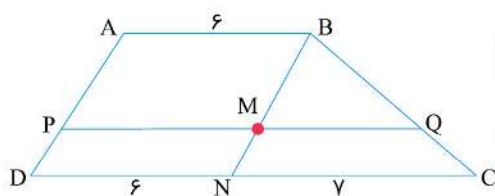
$$AH^2 = 400 \Rightarrow AH = 20$$

$$AB = 2AH = 40$$

گزینه ۱

۸

از B موازی AD رسم نمایید:



$$\frac{AP}{PD} = 2$$

$$\frac{AP}{AP + PD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{BM}{BN} = \frac{MQ}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MQ = \frac{14}{3}$$

$$PQ = MQ + MP = 6 + \frac{14}{3} = \frac{32}{3}$$

گزینه ۳

۹

$$\begin{cases} \triangle AFC : BE \parallel CF : \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \\ \triangle ADF : EC \parallel FD : \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{13}{CD} \Rightarrow CD = \frac{65}{1}$$

گزینه ۲

۱۰

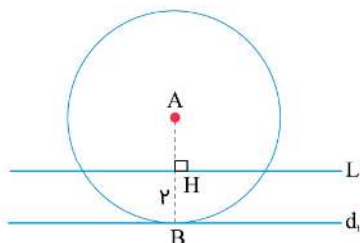
$$(2a + 6)(5b + 2) = (2a + 4)(5b + 3)$$

$$\Rightarrow 10ab + 4a + 30b + 12 = 10ab + 6a + 20b + 12$$

$$\Rightarrow -2a = -10b$$

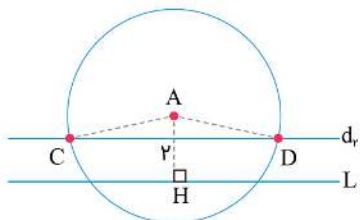
$$\frac{a}{b} = \frac{10}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 5$$

A مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است. خط d_1 مماس بر دایره و شرایط مسئله را دارا است، پس نقطه B یکی از نقاط می‌باشد.

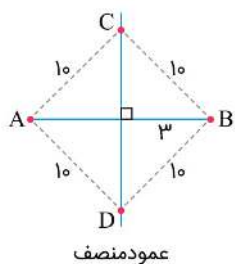


$$AH = 3$$

خط d_2 با خط L، ۲ cm فاصله دارد و شرایط مسئله را دارا است و نقاط C و D دیگر نقاط موردنظر مسئله می‌باشد.



باتوجه به تعریف عمودمنصف، ۲ نقطه C و D را می‌توان یافت:



B روی نیمساز است، پس داریم:

$$BH = BH'$$

$$x^2 = 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 6 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$BH = x^2 = 6^2 = 36, AH = 3(6) = 18$$

$$\triangle ABH : AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow AB^2 = (36)^2 + (18)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 18^2 \times 4 + 18^2 = 18^2(4 + 1) = 18^2 \times 5 \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

گزینه ۴

۱۴

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{\lambda}{12} = \frac{3b+3}{3b+9} = \frac{6}{4a+1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3b+3}{3b+9} = \frac{\lambda}{12} \Rightarrow \frac{b+1}{b+3} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 3b+3 = 2b+6 \Rightarrow b=3 \\ \frac{6}{4a+1} = \frac{\lambda}{12} \Rightarrow \frac{6}{4a+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 4a+1 = 18 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=2+3=5$$

گزینه ۲

۱۵

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\lambda}{CD} \Rightarrow CD = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

گزینه ۴

۱۶

چون اگر یک چهارضلعی قطره‌ایش برابر باشند، الزاماً آن چهارضلعی مستطیل نیست، مثال نقض: دوزنقه متساوی‌الساقین که قطره‌ایش با هم برابر هستند.

گزینه ۱

۱۷

$$\frac{a-b}{2a+b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(a-b) = 2(2a+b) \Rightarrow 3a-3b = 4a+2b \Rightarrow a = -5b$$

$$\frac{3a-b}{a-2b} = \frac{3(-5b)-b}{-5b-2b} = \frac{-16b}{-7b} = \frac{16}{7}$$

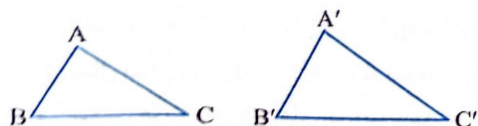
(صفحه ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

BOX 4: تشابه مثلث‌ها

با تعریف تشابه در سال‌های گذشته آشنا شده‌ایم. در این بسته، تعریف و حالت‌های تشابه دو مثلث گفته می‌شود و در ادامه برقی از کاربردهای آن نیز بیان می‌شود.

تشابه مثلث‌ها

با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند، هرگاه زوایای متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد:



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' , \hat{B} = \hat{B}' , \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

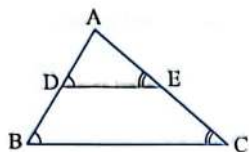
نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گوییم.

نکته: (۱) هر دو شکل همنهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر یک است.

(۲) در نوشتن نسبت اضلاع دو مثلث متشابه از تساوی زاویه‌های نظیر استفاده می‌کنیم.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها:

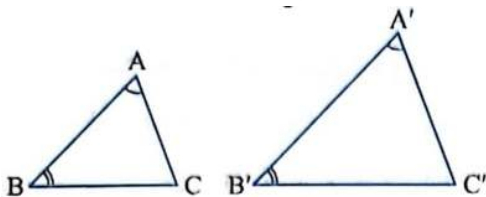
اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

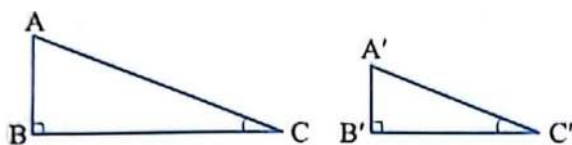
• دو مثلث به سه حالت زیر متشابه می‌باشند:

قضیه: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



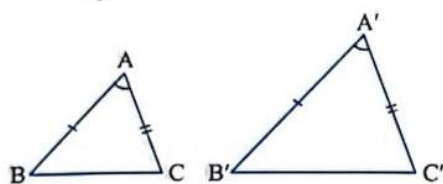
$$\hat{A} = \hat{A}' , \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

حالت خاص: اگر یک زاویه تند از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه تند از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشند، آن‌گاه این دو مثلث با هم متشابه‌اند.



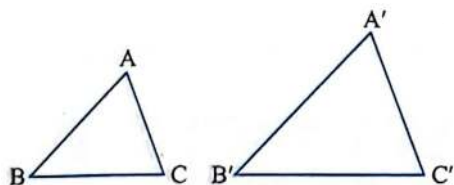
$$\hat{C} = \hat{C}' \xrightarrow{\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

قضیه: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

قضیه: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

حالت خاص: اگر دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

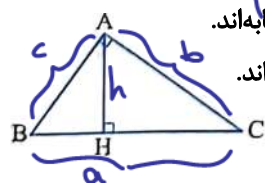
روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر رسم شود، آن گاه سه مثلث قائم‌الزاویه در شکل وجود خواهد داشت که دو به دو با هم متشابه‌اند. از تشابه آن‌ها روابطی به دست می‌آید.

4 Cheeses:

$$\begin{cases} ah = bc \\ c^2 = a \cdot BH \\ b^2 = a \cdot CH \\ h^2 = BH \cdot CH \end{cases}$$

نکته: با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، داریم:



(۱) مثلث‌های AHC و ABH با هم متشابه‌اند و همچنین این دو مثلث با مثلث اصلی، یعنی مثلث ABC متشابه‌اند.

یعنی اگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، آن گاه سه مثلث قائم‌الزاویه، دو به دو با هم متشابه‌اند.

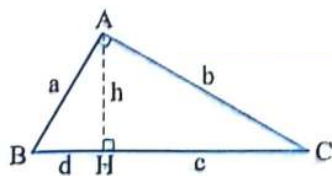
(۲) $AH^2 = BH \cdot CH$ یعنی ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

(۳) $AB^2 = BH \cdot BC$ و $AC^2 = CH \cdot BC$ که در آن BH و CH به ترتیب تصویر قائم اضلاع AB و AC روی وتر BC هستند.

(۴) از رابطه $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ می‌توان برای به دست آوردن طول ارتفاع وارد بر وتر استفاده کرد.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۴۵ کتاب درسی)

تعریف: با توجه به شکل روبه‌رو، در هر قسمت، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



$$\begin{cases} h^2 = d \cdot c = 4(12) = 48 & h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \\ a^2 = d \cdot (d+c) = 4(4+12) = 64 & a = 8 \\ h^2 = d \cdot c \rightarrow (3)^2 = \frac{c}{4} \cdot c \rightarrow c = 6 \\ b^2 = c \cdot (c+d) = 6(6+\frac{3}{4}) = 6(\frac{27}{4}) = \frac{162}{4} = 40.5 & b = 3\sqrt{5} \end{cases}$$

پاسخ: (۱) ابتدا از فرمول $AH^2 = BH \cdot CH$ مقدار h را به دست می‌آوریم.

$$h^2 = c \cdot d = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow h = \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 16} = 4\sqrt{3}$$

$$a^2 = d(d+c) = 4(4+12) = 64 \Rightarrow a = 8$$

از فرمول $AB^2 = BH \cdot BC$ مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$h = 3, d = \frac{3}{4} \Rightarrow 9 = \frac{3}{4} \times c \Rightarrow 3c = 18 \Rightarrow c = 6$$

(۲) از فرمول $h^2 = d \cdot c$ مقدار c را به دست می‌آوریم:

از فرمول $AC^2 = CH \cdot CB$ مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$b^2 = c(c+d) = 6 \times (6 + \frac{3}{4}) = 6 \times \frac{27}{4} = \frac{162}{4} = 40.5 \Rightarrow b = \sqrt{40.5} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

در نکته بعدی رابطه بین نسبت ارتفاع‌های متناظر، مساحت و محیط دو مثلث متشابه با نسبت تشابه گفته می‌شود.

نکته: اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه و نسبت تشابه آن‌ها k باشد، در این صورت:

(آ) نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر k است.

(ب) نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر k^2 است.

(پ) نسبت محیط‌های دو مثلث متناظر برابر k است.

تعریف: مثلث ABC با طول اضلاع ۴، ۵ و ۷ با مثلث $A'B'C'$ با محیط ۲۴ متشابه است. طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ و همچنین نسبت مساحت‌های دو مثلث را به دست آورید.

پاسخ: محیط مثلث ABC برابر $AB + AC + BC = 4 + 5 + 7 = 16$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} = k \quad \text{نسبت تشابه}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{A'B'} = \frac{5}{A'C'} = \frac{7}{B'C'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \\ A'C' = \frac{3 \times 5}{2} = 7.5 \\ B'C' = \frac{3 \times 7}{2} = 10.5 \end{cases}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

همچنین نسبت مساحت‌ها برابر $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ می‌باشد، بنابراین:

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازها و همچنین نسبت میان‌ها با نسبت تشابه برابر است.

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- طول اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه ۴ و ۶ است. نسبت تشابه این دو مثلث $\frac{2}{3}$ است.

۲- نسبت تشابه دو مثلث متشابه $\frac{3}{5}$ است. نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر $\frac{9}{25}$ است.

۳- هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متساوی باشند و زاویه بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۴- دو خط موازی دارای $\frac{2}{3}$ برابر هستند.

• کدامیک از عبارت‌های سه سوال زیر درست و کدامیک نادرست است؟



درست ۵- اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، چهار مثلث متشابه با مثلث اولیه به وجود می‌آید.

نادرست ۶- اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و یک زاویه برابر نیز داشته باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

نادرست ۷- در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است.

۸- اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{4}{25}$ باشد، نسبت نیمسازهای آن برابر $\frac{2}{5}$ است.

$$\frac{4}{25} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

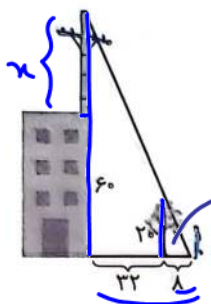
$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{16}{625} \quad (1)$$

۹- مطابق شکل، یک دکل مخابراتی بالای ساختمانی به ارتفاع ۶۰ متر قرار دارد. اگر فاصله شخص تا درخت ۸ متر و فاصله بین درخت و

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۴۶ کتاب درسی)

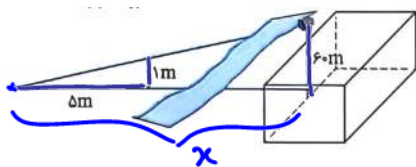
ساختمان ۳۲ متر و ارتفاع درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع دکل را به دست آورید.



$$\frac{20}{32+x} = \frac{1}{32+x} = \frac{1}{5} \rightarrow 5(20) = 32+x \rightarrow 100 = 32+x \rightarrow x = 68 \text{ متر}$$

مثبت کوچک،
مثبت بزرگ مثبت به
است

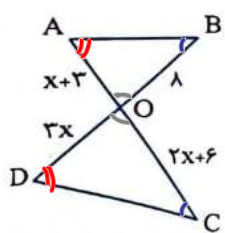
۱۰- بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چه قدر است؟



$$\frac{1}{60} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 5(60) = 300 \text{ متر}$$

۱۱- در شکل مقابل AB و CD موازی نمی باشند و دو مثلث متشابه اند.

(آ) نسبت مساحت های دو مثلث را به دست آورید.



$$\frac{3}{2}(12) = 18 \text{ جواب}$$

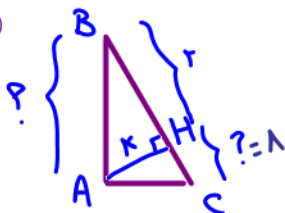
$$(k = \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

(ب) اگر مساحت مثلث کوچک تر ۱۲ واحد مربع باشد، مساحت مثلث بزرگ تر را به دست آورید.

$$\frac{1}{2x+6} = \frac{x+3}{2x} \rightarrow 1(2x) = (2x+6)(x+3) \rightarrow 2x = 2(x+3)^2 \rightarrow 12x = x^2 + 6x + 9 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

۱۲- در مثلث قائم الزاویه ABC به رأس قائمه A، اگر ارتفاع وارد بر BC باشد و AH = ۴cm و BH = ۲cm، آن گاه اندازه HC و

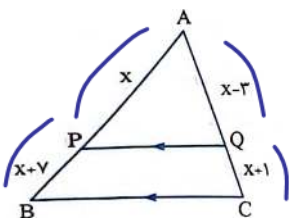
(فرداد ۱۳۰۲)



BA را به دست آورید. $(AH)^2 = BH \cdot CH \rightarrow (4)^2 = 2 \cdot CH \rightarrow CH = 8$

$$(AB)^2 = (BC = 2+8=10)(BH = 2) = 20 \rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

(فرداد ۱۳۰۲)



۱۳- در شکل مقابل PQ || BC است.

(آ) مقدار x را بیابید.

(ب) مساحت مثلث بزرگ تر چند برابر مساحت مثلث کوچک تر است؟

$$\frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1} \rightarrow x(x+1) = (x-3)(x+7) \rightarrow x^2 + x = x^2 + 7x - 3x - 21 \rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21 \rightarrow 0 = 3x - 21 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$$

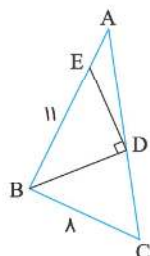
$$\frac{AP}{AB} = k = \text{نسبت مشابه ۲ مثلث} = \frac{x}{x+(x+7)} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

نسبت مساحت ها
نسبت مساحت ها
نسبت مساحت ها
نسبت مساحت ها

$$21 = 3x \rightarrow x = 7$$

Homework (1)

۱ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



۱) ۶/۶

۲) ۵/۴

۳) ۳/۶

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

۲) تلاقی سه میانه

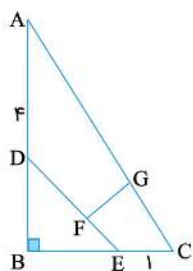
۱) تلاقی سه ارتفاع

۴) تلاقی سه عمودمنصف

۳) تلاقی سه نیمساز

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ در شکل زیر، اگر $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$ باشد، اندازه FG کدام است؟



۱) ۱

۲) ۱/۲۵

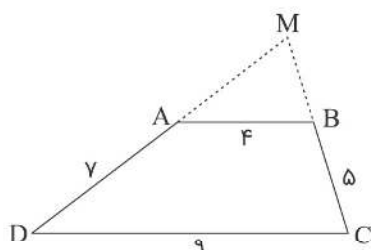
۳) ۱/۵

۴) ۱/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

اندازه اضلاع دوزنقه ABCD مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟

۴



(۱) $13/2$

(۲) $13/6$

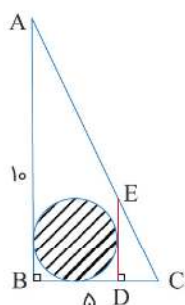
(۳) $14/4$

(۴) $14/8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر اندازه اضلاع قائمه مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیه هاشورخورده، کدام است؟ (طول پاره خط DE برابر با قطر دایره است) (با تغییر)

۵



(۱) $\frac{25}{9}\pi$

(۲) $\frac{16}{9}\pi$

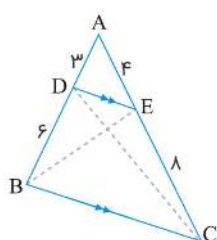
(۳) $\frac{9}{4}\pi$

(۴) $\frac{5}{4}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟

۶



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{2}{3}$

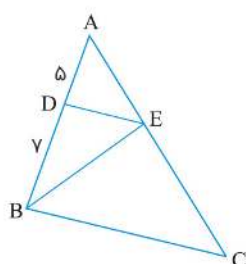
(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟

۷



(۱) $1/5$

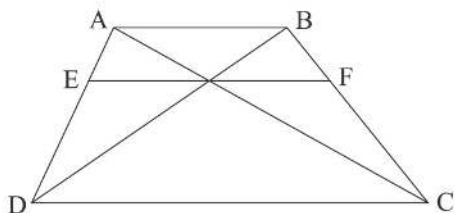
(۲) $1/7$

(۳) $2/1$

(۴) $2/4$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

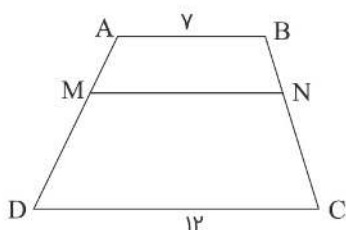
۸ در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازه پاره‌های AB و DC ، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه پاره خط EF ، کدام است؟



- (۱) $\frac{45}{7}$
(۲) $\frac{45}{6}$
(۳) $3\sqrt{5}$
(۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

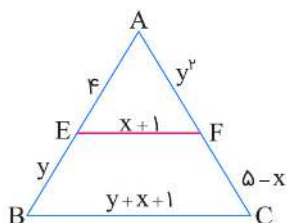
۹ در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه MN ، کدام است؟



- (۱) ۸
(۲) $8/75$
(۳) ۹
(۴) $9/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

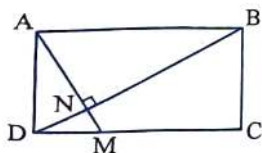
۱۰ در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - 2x$ کدام است؟



- (۱) -۴
(۲) -۳
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

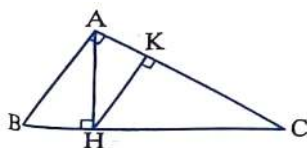
۱۱ در مستطیل $ABCD$ ، داریم $AB = 2AD$. از A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم تا این قطر را



در N و ضلع DC را در M قطع کند. ثابت کنید $AB = 4DM$

۱۲ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع وارد بر وتر، یعنی AH را رسم کرده و از نقطه H عمودی بر ضلع AC رسم

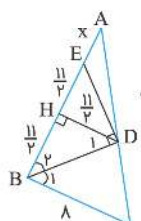
می‌کنیم و پای عمود را K می‌نامیم. ثابت کنید $AH^2 = AB \cdot HK$.



پاسخ (1) Homework

گزینه ۱

۱



عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH \parallel BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B} = 90^\circ$ و در نتیجه $DH = BH = EH = \frac{11}{2}$ خواهد بود، پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$ در نتیجه DH ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و در نتیجه
اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

$$\frac{\frac{11}{2}}{8} = \frac{x + \frac{11}{2}}{x + 11} \Rightarrow \frac{11}{8} = \frac{2x + 11}{x + 11} \Rightarrow 11x + 121 = 16x + 88$$

$$\Rightarrow 5x = 33 \Rightarrow x = 6\frac{3}{5}$$

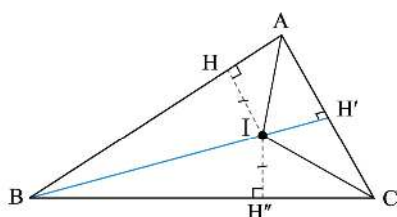
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۳

۲

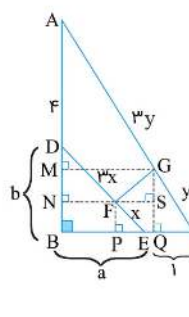
فرض کنیم نقطه I محل هم‌رسمی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است؛ پس I از هر دو ضلع مثلث به یک فاصله است. در نتیجه I از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$$\left. \begin{array}{l} IH = IH' \\ IH' = IH'' \end{array} \right\} \Rightarrow IH = IH' = IH''$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

روش اول: فرض کنیم $BE = a$ و $BD = b$ از F و G بر AB و AC عمود می‌کنیم. حال داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC : GQ \parallel AB &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{GQ}{AB} = \frac{y}{fy} = \frac{1}{f} \\ \xrightarrow{AB=b+f} GQ &= \frac{1}{f}(b+f) \quad (I) \\ \triangle EBD : FP \parallel DB &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FP}{DB} = \frac{x}{fx} = \frac{1}{f} \\ \xrightarrow{BD=b} FP &= \frac{1}{f}b \Rightarrow SQ = \frac{1}{f}b \quad (II) \end{aligned}$$

$$GS = GQ - SQ \xrightarrow{(I),(II)} GS = \frac{1}{f}(b+f) - \frac{1}{f}b = 1 \quad (*)$$

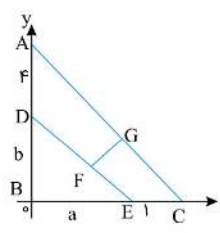
$$\begin{aligned} \triangle ABC : MG \parallel BC &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MG}{BC} = \frac{fy}{fy} = \frac{y}{f} \\ \xrightarrow{BC=a+1} MG &= \frac{y}{f}(a+1) \Rightarrow NS = \frac{y}{f}(a+1) \quad (III) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle DBE : NF \parallel BE &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NF}{BE} = \frac{yx}{fx} = \frac{y}{f} \\ \xrightarrow{BE=a} NF &= \frac{y}{f}a \quad (IV) \end{aligned}$$

$$FS = NS - NF \xrightarrow{(III),(IV)} FS = \frac{y}{f}(a+1) - \frac{y}{f}a = \frac{y}{f} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \triangle FSG : \text{فیثاغورس} &\Rightarrow FG = \sqrt{GS^2 + FS^2} \\ \xrightarrow{(*),(**)} FG &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{f^2}} = \sqrt{\frac{f^2 + y^2}{f^2}} = \frac{\sqrt{f^2 + y^2}}{f} = \frac{5}{f} = 1/25 \end{aligned}$$

روش دوم: چون BA و BC بر هم عمودند، آن‌ها را محورهای مختصات فرض می‌کنیم. حال اگر $BE = a$ و $BD = b$ ، آن‌گاه:

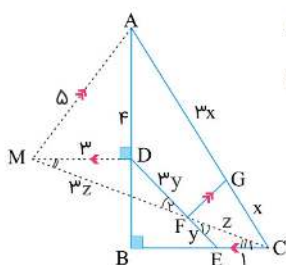


$$\begin{aligned} \overrightarrow{DF} &= \frac{y}{f}\overrightarrow{DE} \Rightarrow F - D = \frac{y}{f}(E - D) \\ \Rightarrow F &= \frac{y}{f}E + \frac{1}{f}D = \frac{y}{f}(a, 0) + \frac{1}{f}(0, b) = \left(\frac{y}{f}a, \frac{1}{f}b\right) \quad (*) \\ \overrightarrow{AG} &= \frac{y}{f}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G - A = \frac{y}{f}(C - A) \Rightarrow G = \frac{y}{f}C + \frac{1}{f}A \\ &= \frac{y}{f}(a+1, 0) + \frac{1}{f}(0, b+f) = \left(\frac{y}{f}a + \frac{y}{f}, \frac{1}{f}b + 1\right) \quad (**) \\ (*), (**) &\Rightarrow |FG| = \sqrt{\left(\frac{y}{f}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{y^2 + f^2}{f^2}} = \frac{\sqrt{y^2 + f^2}}{f} = \frac{5}{f} = 1/25 \end{aligned}$$

تذکر: در هر دو روش می‌توانستیم طول BE و BD را عددی دلخواه و مثبت (مثلاً ۴) فرض کنیم تا محاسبات، ساده شوند.
روش سوم: طبق فرض، $AG = yx$ ، $CG = x$ ، $EF = y$ و $DF = y$. از D خطی بر AB عمود می‌کنیم تا امتداد CF را در M قطع کند. پس $DM \parallel EC$ و داریم:

$$(\hat{C}_1 = \hat{M}_1), (\hat{F}_1 = \hat{F}_2) \Rightarrow \triangle CFE \sim \triangle MFD \Rightarrow \frac{CF}{FM} = \frac{CE}{MD} = \frac{FE}{DF}$$

$$\frac{CF}{FM} = \frac{1}{3} \Rightarrow CF = z, FM = 3z, MD = 3$$



$$\triangle ADM : \text{فیثاغورس} \Rightarrow AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\triangle CAM : \frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FM} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} FG \parallel MA$$

$$\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FG}{MA} = \frac{CG}{CA} \Rightarrow \frac{FG}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow FG = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گزینه ۲

۴

می‌دانیم در دوزنقه ABCD، دو قاعده AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.

$$\triangle AMB \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

بنابراین داریم:

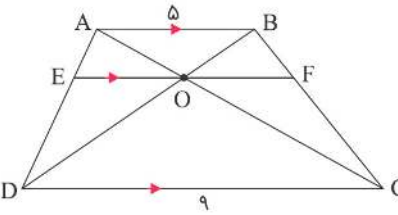
$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\triangle AMB \text{ محیط} = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹



$$\begin{cases} \triangle ADC : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{9} = \frac{AE}{AD} \\ \triangle ADB : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{5} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{9} + \frac{EO}{5} = \frac{AE + DE}{AD} = 1 \xrightarrow{\times 45} 5EO + 9EO = 45$$

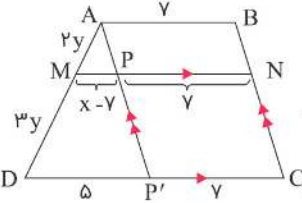
$$\Rightarrow 14EO = 45 \Rightarrow EO = \frac{45}{14}$$

به روش مشابه $\Rightarrow OF = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = \frac{45}{14} + \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}}$ (طول EF واسطه توافقی طول قاعده‌ها است)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در دوزنقه ABCD از نقطه A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.

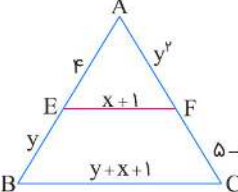


با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DP'} \Rightarrow \frac{2y}{2y + 3y} = \frac{x-y}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x-y}{5} \Rightarrow x-y = 2 \Rightarrow x = y+2 = 9 = MN$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

چون $EF \parallel BC$ ، طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

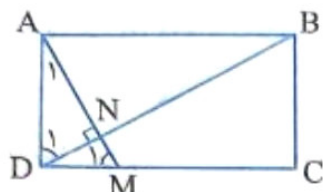


$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x+1}{y+x+1} = \frac{y}{y+x+1} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{x+1}{y} = \frac{y}{y} \Rightarrow x+1 = y \Rightarrow x = y-1 = 3 \quad (*)$$

$$\text{تالس } x-5 : \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(*)} \frac{y}{y} = \frac{y}{y} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow y - 2x = 2 - 6 = -4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ با استفاده از قضیه مجموع اندازه زاویه‌های داخلی مثلث داریم:



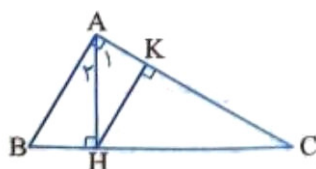
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADN : \hat{D}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ \\ \triangle ADM : \hat{M}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1$$

$$\triangle ADM \sim \triangle BAD$$

در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه ADM و BAD یک زاویه حاده برابر دارند، پس:

$$\frac{AD}{DM} = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{\frac{1}{2}AB}{DM} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AB} \Rightarrow \frac{AB}{DM} = 4 \Rightarrow AB = 4DM$$

در نتیجه:



۱۲ با استفاده از قضیه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث داریم:

$$\hat{A}_2 + \hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{BAC} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 90^\circ$$

$$\hat{A}_1 = \hat{B}$$

هم‌چنین:

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

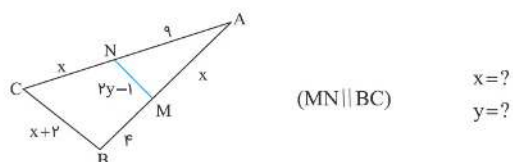
ضمناً طبق فرض داریم $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$. بنابراین دو مثلث ABH و HAK به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند؛ در نتیجه:

$$\frac{AH}{HK} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow AH^2 = AB \cdot HK$$

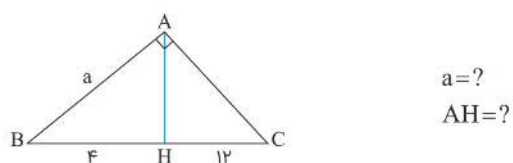
Homework (2)

در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.

۱

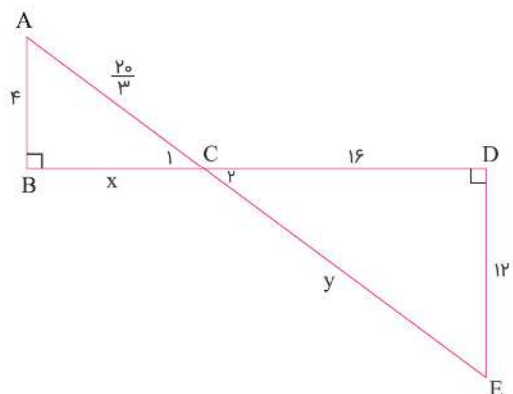


۲



۳

باتوجه به شکل، به سؤالات پاسخ دهید.



الف

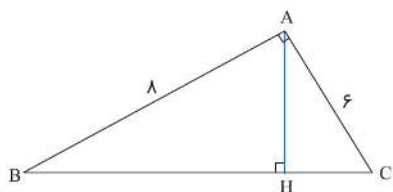
ثابت کنید دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ متشابه هستند.

ب

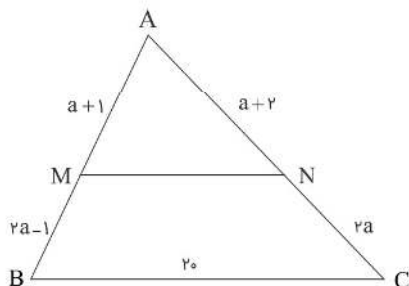
مقادیر x و y را مشخص کنید.

۴

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول AH و BH را به دست آورید.



در شکل زیر، محیط چهارضلعی MNCB کدام است؟ (MN موازی BC است). ($BC = 20$)



(۱) ۳۲

(۲) ۳۵

(۳) ۳۷

(۴) ۳۹

کدام گزینه درست است؟

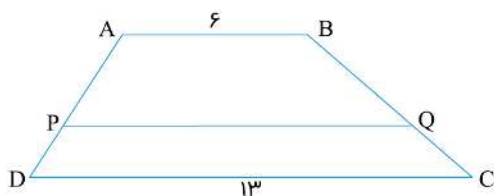
(۱) حاصل ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۲) اگر شعاع دایره یک عدد گنگ باشد، در این صورت محیط آن نیز عددی گنگ است.

(۳) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همبند هستند.

(۴) فاصله هر نقطه از روی نیمساز تا اضلاع زاویه باهم برابر است.

در دوزنقه زیر، P Q موازی AB و $\frac{AP}{PD} = 2$ می باشد. طول P Q کدام است؟



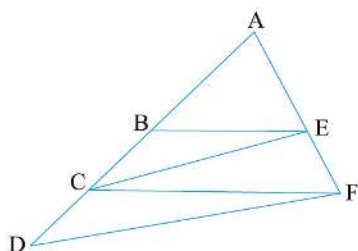
(۱) $\frac{32}{3}$

(۲) $\frac{31}{3}$

(۳) $\frac{29}{3}$

(۴) $\frac{35}{3}$

در شکل زیر، $CE \parallel DF$ و $BE \parallel CF$. اگر $AB = 8$ و $BC = 5$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟



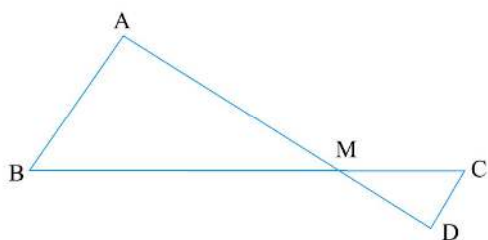
(۱) $\frac{55}{8}$

(۲) ۸

(۳) $\frac{65}{8}$

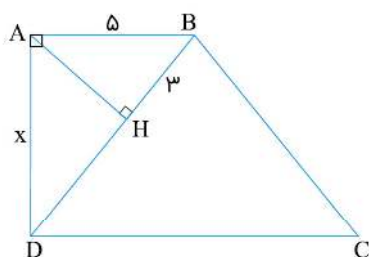
(۴) ۷

۹ در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{7}{3}$ ، نسبت مساحت‌های دو مثلث از آن شکل کدام است؟



- (۱) $\frac{49}{25}$
(۲) $\frac{49}{9}$
(۳) $\frac{7}{3}$
(۴) $\frac{7}{5}$

۱۰ در ذوزنقه قائم‌الزاویه زیر (ABCD)، مقدار x کدام است؟



- (۱) $\frac{17}{3}$
(۲) $\frac{20}{3}$
(۳) $\frac{25}{3}$
(۴) $\frac{16}{3}$

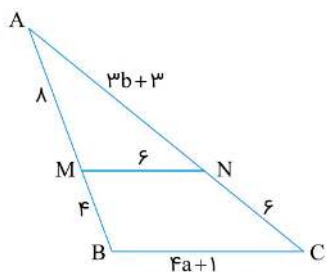
۱۱ فرض کنید در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{4}{9}$ و نسبت ارتفاع‌ها $\frac{2m+3}{m+7}$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{4}$
(۲) $\frac{4}{7}$
(۳) $\frac{5}{4}$
(۴) $\frac{4}{5}$

۱۲ اگر $\frac{2a+6}{5b+3} = \frac{2a+4}{5b+2}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) ۵
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) ۳

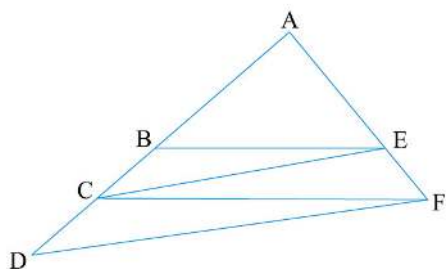
۱۳ در شکل زیر، $MN \parallel BC$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟



- (۱) ۷
(۲) ۳
(۳) ۹
(۴) ۵

در شکل زیر، $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اگر $AB = 5$ و $BC = 3$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟

۱۴



(۱) $4/5$

(۲) $4/8$

(۳) $5/4$

(۴) $5/6$

در کدام یک از قضایای زیر، عکس قضیه درست نیست؟

۱۵

(۱) در مثلث متساوی الساقین، دو ارتفاع مثلث با هم برابرند.

(۲) قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند.

(۳) در مثلث متساوی الاضلاع، سه زاویه با هم برابرند.

(۴) قطرهای مستطیل با هم برابرند.

اگر $\frac{a-b}{2a+b} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{3a-b}{a-2b}$ کدام است؟

۱۶

(۲) ۲

(۴) $\frac{16}{11}$

(۱) $\frac{16}{7}$

(۳) $\frac{15}{7}$

پاسخ (2) Homework

۱

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8} \Rightarrow y = \frac{29}{10}$$

۲

$$h^2 = BH \times CH = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$a^2 = BH \times BC = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow a = 8$$

۳

الف

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ دو زاویه متقابل به رأس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بنا به حالت تساوی دو زاویه}} \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

ب

نسبت تشابه:

$$\frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC}$$

$$\frac{\frac{y}{20}}{\frac{3}{16}} = \frac{12}{4} = \frac{16}{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{20} = \frac{12}{4} \Rightarrow y = 20 \\ \frac{16}{x} = \frac{12}{4} \Rightarrow x = \frac{16}{3} \end{cases}$$

۴

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

$$AB^2 = BH \times BC \text{ رابطه طولی}$$

$$64 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 6/4$$

$$CH = 10 - 6/4 = 3/6$$

$$AH^2 = BH \times CH \text{ رابطه طولی}$$

$$AH^2 = 6/4 \times 3/6 \Rightarrow AH = 4/8$$

بنا به قضیه تالس داریم (MN موازی BC):

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{a+1}{3a} = \frac{a+2}{3a+2} = \frac{x}{20}$$

$$3a^2 + 3a + 2a + 2 = 3a^2 + 6a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{a+1}{3a} = \frac{x}{20} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 10$$

$$MNCB \text{ محیط } : 10 + 4 + 20 + 3 = 37$$

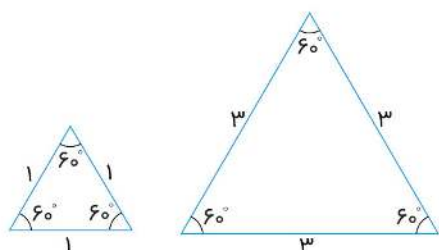
برای گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" مثال نقض وجود دارد.
گزینه "۱":

$$0 \times \sqrt{2} = 0 \in \text{اعداد گویا}$$

گزینه "۲":

$$\text{اعداد گویا } P = 2\pi r \xrightarrow{r=\frac{1}{\pi}} P = 2\pi \times \frac{1}{\pi} = 2 \in \text{اعداد گویا}$$

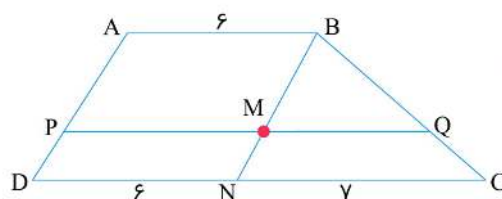
گزینه "۳":



گزینه ۱

۷

از B موازی AD رسم نمایید:



$$\frac{AP}{PD} = 2$$

$$\frac{AP}{AP + PD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{BM}{BN} = \frac{MQ}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MQ = \frac{14}{3}$$

$$PQ = MQ + MP = 6 + \frac{14}{3} = \frac{32}{3}$$

گزینه ۳

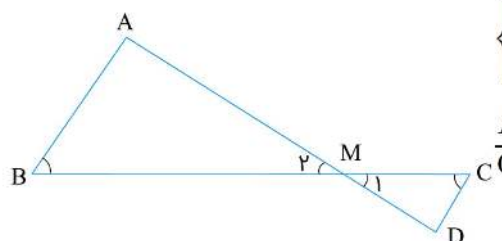
۸

$$\begin{cases} \triangle AFC : BE \parallel CF : \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \\ \triangle ADF : EC \parallel FD : \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{13}{CD} \Rightarrow CD = \frac{65}{1}$$

گزینه ۲

۹



$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ دو زاویه متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow[\text{زاویه برابر}]{\text{به حالت دو}} \triangle MCD \sim \triangle ABM$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{CM} = k$$

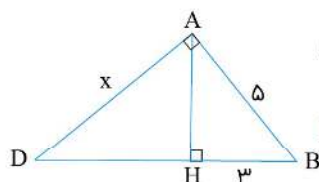
$$k = \frac{5}{3} \text{ نسبت تشابه}$$

$$\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle MCD}} = k^2 = \frac{25}{9}$$

گزینه ۲

۱۰

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABD$ داریم:



$$\text{رابطه طولی } AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 25 = 3BD \Rightarrow BD = \frac{25}{3}$$

$$DH = BD - BH \Rightarrow DH = \frac{25}{3} - 3 \Rightarrow DH = \frac{16}{3}$$

$$\text{رابطه طولی } AD^2 = DH \times BD \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3} \times \frac{25}{3} \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

گزینه ۳

۱۱

$$\text{نسبت تشابه } \frac{S}{S'} = \frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\text{نسبت ارتفاع ها } \frac{h}{h'} = k = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2m+3}{m+7} \Rightarrow 2m+14 = 6m+9$$

$$\Rightarrow -4m = -5 \Rightarrow m = \frac{5}{4}$$

گزینه ۲

۱۲

$$(2a+6)(5b+2) = (2a+4)(5b+3)$$

$$\Rightarrow 10ab + 4a + 30b + 12 = 10ab + 6a + 20b + 12$$

$$\Rightarrow -2a = -10b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 5$$

گزینه ۴

۱۳

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{3b+3}{3b+9} = \frac{6}{4a+1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3b+3}{3b+9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{b+1}{b+3} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 3b+3 = 2b+6 \Rightarrow b=3 \\ \frac{6}{4a+1} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{6}{4a+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 18a+2 = 18 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=2+3=5$$

گزینه ۲

۱۴

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{8}{CD} \Rightarrow CD = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

گزینه ۴

۱۵

چون اگر یک چهارضلعی قطره‌ایش برابر باشند، الزاماً آن چهارضلعی مستطیل نیست، مثال نقض: دوزنقه متساوی‌الساقین که قطره‌ایش با هم برابر هستند.

گزینه ۱

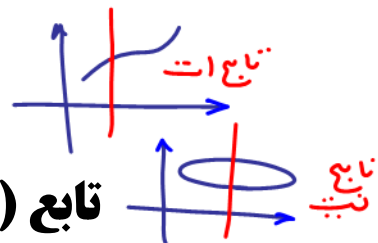
۱۶

$$\frac{a-b}{2a+b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(a-b) = 2(2a+b) \Rightarrow 3a-3b=4a+2b \Rightarrow a=-5b$$

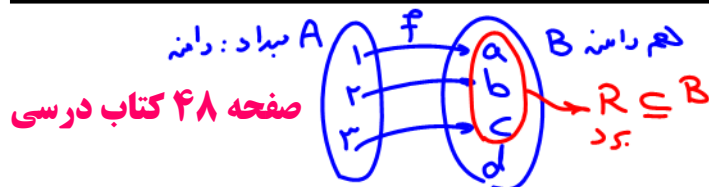
$$\frac{3a-b}{a-2b} = \frac{3(-5b)-b}{-5b-2b} = \frac{-16b}{-7b} = \frac{16}{7}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\} \text{ تابع } f$$

$$g = \{(1, 2), (1, 3), (4, 5)\} \text{ تابع } g$$



تابع (فصل سوم ریاضی ۲ و فصل دوم حسابان ۱)



x	1	2	3
y	a	b	c

BOX 1: تابع و یادآوری

تابع

تابع: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، در این صورت تابع f از A به B، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده شود. توابع را معمولاً با حروف f, g, h و ... نمایش می‌دهند.

نمایش‌های مختلف یک رابطه و شرط تابع بودن آن‌ها

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، در این صورت یک رابطه از A به B و یا یک رابطه روی A را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد و یا توصیف نمود:

۱) **توصیف رابطه:** به کمک یک یا چند جمله، رابطه بین دو مجموعه را توصیف می‌کنیم. رابطه بین دو مجموعه، در واقع همان وابستگی بین اعضای دو مجموعه می‌باشد.

• شرط آن که یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B تابع باشد آن است که این رابطه، به هر عضو مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت دهد.

۲) **مجموعه زوج‌های مرتب:** یک رابطه را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داد.

• شرط آن که این رابطه تابع باشد، آن است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه اول یکسان نباشند. به عبارتی می‌توان گفت اگر در یک رابطه دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، برای آن که آن رابطه تابع باشد لازم است که مؤلفه‌های دوم این دو زوج مرتب نیز یکسان باشند.

۳) **نمودار پیکانی (نمودار ون):** در این نمایش، اعضای مجموعه‌های A و B را داخل شکل‌های هندسی مثل بیضی یا دایره یا ... قرار داده و به کمک پیکان‌هایی آن‌ها را به هم مربوط می‌کنیم.

• شرط آن که یک نمودار پیکانی تابع باشد آن است که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان به اعضای مجموعه B رسم شود.

۴) **جدول:** در این نمایش، یک جدول دوسطری رسم کرده و مؤلفه‌های اول رابطه را در سطر اول جدول و مؤلفه‌های دوم رابطه را در سطر دوم جدول و درست زیر مؤلفه اول نظیر آن قرار می‌دهیم.

• شرط آن که یک رابطه جدولی تابع باشد، آن است که هیچ عضوی در سطر اول جدول به بیش از یک عضو در سطر دوم آن نسبت داده نشود.

۵) **نمودار مختصاتی:** در این نمایش، دستگاه مختصات را رسم کرده و نمودار رابطه را رسم می‌کنیم. در صورتی که رابطه به صورت زوج‌های مرتب باشد، آن را به صورت نقاطی در صفحه دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم.

• شرط آن که نمودار یک رابطه بیانگر یک تابع باشد، آن است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین: به ازای چه مقدار m، مجموعه $R = \{(-1, 4), (2, 6), (-1, m^2 - 5), (m - 1, 7)\}$ ، نمایش یک تابع است؟

پاسخ: در مجموعه R دو زوج مرتب با مؤلفه اول یکسان -1 وجود دارد. برای آن که این مجموعه نمایش یک تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم

آن‌ها نیز با هم برابر باشند. در واقع باید داشته باشیم:

$$m^2 - 5 = 4 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

اگر $m = 3$ باشد، آن‌گاه مجموعه R به صورت $R = \{(-1, 4), (2, 6), (2, 7)\}$ درمی‌آید که به خاطر وجود دو زوج مرتب متمایز $(2, 6)$ و

$(2, 7)$ با مؤلفه اول یکسان، تابع نمی‌باشد.

اگر $m = -3$ باشد، آن گاه مجموعه R به صورت $R = \{(-1, 4), (2, 6), (-4, 7)\}$ درمی آید که نمایش یک تابع است.

دامنه و برد تابع

دامنه و برد: اگر تابعی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داده شده باشد، آن گاه به مجموعه تمام مولفه‌های اول یک تابع، دامنه آن تابع و به مجموعه مولفه‌های دوم آن، برد آن تابع گفته می‌شود. دامنه و برد تابع f را به ترتیب با نماد D_f و R_f نمایش می‌دهند.

قرار داد: ممکن است در برخی از توابع بخواهیم بخش خاصی از آن را مطالعه کنیم، در این صورت تنها به قسمتی از دامنه آن که مورد نیاز است اشاره می‌کنیم اما اگر ضابطه تابعی داده شده باشد و دامنه آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین دامنه ممکن را برای آن در نظر می‌گیریم.

مقدار تابع: اگر f یک تابع و $(x, y) \in f$ ، آن گاه y را مقدار تابع f در نقطه x می‌گوییم و به صورت $y = f(x)$ نمایش می‌دهیم.

نمایش جبری یا ضابطه: به رابطه یا قانون بین اعضای دامنه و برد تابع f که به صورت عبارت ریاضی بیان می‌شود، ضابطه یا نمایش جبری تابع f می‌گوییم. تابع f از مجموعه A به مجموعه B با ضابطه $f(x)$ را به صورت $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$ نمایش می‌دهیم. در این نمایش، مجموعه A همواره برابر دامنه تابع f است. بنابراین در این نمایش، تابع f قاعده یا قانونی است که به هر عضو مجموعه A (دامنه تابع) مانند x ، یک و تنها یک عضو از مجموعه B (برد تابع) مانند y را نظیر می‌کند. عضو منحصر به فرد y را معمولاً با $f(x)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: نمایش جبری تابع زیر را بنویسید. «به هر عدد حقیقی، مربع آن عدد نسبت داده شود.»

پاسخ: فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد، در این صورت x را باید به x^2 نسبت دهیم. بنابراین نمایش جبری این تابع به صورت $y = x^2$ یا $f(x) = x^2$ می‌باشد.

مقدار تابع در یک نقطه از روی ضابطه

فرض کنید $a \in D_f$ باشد، در این صورت به $y = f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه‌ای به طول a می‌گوییم. برای یافتن مقدار تابع f در یک نقطه، وقتی ضابطه تابع را در اختیار داریم، کافی است آن نقطه را در ضابطه تابع به جای متغیر آن قرار دهیم و مقدار تابع را به دست آوریم.

تعریف: اگر $f(x) = 2x - \sqrt{x+3}$ باشد، به ازای چه مقداری از x مقدار تابع برابر -5 می‌باشد؟

پاسخ: باید x را طوری به دست آوریم که $f(x) = -5$ شود:

$$2x - \sqrt{x+3} = -5 \Rightarrow 2x + 5 = \sqrt{x+3}, \text{ حدود } x: \underbrace{2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}}_{(1)}, \underbrace{x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3}_{(2)} \xrightarrow{(1) \cap (2)} x \geq -\frac{5}{2}$$

$P = \sqrt{Q} \quad P \geq 0 \text{ و } Q \geq 0$

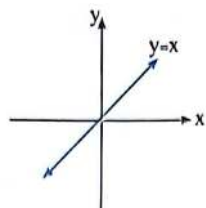
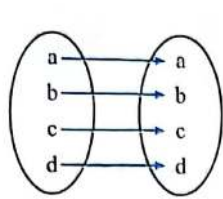
$$2x + 5 = \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (2x + 5)^2 = x + 3 \Rightarrow 4x^2 + 20x + 25 = x + 3 \Rightarrow 4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(4x+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 4x+11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{11}{4} < -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ (غیر قابل قبول)}$$

تابع خطی: هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌گوییم. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن یک خط راست می‌باشد.

تابع همانی: تابع f را همانی می‌گوییم، هرگاه هر عضو دامنه f دقیقاً به همان عضو در برد تابع نظیر شود. ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. اگر دامنه تابع همانی برابر $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن همان نیمساز ناحیه اول و سوم و در صورتی که دامنه برابر $\mathbb{R}$ نباشد، نمودار این تابع بخشی از نیمساز ناحیه اول و سوم می‌باشد.

مثال: هر یک از توابع مقابل، یک تابع همانی می باشد:



$$f = \{(1,1), (-2,-2), (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$$

تابع ثابت: تابع f را ثابت می گوئیم، هرگاه برد آن تنها شامل یک عضو باشد. ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ ، $(k \in \mathbb{R})$ است.

نمودار تابع ثابت، خطی موازی محور x ها و یا بخشی از آن است. **دامنه نامتناهی دلی برد متناهی است و تک کمنوی.**

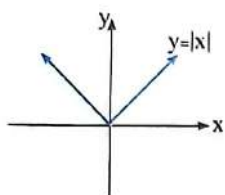
تذکر: توابع ثابت و همانی، حالت های خاصی از تابع خطی $f(x) = ax + b$ هستند. (اگر $b = 0$ و $a = 1$ ، تابع همانی و اگر $a = 0$ ، تابع ثابت است.)

تابع چندجمله ای: توابعی را که ضابطه آن ها، چندجمله ای های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله ای می گوئیم. به عبارت دیگر به

تابع با ضابطه $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله ای می گوئیم. **دامنه نامتناهی دلی برد متناهی است**

همان طور که قبلاً نیز گفتیم، اگر دامنه توابع چند جمله ای داده نشده باشد، دامنه این توابع برابر مجموعه اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود.

تابع قدرمطلق: به تابع f که به هر مقدار در دامنه خود، قدرمطلق آن را در برد نظیر می کند، تابع قدرمطلق می گوئیم. ضابطه تابع قدرمطلق به صورت $y = f(x) = |x|$ می باشد. در صورتی که دامنه تابع قدرمطلق برابر $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن به صورت روبه رو است:

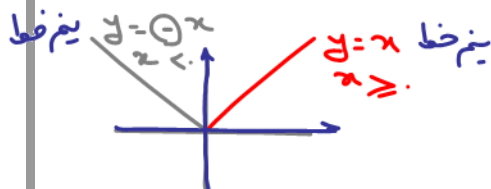


تابع چندضابطه ای (قطعه ای): تابع f را چندضابطه ای یا قطعه ای می گوئیم، هرگاه دامنه آن شامل دو یا چند بخش باشد و روی هر بخش دامنه، ضابطه متفاوتی تعریف شود. به عبارت دیگر تابع f با ضابطه مقابل را یک تابع چندضابطه ای می گوئیم:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

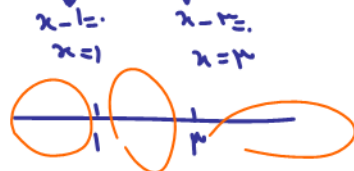
که در آن اشتراک دوبه دوی $D_1, D_2, \dots, D_n$ تهی می باشد.

تذکر: تابع قدرمطلق را به صورت تابع دوضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نیز نمایش می دهند.



تابع $f(x) = |x-1| + |x-3|$ را به صورت تابع بدون قدرمطلق، چند ضابطه ای بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x < 1 & y = -x+1 - x+3 = -2x+4 \\ 1 \leq x \leq 3 & y = x-1 - x+3 = 2 \\ x > 3 & y = x-1 + x-3 = 2x-4 \end{cases}$$



پرسش‌های تشریحی:

• جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- ۱- یک رابطه، زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن مولفه اول برابر نداشته باشند.
- ۲- یک نمودار، زمانی بیانگر تابع است که هر خط آن نمودار را بیشتر در یک نقطه قطع کند.
- ۳- به مجموعه مولفه‌های اول یک تابع و به مجموعه مولفه‌های دوم آن می‌گویند.
- ۴- a و b را طوری تعیین کنید که رابطه داده شده یک تابع باشد.

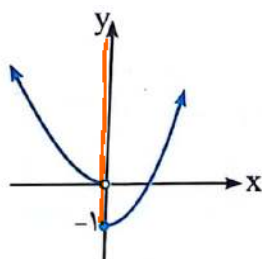
$$R = \{(1, a+b), (2, 5), (1, 3), (2, a-b)\}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=2 \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{2} = 2,5 \quad a+b=3 \rightarrow b=0,5$$

نموده تغییرات x

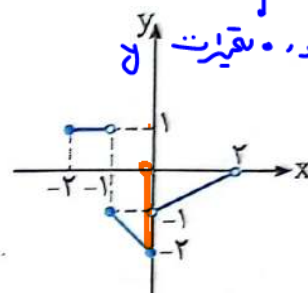
۵- دامنه و برد هر یک از توابع زیر را به دست آورید.



(ب)

$$D_f: \mathbb{R}$$

$$R_f: [-1, +\infty)$$



(آ)

$$D_f: [-2, 2]$$

$$R_f: [-2, 0) \cup \{1\}$$

$$f(x) = ax + b$$

$$f(1) = a + b = 5$$

$$f(-2) = -2a + b = -4$$

$$\begin{cases} -a - b = -5 & -3a = -9 & a = 3 \\ -2a + b = -4 & & b = 2 \end{cases}$$

۶- در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(-2) = -4$. ضابطه این تابع را تعیین کنید.

۷- نمودار تابع چندجمله‌ای از درجه دوم f ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -2 و محور x ها را در نقطه‌ای به طول 1 قطع می‌کند. اگر

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(-1) = 2 \quad a - b + c = 2$$

$$A(0, -2) \in f(x) \rightarrow f(0) = 0 + 0 + c = -2 \rightarrow c = -2$$

$$B(1, 0) \in f(x) \rightarrow f(1) = a + b + c = 0 \rightarrow a + b = 2$$

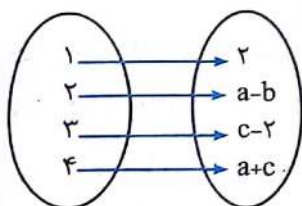
$$f(x) = 3x^2 - x - 2$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=2 \\ b+c=3 \end{cases} \rightarrow c = 2 - a$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b+(2-a)=3 \end{cases} \rightarrow b=1 \rightarrow a=0 \rightarrow c=2$$

۹- مقادیر a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار پیکانی شکل مقابل مربوط به یک تابع ثابت باشد.

همه ی ها برابرند



$$a - b = 2$$

$$c - 2 = 2 \rightarrow c = 4$$

$$a + c = 2 \rightarrow a = -2$$

$$a - b = 2$$

$$-2 - b = 2$$

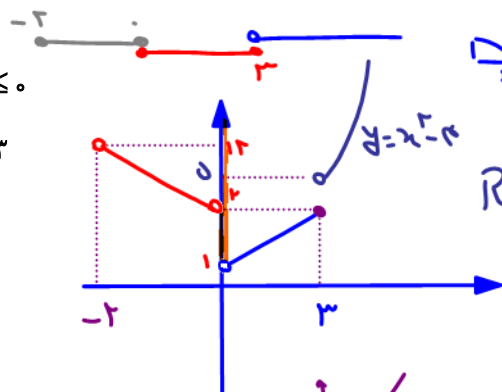
$$-4 = b$$

۱۰- دامنه و برد تابع مقابل را به دست آورید.

$$D_f: [-2, +\infty) \quad \text{دامنه}$$

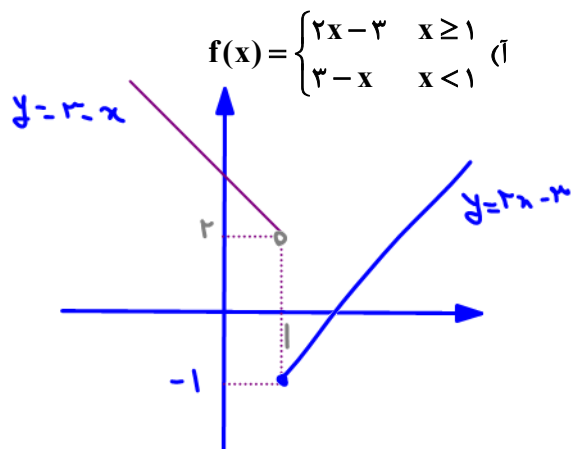
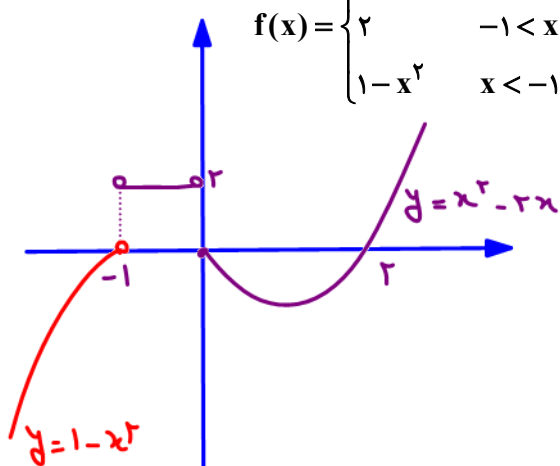
$$R_f: (1, +\infty) \quad \text{برد}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 5x & -2 < x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x + 1 & 0 < x \leq 3 \\ x^2 - 4 & x > 3 \end{cases}$$



۱۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ 2 & -1 < x < 0 \quad (\text{ب}) \\ 1 - x^2 & x < -1 \end{cases}$$



در این بسته تعریف تابع گویا، نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ ، دامنه تابع گویا و هم‌پنین تعریف تساوی دو تابع بررسی می‌شود.

الف) توابع گویا

تعریف: به هر تابعی که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت به طوری که $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $q(x) \neq 0$ (یعنی $q(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد)، تابع گویا می‌گویند.

مثال: هر یک از توابع روبه‌رو یک تابع گویا می‌باشد:
 $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, $g(x) = \frac{x}{2x^5+1}$

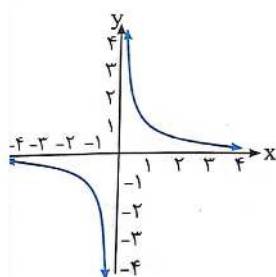
اما تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$ ، تابع گویا نمی‌باشد، زیرا $\sqrt{x}$ چندجمله‌ای نیست.

نکته: هر تابع چندجمله‌ای را می‌توان یک تابع گویا در نظر گرفت. توجه کنید مخرج تمام این توابع را می‌توان یک جمله‌ای $q(x) = 1$ در نظر گرفت.

مثال: توابع $f(x) = 4$ و $g(x) = \sqrt{2}x$ نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ به صورت مقابل است:



ویژگی‌های تابع $y = \frac{1}{x}$ از روی نمودار

با توجه به نمودار $y = \frac{1}{x}$ با دامنه $D_y = \mathbb{R} - \{0\}$ ، می‌توان گفت:

(۱) نمودار تابع محور y را قطع نمی‌کند، پس به جای x نمی‌توان عدد صفر قرار داد و در نتیجه $x = 0$ در دامنه تابع قرار ندارد.

تذکره: نمودار $y = \frac{1}{x}$ به اندازه دلخواه به محور y (خط $x = 0$) نزدیک می‌شود، اما محور y را قطع نمی‌کند.

(۲) نمودار تابع محور x را قطع نمی‌کند، پس معادله $y = 0$ جواب ندارد و در نتیجه $y = 0$ در برد تابع $y = \frac{1}{x}$ قرار نمی‌گیرد، پس

$$R_y = \mathbb{R} - \{0\}$$

تذکره: نمودار $y = \frac{1}{x}$ به اندازه دلخواه به محور x (خط $y = 0$) نزدیک می‌شود، اما محور x را قطع نمی‌کند.

(۳) برد تابع $R_y = \mathbb{R} - \{0\}$ است (فقط به ازای $y = 0$ ، مقداری برای x وجود ندارد).

یادآوری از رسم نمودار یک تابع به کمک انتقال (جابه‌جایی)

تغییرات نمودار در راستای محور y ها:

فرض کنیم نمودار $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت:

(۱) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور y ها (به بالا) انتقال دهیم.

(۲) برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور y ها (به پایین) انتقال دهیم.

تغییرات نمودار در راستای محور x ها:

فرض کنید نمودار $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت:

(۱) برای رسم نمودار $y = f(x - k)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور x ها (به سمت راست) منتقل کنیم.

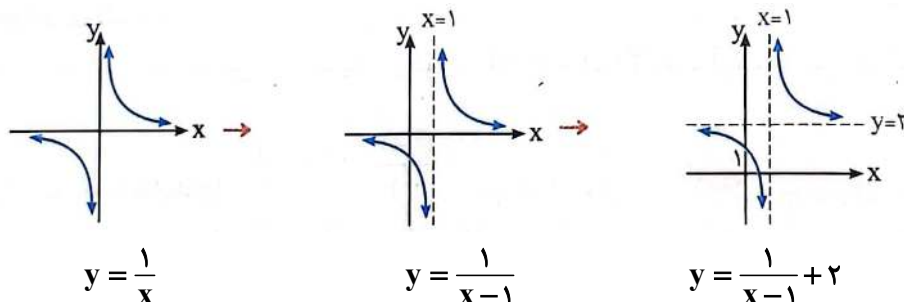
(۲) برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور x ها (به سمت چپ) منتقل کنیم.

تعریف: نمودار تابع $y = \frac{1}{x-1} + 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: با انتقال نمودار $y = \frac{1}{x}$ به اندازه یک واحد به سمت راست، نمودار $y = \frac{1}{x-1}$ و با انتقال نمودار $y = \frac{1}{x-1}$ به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

سمت بالا، نمودار $y = \frac{1}{x-1} + 2$ به دست می‌آید. در انتقال اول، خط $x = 0$ به اندازه یک واحد به سمت راست و در انتقال دوم، خط

$y = 0$ به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال پیدا می‌کند:



دامنهٔ توابع گویا

اگر مخرج یک کسر برابر صفر باشد، آن‌گاه آن کسر تعریف نشده است و به ازای بقیهٔ مقادیر، مقدار کسر تعریف می‌شود. به عنوان مثال، تابع

$y = \frac{1}{x-1}$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است، زیرا عبارت $\frac{1}{x-1}$ به ازای $x = 1$ به صورت کسر بی‌معنی $\frac{1}{0}$ درمی‌آید. بنابراین:

نکته: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای و $y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ تابع کسری گویا باشد، آن‌گاه دامنهٔ f ، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به غیر

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$$

از ریشه‌های $q(x)$ (مخرج کسر) است، یعنی:

پس برای به دست آوردن دامنهٔ توابع کسری گویا، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را (در صورت وجود) از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم.

تعریف: دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x}$ را به دست آورید.

پاسخ: f یک تابع کسری گویا است، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

در این قسمت می‌فواهیم دو تابع مساوی را تعریف کنیم. تعیین دامنه دو تابع اولین مرحله در بررسی تساوی دو تابع است. دقت کنید که دامنه تابع را قبل از ساده کردن تابع به دست آورید.

ب) تساوی دو تابع

دو تابع f و g را با ضابطه‌های $f(x) = 1$ و $g(x) = \frac{x}{x}$ در نظر بگیرید. در تابع g اگر بدون در نظر گرفتن دامنه، x را در صورت و مخرج کسر ساده کنیم، ضابطه تابع g به صورت $g(x) = 1$ درمی‌آید که همان ضابطه تابع f می‌باشد. اما این دو تابع با هم برابر نمی‌باشند. زیرا در تابع f ، مقدار $f(0)$ برابر یک است ولی در تابع g ، برای $x = 0$ مقداری وجود ندارد.

تعریف: دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

(۱) دامنه تابع f و دامنه g با هم برابر باشند.

(۲) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

به عبارت دیگر در صورت رسم دو تابع، باید نمودار آن‌ها کاملاً روی هم قرار گیرد.

تعرین: آیا دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ با هم برابرند؟ چرا؟

پاسخ: ابتدا دامنه هر یک از دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R}$$

f تابع یک جمله‌ای از درجه یک است، پس:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{غیرممکن} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

g یک تابع گویا است، داریم:

دامنه توابع f و g با هم برابرند و در نتیجه شرط اول برقرار است. تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x = f(x)$$

شرط دوم تساوی دو تابع برقرار است، بنابراین دو تابع f و g با هم برابرند.

نکته: دو تابع مساوی ظاهری متفاوت دارند، اما با ساده کردن یکی می‌توان به ضابطه تابع دیگر رسید.

• تساوی دو تابع را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

اگر دامنه دو تابع f و g با هم برابر و به ازای هر x متعلق به دامنه یکسان دو تابع، $f(x) = g(x)$ باشد، آن‌گاه دو تابع با هم مساوی هستند.

تعرین: به ازای چه مقداری از a ، دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x \neq -\frac{1}{4} \\ 8x + a & x = -\frac{1}{4} \end{cases}$ و $g(x) = 4x - 1$ با هم مساوی هستند؟

پاسخ: دامنه هر دو تابع، $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) است، پس شرط اول تساوی دو تابع برقرار است. چون f تابعی دوضابطه‌ای است، تساوی $f(x) = g(x)$ را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$1) \ x \neq -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{4x - 1}{1} = \frac{(4x - 1)(4x + 1)}{4x + 1} = 4x - 1 = g(x) \quad \checkmark$$

$$2) \ x = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(-\frac{1}{4}) = g(-\frac{1}{4}) \Rightarrow 8(-\frac{1}{4}) + a = 4(-\frac{1}{4}) - 1 \Rightarrow -2 + a = -2 \Rightarrow a = 0$$

پرسش‌های تشریحی:

• درستی یا نادرستی سوالات زیر را مشخص کنید.

۱- تابع $f(x) = \sqrt{5}x$ یک تابع گویا است.

۲- دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند.

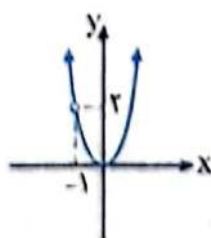
۳- برد تابع $y = \frac{1}{x}$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2x}$ برابر $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ است.

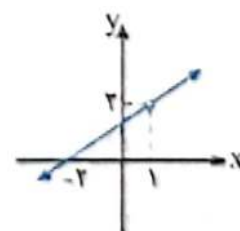
۵- دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند.

(فرورداد ۱۴۰۲)

۶- در هر یک از قسمت‌های زیر، نمودار یک تابع گویا داده شده است. ضابطه آن را بنویسید.



(ب)



(ا)

۷- دامنه تابع $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+ax+b}$ ، مجموعه $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ می‌باشد. a و b را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۵۶ کتاب درسی)

۸- در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید دو تابع داده شده با هم برابر هستند یا خیر.

(شهریور ۱۴۰۲)

(ب) $g(x) = x - 2$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

(ا) $g(x) = 1$, $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$

(ت) $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(پ) $g(x) = \frac{x}{|x|}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

۹- حدود m را چنان مشخص کنید که دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+3}{x^2+mx+m}$ برابر $\mathbb{R}$ شود.

۱۰- به کمک انتقال، نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$

۱۱- در هر یک از قسمت‌های زیر، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که دو تابع داده شده با هم برابر باشند.

$$g(x) = x+2, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ ax-1 & x = 2 \end{cases} \quad (A)$$

$$g(x) = 3x+b, f(x) = \begin{cases} \frac{9x^2-1}{3x+1} & x \neq -\frac{1}{3} \\ a & x = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (B)$$

Homework

۱ به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای $y = -4$ و پایین $y = 0$ قرار دارد؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ کدام دو تابع زیر باهم برابرند؟

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۲) & \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x^2} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (۱) \\ &\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-2)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (۴) & \begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+3} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (۳) \end{aligned}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۳ دامنه تابع $f(x) = \frac{(m-2)\sqrt[3]{x} + x + 2}{mx^2 + x - 3}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ می باشد، حاصل $2a + b$ کدام است؟
($a < b$)

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) -2
(۴) -3

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۴ چند جفت از توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = \sqrt[3]{x^3} \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-2)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+2} \\ g(x) = \frac{2x^2+3}{2x^2+3} \end{cases} \quad (الف) \end{aligned}$$

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۵ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\frac{1}{x+1} - 2}{\frac{3x+5}{x^2-4}}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - A$ باشد، مجموعه A چند عضوی است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۵
(۴) ۶

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$-4 < -\frac{1}{3-x} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3-x} < 4$$

$$x = 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4$$

$$x = 2 \Rightarrow 0 < 1 < 4$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > 3$ عبارت $\frac{1}{3-x}$ منفی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

بررسی گزینه‌ها:

گزینه "۱":

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

گزینه "۲":

$$D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases}$$

ولی شرط دوم را ندارد.

مثال نقض: به ازای $x = -2$:

$$\begin{cases} f(-2) = 2 \\ g(-2) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \neq g(-2)$$

گزینه "۳":

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} = 1$$

$$f(x) = g(x) = 1$$

پس دو تابع مساوی‌اند.

گزینه "۴":

$$D_g = [2, +\infty)$$

$$x(x-2) \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴۰۱۴

گزینه ۳

۳

برای آنکه $f(x)$ تابعی گویا شود، باید $\sqrt[3]{x}$ از تابع حذف شود، پس $m = 2 \Rightarrow m - 2 = 0$ ، در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{2x^2+x-3}$$

$$2x^2+x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

$$2a+b=2\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-2$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴۰۱۴

گزینه ۳

۴

$$\text{الف) } D_f = D_g = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=1 \\ g(x)=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

دو تابع مساوی هستند.

$$\text{ب) } D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \neq D_g = [2, +\infty)$$

پس دو تابع مساوی نیستند.

$$\text{پ) } D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x)=|x| \\ g(x)=x \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

پس دو تابع مساوی نیستند.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴۰۱۴

اعضای مجموعه A ریشه‌های مخرج می‌باشند، بنابراین:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$A = \left\{ -\frac{5}{3}, -2, -1, 2 \right\}$$

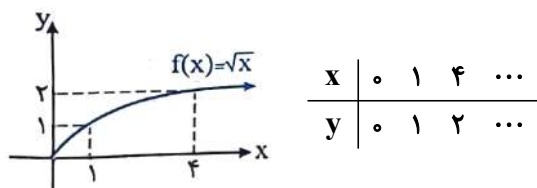
مجموعه A ، ۴ عضو دارد.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

الف) توابع رادیکالی

اگر d میانگین عمق یک دریا بر حسب کیلومتر باشد، آنگاه تندی جابه‌ایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت از رابطه $S = 456\sqrt{d}$ به دست می‌آید. به دلیل نقش کاربردی رادیکال، توابع رادیکالی تعریف می‌شود.

• ساده‌ترین تابع رادیکالی، تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ است. این تابع برای همه اعداد حقیقی نامنفی تعریف شده است. در واقع دامنه این تابع برابر $D_f = [0, +\infty)$ است. نمودار این تابع به صورت مقابل است:

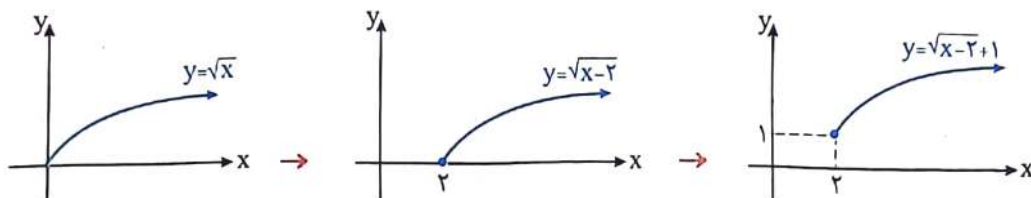


برد این تابع (مقادیر y) مجموعه اعداد حقیقی نامنفی است، پس برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $R_y = [0, +\infty)$ می‌باشد. به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ، میشه نمودار توابع جدیدی را رسم کرد و همچنین دامنه و برد این توابع را از روی نمودار به دست آورد.

تمرین: به کمک انتقال، نمودار تابع $y = 1 + \sqrt{x-2}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

(مشابه فعالیت ۲ صفحه ۵۳ کتاب درسی)

پاسخ: اگر نمودار $y = \sqrt{x}$ را به اندازه ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y = \sqrt{x-2}$ و با انتقال نمودار $y = \sqrt{x-2}$ به اندازه یک واحد به سمت بالا، نمودار $y = \sqrt{x-2} + 1$ به دست می‌آید:



با توجه به نمودار، دامنه تابع بازه $[2, +\infty)$ و برد تابع، بازه $[1, +\infty)$ می‌باشد.

در رادیکال با فرجه زوج، عدد زیر رادیکال منفی نمی‌تواند باشد اما در رادیکال با فرجه فرد، عدد زیر رادیکال می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. همین مطلب برای دامنه رادیکال است.

دامنه توابع رادیکالی

• در عبارت‌های رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی شود. بنابراین برای به دست آوردن دامنه تابع $f(x) = \sqrt[k]{P(x)}$ که در آن $P(x)$ یک عبارت گویا می‌باشد، نامعادله $P(x) \geq 0$ را حل می‌کنیم. حدود x دامنه تابع f خواهد بود، یعنی:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \geq 0\}$$

• در عبارت‌های رادیکالی با فرجه فرد، عبارت زیر رادیکال می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. بنابراین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، با دامنه عبارت زیر رادیکال برابر است. به عبارت دیگر در تعیین دامنه تابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را در نظر نمی‌گیریم و فقط دامنه تابع

زیر رادیکال را به دست می‌آوریم. پس دامنه تابع $f(x) = \sqrt[k]{P(x)}$ برابر است با:

تمرین: دامنه توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{-x+4}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$ را به دست آورید.

پاسخ: در زیر رادیکال با فرجه ۲، عدد منفی قرار نمی‌گیرد. بنابراین عبارت $-x+4$ باید مثبت یا صفر باشد، بنابراین:

$$-x+4 \geq 0 \Rightarrow -x \geq -4 \xrightarrow{\div(-1)} x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-2}{4-x} \geq 0$ ، دامنه تابع g می‌باشد. برای حل نامعادله، عبارت $P = \frac{x-2}{4-x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2, \quad 4-x=0 \Rightarrow x=4$$

$$P \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow D_g = [2, 4)$$

x	۲	۴
x-2	-	+
4-x	+	-
P	-	+

تعریف نشده

(ب) تابع جزء صحیح

تابع پله‌ای: به تابعی که دامنه آن را بتوان به صورت تعدادی بازه جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها تنها یک عدد در برد نسبت داد، تابع پله‌ای می‌گویند.

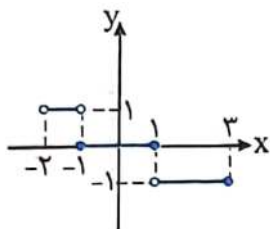
مثال: هر یک از توابع روبه‌رو، یک تابع پله‌ای می‌باشند:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \geq 0 \\ 5 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 5 & -3 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 4 \\ -1 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

نکته: برای رسم نمودار یک تابع پله‌ای، باید تابع ثابت $y = k$ را با توجه به دامنه آن رسم کنیم.

$$\text{تعریف:} \quad \text{نمودار تابع پله‌ای} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & 1 < x \leq 3 \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & -2 < x < -1 \end{cases} \quad \text{را رسم کنید.}$$

پاسخ: با رسم خط‌های $y = -1$ در بازه $(-2, -1)$ ، $y = 0$ در بازه $[-1, 1]$ و $y = 1$ در بازه $(1, 3]$ ، نمودار تابع پله‌ای f رسم می‌شود:



• مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است.

جزء صحیح: فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

(۱) اگر x یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $[x]$ برابر x است:

(۲) اگر x یک عدد غیر صحیح باشد، آن‌گاه جزء صحیح x برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x می‌باشد.

تعریف: حاصل هر یک از جزء صحیح‌های زیر را به دست آورید.

$$[-3.01/2] \quad (3)$$

$$[\pi] \quad (2)$$

$$[-\frac{4}{3}] \quad (1)$$

پاسخ: در هر قسمت باید با توجه به محور x ها دو عدد صحیح متوالی پیدا کنیم که عدد موجود در براکت، بین آن‌ها قرار داشته باشد:

$$-\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3} \Rightarrow -2 < -\frac{4}{3} < -1 \Rightarrow \left[-\frac{4}{3}\right] = -2 \quad (1)$$

$$\pi \approx 3.14 \Rightarrow 3 < \pi < 4 \Rightarrow [\pi] = 3 \quad (2)$$

$$-3.02 < -3.01/2 < -3.01 \Rightarrow \left[-3.01/2\right] = -3.02 \quad (3)$$

نکته: آ) یک عدد حقیقی غیر صحیح باشد، برای به دست آوردن مقدار $[x]$ ، ابتدا مشخص می‌کنیم که x بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، سپس عدد صحیح کوچک‌تر را به عنوان $[x]$ در نظر می‌گیریم. تعریف جزء صحیح با علائم ریاضی به صورت زیر است:

$$1) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$2) x \notin \mathbb{Z}, \underbrace{n < x < n+1}_{\substack{\text{ن و } n+1 \text{ دو عدد} \\ \text{صحیح متوالی}}} \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z} \quad \text{(ب) از دو قسمت نکته بالا می‌توان گفت:}$$

برای حل معادلات به صورت $[u] = n$ که در آن $n \in \mathbb{Z}$ است، برای حذف جزء صحیح از نامعادله $n \leq u \leq n+1$ استفاده می‌کنیم.

تمرین: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\left[\frac{x-1}{2}\right] = 1 \quad (1) \qquad \left[\frac{x}{3} + 1\right] = -2 \quad (2)$$

$$\left[\frac{x-1}{2}\right] = 1 \xrightarrow{n=1} 1 \leq \frac{x-1}{2} < 1+1 \xrightarrow{\times 2} 2 \leq x-1 < 4 \xrightarrow{+1} 3 \leq x < 5 \quad \text{پاسخ: (1)}$$

$$\left[\frac{x}{3} + 1\right] = -2 \xrightarrow{n=-2} -2 \leq \frac{x}{3} + 1 < -2+1 \xrightarrow{-1} -3 \leq \frac{x}{3} < -2 \xrightarrow{\times 3} -9 \leq x < -6 \quad (2)$$

$$[x \pm n] = [x] \pm n \quad \text{نکته: اگر } x \text{ یک عدد حقیقی و } n \in \mathbb{Z} \text{، آن گاه:}$$

تابع جزء صحیح: تابع $f(x) = [x]$ را تابع جزء صحیح می‌گوییم. در واقع تابع جزء صحیح، تابعی است که به هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با آن را نسبت می‌دهد. در حالت کلی دامنه این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ می‌باشد.

$$n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n \Leftrightarrow f(x) = [x] = n$$

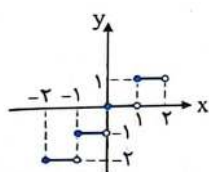
تمرین: نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

پاسخ: ابتدا با توجه به تعریف جزء صحیح، f را به صورت یک تابع پله‌ای می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ -2 & -2 \leq x < -1 \end{cases}$$

با رسم خط‌های $y = -2$ در بازه $[-2, -1)$ ، $y = -1$ در بازه $[-1, 0)$ ، $y = 0$ در بازه $[0, 1)$

و $y = 1$ در بازه $[1, 2)$ ، نمودار تابع $f(x) = [x]$ در بازه $[-2, 2]$ رسم می‌شود:



پرسش‌های تشریحی:

• درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱- تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ یک تابع پله‌ای است.

(فرداد ۱۴۰۲)

۲- اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$

۳- برد تابع $f(x) = [x]$ ، مجموعه اعداد صحیح است.

۴- دامنه تابع $y = -2 + \sqrt{x-1}$ ، بازه $[-2, +\infty)$ است.

• در سه سوال زیر، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۵- برد تابع $y = 1 + \sqrt{x+2}$ ، بازه است.

۶- دامنه تابع $f(x) = [x]$ ، است.

۷- اگر $2 \leq x < 3$ باشد، آنگاه مقدار $[x]$ برابر است.

۸- نمودار تابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد را به دست آورید.

(فرداد ۱۴۰۲)

$$y = 2 - \sqrt{x+1}$$

(مشابه فعالیت ۱ صفحه ۵۵ کتاب درسی)

۹- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(آ) $[x] = 3$ (ب) $\left[\frac{x+1}{2}\right] = -1$ (پ) $[2x-1] = 5$ (ت) $2[x] + 5 = 0$

۱۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a + \sqrt{x+b}$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار این تابع از نقطه $(1, -2)$ بگذرد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۱- دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(آ) $h(x) = \sqrt{-x^2 + 5x}$ (ب) $m(x) = \sqrt{2 - \frac{x+1}{x-2}}$

Homework

۱ نمودار تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ را رسم کنید و دامنه آن را بیابید.

۲ نمودار تابع $F(x) = [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.

۳ نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.

۴ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -5 \\ (\frac{m}{2} + 2)x - 1 \end{cases}$ یک تابع پلکانی (پله‌ای) باشد، آنگاه مقدار m کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۵

(۳) -۱ (۴) -۲

۵ اگر $[\frac{x}{2}] = -2$ باشد، آنگاه حاصل $[-\frac{1}{2}x - 1]$ کدام است؟

(۱) صفر یا ۱ (۲) -۲ یا -۱

(۳) ۱ (۴) صفر

۶ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[x] - 4}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - [4, 5)$ (۲) $[1, +\infty) - \{4\}$

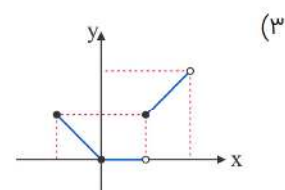
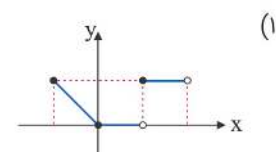
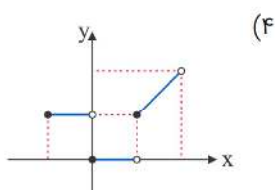
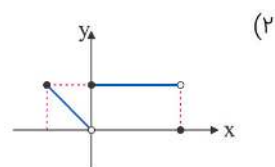
(۳) $[1, 4] \cup [6, +\infty)$ (۴) $[1, 4) \cup [5, +\infty)$

۷ حاصل $A = \frac{[-2/7] + [\frac{1}{4}] - [\sqrt{1}]}{[9] - [-5/3] + [5/8]}$ کدام است؟

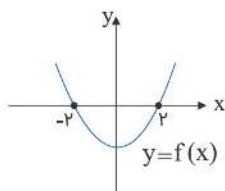
(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{10}$

(۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۸ نمودار $f(x) = x \cdot [x]$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟



۹ اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x+2) \cdot f(x)}$ کدام است؟



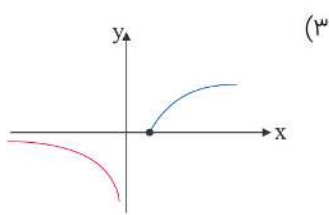
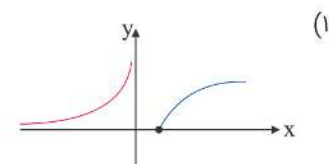
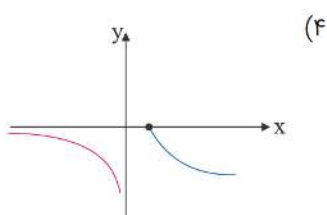
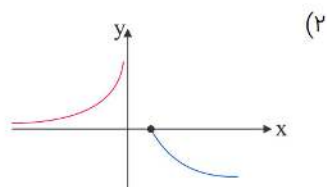
(۱) $[2, +\infty) \cup \{-2\}$

(۲) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(۳) $[-2, +\infty)$

(۴) $(-\infty, -2] \cup \{2\}$

۱۰ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x < 0 \\ -\sqrt{x-1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ کدام است؟



۱۱ نمودار $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۳ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد در راستای عمودی به بالا ببرید، اشتراک دامنه و بُرد تابع تبدیل یافته کدام است؟

(۲) $[2, +\infty)$

(۱) $[0, +\infty)$

(۴) $[1, +\infty)$

(۳) $[3, +\infty)$

۱۲ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{2 - x^2}}$ بازه $[a, b]$ می باشد. حاصل $a + \sqrt{2}b$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) -۱

(۴) ۱

(۳) -۳

۱۳ معادله $[x + 4] + [x - 7] = 9$ دارای مجموعه جواب $[a, b)$ می باشد. حداکثر مقدار $b + a$ کدام است؟

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۲ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ مجموعه جواب معادله $[2x + 3] + [2x - 9] = 0$ به صورت $[a, b)$ می باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

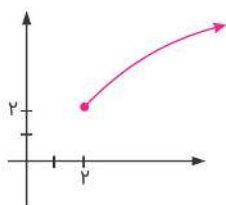
۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱۵ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

ب) $\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = 1$

آ) $[x^2 - x] = -2$



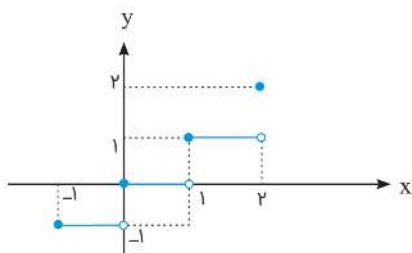
$$D_f = [1, +\infty)$$

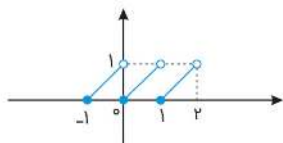
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2$$





$$-1 \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 : y = x + 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 : y = x \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 : y = x - 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

گزینه ۱

۴

به تابعی چندضابطه‌ای که همه ضابطه‌هایش، عدد ثابت باشد، تابع پلکانی می‌گویند. ضابطه اول که یک عدد ثابت است، برای ثابت بودن ضابطه دوم نیز باید ضریب x صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{m}{2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = -2 \Rightarrow m = -4$$

گزینه ۱

۵

$$\left[\frac{x}{2}\right] = -2 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x < -2$$

برای به دست آوردن جزء صحیح $\left[-\frac{1}{2}x - 1\right]$ داریم:

$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 &\xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} 1 < -\frac{1}{2}x \leq 2 \\ &\text{چون نامساوی در یک عدد منفی ضرب می‌شود جهت نامساوی عوض می‌شود} \\ \xrightarrow{+(-1)} 1 - 1 < -\frac{1}{2}x - 1 \leq 2 - 1 \\ \Rightarrow 0 < -\frac{1}{2}x - 1 \leq 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}x - 1\right] = 0 \text{ یا } 1 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر بین ۱ و صفر، جزء صحیح عبارت صفر می‌شود، چون در ۱ مساوی دارد، خود ۱ نیز شامل می‌شود.

گزینه ۴

۶

$$\left. \begin{aligned} x - 1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ [x] - 4 = 0 &\Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = [1, 4) \cup [5, +\infty)$$

گزینه ۱

۷

تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند که با $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند.

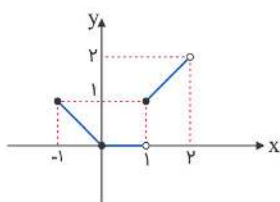
$$\begin{cases} -3 \leq -2/7 < -2 \Rightarrow [-2/7] = -3 \\ 0 \leq \frac{1}{6} < 1 \Rightarrow [\frac{1}{6}] = 0 \\ 2 \leq \sqrt{4} < 3 \Rightarrow [\sqrt{4}] = 2 \\ -1 \leq -0/3 < 0 \Rightarrow [-0/3] = -1 \\ 0 \leq 0/8 < 1 \Rightarrow [0/8] = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-3 + 0 - 2}{9 - (-1) + 0} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳

۸

$$-1 \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 : f(x) = -x \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 : f(x) = 0 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 : f(x) = x \end{cases}$$

$(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)$



گزینه ۱

۹

$$(x+2) \cdot f(x) \geq 0$$

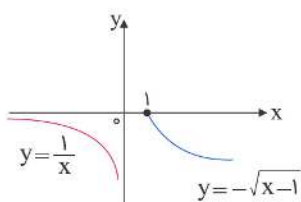
$$D_g = [2, +\infty) \cup \{-2\}$$

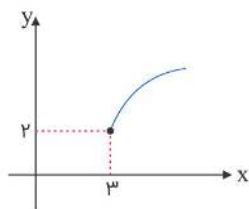
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	-	○	+	+
$f(x)$	+	○	-	+
$(x+2)f(x)$	-	○	-	+

گزینه ۴

۱۰

بنا به ضابطه تابع $f(x)$ ، گزینه "۴" صحیح است.





۳ واحد به راست: $f(x-3) = \sqrt{x-3}$

۲ واحد به بالا ببرید: $y = \sqrt{x-3} + 2$

دامنه: $D_f = [3, +\infty)$

بُرد: $R_f = [2, +\infty)$

$$D_f \cap R_f = [3, +\infty)$$

$$\sqrt{2-x^2} : 2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{رابطه (I): } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$x - \sqrt{2-x^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow D = [1, \sqrt{2}]$$

$$a + \sqrt{2}b = 1 + \sqrt{2}(\sqrt{2}) = 3$$

رابطه (II): $x \geq 1$, زیرا نباید $x < 0$ باشد.

$$[x] + 4 + [x] - 7 = 9 \Rightarrow 2[x] - 3 = 9$$

$$\Rightarrow 2[x] = 12 \Rightarrow [x] = 6$$

$$\Rightarrow 6 \leq x < 7 \Rightarrow x \in [6, 7)$$

$$b + a = 7 + 6 = 13$$

$$[2x] + 3 + [2x] - 9 = 0$$

$$2[2x] = 6 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$b - a = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۵ آ

$$[x^2 - x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x^2 - x < -1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x < -1 \\ x^2 - x \geq -2 \end{cases}$$

نامعادله $x^2 - x < -1$ به ازای هیچ مقداری از x جواب ندارد. زیرا:

معادله $x^2 - x + 1 = 0$ ، ریشه حقیقی ندارد و ضریب x^2 عددی مثبت است، پس عبارت $x^2 - x + 1$ همواره مثبت است. نامعادله $x^2 - x \geq -2$ را نیز باید حل کنیم. ولی چون مجموعه جواب نامعادله $x^2 - x < -1$ تهی است، بنابراین معادله $[x^2 - x] = -2$ جواب ندارد.

$$\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x-1}{x+1} < 1+1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x-1}{x+1} < 2 \quad (\text{ب})$$

با حل نامعادله‌های $\frac{x-1}{x+1} \geq 1$ و $\frac{x-1}{x+1} < 2$ ، مجموعه جواب معادله $\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = 1$ به دست می‌آید:

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1-(x+1)}{x+1} = \frac{-2}{x+1} \geq 0.$$

چون -2 عددی منفی است، باید $x+1$ نیز عددی منفی باشد تا کسر $\frac{-2}{x+1}$ عددی مثبت شود: $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$ (۱)

$$\frac{x-1}{x+1} < 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{(x-1)-2(x+1)}{x+1} = \frac{-x-3}{x+1} < 0. \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -3 \text{ یا } x > -1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x < -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3)$$

در این بسته وارون یک تابع، تابع یک به یک و مسائل مربوط به آن‌ها گفته می‌شود.

الف) وارون یک تابع

تعریف: اگر در تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است، جای مولفه‌ها را عوض کنیم، مجموعه جدیدی از زوج‌های مرتب به دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

تمرین: وارون تابع $f = \{(2, -1), (1, 4), (3, -1), (5, 0)\}$ را به دست آورید.

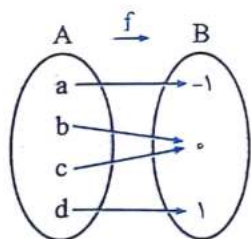
پاسخ: با جابه‌جایی مولفه‌های همه زوج‌های مرتب داده‌شده، وارون تابع به دست می‌آید:

$$f^{-1} = \{(-1, 2), (4, 1), (-1, 3), (0, 5)\}$$

تذکره: وارون یک تابع ممکن است تابع نباشد.

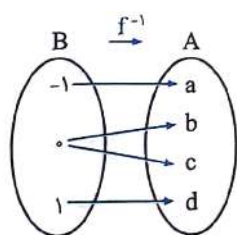
نکته: وارون تابع f ، خود یک تابع است، اگر در زوج‌های مرتب تابع f ، هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مولفه دوم یکسانی نداشته باشند.

تمرین: نمایش پیکانی تابع f به صورت مقابل است:



(۱) نمایش پیکانی f^{-1} را مشخص کنید.

(۲) آیا f^{-1} تابع است؟ چرا؟



پاسخ: (۱) نمایش پیکانی f^{-1} از B به A و با تغیی جهت پیکان‌ها می‌باشد.

(۲) خیر، زیرا از $0 \in B$ ، دو پیکان خارج شده است.

رابطه بین دامنه و برد f و f^{-1}

با توجه به تعریف f و f^{-1} ، اعضای دامنه f ، به جای اعضای برد f^{-1} و اعضای برد f ، به جای اعضای دامنه f^{-1} قرار می‌گیرند. بنابراین:

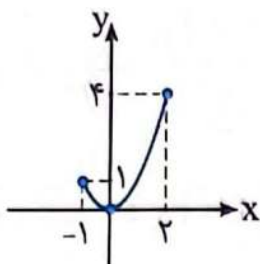
نکته: اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، آن‌گاه:

$$(1) \text{ برد تابع } f^{-1} = \text{دامنه تابع } f \quad (D_{f^{-1}} = R_f)$$

$$(2) \text{ دامنه تابع } f^{-1} = \text{برد تابع } f \quad (R_{f^{-1}} = D_f)$$

تمرین: اگر f تابعی با ضابطه $f(x) = x^2$ و $x \in [0, 2]$ باشد، دامنه f^{-1} را مشخص کنید.

پاسخ: با رسم نمودار f روی بازه $[0, 2]$ ، برد تابع f را به دست می‌آوریم. نمودار f یک سهمی قائم رو به بالا با رأس $(0, 0)$ است:



x	-1	0	2
y	1	0	4

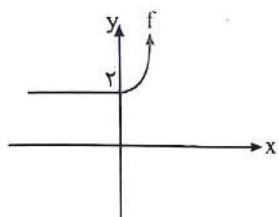
$$R_f = [0, 4] \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0, 4]$$

با تصویرسازی نمودار f روی محور y ها، برد تابع f به دست می‌آید:

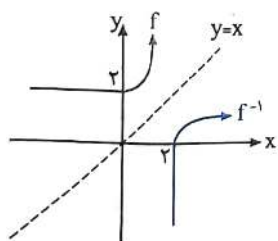
نکته: (۱) قرینه نقطه $A(a, b)$ نسبت به خط $y = x$ ، نقطه $A'(b, a)$ است.

(۲) نمودار یک تابع و نمودار وارون آن تابع نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، برای رسم وارون آن تابع کافی است که قرینه آن را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم.

تعریف: نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار وارون آن را رسم کنید.



پاسخ: با رسم خط $y = x$ و قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y = x$ ، نمودار f^{-1} به دست می‌آید:



نکته: اگر $f(a) = b$ ، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ و برعکس. به عبارت دیگر اگر نمودار f از نقطه (a, b) بگذرد، آن‌گاه نمودار f^{-1} از نقطه (b, a) می‌گذرد.

تعریف: اگر $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0)$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر $f^{-1}(0) = b$ باشد، آن‌گاه $f(b) = 0$ است. بنابراین داریم:

$$f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5} \Rightarrow f(b) = 3 - \sqrt{2b + 5} = 0 \Rightarrow 3 = \sqrt{2b + 5} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 9 = 2b + 5 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

• وارون هر تابعی، لزوماً تابع نیست. با تعریف تابع یک‌به‌یک، توابعی مشخص می‌شوند که وارون آن‌ها نیز تابع می‌شود.

(ب) تابع یک‌به‌یک

تعریف: اگر در تابع f هر دو عضو متمایز در دامنه تابع به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند، به تابع f ، تابع یک‌به‌یک می‌گویند.

مثال: تابع $f = \{(-1, 2), (2, 5), (4, -2)\}$ تابعی یک‌به‌یک است، زیرا هر دو عدد متمایز از دامنه به دو عدد متمایز از برد نظیر شده است. اما تابع $g = \{(2, 1), (0, 1), (5, 3)\}$ تابع یک‌به‌یک نیست، زیرا در دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(0, 1)$ ، مولفه‌های دوم با هم برابرند.

نکته: اگر یک تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتبه‌ها داده شده باشد، هنگامی تابع یک‌به‌یک است که مولفه‌های دوم آن دوه‌دو متمایز باشند و اگر دو زوج مرتب دارای مولفه‌های دوم یکسان باشند، باید مولفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشند.

تعریف: اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک‌به‌یک باشد، a را به دست آورید.

پاسخ: در تابع یک‌به‌یک اگر دو زوج مرتب با مولفه‌های دوم برابر داشته باشیم، آن‌گاه مولفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابرند. بنابراین:

$$(-1, 3) \in f, (m, 3) \in f \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک است}} m = -1 \Rightarrow f = \{(-2, 2), (-1, 3), (-2, a)\}$$

از طرفی f تابع است، بنابراین اگر دو زوج مرتب با مولفه‌های اول مساوی داشته باشیم، آن‌گاه مولفه‌های دوم باید با هم برابر باشند.

$(-2, a) \in f$, $(-2, 2) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} a = 2$

نکته: (۱) هیچ تابع ثابتی که دامنه آن بیش از یک عضو داشته باشد، تابع یک‌به‌یک نیست.

مثال: تابع ثابت $f = \{(-1, 4), (2, 4)\}$ تابعی غیریک‌به‌یک است.

(۲) اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه f^{-1} نیز یک تابع است.

تمرین: وارون کدامیک از توابع زیر، خود نیز تابع می‌باشد؟

(۱) $f = \{(1, -1), (2, 3), (4, 5)\}$

(۲) $g = \{(3, 2), (4, -1), (5, 0), (6, 2)\}$

پاسخ: هر تابعی که یک‌به‌یک باشد، وارون آن نیز تابع است. f یک تابع یک‌به‌یک است (مولفه‌های دوم زوج‌مرتبه‌ها، متمایزند)، پس f^{-1} نیز یک تابع است. اما g تابع یک‌به‌یک نیست (دو زوج‌مرتبه متمایز $(3, 2)$ و $(6, 2)$ با مولفه‌های دوم یکسان در g وجود دارد)، پس g^{-1} تابع نمی‌باشد.

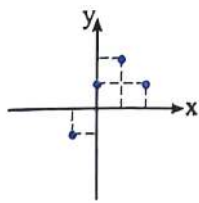
نکته: یک تابع اگر به صورت نمودار پیکانی نمایش داده شده باشد، هنگامی تابع یک‌به‌یک است که به هر عضو از برد فقط یک پیکان وارد شود.

تشخیص تابع یک‌به‌یک از روی نمودار:

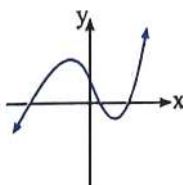
نکته: اگر تابعی با نمودار نمایش داده شده باشد، آن‌گاه برای تشخیص یک‌به‌یک بودن آن از آزمون زیر که به آزمون خط افقی مشهور است، استفاده می‌کنیم:

آزمون خط افقی: اگر هر خط موازی محور x ها، نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک است.

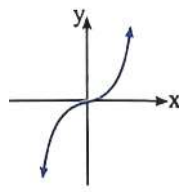
تمرین: کدامیک از نمودارهای داده‌شده، یک تابع یک‌به‌یک را مشخص می‌کند؟



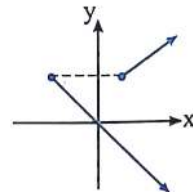
(۴)



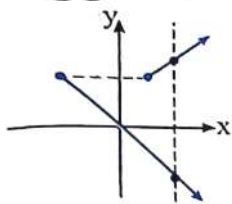
(۳)



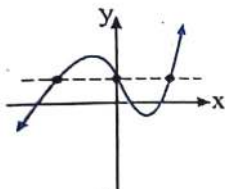
(۲)



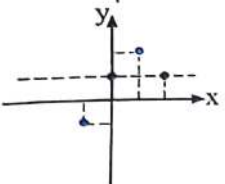
(۱)



پاسخ: (۱) نمودار داده شده، نمودار تابع نیست، زیرا خط مشخص شده که موازی محور y ها است، نمودار را در دو نقطه قطع کرده است.



(۲) هر خط به موازات محور x ها، نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می کند، پس این نمودار، نمودار یک تابع یک به یک است.

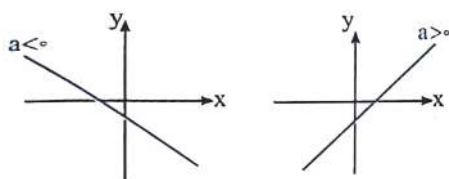


(۳) خط رسم شده در شکل مقابل، نمودار را در سه نقطه قطع کرده است، پس این نمودار، نمودار یک تابع یک به یک نمی باشد.

(۴) خط رسم شده در شکل مقابل، نمودار را در دو نقطه قطع کرده است، پس این نمودار، نمودار یک تابع یک به یک نمی باشد.

نکته: در تابع خطی $f(x) = ax + b$:

(۱) اگر $a \neq 0$ باشد، آن گاه با توجه به نمودار، f تابعی یک به یک است:



(هر خط به موازات محور x ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند.)

(۲) اگر $a = 0$ ، آن گاه ضابطه تابع f به صورت $f(x) = b$ درمی آید که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، مقدار تابع برابر عدد ثابت b است. پس در این حالت f تابعی یک به یک نمی باشد.

به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک

ابتدا از نماد y به جای $f(x)$ استفاده می کنیم. سپس x را بر حسب y حساب می کنیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از نماد $f^{-1}(x)$ استفاده می کنیم.

نکته: در تعیین ضابطه f^{-1} ، باید برد تابع f را به دست آوریم (برد تابع f با دامنه تابع f^{-1} برابر است).

تمرین: ضابطه وارون تابع $f(x) = 5x + 3$ را به دست آورید.

پاسخ: دامنه و برد تابع خطی f برابر $\mathbb{R}$ است. به جای $f(x)$ ، y قرار می دهیم:

$$y = 5x + 3$$

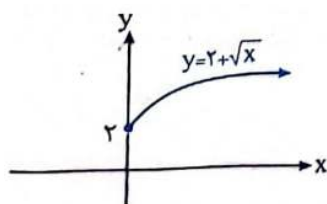
$$y = 5x + 3 \Rightarrow 5x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(y - 3)$$

x را بر حسب y می نویسیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x - 3) , x \in \mathbb{R}$$

به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x قرار می دهیم:

تمرین: ضابطه وارون تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ را تعیین کنید.
پاسخ: دامنه f بازه $[0, +\infty)$ و برد تابع f بازه $[2, +\infty)$ است:

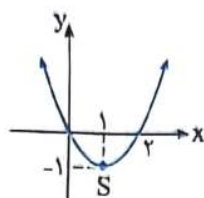


برای به دست آوردن وارون تابع f ، داریم:

$$y = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (y - 2)^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 2)^2, x \geq 2$$

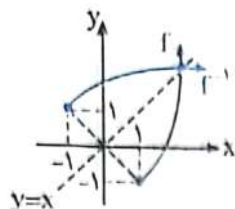
محدود کردن دامنه و ساختن یک تابع یک به یک

نمودار سهمی به معادله $f(x) = x^2 - 2x$ به صورت مقابل است:



خطی مانند $y = 1$ (هر خط به صورت $y = k$ ، $k > -1$) نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. پس f تابعی یک به یک نمی‌باشد. اما می‌توان با محدود کردن دامنه تابع، تابعی یک به یک از آن ساخت که وارون آن، یک تابع باشد. مثلاً می‌توان دامنه آن را $[1, +\infty)$ در نظر گرفت تا تابع f روی این بازه، تابعی یک به یک شود. می‌خواهیم در بازه $[1, +\infty)$ نمودار f^{-1} را رسم و ضابطه آن را مشخص کنیم.

با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y = x$ ، نمودار f^{-1} به دست می‌آید:



برد تابع f ، مجموعه $[-1, +\infty)$ می‌باشد، پس دامنه f^{-1} ، $[-1, +\infty)$ است.

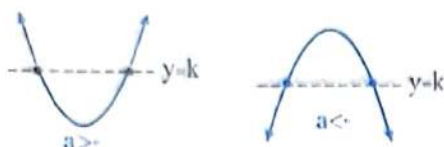
برای تعیین ضابطه f^{-1} ، عبارت $x^2 - 2x$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = x^2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x - 1)^2 - 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = y + 1 \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y + 1}$$

چون $x \in D_f = [1, +\infty)$ پس داریم:

$$x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x - 1 = +\sqrt{y + 1} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 1}, x \geq -1$$

نکته: با توجه به نمودار سهمی، هیچ تابع چند جمله‌ای از درجه ۲، روی $\mathbb{R}$ یک به یک نمی‌باشد.



خط $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است. اگر نمودار f را در یکی از بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، آن‌گاه f تابعی یک به یک می‌باشد.

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- نمودار f و f^{-1} نسبت به خط قرینه یکدیگرند.

۲- تابع $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4)\}$ ، تابع یک‌به‌یک

۳- اگر هر خط موازی محور نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک هست.

۴- اگر $(2, 5) \in f$ ، آن‌گاه $f^{-1} \in \dots\dots\dots$

۵- هر تابع درجه ۲، تابع یک‌به‌یک

۶- برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است، قرینه نمودار آن را نسبت به رسم کنیم.

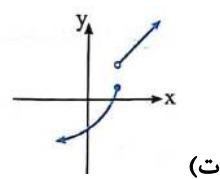
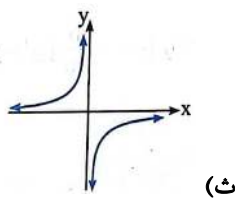
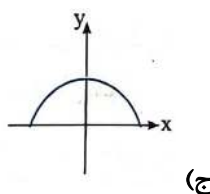
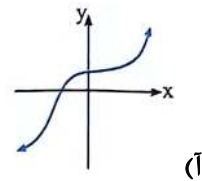
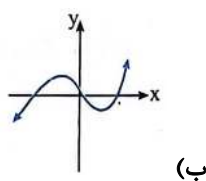
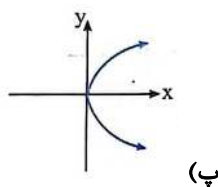
• درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۷- هر تابع درجه دوم یک‌به‌یک هست.

۸- هر تابع خطی غیر ثابت، یک‌به‌یک است.

۹- ضابطه وارون تابع $f(x) = 3x - 2$ را به دست آورید.

۱۰- کدام یک از نمودارهای داده‌شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص می‌کند؟



(فرداد ۱۴۰۲)

۱۱- اگر $f(x) = 3x + 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(8)$ را تعیین کنید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۶۴ کتاب درسی)

۱۲- نمودار تابعی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $[1, 4]$ را رسم کنید به طوری که:

(آ) یک‌به‌یک باشد.

(ب) یک‌به‌یک نباشد.

۱۳- اگر $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + 2 \mid y \mid < 5\}$ باشد، با حذف حداقل چند عضو از آن، R تابعی یک‌به‌یک می‌شود؟

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۶۴ کتاب درسی)

۱۴- با رسم نمودار هر یک از توابع زیر، مشخص کنید کدام یک از توابع زیر، تابعی یک‌به‌یک است؟ در توابع غیریک‌به‌یک، دامنه‌ای مشخص کنید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک شود.

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{ب)} \quad y = 2x + 1 \quad \text{ا)} \quad$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ت)} \quad y = 2 + \sqrt{x+1} \quad \text{پ)} \quad$$

$$f(x) = |x-1| + 1 \quad \text{ج)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} \quad \text{ث)} \quad$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ح)} \quad f(x) = [x] \quad \text{چ)} \quad$$

۱۵- قرینه نقطه $(3, 4)$ را نسبت به خط $y = x$ مشخص کنید.

۱۶- اگر قرینه نقطه $(a-1, b+3)$ نسبت به خط $y = x$ ، نقطه $(a-1, 2b+5)$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۷- قرینه نقطه $(a+1, 2a)$ نسبت به خط $y = x$ روی خط $x + 2y = 8$ قرار دارد. مقدار a را به دست آورید.

۱۸- ضابطه وارون هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{پ)} \quad f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0 \quad \text{ب)} \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad \text{ا)}$$

Homework

۱ وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

- (۱) $(-1, -2)$ (۲) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$
(۳) $(1, 2)$ (۴) $(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8})$

۲ وارون تابع $y = -3x^3 + 2x - 11$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

- (۱) $(9, -2)$ (۲) $(2, -31)$
(۳) $(-1, 10)$ (۴) $(-12, -1)$

۳ باتوجه به نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ، تابع $f(x)$ در کدام بازه یک‌به‌یک است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $[2, +\infty)$
(۳) $(-\infty, 3]$ (۴) $[1, 3]$

۴ ضابطه وارون تابع $g(x) = \frac{2x-3}{5}$ را به دست آورید.

۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف نشان دهید تابع $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$ وارون‌پذیر است.

ب

ضابطه تابع وارون تابع $f(x)$ را به دست آورید.

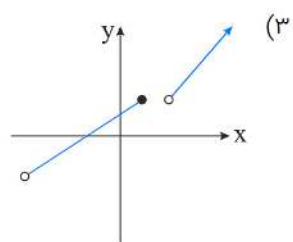
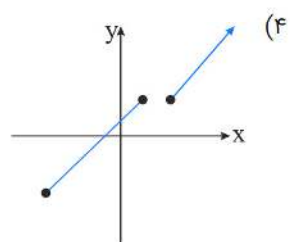
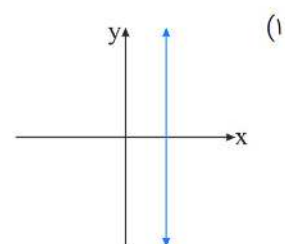
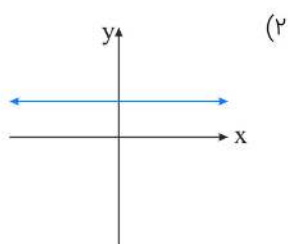
۶ نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ مفروض است. با محدود کردن دامنه این تابع، تابع $f(x)$ را یک‌به‌یک نمایید.

۷ اگر $f(x) = x + \sqrt{x+1}$ ، حاصل $f^{-1}(5) + f^{-1}(11)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۱
(۳) ۵ (۴) ۱۲

کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع یک به یک را نشان می‌دهد؟

۸



اگر $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & ; x \geq 1 \\ x + k & ; x < 1 \end{cases}$ یک تابع یک به یک باشد، حدود k کدام است؟

۹

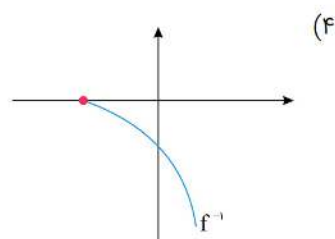
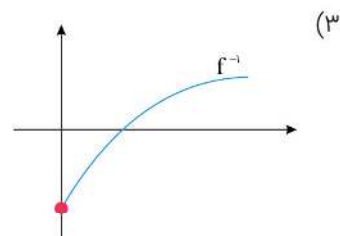
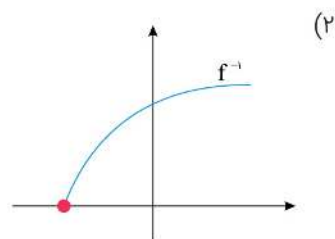
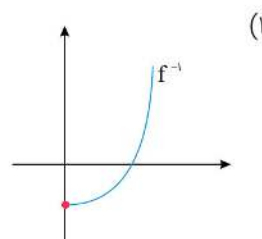
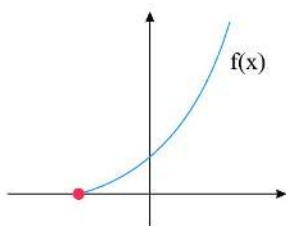
(۲) $k \geq 4$

(۱) $k \leq 4$

(۴) $k \geq 2$

(۳) $k \leq 2$

۱۰ اگر نمودار $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، کدام گزینه نمودار تابع $f^{-1}(x)$ است؟



۱۱ اگر $f = \{(1, 2), (3, -2), (4, 1), (2, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (1, 1), (3, 2)\}$ حاصل $f^{-1}(-1) + f^{-1}(1) + g^{-1}(2)$ کدام است؟

(۱) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۷

(۴) ۹

۱۲ اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

(۱) $(-1, 1)$

(۳) $(2, 1)$

(۲) $(-1, 3)$

(۴) $(2, 3)$

۱۳ قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(۱) -۲

(۳) ۱

(۲) -۱

(۴) ۲

۱۴ تابع f به صورت زیر مفروض است:

$$f(x) = (x-1)^2 + 2; x \leq 1$$

الف به کمک رسم نشان دهید تابع f برای $x \leq 1$ وارون پذیر است.

ب ضابطه وارون تابع برای $x \leq 1$ را بیابید.

۱۵ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-3x+4}{-2}$ را به دست آورید.

۱۶ اگر $f = \{(2, 1), (-3, 2), (-1, -1), (0, -3)\}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، حاصل $f(g^{-1}(2))$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) ۱

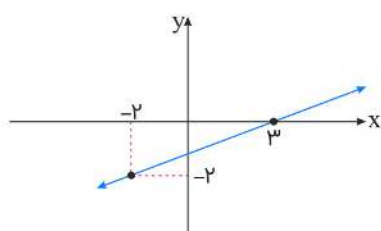
۱۷ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = f^{-1}(x)$ باشد، در این صورت $f(2)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۴



۱۸ اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۳

$$(a, b) \in f(x) \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}(x)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y = x^3 - x + 1$ صدق دهیم.

گزینه ۱: $(-2)^3 - (-2) + 1 \neq -1 \quad \times$

گزینه ۲: $(\frac{1}{\lambda})^3 - (\frac{1}{\lambda}) + 1 = \frac{5}{\lambda} \quad \checkmark$

گزینه ۳: $2^3 - 2 + 1 \neq 1 \quad \times$

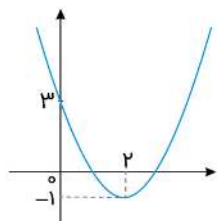
گزینه ۴: $(-\frac{11}{\lambda})^3 - (-\frac{11}{\lambda}) + 1 \neq -\frac{1}{\lambda} \quad \times$

اگر $(-2, 9)$ روی وارون تابع باشد، $(-2, 9)$ روی خود تابع قرار دارد:

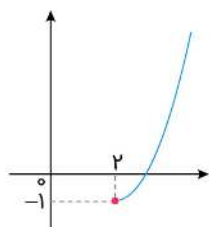
$$-3(-2)^3 + 2(-2) - 11 = 24 - 4 - 11 = 9$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$$

نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



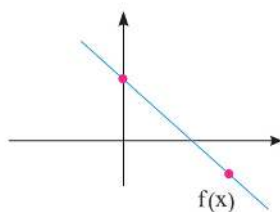
تابع در بازه‌ای یک‌به‌یک است که اگر خطوطی موازی محور x ها رسم نمایید، منحنی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
گزینه "۲": $x \in [2, +\infty)$



$$y = \frac{2x - 3}{5} \Rightarrow 5y = 2x - 3 \Rightarrow 2x = 5y + 3$$

$$x = \frac{5y + 3}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{5x + 3}{2}$$

اگر خطوطی موازی محور x ها رسم نمایید، نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

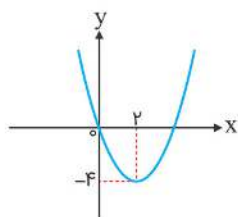


$$y = \frac{-\gamma x + \varpi}{\delta} \Rightarrow \delta y = -\gamma x + \varpi \Rightarrow \gamma x = -\delta y + \varpi$$

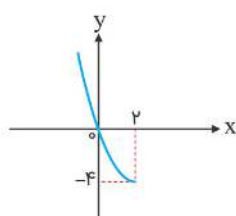
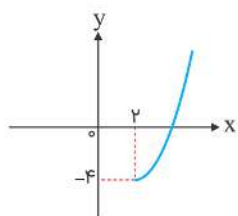
$$x = \frac{-\delta y + \varpi}{\gamma} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-\delta x + \varpi}{\gamma}$$

$$f(x) = x^r - rx + r - r \Rightarrow f(x) = (x - r)^r - r$$

$$D_f = \mathbb{R}$$



$$\begin{cases} x \in [r, +\infty) \\ \text{یا} \\ x \in (-\infty, r] \end{cases}$$



اگر خطوط کمکی موازی محور x ها رسم شود، منحنی تابع یک به یک را در یک نقطه قطع می کند.

گزینه ۲

۷

$$f^{-1}(5) : x + \sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f^{-1}(5) = 3$$

$$f^{-1}(11) : x + \sqrt{x+1} = 11 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f^{-1}(11) = 8$$

$$f^{-1}(5) + f^{-1}(11) = 3 + 8 = 11$$

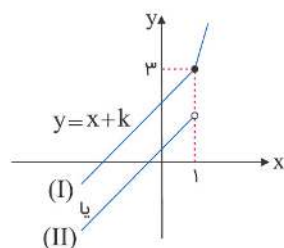
گزینه ۳

۸

در تابع یک به یک هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. تنها گزینه "۳" این ویژگی را دارد.
تذکر: گزینه "۱" تابع نیست، بنابراین یک به یک بودن آن را بررسی نمی‌کنیم.

گزینه ۳

۹

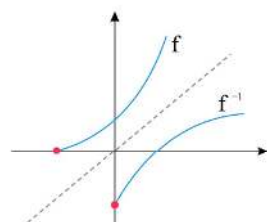


$$x = 1 : y = x + k \leq 3 \Rightarrow 1 + k \leq 3 \Rightarrow k \leq 2$$

گزینه ۳

۱۰

چون نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگر هستند، پس داریم:



گزینه ۴

۱۱

$$f^{-1} = \{(2, 1), (-2, 3), (1, 4), (-1, 2)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (1, 1), (2, 3)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(-1) = 2 \\ f^{-1}(1) = 4 \\ g^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(-1) + f^{-1}(1) + g^{-1}(2) = 2 + 4 + 3 = 9$$

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب‌ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤال‌ها فراموش نشود. این که زوج مرتب‌ها نباید مؤلفهٔ اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه‌های دوم هم برابر شود.

در رابطهٔ داده شده دو زوج مرتب $(3, 2)$ و $(3, a^2 - a)$ مشاهده می‌شود. برای این که رابطه در وهلهٔ اول یک تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند:

$$a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می‌شود:

$$a = -1 \Rightarrow (-1, 5) \in f, (-1, 4) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = 2$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$(3, 2) \in f, (b, 2) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f \text{ یک به یک است}} b = 3$$

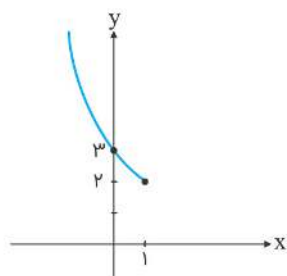
پس دوتایی (a, b) به صورت $(2, 3)$ درمی‌آید.

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینهٔ خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$3y - 4 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 \quad (1, 2), (0, 3)$$



چون خطوط موازی محور طول‌ها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک به یک و وارون پذیر است.

ب

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 = y \Rightarrow (x-1)^2 = y-2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x-1}_{\substack{\downarrow \\ \text{منفی}}} = -\sqrt{y-2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y-2}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض}} y = 1 - \sqrt{x-2} = f^{-1}(x)$$

توابع خطی یک به یک و وارون پذیر هستند.

۱۵

$$y = \frac{-3x+4}{-2}$$

$$-2y = -3x+4 \Rightarrow 3x = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

گزینه ۳

۱۶

$$g^{-1}(2) = a \Rightarrow g(a) = 2 \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = 2 \Rightarrow a-1 = 2a+2 \Rightarrow a = -3$$

$$f(g^{-1}(2)) = f(-3) = 2$$

گزینه ۲

۱۷

دقت کنید که چون تابع f^{-1} خطی است، پس تابع f هم خطی خواهد بود.

$$(3, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 3) \in f$$

$$(-2, -2) \in f^{-1} \Rightarrow (-2, -2) \in f$$

$$f: y-3 = \frac{-2-3}{-2-0}(x-0) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + 3 \Rightarrow f(2) = 8$$

$$a^r - a = 2 \Rightarrow a^r - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a = -1 : f = \{(3, 2), (-1, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

رابطه تابع نیست. (غیرقابل قبول)

$$a = 2 : f = \{(3, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

رابطه تابع است. (قابل قبول)

$$\Rightarrow b = 3$$

رابطه تابع یک به یک است (قابل قبول).

BOX 5: اعمال روی توابع

(صفحه ۶۵ تا ۷۰ کتاب درسی)

در بسته‌های قبل با توابع گویا، رادیکالی، فکلی و ... آشنا شده‌ایم. در این بسته می‌فهمیم، جمع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم آن‌ها را تعریف کنیم.

اعمال روی توابع

در توابع حقیقی مقدار تابع برای هر مقدار از دامنه، عددی حقیقی است. بنابراین همان گونه که در اعداد حقیقی، چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعریف می‌شود، برای توابع نیز می‌توان مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت تعریف کرد.

تعریف: دو تابع حقیقی f و g با دامنه‌های D_f و D_g را در نظر می‌گیریم. در این صورت:

(آ) مجموع دو تابع f و g را با نماد $f + g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D_f \cap D_g = D_{f+g}$$

در واقع دامنه $f + g$ برابر $D = D_f \cap D_g$ است و مقدار $f + g$ در $x \in D$ برابر است با مجموع مقادیر $f(x)$ و $g(x)$.

(ب) تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f - g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D_f \cap D_g = D_{f-g}$$

(پ) حاصل ضرب دو تابع را با نماد $f \cdot g$ نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x), \quad x \in D_f \cap D_g = D_{f \cdot g}$$

بنابراین دامنه $f \cdot g$ برابر است با اشتراک دامنه توابع f و g و اگر $x \in D_{f \cdot g}$ ، آن‌گاه مقدار $f \cdot g$ در x برابر است با حاصل ضرب $f(x)$ در $g(x)$.

(ت) تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = D_{\frac{f}{g}}$$

در واقع دامنه $\frac{f}{g}$ برابر است با حذف ریشه‌های معادله $g(x) = 0$ از دامنه مشترک دو تابع f و g .

به طور خلاصه اعمال جبری روی توابع در جدول زیر تعریف شده است:

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

تعرین: اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = x - 1$ باشد، آن‌گاه دامنه و ضابطه هر یک از توابع $f + g$ ، $f - g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پاسخ: دامنه توابع خطی f و g برابر $\mathbb{R}$ است.

(۱) دامنه تابع $f + g$ برابر $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ است و ضابطه آن به صورت زیر است:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 2) + (x - 1) = 2x + 1$$

۲) دامنه تابع $f - g$ هم برابر $\mathbb{R}$ است و ضابطه آن به صورت مقابل است:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 2) - (x - 1) = 2 + 1 = 3$$

۳) دامنه تابع $f \cdot g$ برابر $\mathbb{R}$ است و ضابطه آن به صورت مقابل است:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$$

۴) با حذف ریشه معادله $g(x) = 0$ از $\mathbb{R}$ ، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ به دست می‌آید:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 2}{x - 1}$$

تعریف: اگر $f = \{(-1, 2), (3, 4), (5, 0), (6, 1)\}$ و $g = \{(-1, 4), (3, 2), (2, 4), (6, 0)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع $f - g$ ، $f + g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را با زوج مرتب بنویسید.

پاسخ: دامنه تابع f ، مجموعه $\{-1, 3, 5, 6\}$ و دامنه تابع g ، مجموعه $\{-1, 2, 3, 6\}$ می‌باشد. داریم:

باید مقادیر $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را فقط به ازای $x = -1$ ، $x = 3$ و $x = 6$ به دست بیاوریم:

$$\left. \begin{aligned} (f + g)(-1) &= f(-1) + g(-1) = 2 + 4 = 6 \Rightarrow (-1, 6) \in f + g \\ (f + g)(3) &= f(3) + g(3) = 4 + 2 = 6 \Rightarrow (3, 6) \in f + g \\ (f + g)(6) &= f(6) + g(6) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow (6, 1) \in f + g \end{aligned} \right\} \Rightarrow f + g = \{(-1, 6), (3, 6), (6, 1)\}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{-1, 3, 6\}$$

$$(f - g)(-1) = f(-1) - g(-1) = 2 - 4 = -2, \quad (f - g)(3) = f(3) - g(3) = 4 - 2 = 2, \quad (f - g)(6) = f(6) - g(6) = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow f - g = \{(-1, -2), (3, 2), (6, 1)\}$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \Rightarrow D_g = \{-1, 3, 6\}$$

$$(f \cdot g)(-1) = f(-1)g(-1) = 2 \times 4 = 8, \quad (f \cdot g)(3) = f(3)g(3) = 4 \times 2 = 8, \quad (f \cdot g)(6) = f(6)g(6) = 1 \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \{(-1, 8), (3, 8), (6, 0)\}$$

چون $g(6) = 0$ است، بنابراین مقدار تابع $\frac{f}{g}$ را فقط به ازای $x = -1$ و $x = 3$ به دست می‌آوریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{-1, 3, 6\} - \{6\} = \{-1, 3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \frac{f}{g} = \left\{(-1, \frac{1}{2}), (3, 2)\right\}$$

ضرب عدد در تابع

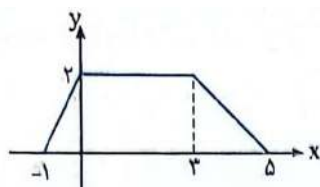
حاصل ضرب تابع با ضابطه $f(x)$ در تابعی که برای هر نقطه، مقدارش عدد ثابت k است را با $kf(x)$ نشان می‌دهیم. $kf(x)$ تابعی است که دامنه آن همان دامنه تابع f و مقادیر آن از ضرب عدد k در مقادیر تابع f به دست می‌آید.

به عنوان مثال، اگر تابع f به صورت $f = \{(3, -1), (2, 4), (5, 2)\}$ باشد، آن‌گاه با ضرب عدد ۲ در مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب f ، تابع $2f = \{(3, -2), (2, 8), (5, 4)\}$ به دست می‌آید:

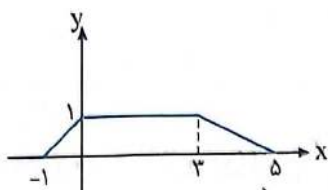
رسم نمودار $kf(x)$ از روی $f(x)$

دامنه تابع $kf(x)$ با دامنه $f(x)$ یکسان است و عرض نقاط تابع $kf(x)$ ، k برابر عرض نقاط $f(x)$ می‌باشد، پس برای رسم نمودار تابع با ضابطه $kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ را k برابر کنیم.

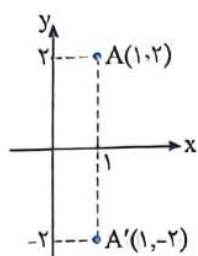
تعریف: نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = \frac{1}{p} f(x)$ را رسم کنید.



پاسخ: با تقسیم عرض نقاط واقع بر نمودار بر عدد ۲، نمودار $y = \frac{1}{2} f(x)$ به دست می‌آید:

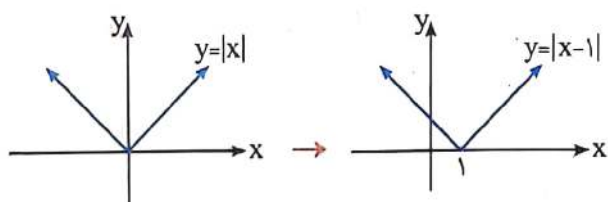


نکته: ۱) قرینه نقطه $A(a, b)$ نسبت به محور x ها، نقطه $A'(a, -b)$ است. به عنوان مثال، در شکل مقابل، قرینه نقطه $A(1, 2)$ ، نقطه $A'(1, -2)$ می‌باشد. پس برای قرینه کردن نقطه نسبت به محور x ، کافی است عرض نقطه را قرینه کنیم.
۲) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ ، کافی است قرینه نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

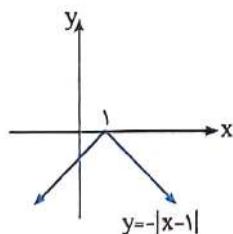


تعریف: نمودار $y = -|x-1| + 2$ را رسم کنید.

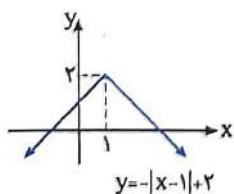
پاسخ: با انتقال نمودار $y = |x|$ به اندازه یک واحد به سمت راست، نمودار $y = |x-1|$ به دست می‌آید:



نمودار $y = |x-1|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -|x-1|$ به دست آید:



نمودار $y = -|x-1|$ را به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -|x-1| + 2$ رسم شود:



پرسش‌های تشریحی:

۱- اگر $f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 1), (4, 0)\}$ و $g = \{(2, -1), (5, 3), (4, 2), (-1, 6)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

الف) $\frac{g^2 - f}{2f + g}$ ب) $f - g^{-1}$

۲- دامنه و ضابطه هر یک از توابع $f + g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ و $f - g$ را مشخص کنید.

$$g(x) = \frac{2}{x-1}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

(فرداد ۱۴۰۲)

۳- اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ ، دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

(شهریور ۹۵)

۴- توابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{2}{x-3}$ داده شده‌اند.

الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

پ) حاصل عبارت $(-1)(3f - 2g)$ را به دست آورید.

۵- اگر قرینه نقطه $(2a+1, 3-b)$ نسبت به محور x ها، نقطه $(-b+2, a+4)$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۹ کتاب درسی)

۶- با توجه به نمودار $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x+1|$ پ) $m(x) = 2|x-1|$

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۶۹ کتاب درسی)

۷- با توجه به نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ ب) $k(x) = 3\sqrt{x}$ پ) $h(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ ت) $t(x) = -2\sqrt{x}$

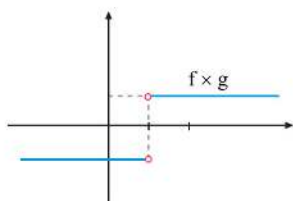
۸- توابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ -x+6 & x < 1 \end{cases}$ مفروض اند. ضابطه توابع $f+g$ و $f-g$ را تعیین کنید.

Homework

۱ دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

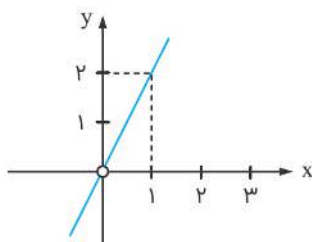
- (۱) -۶
(۲) ۴
(۳) ۴
(۴) ۶

۲ اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و نمودار تابع $(f \times g)(x)$ به صورت زیر باشد، آنگاه تابع $g(x)$ کدام است؟



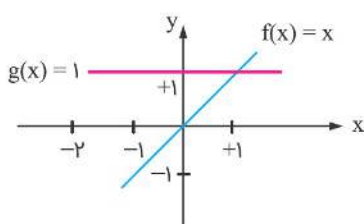
- (۱) $\frac{1}{|x+1|}$
(۲) $\frac{1}{|x-1|}$
(۳) $|x+1|$
(۴) $|x-1|$

۳ اگر $f(x) = x^2$ ، و تابع $\frac{f}{g}(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.



۴ اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ ، و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ باشد، نمودار و ضابطه $f(x) + g(x)$ را بیابید.

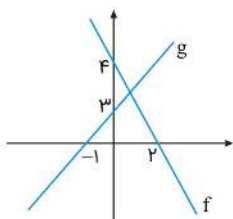
۵ به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار کلی تابع $f + g$ را رسم کنید.



۶ اگر $f : \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{7}, 0), (3, -5)\}$

و $g : \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ توابع $f + g$ و $f - g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۷ نمودار $f(x)$ و $g(x)$ مطابق شکل زیر است. ضابطه $y = \frac{(f \times g)(x)}{(2f - g)(x)}$ کدام است؟



(۱) $y = \frac{-x^2 + x + 2}{-7x + 5}$

(۲) $y = \frac{-6x^2 - 6x + 12}{-7x + 5}$

(۳) $y = \frac{-6x^2 + 6x + 12}{-7x + 5}$

(۴) $y = \frac{-x^2 + x - 2}{7x - 5}$

۸ اگر $f = \{(7, 1), (6, 2), (3, 0)\}$, $g = \{(7, 4), (3, 3), (1, 2)\}$ دو تابع باشند توابع $f \times g$, $f - g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

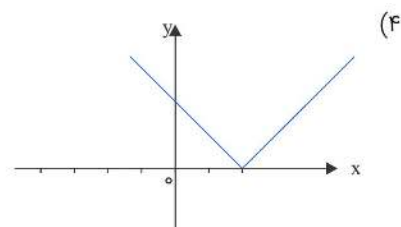
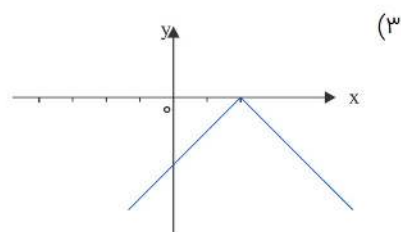
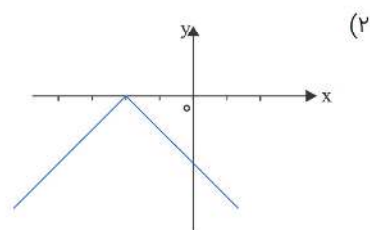
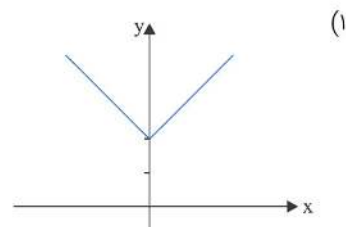
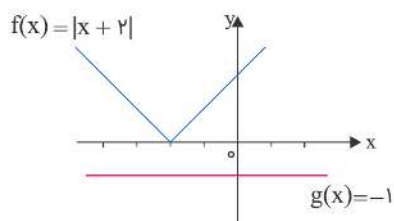
۹ اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ باشد دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.

۱۰ اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = x^2 + 1$ مفروض باشند، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف حاصل $(f + g)(4)$ و $(f \times g)(5)$ را به دست آورید.

ب ضابطه تابع $y = (f - g)(x)$ را بنویسید.

۱۱ اگر نمودار تابع f و g به صورت زیر باشد، در این صورت نمودار تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟



۱۲ اگر $f = \{(2, 1), (-3, 2), (-1, -1), (0, -3)\}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ برد تابع $2f + g^2$ کدام است؟

(۲) $\{-2, -5, 5\}$

(۱) $\{-2, 5, 3\}$

(۴) $\{2, -3, 3\}$

(۳) $\{3, -5, 5\}$

۱۳ اگر $f(x) = |x - 2|$ و $g(x) = \sqrt{ax + 6}$ دامنه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ برابر $(-\infty, 4)$ باشد، آنگاه $(\frac{f}{g})(\frac{4}{3})$ کدام است؟

(۲) $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(۱) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(۴) $-\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$

۱۴ اگر $f = \{(-3, 2), (0, 2), (m-n, 5)\}$ و $g = \{(0, m+n), (-2, 1), (3, 2)\}$ و $f \times g = \{(0, -8), (-2, 5)\}$ باشد، آنگاه $\frac{m}{n}$ کدام است؟

(۲) ۵

(۱) صفر

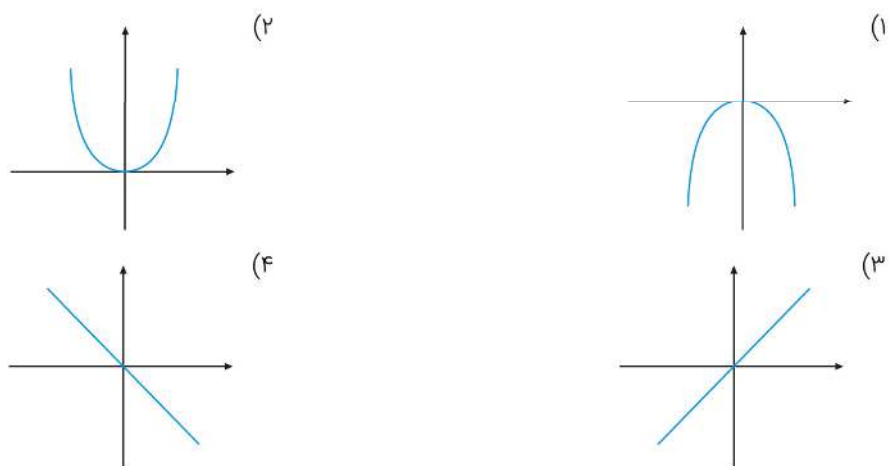
(۴) ۳

(۳) -۴

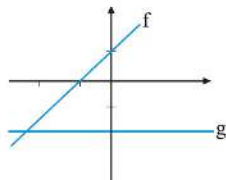
۱۵ اگر $f = \{(-1, 0), (2, 1), (-2, 1)\}$ و $g = \{(2, -3), (-1, 2)\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{g-f}{f}$ کدام است؟

- (۱) $\{(-1, 2), (2, -4)\}$
(۲) $\{(2, -4)\}$
(۳) $\{(-1, 0), (2, -3)\}$
(۴) $\{(-1, 2)\}$

۱۶ اگر تابع f یک تابع همانی باشد، آنگاه نمودار f^2 کدام است؟



۱۷ باتوجه به نمودار زیر، عرض از مبدأ نمودار $f + g$ کدام است؟



- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) ۱
(۴) ۲

۱۸ اگر $f(x) = -2[x]$ و $g(x) = -3$ باشد، آنگاه حاصل $(f+g)(-2/7)$ کدام است؟

- (۱) $1/3$
(۲) ۳
(۳) $3/3$
(۴) ۱

۱۹ اگر $f = \{(-1, 2), (2, -3), (0, -1)\}$ و $g = \{(0, 4), (-4, 2), (2, -1)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $f \times g$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{2, -6\}$
(۲) $\{6, -2\}$
(۳) $\{3, -4\}$
(۴) $\{4, -3\}$

۲۰ اگر $f(x) = x^2 - 3x - 4$ و $(\frac{f}{g})(x) = x + 1$ باشد، آنگاه تابع $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $x - 4$
(۲) $x + 4$
(۳) $\frac{1}{x - 4}$
(۴) $\frac{1}{x + 4}$

۲۱ اگر $f = \{(-6, 3), (-1, -4)\}$ و $g = \{(-1, 0), (1, 6), (-6, a)\}$ و $(f + g)(-6) = -2$ باشد، آنگاه a کدام است؟

- (۱) -6 (۲) 4
(۳) 3 (۴) -5

۲۲ اگر $f(x) = [x - 2]$ و $g(x) = \frac{1}{x + 3/2}$ ، آنگاه حاصل $(f \times g)(4/3)$ کدام است؟

- (۱) 16 (۲) $\frac{3}{\lambda}$
(۳) $\frac{1}{4}$ (۴) 24

۲۳ اگر $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، آنگاه تابع $\frac{f}{g}(x)$ و دامنه آن کدام است؟

- (۱) $\frac{f}{g}(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1, -1\}$
(۲) $\frac{f}{g}(x) = \frac{x-3}{x-1}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1\}$
(۳) $\frac{f}{g}(x) = \frac{x+3}{x-1}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-1\}$
(۴) $\frac{f}{g}(x) = \frac{x-3}{x+1}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = \{1, -1\}$

۲۴ اگر $f = \{(-1, 3), (2, -4)\}$ و $g = \{(-1, 5), (-3, 0)\}$ ، آنگاه تابع $f - g$ کدام است؟

- (۱) $\{(-1, -2), (-1, 4)\}$ (۲) $\{(-1, -2)\}$
(۳) $\{(-1, 2)\}$ (۴) $\{(-1, -9), (-4, 3)\}$

۲۵ اگر $f = \{(2, 5), (1, -3), (-4, 2)\}$ و $g = \{(2, -3), (-4, -5), (3, -2)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $\frac{f+2g}{f-g}$ کدام است؟

- (۱) $\{\frac{-\lambda}{\gamma}, \frac{-1}{\lambda}\}$ (۲) $\{\frac{-\lambda}{\gamma}, \frac{1}{\lambda}\}$
(۳) $\{\frac{5}{\gamma}, \frac{\gamma}{2}\}$ (۴) $\{\frac{-3}{\gamma}, \frac{-2}{5}\}$

۲۶ اگر $f = \{(-3, 2), (-1, 7), (2, -5), (8, 3)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{2x}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $y = (f \times g)(x)$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -8
(۳) 12 (۴) 16

۲۷ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ دارای چند عدد صحیح است؟

- (۱) 3 (۲) 4
(۳) 5 (۴) 6

۲۸ اگر $f = \{(-1, 3), (2, 5), (-5, 2)\}$ و $g = \{(2, -3), (-5, 4), (1, 3)\}$ مفروض باشند، برد تابع $2f - g$ کدام است؟

(۲) $\{-2, 13\}$

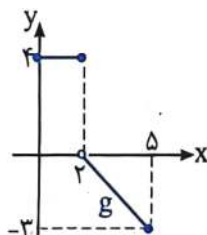
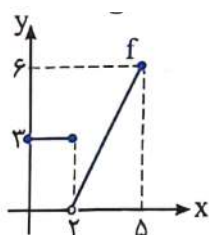
(۱) $\{0, 13\}$

(۴) $\{-2, 4\}$

(۳) $\{0, -5\}$

۲۹ مطابق شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g داده شده است. ضابطه توابع $f + g$ ، $f - g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را مشخص کنید و سپس نمودار

هر یک را رسم کنید.



پاسخ Homework

گزینه ۳

۱

$$\begin{cases} f(x) = b - 3ax \xrightarrow{\text{ثابت } f} 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ g(x) = c - (3b - 3)x \xrightarrow{\text{ثابت } g} 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, \quad g(x) = c$$

$$f + g = 5 \Rightarrow 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4$$

$$bc = 1 \times 4 = 4$$

گزینه ۴

۲

از نمودار $f \times g$ نتیجه می‌گیریم:

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 1 \\ -1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\begin{cases} (f \times g)(x) = 1 \xrightarrow{x > 1} 1 = \frac{1}{x-1} \times g(x) \xrightarrow{x > 1} g(x) = x - 1 \\ (f \times g)(x) = -1 \xrightarrow{x < 1} -1 = \frac{1}{x-1} \times g(x) \xrightarrow{x < 1} g(x) = -(x - 1) \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x - 1|$$

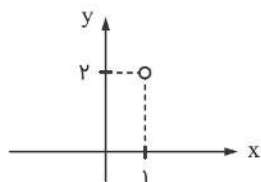
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow x^2 = 2xg(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2}$$

۳

$$D_{(f+g)} = D_f \cap D_g = (\circ \leq x \leq 1) \cap (1 \leq x \leq 2) = \{1\}$$

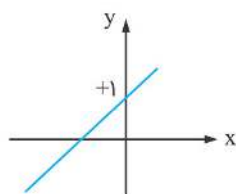
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = [x] + |x| = [1] + |1| = 2$$



$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1$$

x	y
0	1
1	2

$$D_{(f+g)} = \mathbb{R}$$



$$(f+g)(x) = \{(-2, 6) (0, 2) (3, -5)\}$$

$$(f-g)(x) = \{(-2, 20) (0, 8) (3, -5)\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \{(-2, -\frac{13}{4}) (0, -\frac{5}{3})\}$$

گزینه ۳

$$f(x) : m = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow y-0 = -1(x-2) \Rightarrow f(x) = -x+2$$

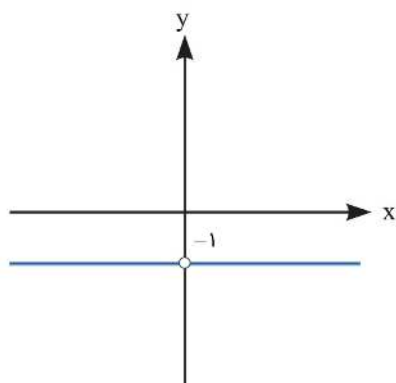
$$g(x) : m = \frac{0-3}{-1-0} = 3 \Rightarrow y-0 = 3(x+1) \Rightarrow g(x) = 3x+3$$

$$y = \frac{(-x+2)(3x+3)}{2(-x+2) - (3x+3)} = \frac{-6x^2 - 6x + 12x + 12}{-2x + 4 - 3x - 3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-6x^2 + 6x + 12}{-5x + 1}$$

$$f-g = \{(4, -3), (3, -3)\}$$

$$f \times g = \{(4, 4), (3, 0)\}$$



$$\frac{f}{g}(x) = \frac{|x|}{-|x|} = \begin{cases} -1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

الف ۱۰

$$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = \sqrt{4 - 3} + (4^2 + 1) = 18$$

$$(f \times g)(5) = f(5) \times g(5) = \sqrt{5 - 3} \times (5^2 + 1) = 26\sqrt{2}$$

ب

$$y = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x - 3} - (x^2 + 1)$$

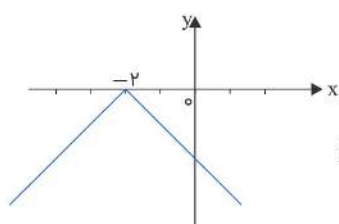
گزینه ۲

۱۱

$$\begin{cases} f(x) = |x + 2| \\ g(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x + 2|}{-1} = -|x + 2|$$

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} -(x + 2) & ; x \geq -2 \\ -(-(x + 2)) & ; x < -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \begin{cases} -x - 2 & ; x \geq -2 \\ x + 2 & ; x < -2 \end{cases}$$



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

* یادآوری: تابع قدر مطلق:

$$D_f = \{2, -3, -1, 0\}$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_g = [-1, +\infty) \Rightarrow D_{f+g^2} = D_f \cap D_g = \{-1, 0, 2\}$$

$$2f(-1) + g^2(-1) = -2 + 0 = -2 \quad 2f(2) + g^2(2) = 2(1) + 3 = 5$$

$$2f + g^2 = \left\{ (-1, \overset{\uparrow}{-2}), (0, \underset{\downarrow}{-5}), (2, \overset{\uparrow}{5}) \right\}$$

$$2f(0) + g^2(0) = -6 + 1 = -5$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

چون دامنه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ برابر $(-\infty, 4)$ می باشد، بنابراین تابع $g(x)$ به ازای $x = 4$ صفر می شود:

$$g(4) = 0 \Rightarrow \sqrt{a(4) + 6} = 0 \Rightarrow 4a + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow g(x) = \sqrt{-\frac{3}{2}x + 6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{4}{3}\right)}{g\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left|\frac{4}{3} - 2\right| = \frac{2}{3}, \quad g\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{-\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} + 6} = 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x); D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = \{0, -2\}$$

$$D_f = \{-3, 0, m-n\}, D_g = \{0, -2, 3\} \Rightarrow m-n = -2$$

همچنین داریم:

$$(f \times g)(0) = f(0) \times g(0) = -4 \Rightarrow 2 \times (m+n) = -4$$

$$\Rightarrow m+n = -2$$

$$\begin{cases} m-n = -2 \\ m+n = -4 \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = -1 \Rightarrow \frac{m}{n} = 3$$

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x), D_{g-f} = D_g \cap D_f$$

$$D_f = \{-1, 2, -2\}, D_g = \{2, -1\} \Rightarrow D_{g-f} = \{-1, 2\}$$

$$(-1, 0), (-1, 2) \Rightarrow (g - f)(-1) = 2 - 0 = 2$$

$$(2, 1), (2, -3) \Rightarrow (g - f)(2) = -3 - 1 = -4$$

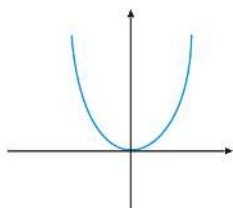
$$\Rightarrow g - f = \{(-1, 2), (2, -4)\}$$

$$D_{\frac{g-f}{f}} = D_{(g-f)} \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$= \{-1, 2\} \cap \{-1, 2, -2\} - \{-1\} = \{2\}$$

$$\left(\frac{g-f}{f}\right)(2) = \frac{(g-f)(2)}{f(2)} = \frac{-4}{1} = -4 \Rightarrow \frac{g-f}{f} = \{(2, -4)\}$$

همانی $f(x) = x \Rightarrow f^2 = f \times f = x \times x = x^2$



باتوجه به نمودارها، ضابطه‌های نمودارهای f و g عبارت‌اند از:
نمودار f ، نمودار $f(x) = x$ می‌باشد که ۱ واحد به بالا انتقال یافته است.

$$f(x) = x + 1$$

$g(x)$ نیز یک تابع ثابت با مقدار -2 می‌باشد.

$$g(x) = -2$$

$$\Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + (-2) = x - 1$$

درنتیجه یک تابع خطی با عرض از مبدأ -1 است.

نکته: ضابطه تابع f را به صورت زیر نیز می‌توان به دست آورد، چون خط محورها را در دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ قطع می‌کند:

$$m = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$$

نکته: معادله یک تابع خطی به صورت $y = mx + h$ می‌باشد که h عرض از مبدأ خط می‌باشد.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f + g)(-2/7) = f(-2/7) + g(-2/7)$$

$$\Rightarrow f(-2/7) = -2[-2/7] = -2(-3) = 6, -3 \leq -2/7 < -2$$

$$\Rightarrow [-2/7] = -3g(-2/7) = -3$$

$$\Rightarrow (f + g)(-2/7) = 6 + (-3) = 3$$

$g(x) = -3$ تابعی ثابت است هر مقداری بدهیم، فقط مقدار ثابت -3 را می‌دهد.

ابتدا دامنه‌های f و g را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{\text{همه مؤلفه‌های اول } f\} = \{-1, 2, 0\}$$

$$D_g = \{\text{همه مؤلفه‌های اول } g\} = \{0, -4, 2\}$$

$$\Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g \Rightarrow D_{f \times g} = \{2, 0\}$$

حالا باید مقدار $f \times g$ را به ازای $x = 2$ و $x = 0$ به دست آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow (f \times g)(0) = \underbrace{f(0)}_{-1} \times \underbrace{g(0)}_4 = (-1)(4) = -4$$

$$x = 2 \Rightarrow (f \times g)(2) = \underbrace{f(2)}_{-3} \times \underbrace{g(2)}_{-1} = (-3)(-1) = 3$$

گزینه ۱

۲۰

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow x+1 = \frac{x^2 - 3x - 4}{g(x)} \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)} = x-4 \end{aligned}$$

گزینه ۴

۲۱

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f+g)(-6) = f(-6) + g(-6) = -2 \\ g: (-6, a) \Rightarrow g(-6) = a \\ f: (-6, 3) \Rightarrow f(-6) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + 3 &= -2 \Rightarrow a = -2 - 3 = -5 \\ \Rightarrow a &= -5 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۲۲

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) = [x-2] \times \frac{1}{x+3/2} \\ \Rightarrow (f \times g)(x) &= \frac{[x-2]}{x+3/2} \Rightarrow (f \times g)(4/3) = \frac{[4/3-2]}{4/3+3/2} = \frac{[2/3]}{17/6} \\ \Rightarrow (f \times g)(4/3) &= \frac{2}{17} = \frac{1}{8.5} \end{aligned}$$

گزینه ۱

۲۳

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \\ D_f &= \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} &= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{1, -1\} = \mathbb{R} - \{1, -1\} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۲۴

ابتدا دامنه $f - g$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D_f &= \{-1, 2\} \\ D_g &= \{-1, -3\} \\ D_{f-g} &= D_f \cap D_g = \{-1\} \\ f: (-1, 3) &\Rightarrow f(-1) = 3 \\ g: (-1, 5) &\Rightarrow g(-1) = 5 \Rightarrow (f-g)(-1) = f(-1) - g(-1) = 3 - 5 = -2 \\ &\Rightarrow f - g = \{(-1, -2)\} \end{aligned}$$

گزینه ۱

۲۵

$$\begin{aligned} D_f \cap D_g &= \{2, -4\} \\ \frac{f(2) + 2g(2)}{f(2) - g(2)} &= \frac{5 + 2(-3)}{5 - (-3)} = \frac{-1}{8} \\ \frac{f(-4) + 2g(-4)}{f(-4) - g(-4)} &= \frac{2 + 2(-5)}{2 - (-5)} = \frac{-8}{7} \\ &\Rightarrow \frac{f + 2g}{f - g} = \left\{ \left(2, -\frac{1}{8} \right), \left(-4, -\frac{8}{7} \right) \right\} \end{aligned}$$

گزینه ۴

۲۶

$$\begin{aligned} D_f &= \{-3, -1, 2, 8\} \\ g(x) &= x + \sqrt{2x} \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ D_g &= [0, +\infty) \\ D_{f \times g} &= D_f \cap D_g = \{2, 8\} \\ (f \times g)(2) &= f(2) \times g(2) = (-5) \times (2 + \sqrt{4}) = -20 \\ (f \times g)(8) &= f(8) \times g(8) = (3) \times (8 + \sqrt{16}) = 36 \\ f \times g &= \{(2, -20), (8, 36)\} \\ \text{مجموع بردها} &= -20 + 36 = 16 \end{aligned}$$

گزینه ۲

۲۷

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} y &= (f+g)(x) \Rightarrow D = D_f \cap D_g \\ x+1 &\geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 2-x &\geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow D = [-1, 2] \end{aligned}$$

$$D_{f-g} = \{2, -5\}$$

$$2f(-5) - g(-5) = 2(2) - 4 = 0$$

$$2f - g = \{(2, 13), (-5, 0)\}$$

$$2f(2) - g(2) = 2(5) - (-3) = 13$$

۲۹ ضابطه هر یک از توابع f و g را به دست می آوریم.

ضابطه تابع f : اگر $0 \leq x \leq 2$ ، آن گاه f تابع ثابت $f(x) = 3$ است. در محدوده $2 < x \leq 5$ ، یک تابع خطی گذرنده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(5, 6)$ می باشد:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \\ f(5) = 6 \Rightarrow 5a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 0 \\ 5a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow{2a+b=0} 4+b=0 \Rightarrow b=-4 \Rightarrow f(x) = 2x-4$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت زیر می باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-4 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow g(x) = 4$$

ضابطه تابع g :

در محدوده $2 < x \leq 5$ ، تابع خطی g از دو نقطه $(2, 0)$ و $(5, -3)$ عبور کرده است:

$$g(x) = ax + b, \quad g(2) = 0, \quad g(5) = -3$$

$$\begin{cases} g(2) = 2a + b = 0 \\ g(5) = 5a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 0 \\ 5a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$\xrightarrow{2a+b=0} -2+b=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow g(x) = -x+2$$

$$g(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq 2 \\ -x+2 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

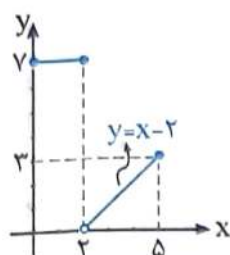
بنابراین ضابطه تابع g به صورت زیر می باشد:

دامنه هر دو تابع f و g در نتیجه اشتراک آن ها بازه $[0, 5]$ می باشد.

ضابطه $f+g$:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3+4 & 0 \leq x \leq 2 \\ (2x-4)+(-x+2) & 2 < x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} 7 & 0 \leq x \leq 2 \\ x-2 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

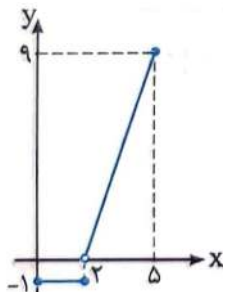
نمودار $f+g$:



ضابطه $f-g$:

$$(f-g)(x) = \begin{cases} 3-4 & 0 \leq x \leq 2 \\ (2x-4) - (-x+2) & 2 < x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 3x-6 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

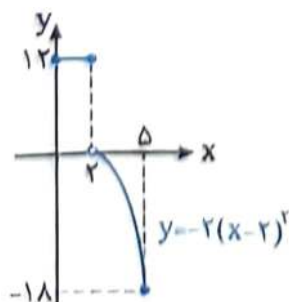
نمودار $f-g$:



ضابطه $f.g$:

$$(f.g)(x) = \begin{cases} 3 \times 4 & 0 \leq x \leq 2 \\ \underbrace{(2x-4)}_{2(x-2)} \underbrace{(-x+2)}_{-(x-2)} & 2 < x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} 12 & 0 \leq x \leq 2 \\ -2(x-2)^2 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

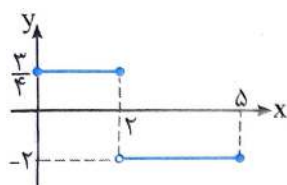
نمودار $f.g$: نمودار تابع $f.g$ شامل خط $y=12$ در بازه $[0, 2]$ و سهمی $y=-2(x-2)^2$ در بازه $(2, 5]$ می باشد:



ضابطه $\frac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2x-4}{-x+2} & 2 < x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{\cancel{2(x-2)}}{\cancel{-(x-2)}} & 2 < x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ -2 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

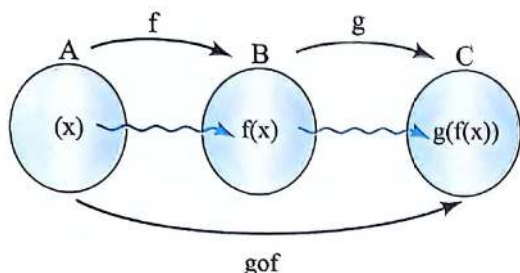
نمودار $\frac{f}{g}$: نمودار $\frac{f}{g}$ شامل دو خط $y = \frac{3}{4}$ در بازه $[0, 2]$ و $y = -2$ در بازه $(2, 5]$ می شود.



BOX 6: ترکیب توابع

(ویژه حسابان ۱ و ریاضی ۳ تجربی) بچه‌های تجربی از این قسمت در امتحان نهایی سوال ندارند.

اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم.



$$g \circ f : A \rightarrow C$$

به عبارت دیگر اگر $f : A \rightarrow B$ و $g : B \rightarrow C$ آن‌گاه:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

به طور مشابه ترکیب f با g را می‌توان به صورت مقابل تعریف کرد:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

(تمرین کتاب درسی)

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$D_f : x^2 + 5 \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D_g : 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{4 - x^2}) = \sqrt{4 - x^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2, 2]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \sqrt{x^2 + 5} \leq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2 + 5 \leq 4}_{\text{جواب ندارد}}\} = \{\emptyset\} \Rightarrow \text{پس تابع } g \circ f \text{ وجود ندارد}$$

جواب ندارد $\Rightarrow x^2 \leq -1$

$$\text{ورودی} \rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} \rightarrow \text{خروجی}$$

تمرین: اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{11}{9} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$A \rightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} \rightarrow \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A = 4$$

$$\text{ورودی} \Rightarrow \boxed{2x-2} \Rightarrow A = 4 \Rightarrow 2x-2 = 4 \Rightarrow x = 3$$

تمرین: اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (-1, 3)\}$ و $g = \{(3, 1), (2, -1)\}$ باشد، مطلوب است محاسبه توابع $g \circ f$ و $f \circ g$.

پاسخ: در دامنه $f \circ g$ ابتدا $x \in D_g$ می‌باشد. پس:

$$x \in D_g \Rightarrow x \in \{3, 2\}$$

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow g(3)=1 \Rightarrow f(g(3))=f(1)=2 \Rightarrow f(g(3))=2 \Rightarrow (3, 2) \\ x=2 \Rightarrow g(2)=-1 \Rightarrow f(g(2))=f(-1)=3 \Rightarrow f(g(2))=3 \Rightarrow (2, 3) \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \{(3, 2), (2, 3)\}$$

در مورد $g \circ f$ ابتدا $x \in D_f$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow g(f(1))=g(2)=-1 \Rightarrow g(f(1))=-1 \Rightarrow (1, -1) \\ x=3 \Rightarrow f(3)=4 \Rightarrow g(f(3))=g(4) \text{ وجود ندارد} \\ x=-1 \Rightarrow f(-1)=3 \Rightarrow g(f(-1))=g(3)=1 \Rightarrow (-1, 1) \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

تمرین: توابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض‌اند، اگر $(4, 1) \in g \circ f$ و $(4, 2) \in f \circ g$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟

$$(4, 4) \quad (4, 5) \quad (4, 3) \quad (3, 4)$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} f(g(4))=2 \xrightarrow{f(3)=2} g(4)=3 \Rightarrow a=4 \\ g(f(4))=1 \xrightarrow{f(4)=5} g(5)=1 \Rightarrow b=5 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (4, 5)$$

تمرین: اگر $D_f = [-2, 2]$ باشد، آنگاه دامنه $f(2[x])$ کدام است؟

$$[-2, 2] \quad [-1, 1] \quad [-1, 2] \quad [-2, 2]$$

پاسخ: گزینه «۲»

$$2[x] \in [-2, 2] \Rightarrow -2 \leq 2[x] \leq 2 \Rightarrow -1 \leq [x] \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 2$$

تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 4x$ و $(f \circ g)(x) = 3x + 1$ ، تابع $g(x)$ را بیابید. (فرض $g(x) > 0$)

پاسخ: $f \circ g$ یعنی در تابع f به جای x (متغیر)، $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(g(x)) = g^2(x) + 4g(x) = 3x + 1 \xrightarrow{\text{به طرفین 4 اضافه می‌کنیم}} g^2(x) + 4g(x) + 4 = 3x + 5$$

$$(g(x) + 2)^2 = 3x + 5 \xrightarrow{g(x) > 0} g(x) + 2 = \sqrt{3x + 5} \Rightarrow g(x) = \sqrt{3x + 5} - 2$$

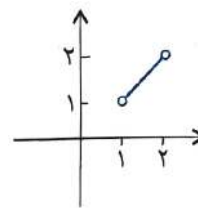
$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = x & x \in D_f \\ f(f^{-1}(x)) = x & x \in D_{f^{-1}} \end{cases}$$

نکته: در حالت کلی روابط مقابل برقرار است:

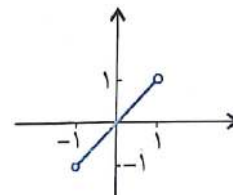
به عبارتی وقتی $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x)$ یا $D_f = R_f$ یا $D_f = D_{f^{-1}}$ که

تمرین: اگر f با دامنه $[-1, 1]$ و برد $(1, 2)$ مفروض باشد، نمودار تابع $f \circ f^{-1}(x)$ و $f^{-1} \circ f(x)$ را رسم کنید.

پاسخ:



$$y = f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad x \in D_{f^{-1}} \text{ یا } R_f \Rightarrow 1 < x < 2$$



$$y = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad x \in D_f \Rightarrow -1 \leq x < 1$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

نکته: برای تابع وارون پذیر f و g داریم:

تمرین: اگر $f(5) = 2$ و $g(4) = 5$ باشد، مطلوب است حاصل $(f \circ g)^{-1}$ در $x = 2$.

$$f(5) = 2 \Rightarrow (5, 2) \in f \Rightarrow (2, 5) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(2) = 5$$

$$g(4) = 5 \Rightarrow (4, 5) \in g \Rightarrow (5, 4) \in g^{-1} \Rightarrow g^{-1}(5) = 4$$

$$(f \circ g)^{-1}(2) = g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(5) = 4$$

پاسخ:

Homework (1)

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد:

۱ دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۲ ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.

۳ اگر $f(x-2) = x^2 + 4x$ ضابطه $f(2x+1)$ را حساب کنید.

اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد،

۴ دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۵ مقدار $(\frac{f}{g})(0) - (g \circ f)(2)$ تعیین کنید.

۶ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ دامنه آن را به دست آورید.

۷ اگر $f(x) = x - 2$ و $(g \circ f)(x) = x^2 - x$ ، ضابطه $g(x)$ کدام است؟

$$g(x) = x^2 + 3x \quad (2)$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 2 \quad (1)$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 2 \quad (4)$$

$$g(x) = x^2 + 4x \quad (3)$$

۸ اگر $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ تابع $f \circ g$ را محاسبه کنید.

۹ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ بدون تشکیل ضابطه $f \circ g(x)$ و با استفاده از تعریف دامنه $f \circ g(x)$ را بیابید.

۱۰ اگر $f(x) = \log_x(x+2)$ و $g(x) = \frac{x}{x-2}$ مفروض باشند، دامنه تابع $y = g \circ f(x)$ کدام است؟

$$(1, +\infty) \quad (2)$$

$$(0, +\infty) - \{1, 3\} \quad (1)$$

$$(0, +\infty) - \{2\} \quad (4)$$

$$(0, +\infty) - \{1, 2\} \quad (3)$$

۱۱ اگر $f(x) = x^2 + 2$ و $f \circ g(x) = (x - 1)^2 + 2$ حاصل $(f + g)(2)$ کدام است؟

۸ (۲)

۷ (۱)

۹ (۴)

۶ (۳)

۱۲ اگر $f(x) = \sqrt{x + 2}$ و $g(x) = \sqrt{3 - x}$ مفروض باشند، دامنه تابع $y = g \circ f(x)$ چند عدد صحیح دارد؟

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۳ تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in f \circ g$ و $(4, 1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟

(۴, ۳) (۲)

(۳, ۴) (۱)

(۵, ۴) (۴)

(۴, ۵) (۳)

پاسخ (1) Homework

۱

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

۲

$$f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 1}$$

۳

$$f(\underbrace{x - 2}_t) = x^2 + 3x$$

$$x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow f(t) = (t + 2)^2 + 3(t + 2) \\ \Rightarrow f(t) = t^2 + 3t + 4 + 3t + 6$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 10$$

$$\xrightarrow{t=2x+1} f(2x+1) = (2x+1)^2 + 6(2x+1) + 10$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 1 + 12x + 6 + 10$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 16x + 17$$

۴

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{4 - 2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$$

۵

$$(g \circ f)(2) - \left(\frac{f}{g}\right)(0) = -1 - (-2) = 1$$

۶

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\frac{f}{x} - 2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{f}{x} - 2} = \frac{x}{f - 2x}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{f}{x} \in \mathbb{R} - \{2\}\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, \frac{f}{2}\}$$

$$\frac{f}{x} \neq 2, \quad x \neq \frac{f}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) = t &\Rightarrow x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2 \\ g(f(x)) = x^2 - x &\Rightarrow g(t) = (t + 2)^2 - (t + 2) \\ g(t) = t^2 + 4t + 4 - t - 2 &= t^2 + 3t + 2 \\ g(x) = x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 2 : y = f \circ g(2) &= f(11) = 7 \\ x = 4 : y = f \circ g(4) &= f(-2) = 4 \\ x = 6 : y = f \circ g(6) &= -5 \\ x = 3 : y = f \circ g(3) &= -5 \\ f \circ g &= \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} - \{3\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\} \\ \text{تعریف } D_{f \circ g} &= \begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \neq 0 & \text{رابطه (۱)} \\ g(x) \in D_f \Rightarrow \frac{4}{x} \neq 3 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3} & \text{رابطه (۲)} \end{cases} \\ (1) \cap (2) &\Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{4}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$D_f : \left. \begin{aligned} x + 2 &> 0 \\ x &> 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_{g \circ f} = \begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in (0, +\infty) - \{1\} & \text{(I)} \\ f(x) \in D_g \Rightarrow \log_x(x + 2) \in \mathbb{R} - \{2\} \end{cases}$$

$$\log_x(x + 2) \neq 2 \Rightarrow x + 2 \neq x^2$$

$$x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow D_{g \circ f} = (0, +\infty) - \{1, 2\}$$

گزینه ۱

۱۱

$$f \circ g(x) = g^2 + 2$$

$$g^2 + 2 = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow g^2 = (x-1)^2 \Rightarrow g(x) = |x-1|$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2^2 + 2 + |2-1| = 7$$

گزینه ۲

۱۲

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_g = (-\infty, 3]$$

$$D_{g \circ f} = \begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in [-2, +\infty) & \text{(I)} \\ f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{x+2} \in (-\infty, 3] \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2} \leq 3 \Rightarrow x+2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 7 \quad \text{(II)}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow [-2, 7] = D_{g \circ f}$$

دامنه : $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots, 7\}$ اعداد صحیح دامنه

گزینه ۳

۱۳

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(4, 2) \in f \circ g$ و $(4, 1) \in g \circ f$ است. $(4, 2) \in f \circ g$ است، یعنی $f(g(4)) = 2$ و $(4, 1) \in g \circ f$ است، یعنی $g(f(4)) = 1$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(4)) = 2$ و $g(f(4)) = 1$:

$$f(g(4)) = 2 \xrightarrow{f(3)=2} g(4) = 3 \xrightarrow{(a,3) \in g} a = 4$$

$$g(f(4)) = 1 \xrightarrow{f(4)=5} g(5) = 1 \xrightarrow{(b,1) \in g} b = 5$$

پس دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(4, 5)$ درمی آید.

Homework (2)

۱ اگر $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{9}, 3), (\frac{1}{9}, -3)\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $\log^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$\begin{array}{l} \frac{1}{9} \quad (2) \\ \frac{1}{8} \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{9} \quad (1) \\ -\frac{1}{8} \quad (3) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3} \quad (2) \\ -\frac{1}{5} \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \quad (1) \\ \frac{1}{5} \quad (3) \end{array}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $\text{gof}(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} -4 \quad (2) \\ 6 \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \quad (1) \\ -6 \quad (3) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، $\log(-\frac{1}{3})$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} 2 \quad (2) \\ 4 \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2 \quad (1) \\ -4 \quad (3) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

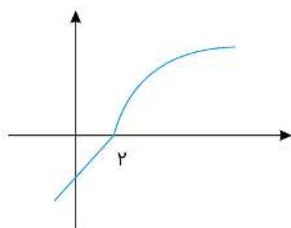
۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ ، $x \geq 1$ باشد، $(\text{gog})(1)$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} 4 \quad (2) \\ \text{صفر} \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \quad (1) \\ 9 \quad (3) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

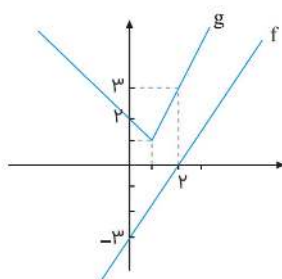
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۷ باتوجه به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $g \circ g^{-1}(-2) \times g \circ g(0)$ کدام است؟



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ (۱)

۴ (۲)

-۴ (۳)

-۶ (۴)

۸ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹ اگر $gof(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟

۷ (۲)

۳ (۱)

۱۱ (۴)

۹ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

پاسخ (2) Homework

گزینه ۳

۱

$$(f \circ g^{-1})(a) = -3 \Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲

ابتدا $f(\sqrt{5})$ را حساب می‌کنیم.

$$f(\sqrt{5}) = 5 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3$$

حال از رابطه جایگذاری شده a را به دست می‌آوریم.

$$f(3a) = 2 \Rightarrow 9a^2 - [3a] = 2$$

مسلماً حل معادله بالا با جایگذاری گزینه‌ها راحت‌تر است که اگر گزینه ۲ انتخاب شود.

$$a = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9 \times \frac{1}{9} - \left[3 \times \frac{-1}{3}\right] = 1 - (-1) = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$g \circ f\left(-\frac{5}{3}\right) = g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = ?$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) = 2(-2) + \frac{5}{3} = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$f\left(-\frac{7}{3}\right) = 2\left[-\frac{7}{3}\right] - \left(-\frac{7}{3}\right) = -6 + \frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{7}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{7}{3} + f\left(-\frac{7}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{7}{3} - \frac{11}{3}\right]\right)$$

$$= f(-6) = 2[-6] + 6 = -12 + 6 = -6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$f \circ g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f\left(\frac{3}{3}\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + (-1) = -\frac{4}{3}$$

$$f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

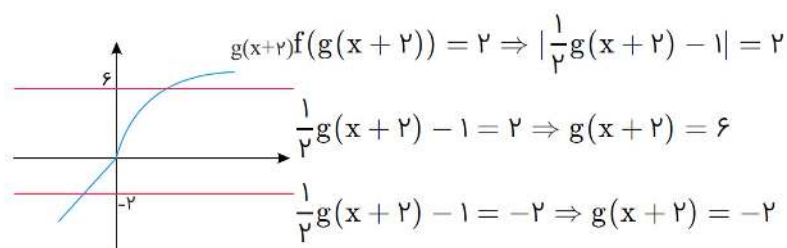
$$f(x) = y = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{x} - 1 = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y} + 1)^2$$

$$\Rightarrow g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(4) = 9$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲



دو ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

$$gog(o) = g(g(o)) = g(2) = 3$$

$$gof^{-1}(-2) = g(f^{-1}(-2))$$

برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ ، ابتدا باید ضابطه تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(o) = -3 \\ f(2) = o \end{cases} \Rightarrow m = \frac{o - (-3)}{2 - o} = \frac{3}{2}$$

$$y - o = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

$$f^{-1}(-2) = a \Rightarrow f(a) = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}a - 3 = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g(f^{-1}(-2)) = g\left(\frac{2}{3}\right) (*)$$

حال به بررسی ضابطه g برای $x \leq 1$ می‌پردازیم:

$$g(o) = 2, g(1) = 1 \Rightarrow m = \frac{1 - 2}{1 - o} = -1$$

$$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 2; x \leq 1$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*), (**)} gof^{-1}(-2) = g(f^{-1}(-2)) = g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$gof^{-1}(-2) \times gog(o) = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$fofof(\sqrt{2}) = f(f(f(\sqrt{2})))$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow fofof(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

راه حل اول:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 5x^2 + 11$$

$$\Rightarrow g(x) = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5}{4}x^2 + 11$$

$$\Rightarrow g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11 \Rightarrow g(x-7) \text{ حداقل} = 11$$

راه حل دوم: برای رسیدن از ضابطه $g(2x)$ به $g(x-7)$ ، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار $g(x-7)$ برابر با کمترین مقدار $g(2x) = 5x^2 + 11$ است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

فصل چهارم: مثلثات

(صفحه ۷۲ تا ۷۶ کتاب درسی)

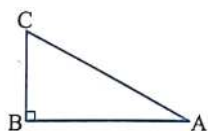
BOX 1: یادآوری و واحدهای اندازه‌گیری زاویه

با تعریف نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین آن‌ها و دایره مثلثاتی در سال گذشته آشنا شده‌اید. این تعاریف و ... به صورت یادآوری گفته می‌شود و سپس واحدهای اندازه‌گیری زاویه تعریف می‌شوند.

الف) یادآوری از مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده A به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر θ یک زاویه دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$۱) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$۲) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$۳) \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \text{ یا } \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

$$۴) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases}$$

$$۵) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$۶) 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

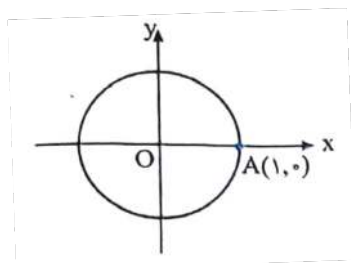
تعرین: اگر $\cos x = \frac{4}{5}$ و $\cot x < 0$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی x را به دست آورید.

پاسخ: اگر انتهای کمان x در ناحیه چهارم باشد، آن‌گاه $\cos x$ عددی مثبت و $\cot x$ عددی منفی است، هم‌چنین در ناحیه چهارم، $\sin x$ عددی منفی است، بنابراین:

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3}$$

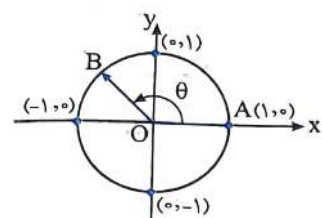
دایره مثلثاتی

دایره‌ای به مرکز $O(0,0)$ و شعاع یک واحد که نقطه $A(1,0)$ مبدأ حرکت آن است را دایره مثلثاتی می‌گوییم. جهت مثبت در دایره مثلثاتی خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت است.



ب) واحدهای اندازه‌گیری زاویه

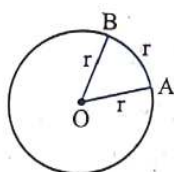
درجه: اگر محیط دایره‌ای را به 360° کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها 1° درجه است. یک درجه را به صورت 1° نمایش می‌دهیم.



واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه وجود دارد که رادیان نام دارد.

رادیان

دایره‌ای به شعاع r و مرکز O در نظر بگیرید. دو نقطه A و B را روی این دایره طوری مشخص کنید که طول $\widehat{AB}$ برابر اندازه شعاع دایره، یعنی r شود.



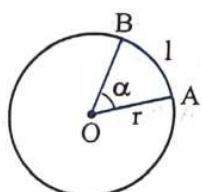
اگر A و B را به مرکز دایره (نقطه O) وصل کنیم، آن‌گاه زاویه AOB را یک رادیان می‌گوییم.

اگر زاویه AOB را به کمک نقاله اندازه‌گیری کنیم، اندازه این زاویه برحسب درجه، تقریباً برابر 57° می‌باشد. بنابراین:

$$\widehat{AOB} = 1 \text{ رادیان} \approx 57^\circ$$

رادیان: 1 رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی در یک دایره به شعاع r که طول کمان روبه‌روی آن برابر با r است.

اندازه یک زاویه مرکزی برحسب رادیان: نسبت طول کمان روبه‌روی یک زاویه مرکزی به اندازه شعاع دایره، اندازه آن زاویه برحسب رادیان می‌باشد.



اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\alpha = \frac{\text{طول کمان روبه روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{l}{r} \Rightarrow l = \alpha r$$

تذکره: در فرمول $\alpha = \frac{l}{r}$ ، l و r هم واحد هستند.

تمرین: در دایره‌ای به شعاع ۵ متر، توسط زاویه α کمانی به طول ۲ متر ایجاد می‌شود. اندازه زاویه α را برحسب رادیان و درجه به دست آورید.

پاسخ: طبق فرض، $r = 5$ و $l = 2$ می‌باشد، داریم:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2}{5} = 0.4$$

چون هر رادیان تقریباً 57° است، پس اندازه α برحسب درجه تقریباً برابر $0.4 \times 57^\circ = 22.8^\circ$ می‌باشد.

تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر

$$R = \frac{\pi}{180^\circ} D, \quad D = \frac{180^\circ R}{\pi}$$

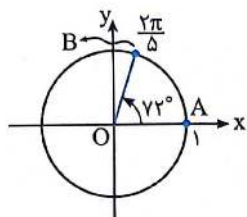
اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

از روابط اخیر برای تبدیل درجه به رادیان و برعکس استفاده می‌کنیم.

تمرین: زاویه $\frac{2\pi}{5}$ را برحسب درجه و زاویه -12° را برحسب رادیان بنویسید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

پاسخ: با قراردادن $\frac{2\pi}{5}$ به جای R در رابطه $D = \frac{180^\circ R}{\pi}$ ، اندازه زاویه برحسب درجه به دست می‌آید:

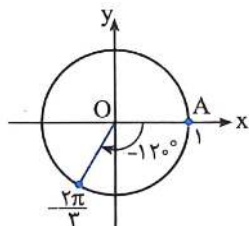
$$D = \frac{180^\circ \times \frac{2\pi}{5}}{\pi} = 72^\circ$$



اگر اندازه زاویه AOB برابر 72° باشد، آن‌گاه طول کمان AB برابر $\frac{2\pi}{5}$ است.

با قراردادن -12° به جای D در رابطه $R = \frac{\pi}{180^\circ} D$ ، اندازه زاویه برحسب رادیان به دست می‌آید:

$$R = \frac{\pi}{180^\circ} \times (-12^\circ) = -\frac{2\pi}{3}$$

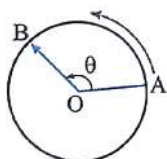


(علامت منفی نشان‌دهنده آن است که جهت حرکت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.)

نکته: (۱) برای تبدیل راحت‌تر رادیان به درجه، می‌توان با قراردادن 180° به جای π این کار را انجام داد. به عنوان مثال، اگر اندازه زاویه‌ای

برحسب رادیان، $-\frac{\pi}{6}$ باشد، اندازه این زاویه برحسب درجه برابر $-\frac{180^\circ}{6} = -30^\circ$ می‌باشد.

۲) اگر متحرکی از نقطه A روی دایره مثلثاتی در جهت مثبت حرکت کند و به مکان B برسد، مسافت طی شده توسط متحرک، اندازه زاویه دوران پاره خط OA حول O برحسب رادیان می باشد.



تذکر: اگر حرکت در جهت منفی باشد، همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می دهیم.

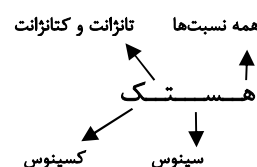
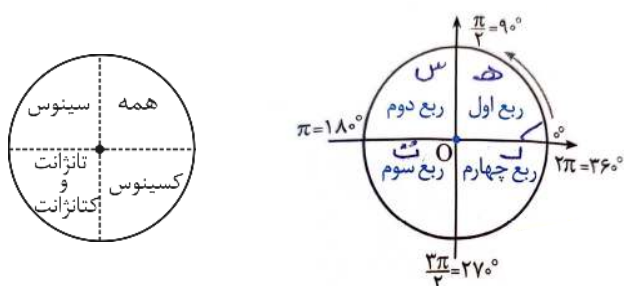
اندازه زاویه را با استفاده از رابطه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ به یکدیگر قابل تبدیل اند.

تعرین: حاصل عبارت $3 \cot \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{3\pi}{4}$ را به دست آورید.

پاسخ: $\cot \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{3\pi}{4} = -1$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = 3(1) - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)^2 = 3 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

علامت مثبت نسبت ها در نواحی چهارگانه:



تعرین: علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را مشخص کنید.

(۲) $\cos(\frac{10\pi}{9})$

(۱) $\sin(\frac{5\pi}{9})$

پاسخ: باید ناحیه ای را که انتهای کمان در آن قرار می گیرد، مشخص کنیم و سپس با استفاده از جدول، علامت نسبت مثلثاتی را تعیین کنیم:

(۱) $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi$ در ناحیه دوم، سینوس عددی مثبت است. $\rightarrow \sin(\frac{5\pi}{9}) > 0$

(۲) $\pi < \frac{10\pi}{9} < \frac{3\pi}{2}$ در ناحیه سوم، سینوس عددی منفی است. $\rightarrow \cos(\frac{10\pi}{9}) < 0$

پرسش‌های تشریحی:

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۸۶ کتاب درسی)

• کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

۱- دایره به مرکز (۰,۰) و شعاع یک واحد را دایره مثلثاتی می‌گوییم.

۲- $-\frac{2\pi}{5}$ رادیان برابر -۷۲° است.

۳- اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$ ، آن‌گاه $\tan \alpha < 0$ است.

۴- در یک مثلث، اندازه دو زاویه $\frac{5\pi}{18}$ و ۸° می‌باشد. این مثلث متساوی‌الساقین است.

۵- در دایره‌ای به شعاع ۳ متر، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۹ متر برابر ۲ رادیان است.

۶- انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

• در چهار سوال زیر در جاها یخالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۷- اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم‌دایره برابر است با درجه یا رادیان.

۸- یک رادیان تقریباً برابر درجه است.

۹- $\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان برابر درجه است.

(فرداد ۱۴۰۲)

۱۰- طول کمان روبه‌رو به زاویه ۲۱° در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با است.

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۷۸ کتاب درسی)

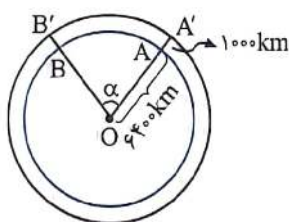
۱۱- اگر $\sin x = \frac{5}{13}$ و $\tan x < 0$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی x را به دست آورید.

۱۲- یک ماهواره مخابراتی را در نظر بگیرید که در فاصله ۱۰۰۰ کیلومتری سطح کره زمین به دور آن در حال حرکت است. اگر این ماهواره

در دو نقطه A و B روی سطح زمین که با مرکز زمین زاویه α می‌سازند رصد شود، مسافتی را در مدار خود از A' به B' به طول ۸۰۰۰

کیلومتر طی می‌کند. اگر شعاع کره زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، مقدار تقریبی α را بر حسب درجه به دست آورید.

(مشابه فعالیت صفحه ۷۶ کتاب درسی)



۱۳- علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مشخص کنید.

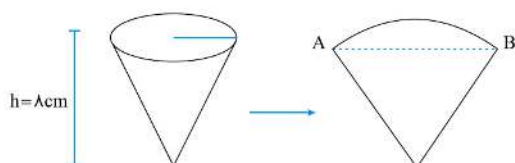
پ) $\cot\left(\frac{13\pi}{11}\right)$

ب) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ا) $\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$

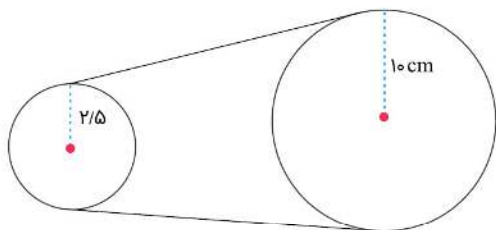
Homework

- ۱ مخروطی به شکل زیر را از کنار آن باز کرده ایم. اگر شعاع قاعده مخروط ۶ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازه پاره خط AB به صورت $y = a \sin b$ است. a و b را بیابید.



به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۲ در دایره ای به قطر ۸ cm طول کمان روبرو به زاویه 135° را بیابید.
- ۳ در شکل زیر یک سمت دو قرقه به شعاع های ۱۰ cm و $2/5$ cm را به هم متصل کرده است. اگر قرقه بزرگتر $\frac{\pi}{3}$ رادیان دوران کند، قرقه کوچکتر چند رادیان دوران می کند؟



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- ۴ مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{11\pi}{12}$ است.
- ۵ زاویه 135° درجه برابر $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است.
- ۶ انتهای کمان ۲ رادیان در ناحیه سوم مثلثاتی است.

$\cos 3 > \cos 1$

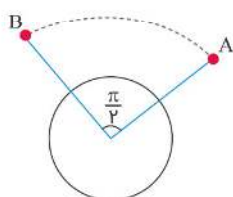
۷

۸ دور پیست دایره‌ای به شعاع ۱ کیلومتر، دوچرخه‌سوار 72° می‌چرخد، چه مسافتی طی می‌شود؟

۹ اگر $\alpha = 12^\circ$ رادیان باشد، انتهای کمان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، تفاضل دو زاویه حاده $\frac{\pi}{3}$ است. زاویه کوچک‌تر چند درجه است؟

۱۱ اگر ماهواره‌ای در ارتفاع ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین باشد و $\frac{\pi}{4}$ رادیان در فضا جابه‌جا شود آنگاه مسافت پیموده شده توسط ماهواره چقدر است؟
($R_{\text{زمین}} = 6400 \text{ km}$)



۱۲ اگر مجموع دو زاویه 72° و تفاضل دو زاویه $\frac{\pi}{9}$ رادیان باشد. هر زاویه را برحسب رادیان به دست آورید.

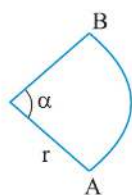
۱۳ در مثلثی که زاویه $\hat{A} = 60^\circ$ و $B = \frac{\pi}{4}$ می‌باشد، زاویه $\hat{C}$ چند رادیان است؟

۱۴ در یک تراکتور شعاع چرخ جلو 60 سانتی‌متر و شعاع چرخ عقب 80 سانتی‌متر است. اگر چرخ جلو $\frac{\pi}{8}$ رادیان بچرخد، میزان چرخش چرخ عقب را به دست آورید.

۱۵ در مدت ۵۲ دقیقه، عقربه ساعت‌شمار چند رادیان را طی می‌کند؟

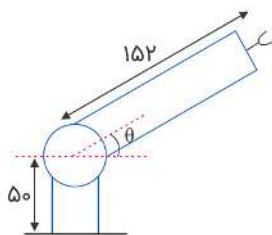
۱۶ اندازه زاویه $\frac{\pi}{90}$ رادیان را به درجه و 72° درجه را به رادیان تبدیل کنید.

۱۷ در قطاع زیر اگر $\alpha = 45^\circ$ و شعاع $r = 20$ باشد، طول کمان $\widehat{AB}$ را به دست آورید.



۱۸ زاویه 315° را به رادیان تبدیل نمایید.

۱۹ در شکل زیر، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات تا سطح زمین ۱۲۶ سانتی‌متر می‌باشد، مقدار θ برحسب رادیان کدام است؟ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

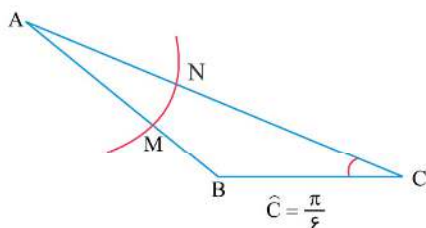


- (۱) $\frac{\pi}{3}$
- (۲) $\frac{\pi}{6}$
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $\frac{\pi}{12}$

۲۰ انتهای کمان ۱۲ رادیان در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

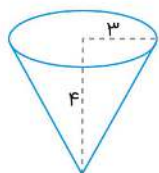
- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

۲۱ در مثلث ABC به رأس A و به شعاع ۵ سانتی‌متر کمانی می‌زنیم، طول کمان MN برابر $\frac{5\pi}{4}$ است. زاویهٔ B در مثلث چند درجه است؟



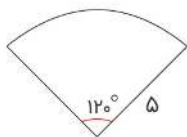
- (۱) 105°
- (۲) 125°
- (۳) 75°
- (۴) 95°

۲۲ اگر مخروط شکل زیر را گسترده نماییم، زاویهٔ قطاع حاصل کدام است؟



- (۱) 8π
- (۲) 2π
- (۳) 5π
- (۴) 8π

۲۳ اگر زاویه کمان شکل زیر 120° باشد، طول کمان چقدر است؟



(۱) $\frac{10\pi}{3}$

(۲) $\frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{13\pi}{3}$

(۴) $\frac{5\pi}{3}$

۲۴ زاویه 10 رادیان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

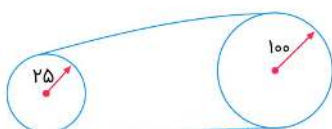
(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

۲۵ در شکل زیر، یک تسمه دو قرقره به شعاع 100 cm و 25 cm را به هم وصل کرده است. اگر قرقره بزرگتر 270° بچرخد، قرقره کوچکتر چند رادیان می‌چرخد؟



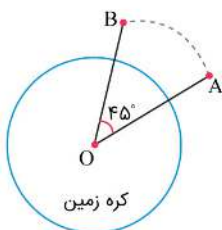
(۱) 12π

(۲) 10π

(۳) 6π

(۴) 5π

۲۶ ماهواره‌ای در یک مسیر دایره‌ای در فاصله 600 کیلومتری سطح زمین در حال حرکت است. باتوجه به شکل زیر، مسافت پیموده‌شده ماهواره وقتی از نقطه A به نقطه B می‌رسد چقدر است؟ ($R_e = 6400\text{ km}$ شعاع زمین)



(۱) 3500π

(۲) 3150π

(۳) 2750π

(۴) 1750π

۲۷ انتهای کمان 9 رادیان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

۲۸ شعاع چرخ کوچک یک تراکتور 60 سانتی‌متر و شعاع چرخ بزرگ آن 90 سانتی‌متر است. اگر چرخ بزرگ 12 متر را طی کرده باشد، چرخ کوچک چه زاویه‌ای را برحسب رادیان طی می‌کند؟

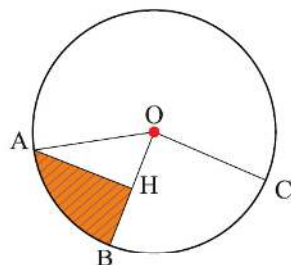
(۱) 10

(۲) 20

(۳) 30

(۴) 40

۲۹ مطابق شکل زیر، دایره به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث OAH بزرگتر است؟



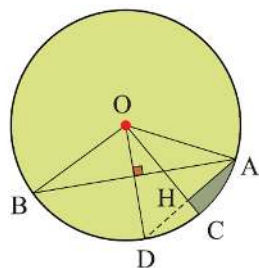
(۱) $\frac{2\pi - 1}{3}$

(۲) $\frac{2\pi - 3}{6}$

(۳) $\frac{\pi - 1}{6}$

(۴) $\frac{\pi - 3}{3}$

۳۰ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\widehat{AOB} = ۱۲۰^\circ$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟

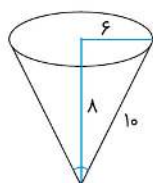


(۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(۲) $\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}$

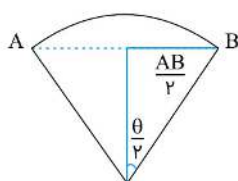
(۳) $\pi - \sqrt{3}$

(۴) $\pi - \sqrt{2}$



$$\text{محیط} = 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$r\theta = L \Rightarrow 10\theta = 12\pi \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5}$$



$$\sin \frac{3\pi}{5} = \frac{\frac{AB}{r}}{10} \Rightarrow AB = 10 \sin \frac{3\pi}{5}$$

$$\Rightarrow a = 10, \quad b = \frac{3\pi}{5}$$

$$2r = 4 \Rightarrow r = 2 \text{ شعاع دایره } \quad 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow L = r\theta$$

$$L = 2 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$L_1 = L_2 \Rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2$$

$$\theta_1 \times 2/\pi = \frac{\pi}{2} \times 10$$

$$\theta_1 \times \frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{2} \times 10 \Rightarrow \theta_1 = 2\pi$$

۴ درست

$$\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

۵ درست

$$135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} R$$

۶ نادرست - ۲ رادیان مقداری کمتر از π دارد و در ناحیه دوم قرار دارد.

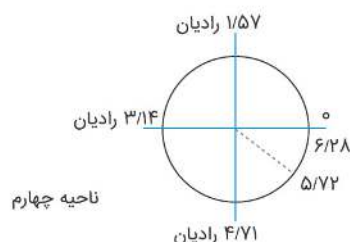
۷ نادرست - زاویه ۳ رادیان در ناحیه سوم قرار دارد و $\cos$ آن منفی است.

$$L = r\theta \Rightarrow L = \frac{\theta \times \pi \times r}{180} = \frac{72 \times 3/14}{180} = 1/256$$

$$12 \left| \frac{6/28}{1} \right.$$

$$\frac{6/28}{5/72}$$

دور کامل دایره: $2\pi = 6/28$ رادیان



۱۰ در مثلث قائم الزاویه:

$$\hat{A} = 9^\circ$$

$$\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} + 60^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \hat{C} + 60^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 15^\circ$$

$$\widehat{AB} = \ell = r \cdot \alpha \Rightarrow \ell = (6400 + 1600) \times \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell = 4000\pi$$

۱۲

$$۷۲^\circ : \frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۷۲}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۵} \text{ رادیان}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۲\pi}{۵} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{۹} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{۲۳\pi}{۹۰}, \beta = \frac{۱۳\pi}{۹۰}$$

۱۳

$$\hat{A} = ۶۰^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۶۰}{۱۸۰} = \frac{A}{\pi} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{۳}$$

مجموع زوایای داخلی مثلث π

$$\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{C} = \pi - \frac{۷\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۱۲}$$

۱۴

مسافت‌های طی شده برابر است با:

$$\ell = r_1 \theta = ۶۰ \times \frac{\pi}{\lambda} = \frac{۱۵\pi}{۲}$$

$$\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\frac{۱۵\pi}{۲}}{\lambda_0} = \frac{۳\pi}{۳۲} R$$

۱۵

در هر ساعت عقربه ساعت‌شمار $\frac{1}{۱۲}$ از ۳۶۰° را طی می‌کند، پس هر ساعت عقربه ساعت‌شمار ۳۰° درجه حرکت می‌کند پس:

$$۳۰^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶}$$

حال باید ببینیم که ۵۲ دقیقه چه کسری از ساعت است پس:

$$\frac{۵۲'}{۶۰'} \times \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۳}{۱۵} \times \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۳\pi}{۹۰}$$

۱۶

$$\frac{\pi}{۲۰} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۹^\circ$$

$$۷۲ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۵}$$

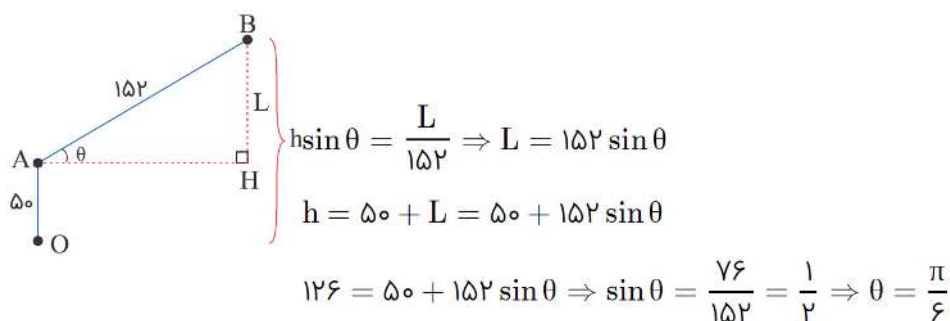
۱۷

$$\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{۴۵}{۱۸۰} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴} \text{ رادیان}$$

$$l = \widehat{AB} \Rightarrow l = r \cdot \alpha \Rightarrow l = ۲۰ \times \frac{\pi}{۴} = ۵\pi$$

۱۸

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۳۱۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳۱۵\pi}{۱۸۰} = \frac{۷\pi}{۴}$$



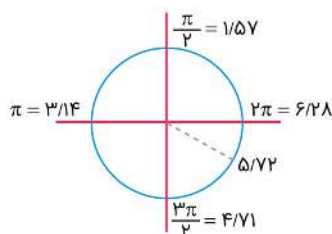
یک دور دایره $2\pi = 6/28$ رادیان است، پس:

$$12 \mid \frac{6/28}{1}$$

$\vdots$

$$\frac{5/72}{1}$$

$12 \text{ رادیان} = \underbrace{6/28}_{\text{یک دور دایره}} + \underbrace{5/72}_{\text{ناحیه چهارم}}$



گزینه ۱

۲۱

$$\widehat{MN} = l = r \cdot \alpha$$

$$\frac{5\pi}{4} = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 105^\circ$$

گزینه ۲

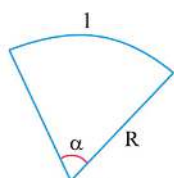
۲۲

$$R^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$l = \text{طول کمان} = 2\pi r = 2\pi(3) = 6\pi$$

$$l = R \cdot \alpha$$

$$6\pi = 5\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{6\pi}{5} = 1\frac{1}{5}\pi \text{ رادیان}$$



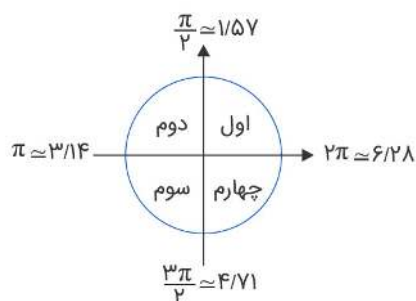
شکل قطاع حاصل از گسترده شدن مخروط

گزینه ۱

۲۳

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$l = r \cdot \theta = 5 \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{10\pi}{3}$$



$$۱۰ \left| \frac{۶/۲۸}{۱} \right|$$

∴

رادیان ۳/۷۲

$$\pi = ۳/۱۴ < ۳/۷۲ < \frac{۳\pi}{۲} = ۴/۷۱ \Rightarrow \text{ناحیه سوم}$$

$$\text{رادیان } \theta_1 = ۲۷^\circ \Rightarrow \frac{D}{۱۸^\circ} = \frac{\theta_1}{\pi} \Rightarrow \frac{۲۷^\circ}{۱۸^\circ} = \frac{\theta_1}{\pi} \Rightarrow \theta_1 = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$l_1 = l_2$$

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$$

$$۱۰۰ \times \frac{۳\pi}{۲} = ۲۵ \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = ۶\pi$$

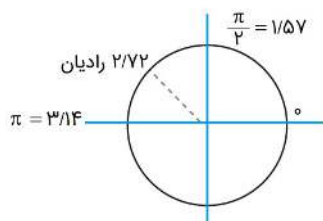
$$\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴} \text{ رادیان}$$

$$\widehat{AB} = l = r \cdot \alpha \Rightarrow l = (۶۴۰۰ + ۶۰۰) \frac{\pi}{۴} \Rightarrow l = ۱۷۵۰\pi \text{ km}$$

گزینه ۲

۲۷

یک دور دایره $2\pi \simeq 6/28$ رادیان است، پس:



۹ $6/28$

$\vdots$
 $2/72$

گزینه ۲

۲۸

مسافت طی شده چرخ بزرگ = مسافت طی شده چرخ کوچک

$$l = 1200 \Rightarrow r_1 \cdot \alpha = 1200 \Rightarrow 60\alpha = 1200 \Rightarrow \alpha = 20 \text{ رادیان}$$

گزینه ۴

۲۹

$$P = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 2\pi \Rightarrow r = 1$$

$$OH = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OAH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\widehat{AB}| = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\widehat{AH} + \widehat{BH} + \widehat{AB}) - (OA + AH + OH) = \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi - 3}{3}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1$$

$$|OA| = |OB| = 1, |AH| = \frac{1}{2}$$

$$\text{ارتفاع } OH : |OH| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{AOD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 30^\circ \Rightarrow |\widehat{AC}| = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

$$|HC| = 1 - |OH| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{محیط مثلث } AOH = |OH| + |HA| + |OA| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{محیط قسمت رنگی} : |HC| + |AH| + |\widehat{AC}| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{محیطها را از هم کم می‌کنیم} : \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

BOX 2: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

از سال گذشته مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای هارده 30° ، 45° و 60° را می‌دانیم. در این BOX می‌فواهیم مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که از مجموع یا تفاضل این زوایا با زوایای مرزی 0° ، 90° ، 180° و 270° به دست می‌آید را به دست بیاوریم.

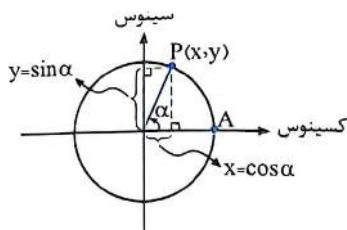
روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

محور سینوس و کسینوس

• در دایره مثلثاتی، به ازای هر مقدار حقیقی زاویه α ، نقطه $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ دوران یافته نقطه $A(1, 0)$ تحت دوران به اندازه α حول مبدأ می‌باشد. بنابراین اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه:

$$(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$$

پس طول هر نقطه روی دایره مثلثاتی با مقدار کسینوس زاویه موردنظر و عرض آن نقطه نیز با مقدار سینوس همان زاویه برابر است. بنابراین محور Xها، محور کسینوس‌ها و محور Yها، محور سینوس‌ها می‌باشد.

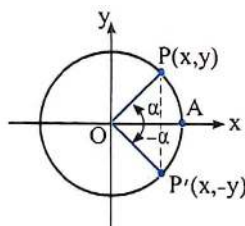


نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

اگر α یک زاویه دلخواه باشد، قرینه آن $-\alpha$ است. به عنوان مثال، قرینه زاویه 60° برابر -60° است.

نکته: قرینه نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور Xها، نقطه‌ای به مختصات $(x, -y)$ است. پس برای قرینه کردن نقطه نسبت به محور Xها، فقط عرض آن را قرینه می‌کنیم. به عنوان مثال، قرینه نقطه به مختصات $(4, -3)$ نسبت به محور Xها، نقطه $(4, 3)$ می‌باشد.

اگر $\overline{OA}$ را به اندازه α در جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، تا بر نقطه P' روی دایره منطبق شود، طبق قرارداد زاویه $\angle AOP'$ برابر $-\alpha$ می‌شود.



برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

با دقت در روابط بالا، فقط در نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی حذف می‌شود و در بقیه نسبت‌های مثلثاتی، علامت منفی به پشت نسبت مثلثاتی می‌رود.

تعریف: نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\frac{\pi}{3}$ رادیان را به دست آورید.

پاسخ: $\frac{\pi}{3}$ رادیان برابر 60° است. برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی $-\frac{\pi}{3}$ رادیان داریم:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{\text{منفی حذف می‌شود}} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

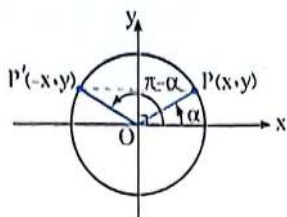
$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

تعریف: دو زاویه α و β را مکمل گوئیم هرگاه مجموع آن‌ها 180° یا π رادیان شود. به عنوان مثال، دو زاویه 20° و 160° مکمل یکدیگر هستند ($20^\circ + 160^\circ = 180^\circ$). مکمل زاویه α برابر $180^\circ - \alpha$ یا $\pi - \alpha$ می‌باشد.

نکته: قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور عمودی (محور y)، نقطه‌ای به مختصات $(-x, y)$ است. پس برای قرینه کردن نقطه نسبت به محور y ، فقط طول آن را قرینه می‌کنیم. به عنوان مثال، قرینه نقطه $(3, -1)$ نسبت به محور y ، نقطه $(-3, -1)$ است. اگر $P(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی و α زاویه بین OP و محور Ox باشد، آنگاه زاویه بین OP' و محور Ox که در آن $P'(-x, y)$ می‌باشد، برابر $\pi - \alpha$ خواهد بود و داریم:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$



برای به دست آوردن مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای 120° ، 135° و 150° از روابط بالا استفاده می‌کنیم.

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{مثال:}$$

نکته: با توجه به روابط بالا، مقدار نسبت مثلثاتی سینوس یک زاویه با مقدار نسبت مثلثاتی سینوس مکمل آن برابر است و برای سه نسبت دیگر این دو مقدار قرینه یکدیگرند و در نتیجه مجموع آن‌ها برابر صفر می‌شود، به عبارت دیگر اگر دو زاویه α و β مکمل باشند، آنگاه:

$$\sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 0, \quad \tan \alpha + \tan \beta = 0, \quad \cot \alpha + \cot \beta = 0.$$

تعریف: حاصل $\cos \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \tan 150^\circ$ را به دست آورید.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad (1) \quad \text{پاسخ: مکمل } \frac{2\pi}{3} \text{ (یعنی } 120^\circ) \text{ برابر } \frac{\pi}{3} \text{ است، بنابراین:}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2) \quad \text{مکمل زاویه } 150^\circ, \text{ زاویه } 30^\circ \text{ است. بنابراین:}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \tan 150^\circ = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{3} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان یا 180°

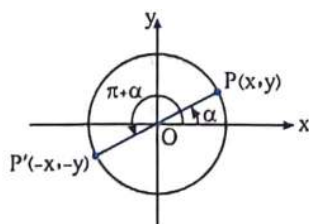
اختلاف دو زاویه 30° و 210° برابر 180° است. در این قسمت با فرمول‌هایی که ارائه می‌کنیم می‌توانیم مقادیر نسبت‌های مثلثاتی 210° ،

225° و 240° را با توجه به مقادیر نسبت‌های مثلثاتی 3° ، 45° و 6° به دست بیاوریم.

نکته: قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ای به مختصات $(-x, -y)$ است. پس برای قرینه کردن نقطه نسبت به مبدأ مختصات، باید طول و عرض آن را قرینه کنیم. به عنوان مثال، قرینه نقطه $(4, -6)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $(-4, 6)$ است.

اختلاف دو زاویه α و $\pi + \alpha$ برابر π است. مطابق شکل زیر، اگر $P(x, y)$ باشد، آنگاه زاویه بین OP' با محور Ox برابر $\pi + \alpha$ است که در آن $P'(-x, -y)$ می‌باشد. داریم:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



$$\tan 21^\circ = \tan(18^\circ + 3^\circ) = \tan 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال:

تمرین: مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{4}$ را بدین‌را به دست آورید.

پاسخ: اندازه زاویه $\frac{5\pi}{4}$ را بدین‌را بر حسب درجه برابر $225^\circ = \frac{5 \times 18^\circ}{4}$ است و $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ ، بنابراین از روابط داده‌شده، مقادیر

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{5\pi}{4}$ را به دست می‌آوریم $(\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4})$:

$$\sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{5\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\frac{5\pi}{4}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cot(\frac{5\pi}{4}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

تمرین: اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$ و $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ باشد، حاصل عبارت $2\cos(\pi + \alpha) + \tan(-\alpha)$ را به دست آورید.

پاسخ: انتهای کمان α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیه دوم $\cos \alpha$ عددی منفی است، بنابراین:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

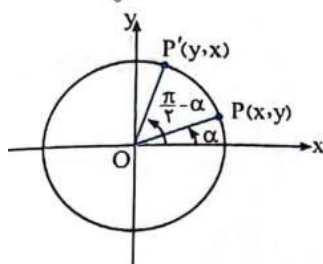
از طرفی $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ و $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ می‌باشند، پس:

$$\text{حاصل عبارت} = 2(-\cos \alpha) - \tan \alpha = 2 \times (-(-\frac{12}{13})) - (-\frac{5}{12}) = \frac{24}{13} + \frac{5}{12} = \frac{288 + 65}{156} = \frac{353}{156}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

تعریف: دو زاویه α و β را متمم گوئیم، هرگاه مجموع آن‌ها 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد. پس متمم زاویه α برابر $90^\circ - \alpha$ یا $\frac{\pi}{2} - \alpha$ است.

مثال: متمم زاویه 10° برابر $90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$ می‌باشد.



اگر $P(x, y)$ و زاویه بین OP و محور Ox برابر α باشد، آن گاه زاویه بین OP' و محور Ox برابر $\frac{\pi}{2} - \alpha$ است که در آن مختصات نقطه P' به صورت $P'(y, x)$ می باشد، داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

به عبارت دیگر اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، آن گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس.

نکته: می توان نسبت های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ را برحسب نسبت های مثلثاتی α به صورت زیر نوشت:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

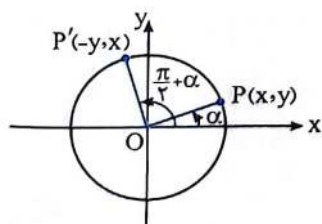
هم چنین می توان نسبت های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ را برحسب نسبت های مثلثاتی α و به صورت زیر نوشت:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

اختلاف دو زاویه α و $\frac{\pi}{2} + \alpha$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است. مطابق شکل روبه رو، اگر $P(x, y)$ باشد، آن گاه زاویه بین OP' با محور Ox برابر $\frac{\pi}{2} + \alpha$ است که در آن $P'(-y, x)$ می باشد و داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$



از تساوی های بالا می توان برای به دست آوردن مقادیر نسبت های مثلثاتی زوایای 12° ، 135° و 150° استفاده کرد. اما این کار را قبلاً به کمک روابط در زوایای مکمل هم انجام داده ایم.

تعریف: مقادیر نسبت های مثلثاتی زوایای 135° را با استفاده از زوایای با اختلاف $\frac{\pi}{4}$ رادیان به دست آورید.

پاسخ: دو زاویه 135° و 45° ، دو زاویه با اختلاف 90° هستند. بنابراین 135° را می توان به صورت $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ نوشت و از روابط

زیر استفاده کرد:

$$\sin(135^\circ) = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos(135^\circ) = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(135^\circ) = \tan(90^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1 \quad \cot(135^\circ) = \cot(90^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

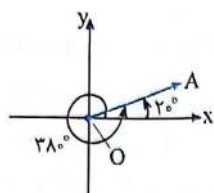
تعریف: اگر $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان α در ناحیه دوم باشد، حاصل $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ را به دست آورید.

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha + 2\cos \alpha = -\frac{4}{5} + 2(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5} = -2$$

دو زاویه هم‌انتهای: دو زاویه α و β را هم‌انتهای گوئیم، هرگاه اضلاع انتهایی آن‌ها بر هم منطبق شود. در شکل مقابل زاویه بین $\vec{OA}$ و محور Ox برابر 20° است.



اگر $\vec{OA}$ یک بار به طور کامل حول نقطه O و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، (به اندازه 36° ، $\vec{OA}$ را دوران می‌دهیم.) آن‌گاه ضلع انتهایی این زاویه بر روی OA منطبق می‌شود و اندازه این زاویه برابر $36^\circ + 20^\circ = 38^\circ$ می‌باشد، اختلاف دو زاویه هم‌انتهای 38° و 20° برابر 36° است و در حالت کلی داریم:

نکته: اگر دو زاویه هم‌انتهای باشند، آن‌گاه اختلاف آن‌ها مضربی صحیح از 2π رادیان یا 360° است. بنابراین:

$$\beta - \alpha = 2k\pi \text{ یا } 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

پس تمام زاویه‌های هم‌انتهای با زاویه α برابر $360^\circ k + \alpha$ یا $2k\pi + \alpha$ می‌باشند که در آن $k \in \mathbb{Z}$ است.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه هم‌انتهای با هم برابرند، بنابراین اگر اندازه زاویه از 360° بیشتر باشد، می‌توان از نکته زیر برای مناسبه نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه استفاده کرد:

نکته: اگر α و β دو زاویه هم‌انتهای باشند ($\beta = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$)، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها با هم برابرند، یعنی:

$$\sin \beta = \sin(2k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\text{حذف } 2k\pi} \sin(\pm \alpha) = \pm \sin \alpha \quad \cos \beta = \cos(2k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\text{حذف } 2k\pi} \cos(\pm \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan \beta = \tan(2k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\text{حذف } 2k\pi} \tan(\pm \alpha) = \pm \tan \alpha \quad \cot \beta = \cot(2k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\text{حذف } 2k\pi} \cot(\pm \alpha) = \pm \cot \alpha$$

با توجه به این‌که $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ و $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$ می‌باشد، می‌توان برای نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت، هر

$$\tan(k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\text{حذف } k\pi} \tan(\pm \alpha), \quad \cot(k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\text{حذف } k\pi} \cot(\pm \alpha) \quad \text{مضربی (فرد یا زوج) از } \pi \text{ را حذف کرد، به عبارتی دیگر:}$$

تعریف: حاصل $\sin(45^\circ) + \cos(42^\circ) - \tan(765^\circ)$ را به دست آورید.

$$45^\circ = 1 \times 360^\circ + 90^\circ$$

پاسخ: زاویه 45° و زاویه 90° هم‌انتهای هستند، زیرا:

$$\sin(45^\circ) = \sin(90^\circ) = 1 \quad (1)$$

بنابراین:

$$42^\circ = 36^\circ + 6^\circ$$

$$\cos(42^\circ) = \cos(36^\circ + 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$76^\circ = 2 \times 36^\circ + 4^\circ$$

$$\tan(76^\circ) = \tan 4^\circ = 1 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \text{حاصل} = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

دو زاویه 42° و 6° همنته هستند، زیرا:

بنابراین:

دو زاویه 76° و 4° همنته هستند، زیرا:

بنابراین:

تعریف: حاصل $\sqrt{2} \sin(\frac{27\pi}{4}) - \tan(\frac{29\pi}{4})$ را به دست آورید.

$$\sin(\frac{27\pi}{4}) = \sin(6\pi + \frac{3\pi}{4}) \xrightarrow{\text{حذف } 6\pi} \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \quad \text{پاسخ: با تقسیم } 27 \text{ بر } 4, 4 \text{ داریم:}$$

$$\tan(\frac{29\pi}{4}) = \tan(7\pi + \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\text{حذف } 7\pi} \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \sqrt{2} \sin(\frac{27\pi}{4}) - \tan(\frac{29\pi}{4}) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- مکمل زاویه -25° ، برابر است.

۲- مقدار $\sin 21^\circ$ برابر است.

۳- مقدار $\cos(-\frac{4\pi}{3})$ برابر است.

۴- مقدار $\cot(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ با مقدار برابر است.

• درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های چهار سوال زیر را مشخص کنید.

۵- اگر α و β دو زاویه قرینه باشند، آن‌گاه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$

۶- دو زاویه 2° و 16° مکمل یکدیگرند.

$$7- \cot(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = \tan \alpha$$

۸- اگر α و β دو زاویه مکمل باشند، آن‌گاه $\sin \alpha = \sin \beta$

۹- نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° را به دست آورید.

(شماره ۱۴۰۲)

۱۰- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

پ) $\cot(-\frac{\pi}{3})$ ب) $\cot 315^\circ$ آ) $\tan(-\frac{5\pi}{3})$

(شهریور ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

(فرورداد ۱۴۰۲)

(فرورداد ۱۴۰۲)

(فرورداد ۱۴۰۲)

۱۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

ا) $\sin(39^\circ) + \tan 135^\circ + \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$

ب) $\sin 21^\circ + \tan 12^\circ + \cos \frac{3\pi}{4}$

پ) $\cos(-39^\circ) + \tan(60^\circ) - \sin(33^\circ)$

ت) $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

ث) $\sin 12^\circ - \cos 15^\circ$

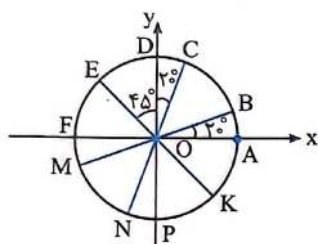
۱۲- اگر $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{8}{15}$ و α در ناحیه دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آورید.

۱۳- اگر $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل عددی هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

ا) $\sin\left(\frac{15\pi}{4} + \alpha\right)$ ب) $\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{4}\right)$ پ) $\cot\left(\frac{55\pi}{4} + \alpha\right)$

۱۴- تمام زاویه‌های هم‌انتهای با زوایای ۱۵° و $-\frac{\pi}{9}$ را مشخص کنید.

۱۵- ضلع انتهایی هر یک از زاویه‌های داده‌شده، روی کدامیک از پاره‌خط‌های مشخص‌شده شکل روبه‌رو قرار می‌گیرد؟



(آ) $\pi + \frac{\pi}{9}$ (ب) $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$

(پ) $5\pi - \frac{\pi}{4}$ (ت) $8\pi - \frac{\pi}{4}$

(ث) $\frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$ (ج) ۱۸۲°

۱۶- در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید. سپس مقادیر دیگری برای x مشخص کنید. (مشابه تمرین ۴ صفحه ۸۷ کتاب درسی)

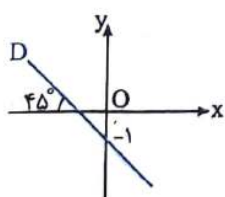
(آ) $\sin(x + ۲۵^\circ) = \cos x$

(ب) $\sin(۲x + ۷^\circ) = -\sin(x + ۱^\circ)$

(پ) $\cos(۲x + ۳^\circ) = -\cos x$

۱۷- اگر $\tan \theta = ۲$ باشد، مقدار عددی عبارت $\frac{۲ \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{۳ \sin(\Delta\pi + \theta) + \cos(۹\pi - \theta)}$ را به دست آورید.

۱۸- در شکل مقابل، معادله خط D را بنویسید.



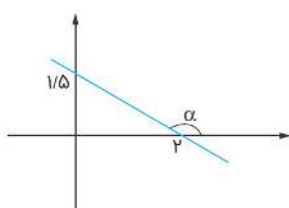
Homework (1)

۱ حاصل عبارت $\frac{3 \cos(248^\circ) - 2 \sin(158^\circ)}{\sin(202^\circ) - \cos(292^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) $0/5$ (۲) $-0/5$
(۳) $-2/5$ (۴) $2/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ در شکل زیر، زاویه α مشخص شده است. مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $-\frac{3}{4}$
(۴) $-\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $-0/5\sqrt{6}$ (۲) $0/75\sqrt{3}$
(۳) $-0/75\sqrt{3}$ (۴) $0/5\sqrt{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر $\tan x + \cot x = 4$ و $5\pi < x < 6\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $-0/8\sqrt{2}$ (۲) $0/8\sqrt{2}$
(۳) $-\frac{1/6}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1/6}{\sqrt{3}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ حاصل عبارت $\tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند)

(۲) صفر

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۶ فرض کنید زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ کدام است؟

(۲) $\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3}$

(۱) $\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3}$

(۴) $-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3}$

(۳) $\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ حاصل عبارت $\tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند).

(۲) $\cos^2(15^\circ)$

(۱) $\sin^2(15^\circ)$

(۴) $-\cos^2(15^\circ)$

(۳) $-\sin^2(15^\circ)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ (1) Homework

گزینه ۴

۱

$$\frac{3 \cos(248^\circ) - 2 \sin(158^\circ)}{\sin(202^\circ) - \cos(292^\circ)} = \frac{3 \cos(270^\circ - 22^\circ) - 2 \sin(180^\circ - 22^\circ)}{\sin(180^\circ + 22^\circ) - \cos(270^\circ + 22^\circ)}$$

$$= \frac{-3 \sin 22^\circ - 2 \sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ - \sin 22^\circ} = \frac{5}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۴

۲

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{1/5}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{4}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۳

۳

$$\tan x + \cot x = -3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \left(2 \times \left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\frac{3\pi}{4} < x < \pi} \sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\tan x + \cot x = ۴ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = ۴ \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{۴}$$

$$\frac{\pi}{۲} < x < \pi \xrightarrow{+۴} \frac{\pi}{۴} < x < \frac{3\pi}{۴} \Rightarrow \sin x < \cos x < 0 \Rightarrow \sin x - \cos x < 0$$

$$(\sin x - \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲ \sin x \cos x$$

$$= 1 - ۲ \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = -\sqrt{1 - ۲ \sin x \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\sin^۲ x + \cos^۲ x + \sin x \cos x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{۲}}\left(1 + \frac{1}{۴}\right) = -\frac{۵}{۴\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^۳ x - \cos^۳ x} = -\frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\tan(۳۰۰) \cos(۲۱۰) + \tan(۲۸۰) \sin(۸۴۰)$$

$$= \tan(۳۶۰ - ۶۰) \cos(۱۸۰ + ۳۰) + \tan(۳۶۰ + ۱۲۰) \sin(۷۲۰ + ۱۲۰)$$

$$= \tan(-۶۰) \cos(۱۸۰ + ۳۰) + \tan(۱۸۰ - ۶۰) \sin(۱۸۰ - ۶۰)$$

$$= (-\tan(۶۰))(-\cos(۳۰)) + (-\tan(۶۰)) \sin(۶۰)$$

$$= (-\sqrt{۳})\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + (-\sqrt{۳})\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$ و α در ناحیه چهارم است:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{2 - \sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} \tan(285^\circ) &= \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot(15^\circ) \\ \tan(-165^\circ) &= -\tan(165^\circ) = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan(15^\circ) \\ \sin(1095^\circ) &= \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ \\ \cos(255^\circ) &= \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin(15^\circ) \\ \tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) &= -\cot(15^\circ) \tan(15^\circ) + \sin^2(15^\circ) \\ &= -1 + \sin^2(15^\circ) = -\cos^2(15^\circ) \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Homework (2)

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} \times \cos \frac{\pi}{\lambda}$$

۱

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda}$$

۲

$$\tan(-140^\circ)$$

۳

$$\cos 15^\circ$$

۴

۵ مقدار عددی $A = 2 \sin(-12^\circ) + 3 \tan \frac{11\pi}{6}$ را بیابید.

۶ حاصل عبارت $\frac{\sin 300^\circ + \cos 210^\circ}{\tan 45^\circ - \cot 135^\circ}$ را به دست آورید.

۷ حاصل عبارت $2 \sin(630^\circ) + 3 \tan(-540^\circ)$ کدام است؟

۱ (۲)

۲ (۱)

۳ (-۵)

۴ (-۲)

۸ حاصل $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{6}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12}$ کدام است؟

۱ (۲) $\frac{20}{9}$

۲ (۱) $\frac{19}{9}$

۳ (۴) $\frac{22}{9}$

۴ (۳) $\frac{17}{9}$

۹ اگر $\tan \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

۱ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲ (۱) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

۳ (۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۴ (۳) $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

۱۰ اگر α در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $-\frac{3}{2}$

۱۱ اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ باشد و $\sin x = \frac{2m-1}{2}$ ، آنگاه حدود m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} < m \leq 1$
(۲) $1 < m \leq 2$
(۳) $\frac{1}{2} < m \leq \frac{5}{2}$
(۴) $1 < m \leq \frac{3}{2}$

۱۲ حاصل $A = \cos \frac{3\pi}{17} + \cos \frac{7\pi}{17} + \cos \frac{10\pi}{17} + \cos \frac{14\pi}{17}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -1
(۳) 1
(۴) $\frac{1}{2}$

۱۳ اگر $\tan \theta = 0/25$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\cos(\pi - \theta) - \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}$ کدام است؟

- (۱) $0/315$
(۲) $-0/375$
(۳) $-0/625$
(۴) $0/625$

۱۴ در معادله $2 = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{3\pi}{2} - x) - 2 \cos(\frac{3\pi}{2} + x)}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$
(۲) $-\frac{2}{5}$
(۳) $-\frac{3}{5}$
(۴) $-\frac{5}{3}$

۱۵ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{5\pi}{4})}{2\sqrt{2} \sin(\frac{-3\pi}{4}) + \tan(\frac{-3\pi}{4})}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $-\sqrt{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

۱۶ حاصل $\sin 330^\circ \times \tan 300^\circ + \cos 150^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) صفر

۱۷ حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$
(۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۱۸ حاصل عبارت $\cot \frac{7\pi}{4} - \sin 570^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۹ حاصل $\cot(\frac{9\pi}{4}) + \tan^2 \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
(۳) ۴ (۴) $2\sqrt{3}$

۲۰ حاصل $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \frac{2}{9} \sin(\frac{3\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$
(۳) $\frac{12}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۲۱ اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi - \theta) - \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}$ کدام است؟

- (۱) $0/3$ (۲) $0/4$
(۳) $0/5$ (۴) $0/6$

۲۲ حاصل $\frac{\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} - \cos^2 \frac{5\pi}{6}}{\sqrt{2} \sin(\frac{-3\pi}{4}) + \tan^2(\frac{-4\pi}{3})}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۲۳ حاصل عبارت $\tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(140^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر
(۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ (2) Homework

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} = \cos \frac{3\pi}{\lambda} \text{ دو زاویه متمم یکدیگرند، در نتیجه: } \frac{3\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda}$$

۲

$$\cos^2 \frac{3\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} = 1$$

$$\tan(-140^\circ) = -\tan(90^\circ - 50^\circ) = \tan 50^\circ = \sqrt{3}$$

۳

$$\begin{aligned} \cos(45^\circ - 30^\circ) &= \cos 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

۴

$$A = -2 \sin 120^\circ + \sqrt{3} \tan \frac{11\pi}{6}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3}$$

۵

$$\sin 300^\circ = \sin(2\pi - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(\pi + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 135^\circ = \cot(\pi - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\frac{\sin 300^\circ + \cos 210^\circ}{\tan 45^\circ - \cot 135^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})}{1 - (-1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۳

$$\sin 630^\circ = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\tan 540^\circ = \tan(2\pi + \pi) = \tan \pi = 0$$

$$\text{حاصل عبارت} = 2 \sin(630^\circ) - 3 \tan(540^\circ) = 2(-1) - 3(0) = -2$$

گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} = 1$$

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1)^2 - (\frac{1}{2})^2} + 1 = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + 1$$

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{5}{3} + 1 = \frac{19}{3}$$

گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha = -2 < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow -2 = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

گزینه ۲

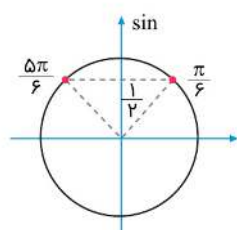
۱۰

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{5}{1} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{1}{1} \xrightarrow[\cot \alpha > 0]{\alpha \text{ ناحیه سوم}} \cot \alpha = \frac{1}{1}$$

گزینه ۴

۱۱



$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3 \Rightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}$$

گزینه ۱

۱۲

می‌دانیم:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \pi \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{3\pi}{17} + \frac{14\pi}{17} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{17} + \cos \frac{14\pi}{17} = 0 \\ \frac{7\pi}{17} + \frac{10\pi}{17} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{17} + \cos \frac{10\pi}{17} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

گزینه ۳

۱۳

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{-\cos \theta - \cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{-2 \cos \theta} = -\frac{1}{2} \tan \theta - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} (0/25) - \frac{1}{2} = -0/625$$

گزینه ۳

۱۴

$$\frac{\cos x + \sin x}{-\cos x - 2 \sin x} = 2 \Rightarrow -2 \cos x - 4 \sin x = \cos x + \sin x$$

$$-5 \sin x = 3 \cos x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5} \cos x$$

$$\tan x = -\frac{3}{5}$$

گزینه ۴

۱۵

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-\frac{3\pi}{4}) = -\tan \frac{3\pi}{4} = -\tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = +\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{2}}{2\sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2}) + 1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴

۱۶

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{حاصل عبارت} = (-\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) + (\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

گزینه ۱

۱۷

گام اول

باتوجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan 15^\circ$ داده شده است، سعی می‌کنیم تمام زوایا را برحسب زاویه 15° به دست آوریم.

گام دوم

$$A = \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos(\frac{3\pi}{4} + 15^\circ) - \sin(\frac{3\pi}{4} - 15^\circ)}{\sin(\pi - 15^\circ) - \sin(\frac{\pi}{4} + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

برای اینکه در کسر داده شده $\tan 15^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$A = \frac{\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-0/28} = -\frac{128}{28} = -\frac{16}{7}$$

گزینه ۲

۱۸

$$\sin(570^\circ) = \sin(360^\circ + 210^\circ) = \sin 210^\circ = \sin(\pi + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot \frac{7\pi}{8} = \cot(\frac{4\pi - \pi}{8}) = \cot(2\pi - \frac{\pi}{8}) = -\cot \frac{\pi}{8} = -1$$

$$\sin 570^\circ - \cot \frac{7\pi}{8} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳

۱۹

$$\cot(\frac{9\pi}{8}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{8}) = \cot \frac{\pi}{8} = 1$$

$$\tan \frac{10\pi}{3} = \tan(\frac{9\pi + \pi}{3}) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{حاصل عبارت} = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

گزینه ۴

۲۰

$$\frac{2}{9}(-1) + \frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1)^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{-2}{9} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-2}{9} + \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{-2}{9} + \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

گزینه ۲

۲۱

$$\begin{aligned}\text{حاصل عبارت} &= \frac{-\cos \theta + \sin \theta}{-\cos \theta - \cos \theta} = \frac{-\cos \theta + \sin \theta}{-2 \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (0/2) = 0/2 - 0/1 = 0/2\end{aligned}$$

گزینه ۱

۲۲

$$\begin{aligned}\sin \frac{3\pi}{4} &= \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{5\pi}{6} &= \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(-\frac{3\pi}{4}) &= -\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan(-\frac{5\pi}{6}) &= -\tan \frac{5\pi}{6} = -\tan(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{حاصل} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + (-\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{-1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{8}\end{aligned}$$

گزینه ۲

۲۳

$$\begin{aligned}&\tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(140^\circ) \\ &= \tan(360^\circ - 60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(360^\circ + 120^\circ) \sin(180^\circ - 40^\circ) \\ &= \tan(-60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ) \sin(180^\circ - 40^\circ) \\ &= (-\tan(60^\circ))(-\cos(30^\circ)) + (-\tan(60^\circ)) \sin(40^\circ) \\ &= (-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0\end{aligned}$$

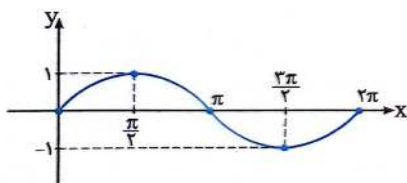
(صفحه ۸۸ تا ۹۴ کتاب درسی)

BOX 3: توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوسی با ضابطه $y = \sin x$ و تابع کسینوسی با ضابطه $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی اند که در این BOX با آن‌ها آشنا می‌شوید. همچنین برخی دیگر از نمودار توابع مثلثاتی که به کمک انتقال، قرینه و ... از این دو تابع به دست می‌آیند را رسم می‌کنیم.

الف) رسم تابع سینوس

• نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است:



• با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:

(۱) در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، مقدار تابع از صفر به ۱ افزایش می‌یابد.

(۲) در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ، مقدار تابع از ۱ به -۱ کاهش می‌یابد.

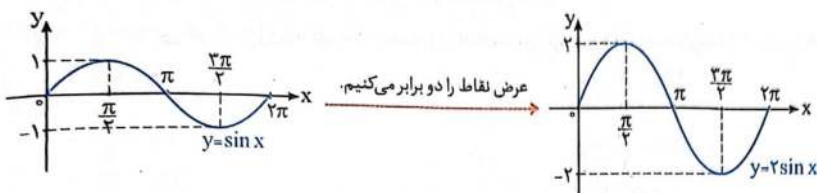
(۳) در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ، مقدار تابع از -۱ به صفر افزایش می‌یابد.

• تغییرات مقدار $\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

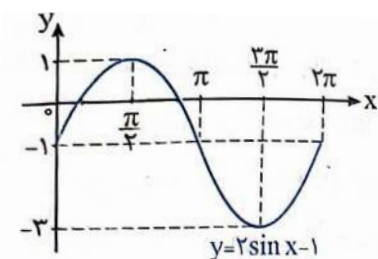
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
تغییرات		افزایش	کاهش	کاهش	افزایش

تمرین: نمودار تابع $y = 2 \sin x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y = 2 \sin x - 1$ ، ابتدا در نمودار $y = \sin x$ ، عرض هر نقطه را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y = 2 \sin x$ به دست آید:

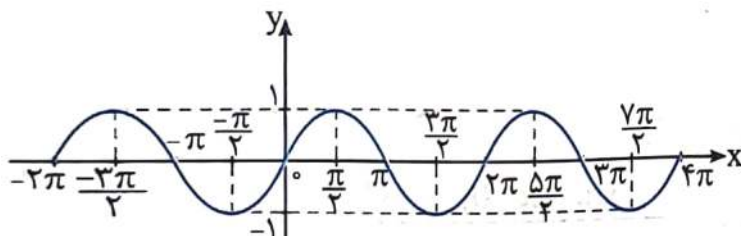


نمودار $y = 2 \sin x$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = 2 \sin x - 1$ به دست آید:



• با توجه به تساوی $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ، مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند. پس نمودار تابع

$y = \sin x$ در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ و ... یکسان است. همچنین با توجه به تساوی $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ ، مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییر نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[-4\pi, -2\pi]$ و ... یکسان است. پس نمودار $y = \sin x$ در بازه‌های $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، یکسان است. نمودار تابع در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به صورت زیر است:



• با توجه به نمودار کلی $y = \sin x$ ، می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

(۱) دامنه تابع $f(x) = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه $[-1, 1]$ می‌باشد:

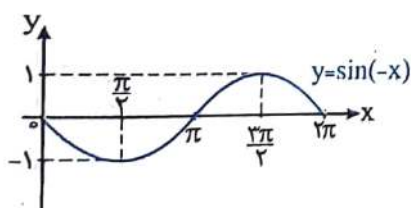
(۲) حداکثر مقدار تابع $y = \sin x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های $\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول‌های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

(۳) حداقل مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -۱ است و در نقاطی به طول‌های $\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در

حالت کلی، تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول‌های $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

(۴) مقدار تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ برابر صفر است، بنابراین طول نقاط تلاقی نمودار این تابع با محور x ها از تساوی $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

نکته: می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. بنابراین نمودار $g(x) = -\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است:

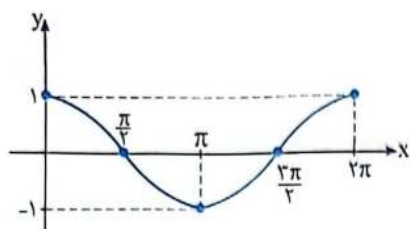


• با مقایسه نمودار $f(x) = \sin x$ و $g(x) = -\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، هر نقطه ماکزیمم در f ، نقطه مینیمم در g می‌شود و همچنین هر نقطه مینیمم در f ، نقطه ماکزیمم در g می‌شود. همچنین با مقایسه دو نمودار مشخص می‌شود که:

(۱) تابع $f(x) = \sin x$ در سمت راست محور y ها ابتدا دارای ماکزیمم و سپس مینیمم است.

(۲) تابع $g(x) = -\sin x$ در سمت راست محور y ها ابتدا دارای مینیمم و سپس ماکزیمم است.

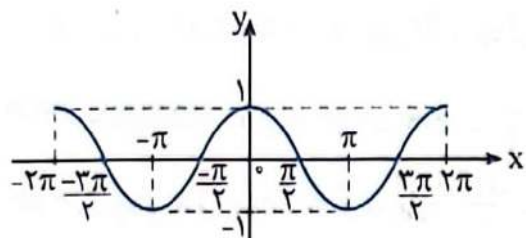
ب) رسم تابع کسینوس



- نمودار تابع $y = \cos x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ ، به صورت مقابل است:
- با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ نکات زیر را می‌توان نوشت:
 - (۱) در بازه $[0, \pi]$ مقدار تابع از ۱ به -۱ کاهش می‌یابد.
 - (۲) در بازه $[\pi, 2\pi]$ مقدار تابع از -۱ به ۱ افزایش می‌یابد.
- تغییرات مقدار $\cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	۱	۰	-۱	۰	۱
تغییرات		↘	↘	↗	↗
		کاهش	کاهش	افزایش	افزایش

- با توجه به نمودار کلی $y = \cos x$ ، نکات زیر را می‌توان در نظر گرفت:



(۱) دامنه تابع $y = \cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه $[-1, 1]$ می‌باشد:

تعریف: کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = -3 \cos x + 5$ را به دست آورید.

پاسخ: از نامساوی $-1 \leq \cos x \leq 1$ و خواص نامساوی‌ها، حدود $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \leq -3 \cos x \leq 3 \xrightarrow{+5} 2 \leq -3 \cos x + 5 \leq 8 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 8$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f برابر ۲ و بیشترین مقدار تابع برابر ۸ می‌باشد.

(۲) حداکثر مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی تابع $y = \cos x$ در نقاطی به طول‌های $x = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

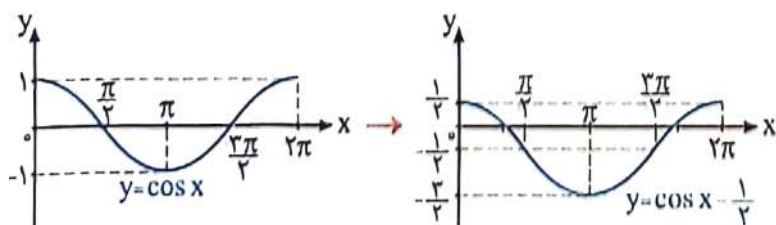
(۳) حداقل مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است و در نقاطی به طول‌های $x = 2k\pi + \pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، کمترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

(۴) مقدار تابع $y = \cos x$ در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر صفر است. در واقع طول نقاط تلاقی نمودار $y = \cos x$ با

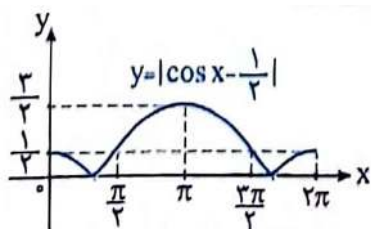
محور xها از تساوی $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

تمرین: نمودار تابع $y = |\cos x - \frac{1}{4}|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را با انتقال نمودار تابع $y = \cos x$ به اندازه $\frac{1}{4}$ واحد به سمت پایین رسم می‌کنیم:



قسمتی از نمودار تابع $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را که پایین محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار به دست آمده نمودار تابع $y = |\cos x - \frac{1}{4}|$ می‌باشد:



نکته: (۱) همانند توابع سینوسی با قرینه کردن نمودار توابع کسینوسی نسبت به محور x ها، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم دو تابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = -\cos x$ جابه‌جا می‌شوند.

(۲) نمودار تابع $y = \cos x$ را به کمک انتقال نمودار $y = \sin x$ می‌توان رسم کرد. با توجه به تساوی $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ، اگر نمودار

$y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \cos x$ به دست می‌آید و هم‌چنین می‌توان نمودار $y = \sin x$ را به کمک انتقال نمودار $y = \cos x$ رسم کرد.

پرسش‌های تشریحی:

• با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های سوالات زیر درست و کدام نادرست می‌باشند. (مشابه تمرین ۴ صفحه ۹۴ کتاب درسی)

۱- دامنه تابع $y = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه $[-1, 1]$ می‌باشد.

۲- تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، محور x ها را قطع می‌کند.

۳- نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ در یک نقطه دارای کم‌ترین مقدار و در یک نقطه دارای بیشترین مقدار است.

۴- نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 0]$ در نقطه‌ای به طول $x = -\pi$ ، کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند.

۵- برای رسم نمودار $y = \sin(-x)$ ، کافی است نمودار $y = \sin x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

۶- نمودار تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ دارای بیشترین مقدار است.

۷- کم‌ترین مقدار تابع $y = 3\cos x - 2$ برابر یک است.

۸- نمودار تابع $y = 4\sin x + 1$ ، از نقطه $(\frac{\pi}{6}, 3)$ می‌گذرد.

• در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۹- حداکثر مقدار تابع کسینوس برابر است.

(شهریور ۱۴۰۲)

۱۰- حداکثر مقدار تابع $f(x) = \cos x$ برابر با است که در نقاط به طول حاصل می‌شود.

(فرورداد ۱۴۰۲)

۱۱- نمودار تابع زیر را با توجه به نمودار $y = \sin x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)

$$y = \sin x + 1, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

۱۲- نمودار تابع زیر را با توجه به نمودار $y = \cos x$ در صفحه مختصات رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)

$$y = \cos(x) - 1, \quad x \in [0, 2\pi]$$

۱۳- نمودار تابع $y = -\sin x + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکزیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.

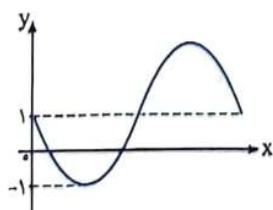
(فرورداد ۱۴۰۲)

۱۴- نمودار تابع $y = 2 \sin x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۱۵- بیشترین و کمترین مقدار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 4 \cos(x + \frac{\pi}{6}) - 1$ ب) $y = |\cos x| + 2$

۱۶- نمودار تابع $y = a \sin x + b$ به صورت مقابل است. مقادیر a و b را به دست آورید.



۱۷- نمودار تابع $f(x) = a \cos(x + \frac{\pi}{6}) + b$ از نقطه‌های $(-\frac{\pi}{6}, 2)$ و $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ می‌گذرد. مقادیر a و b را به دست آورید.

Homework

۱ اگر $\frac{5\pi}{12} < x < -\frac{\pi}{12}$ و $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۱) $(-1, 5]$ (۲) $(-1, 5]$

(۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-1, 1]$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = -\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \quad x \in \left[-\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$$

۳ نمودار $y = 1 - 2 \sin x$ را در $[0, 2\pi]$ رسم نمایید.

۴ هریک از نمودارهای زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

ب

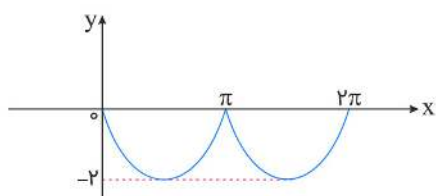
$$y = 1 - \cos x$$

۵ برد تابع $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ کدام است؟

(۱) $[-4, -2]$ (۲) $[2, 4]$

(۳) $[-2, 4]$ (۴) $[-4, 2]$

۶ کدام ضابطه تابع، مربوط به نمودار زیر است؟



(۱) $y = -2 \sin x$

(۲) $y = -\sin x$

(۳) $y = |2 \sin x|$

(۴) $y = -|2 \sin x|$

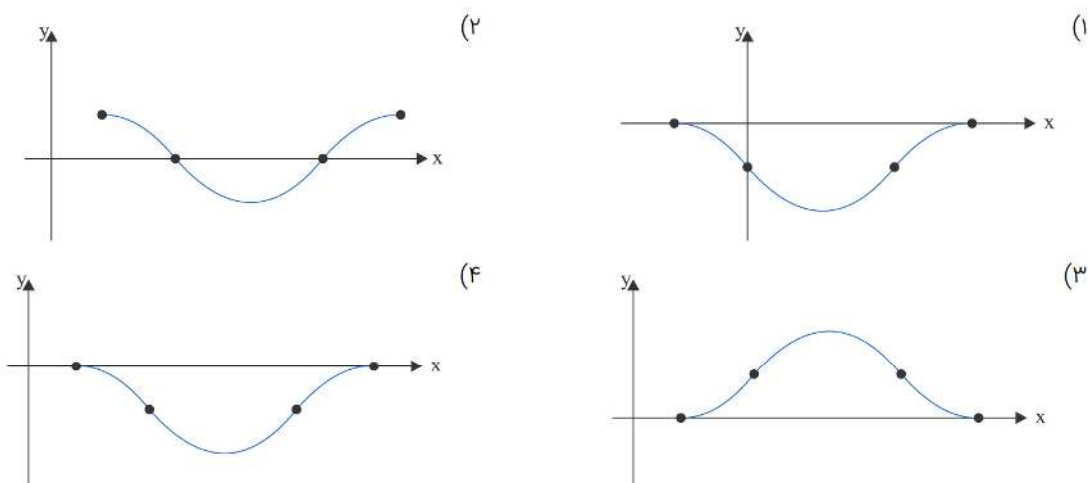
۷ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $[\sin x] + [\cos x]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) -۲
(۴) -۱

۸ بُرد تابع $y = 2 \sin(\frac{3\pi}{2} + x) + 1$ از چند عدد صحیح تشکیل شده است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۹ قطعه‌ای از نمودار $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$ کدام است؟



۱۰ در عبارت "حداقل مقدار تابع سینوس در نقاط به طول و حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقاط به طول (که $k \in \mathbb{Z}$) به دست می‌آید" جاهای خالی به ترتیب به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi$ و $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
(۲) $2k\pi$ و $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$
(۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $2k\pi$
(۴) $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ و $2k\pi$

۱۱ نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۱

۱۲ بُرد تابع $y = 2 \sin x + 1$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$
(۲) $[-1, 3]$
(۳) $[-3, 1]$
(۴) $[-1, 2]$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

۱۳ مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{11\pi}{12}$ است.

۱۴ انتهای زاویه ۳ رادیان در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

۱۵ اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچکتر از اندازه هریک از دو ساقهای آن است.

۱۶ کمترین مقدار $\sin x$ برابر -۱ است که از $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

۱۷ باتوجه به نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، نمودار $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ را رسم کنید.

۱۸ نمودار تابع زیر را رسم کنید. (در $[0, 2\pi]$)

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$$

۱۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف دامنه $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر و برد آنها برابر است.

ب وقتی می‌نویسیم $\sin x$ ، x برحسب است.

پ اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه $\cos x$ بین است.

۲۰ برد تابع $f(x) = \frac{2}{\sin(x + \pi) + 2}$ کدام است؟

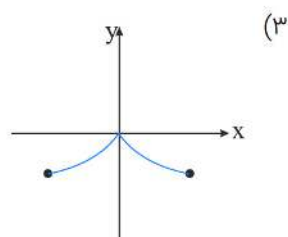
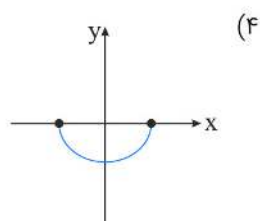
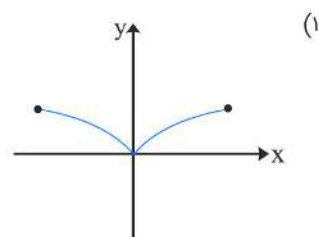
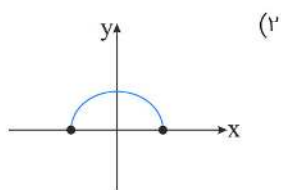
(۲) $[1, 2]$

(۱) $[\frac{1}{3}, 1]$

(۴) $[\frac{2}{3}, 2]$

(۳) $[\frac{2}{3}, 1]$

۲۱ نمودار تابع $f(x) = -\sin|x|$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ به کدام صورت است؟



۲۲ برد تابع $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ کدام است؟

- (۱) $[1, 2]$ (۲) $[-1, 0]$
(۳) $[-1, 1]$ (۴) $[-3, 1]$

۲۳ اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $[\sin x] - [\cos x]$ کدام است؟

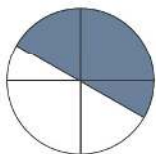
- (۱) -1 (۲) 2
(۳) 1 (۴) -2

۲۴ برد تابع $f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 1]$ (۲) $[-1, 3]$
(۳) $[0, 3]$ (۴) $[0, 1]$

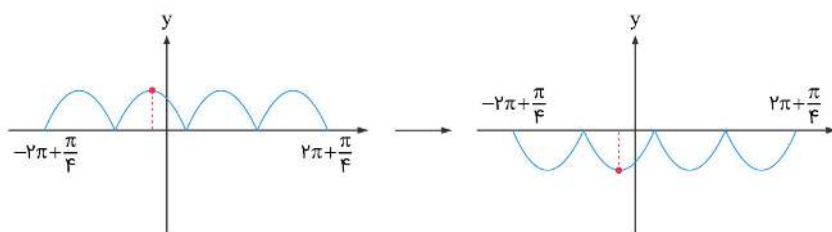
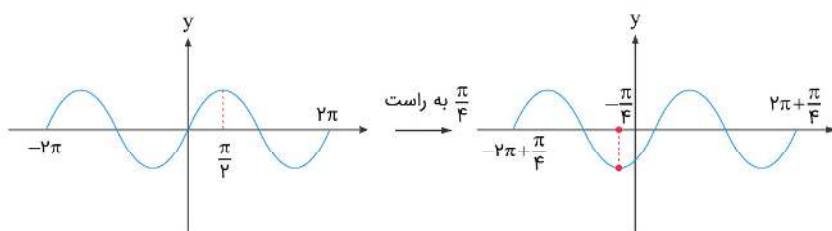
$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{1}{2}$ و حداکثر آن ۱ است.

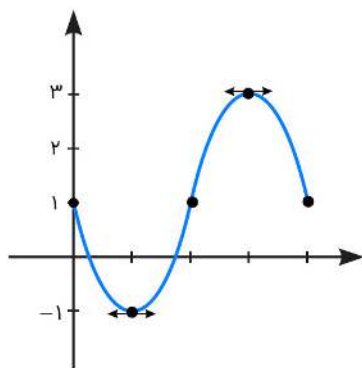


$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

نمودار $\sin x$ ، $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست انتقال می‌یابد.



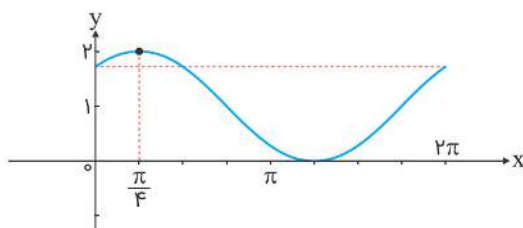
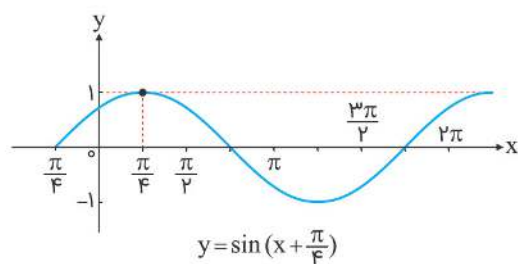
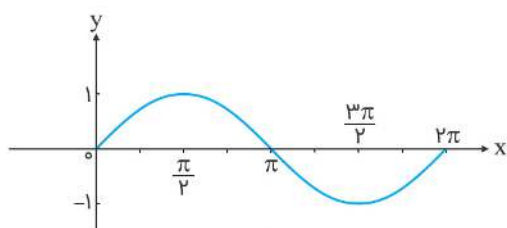
برد $R = [-1, 0]$



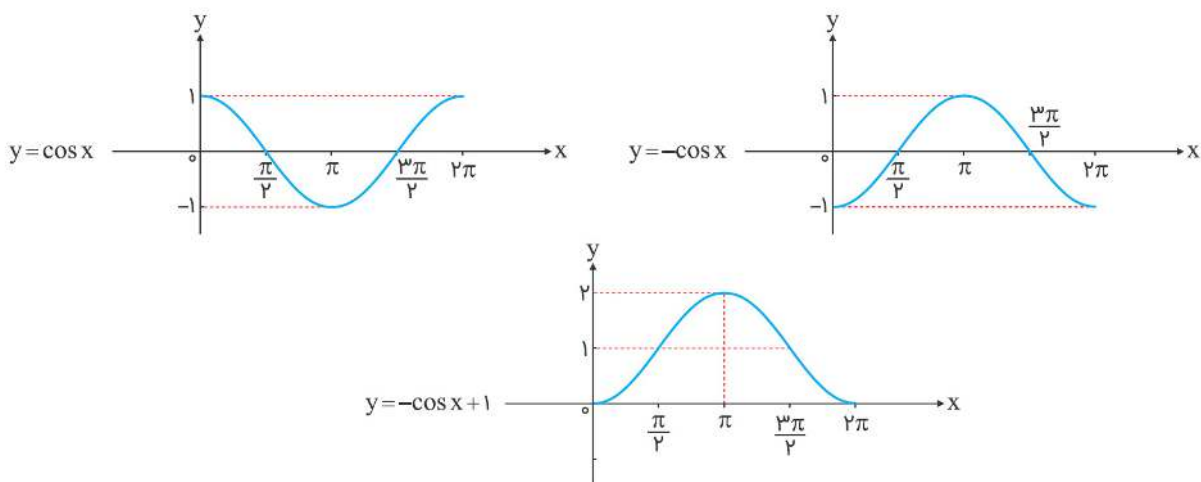
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	-1	1	3	1

۴ الف

ابتدا نمودار $\sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ روی محور x به سمت چپ، سپس به اندازه یک واحد روی محور y به سمت بالا می‌بریم.



ب ابتدا نمودار $\cos x$ را نسبت به محور x قرینه کرده سپس یک واحد روی محور y بالا می‌بریم.



گزینه ۴

۵

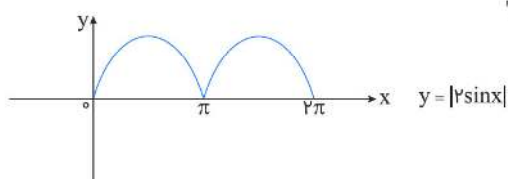
$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 3 \Rightarrow -4 \leq \underbrace{3 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1}_{f(x)} \leq 2$$

$$\Rightarrow R_f = [-4, 2]$$

گزینه ۴

۶

وقتی در (۱-) ضرب شود، نسبت به محور x ها قرینه می‌شود و گزینه "۴" صحیح است.



گزینه ۴

۷

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow 0 < \sin x < 1 \Rightarrow [\sin x] = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow -1 < \cos x < 0 \Rightarrow [\cos x] = -1$$

$$\text{حاصل عبارت} = 0 + (-1) = -1$$

گزینه ۴

۸

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

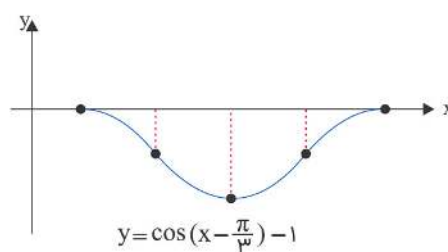
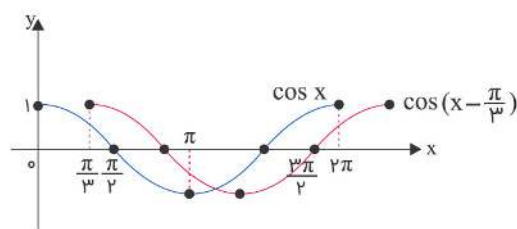
$$y = -2\cos x + 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\cos x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq -2\cos x + 1 \leq 3$$

$$R_f = [-1, 3]$$

گزینه ۴

۹



گزینه ۲

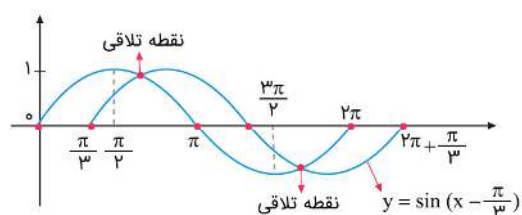
۱۰

گزینه "۲" صحیح است.

گزینه ۳

۱۱

در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.



گزینه ۲

۱۲

می‌دانیم:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$

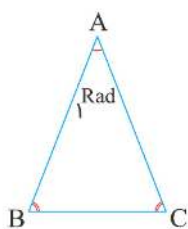
$$-1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3$$

۱۳ درست

$$\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

۱۴ نادرست، ۳ رادیان عددی کمتر از π هست، پس در ربع دوم قرار دارد.

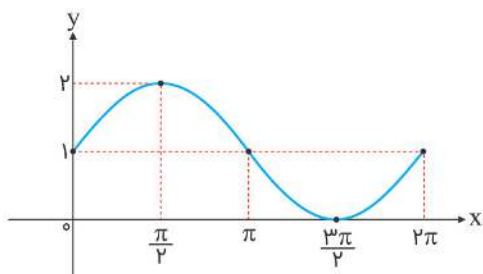
۱۵ درست، ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه است و چون جمع زوایای مثلث 180° و زوایای B و C باهم برابرند، اندازه زاویه A کمتر از B و C خواهد بود و ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر.



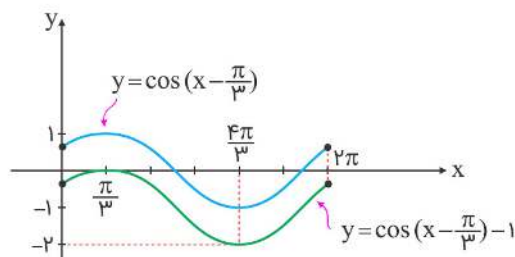
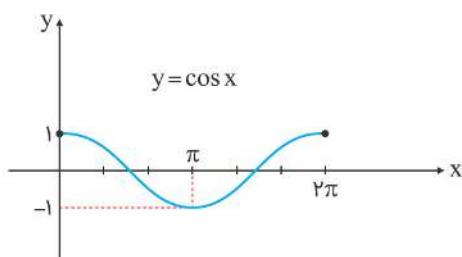
۱۶ نادرست، کمترین مقدار $\sin x$ برابر -۱ است که از $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ یا $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

۱۷ (I) نمودار $\cos(x)$ را $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت راست ببرید.

(II) یک واحد در راستای قائم بالا ببرید.



۱۸



الف ۱۹
[−۱, ۱], ℝ

ب رادیان

پ (۰, ۱)

گزینه ۴

۲۰

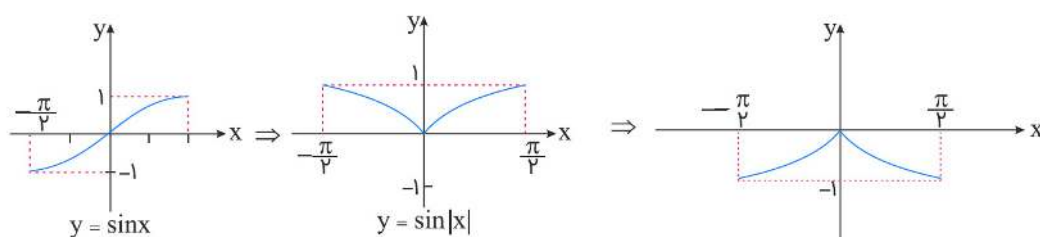
$$-1 \leq \sin(x + \pi) \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq \sin(x + \pi) + 2 \leq 3$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{1} \geq \frac{1}{\sin(x + \pi) + 2} \geq \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2 \geq \frac{2}{\sin(x + \pi) + 2} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow R_f = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

گزینه ۳

۲۱



گزینه ۳

۲۲

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\cos^2 x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2\cos^2 x - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

گزینه ۳

۲۳

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} -1 < \cos x < 0 \Rightarrow [\cos x] = -1 \\ 0 < \sin x < 1 \Rightarrow [\sin x] = 0 \end{cases} \Rightarrow [\sin x] - [\cos x] = 1$$

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x + 1 - 1 \Rightarrow f(x) = (\sin x + 1)^2 - 1$$

می‌دانیم: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq \underbrace{(\sin x + 1)^2 - 1}_{f(x)} \leq 3 \Rightarrow R_f = [-1, 3]$$

BOX 4: مثلثات (ویژه حسابان ۱) نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$۱) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$۲) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$۳) 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$۴) 1 \pm 2 \sin x \cos x = (\sin x \pm \cos x)^2$$

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$:

$$۱) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

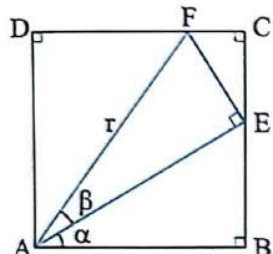
$$۲) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۳) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

اثبات:

در شکل روبه‌رو چهارضلعی ABCD یک مستطیل است و اندازه پاره خط AF برابر r (دلخواه) است.



$$\left. \begin{array}{l} \text{زاویه } E \text{ نیم‌صفحه است: } \widehat{FÊC} + 90^\circ + \widehat{AÊB} = 180^\circ \\ \Delta AEB: \text{مجموع زوایای داخلی } \alpha + 90^\circ + \widehat{AÊB} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FÊC} = \alpha \quad (۱)$$

$$\Delta AFD: \text{موازی } AB \text{ و } CD \Rightarrow \widehat{AÊD} = \alpha + \beta \quad (۲)$$

$$\sin(\widehat{AÊD}) = \frac{AD}{r} \Rightarrow AD = r \sin(\widehat{AÊD}) = r \sin(\alpha + \beta) \quad (۳)$$

در مثلث ΔADF :

$$\cos(\widehat{AÊD}) = \frac{FD}{r} \Rightarrow FD = r \cos(\widehat{AÊD}) = r \cos(\alpha + \beta) \quad (۴)$$

در مثلث ΔAEF :

$$\sin \beta = \frac{EF}{r} \Rightarrow EF = r \sin \beta \quad (۵)$$

$$\cos \beta = \frac{AE}{r} \Rightarrow AE = r \cos \beta \quad (۶)$$

در مثلث ΔFCE :

$$\sin(\widehat{FÊC}) = \frac{FC}{EF} \xrightarrow{(۱), (۵)} \sin \alpha = \frac{FC}{r \sin \beta} \Rightarrow FC = r \sin \alpha \sin \beta \quad (۷)$$

$$\cos(\widehat{FÊC}) = \frac{EC}{EF} \xrightarrow{(۱), (۵)} \cos \alpha = \frac{EC}{r \sin \beta} \Rightarrow EC = r \cos \alpha \sin \beta \quad (۸)$$

در مثلث $\triangle ABE$:

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AE} \xrightarrow{(۶)} \sin \alpha = \frac{BE}{r \cos \beta} \Rightarrow BE = r \sin \alpha \cos \beta \quad (۹)$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AE} \xrightarrow{(۶)} \cos \alpha = \frac{AB}{r \cos \beta} \Rightarrow AB = r \cos \alpha \cos \beta \quad (۱۰)$$

حال خواهیم داشت:

$$AD = BE + EC \xrightarrow{(۹),(۸),(۳)} r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$DF = AB - FC \xrightarrow{(۱۰),(۷),(۴)} r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

تعرین: با استفاده از روابط فوق نسبت‌های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin 75^\circ$ ب) $\cos 15^\circ$

پاسخ:

$$\text{الف) } \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ب) } \cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

حواسمون بود که 75° و 15° متمم یکدیگرند؛ پس $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$.

تعرین: در مثلثی رابطه $\cos A \cos B (\tan A + \tan B) = 1$ برقرار است، نوع مثلث چیست؟

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

پاسخ:

$$\cos A \cos B \left(\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} \right) = \sin(A+B) = 1 \Rightarrow A+B = \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه:

از آن جا که جمع زوایای داخلی مثلث 180° است، زاویه سوم 90° بوده و پس مثلث قائم‌الزاویه است.

تعرین: حاصل $\sin 50^\circ + \sqrt{3} \cos 50^\circ$ کدام است؟

$$\sqrt{3} \cos 20^\circ \quad (۴) \qquad 2 \cos 20^\circ \quad (۳) \qquad 2 \cos 10^\circ \quad (۲) \qquad 2 \cos 11^\circ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» - می‌دانیم که $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$:

$$\sin 50^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cos 50^\circ = \frac{\sin 50^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 50^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sin(50^\circ + 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = \frac{\sin 110^\circ}{\frac{1}{2}} = 2 \sin 110^\circ$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 20^\circ\right) = 2 \cos 20^\circ$$

تعرین: فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ، $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ ، انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار باشد. در این صورت

(تمرین کتاب درسی)

مطلوب است:

الف) $\sin(\alpha + \beta)$ ب) $\cos(\alpha - \beta)$ پ) $\alpha + \beta$ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد.

پاسخ:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\pm 3}{5} \xrightarrow[\sin > 0]{\text{ناحیه اول}} \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{-12}{13} \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow[\sin \beta > 0]{\beta \text{ ناحیه دوم}} \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-16}{65} \quad (\text{الف})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-33}{65} \quad (\text{ب})$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{-16}{65} < 0 \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس } \alpha + \beta \text{ در ناحیه سوم مثلثاتی واقع است.} \quad (\text{پ})$$

نکته: می‌دانیم که:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

با قراردادن α به جای β داریم:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

بنابراین روابط مثلثاتی 2α به صورت زیر خواهد بود:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

تعریف: حاصل عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

$$\text{الف) } 2 \cos 165^\circ \cos 105^\circ$$

$$\text{ب) } \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$$

$$\text{پ) } \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$\text{الف) } 2 \cos(180^\circ - 15^\circ) \cos(90^\circ + 15^\circ) = 2 \cos(\pi - 15^\circ) \cos\left(\frac{\pi}{2} + 15^\circ\right) = 2(-\cos 15^\circ) \times (-\sin 15^\circ)$$

پاسخ:

$$= 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } (\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}) (\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12}) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{2\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

عبارت خواسته‌شده را در $\sin 10^\circ$ ضرب و بر $\sin 10^\circ$ تقسیم می‌کنیم. از رابطه زیر استفاده می‌نماییم:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\frac{1}{8} \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\frac{1}{8} \sin(90^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cot 10^\circ$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \tan \beta}$$

نکته: با استفاده از روابط $\alpha + \beta$ داریم:

اثبات:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\xrightarrow{\text{با تقسیم صورت و مخرج بر } \cos \alpha \cos \beta} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \xrightarrow{\alpha = \beta} \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

نکته:

تمرین: حاصل $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$ را تعیین کنید.

پاسخ: می‌دانیم که $\tan 45^\circ = 1$ بنابراین:

$$\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Homework (1)

۱ حاصل عبارت $\frac{\sin^6 \alpha + 7 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^6 \alpha + 7 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

$\sin 2\alpha$ (۴)

$\cos 2\alpha$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $f(\alpha) = 7 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{7\pi}{9})$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

-1 (۴)

۱ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴ اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

$\frac{1056}{175}$ (۲)

$-\frac{96}{175}$ (۱)

$-\frac{1056}{175}$ (۴)

$\frac{96}{175}$ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ اندازه زاویه A در مثلث ABC ، 45° درجه بیشتر از اندازه زاویه B است. حاصل $2 \cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -2
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 3

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ اگر $f(x) = 32\cos^2(x)\cos^2(2x)\cos^2(4x)\cos^2(8x)\cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{6 + \sqrt{27}}{32}$ (۲) $\frac{6 + \sqrt{27}}{16}$
(۳) $\frac{6 - \sqrt{27}}{16}$ (۴) $\frac{6 - \sqrt{27}}{32}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ اگر $f(x) = 16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16}$ (۲) $\frac{6 - \sqrt{3}}{16}$
(۳) $\frac{6 + \sqrt{3}}{16}$ (۴) $\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ ساده‌شده عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ کدام است؟

- (۱) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۲) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
(۳) $2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۴) $2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$
(۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$
(۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

به جای $\sin^F \alpha$ و $\cos^F \alpha$ به ترتیب زیر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \cos^F \alpha)^F + F \cos^F \alpha}{1 + \cos^F \alpha} - \frac{(1 - \sin^F \alpha)^F + F \sin^F \alpha}{1 + \sin^F \alpha} \\ &= \frac{1 + \cos^F \alpha - 2 \cos^F \alpha + F \cos^F \alpha}{1 + \cos^F \alpha} - \frac{1 + \sin^F \alpha - 2 \sin^F \alpha + F \sin^F \alpha}{1 + \sin^F \alpha} \\ &= \frac{(1 + \cos^F \alpha)^F}{1 + \cos^F \alpha} - \frac{(1 + \sin^F \alpha)^F}{1 + \sin^F \alpha} = 1 + \cos^F \alpha - 1 - \sin^F \alpha = \cos^F \alpha \end{aligned}$$

البته دقت شود از روش عددگذاری می‌توانستیم به جای x ها عدد مثلاً $\frac{\pi}{F}$ را قرار دهیم و سریع‌تر به جواب برسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

از رابطه $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ استفاده می‌کنیم:

$$3 \cos Fx + \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 \cos Fx + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

حال به جای x مقدار $\frac{\pi}{12}$ می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} & 3 \cos(F \times \frac{\pi}{12}) + 2 \sin(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = 3 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

با استفاده از اتحادهایی که درستی آنها را می‌دانیم، می‌توان به اتحاد زیر رسید:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

اول از اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

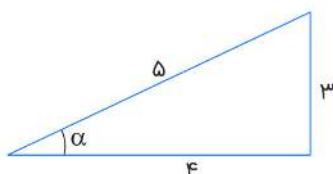
$$f(\alpha) = 3\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha = 6\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} f(\alpha) = 2 \left(\underbrace{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}_{\sin 3\alpha} \right) = 2\sin 3\alpha$$

پس:

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2\sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) = 2\sin\left(14\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰



$$\tan \alpha = \frac{3}{4}, \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{6}{5} + 1\right)}{\frac{16-9}{12}} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{11}{5}\right)}{\frac{7}{12}} = \frac{4(11)(24)}{5(5)(7)} = \frac{1056}{175}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ A = B + \frac{\pi}{2} &= B + \frac{\pi}{2}, A + B + C = \pi \\ 2 \cos A \sin B - \sin C &= \sin(B + A) + \sin(B - A) - \sin C \\ &= \sin(\pi - C) + \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \sin C \\ &= \sin C - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin C = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \frac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{5} \\ \Rightarrow 1 + \sin 2x &= \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \\ \sin 2x &= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \\ \Rightarrow 4 + 4 \tan^2 x &= 10 \tan x \Rightarrow 4(1 + \tan^2 x) = 10 \tan x \\ \Rightarrow 1 + \tan^2 x &= \frac{5}{2} \tan x \xrightarrow{\times 2} 2 \tan^2 - 5 \tan x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=9} \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

طرفین تابع را در $\sin^2 x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \sin^2 x &= 32 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 (2x) \cos^2 (4x) \cos^2 (8x) \cos^2 (16x) \\ &= 16 \sin^2 (2x) \cos^2 (2x) \cos^2 (4x) \cos^2 (8x) \cos^2 (16x) \\ &= 2 \sin^2 (4x) \cos^2 (4x) \cos^2 (8x) \cos^2 (16x) \\ &= \frac{1}{32} \sin^2 (32x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2 (32x)}{32 \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{16}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{32\pi}{16}}{32 \sin^2 \frac{\pi}{16}} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)}{32 \sin^2 \left(\frac{\pi}{16}\right)} \\ \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{16}\right) &= \frac{\frac{3}{4}}{32 \times \frac{1 - \cos \frac{\pi}{8}}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{8(2 - \sqrt{3})} = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

طرفین رابطه را در $\sin^2 3x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \sin^2 3x &= 16 \sin^2 3x \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x \\ \Rightarrow f(x) \sin^2 3x &= 8 \sin^2 6x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x \\ &= \sin^2 12x \cos^2 12x \cos^2 24x \\ &= \frac{1}{8} \sin^2 24x \cos^2 24x = \frac{1}{16} \sin^2 48x \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\sin^2 48x}{16 \sin^2 3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{36}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{48\pi}{36}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} \\ &= \frac{3}{64 \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{16} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۳

۹

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{r \sin \frac{\theta}{r} \cos \frac{\theta}{r}}{r \sin^2 \frac{\theta}{r}} + \frac{r \cos^2 \frac{\theta}{r}}{r \sin \frac{\theta}{r} \cos \frac{\theta}{r}} = \cot \frac{\theta}{r} + \cot \frac{\theta}{r} = r \cot \frac{\theta}{r}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۱

۱۰

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\frac{13\pi}{8} + \alpha\right) = \sin\left(3\pi + \left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \\ &= -\left(\sin \frac{\pi}{8} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{8} \sin \alpha\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) \end{aligned}$$

همچنین $\tan \alpha = \frac{1}{y}$ و از طرفی می‌دانیم $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ پس:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha < 90^\circ} \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \\ \xrightarrow{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1} \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \end{aligned}$$

پس A برابر است با:

$$A = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}\right) = -\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}\right) = -\frac{y+1}{\sqrt{y^2 + 1}} = -\frac{4}{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

گزینه ۳

۱۱

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{10} \xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{انتهای کمان } \alpha \text{ در ربع دوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{2}{100}} = -\frac{\sqrt{98}}{10} \\ \cos\left(\frac{11\pi}{8} + \alpha\right) &= \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{8} + \alpha\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{8} \cos \alpha - \sin \frac{3\pi}{8} \sin \alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{98}}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \\ &= \frac{\sqrt{196}}{20} - \frac{2}{20} = \frac{14 - 2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

نکته:

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \beta$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\sin^3 \frac{\gamma}{\omega} \cos \frac{\gamma}{\omega} - \cos^3 \frac{\gamma}{\omega} \sin \frac{\gamma}{\omega}$$

۱

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cos 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$$

۲

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} \times \cos \frac{\pi}{\lambda}$$

۳

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda}$$

۴

$$\tan(-140^\circ)$$

۵

$$\cos 15^\circ$$

۶

با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه را نشان دهید.

۷

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

مقدار عددی $\sin 105^\circ$ را بیابید.

۸

اگر $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل عبارت $2 \tan(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \alpha) + 3 \cot(\frac{3\pi}{\sqrt{2}} - \alpha)$ کدام است؟

۹

$$-\frac{5}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\frac{7}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$-\frac{11}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

اگر $\tan(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ باشد، حاصل کسر $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ چقدر است؟

۱۰

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

۱۱ اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، حاصل $\sin(\alpha - \beta)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{65}$ (۲) $-\frac{33}{65}$
(۳) $-\frac{63}{65}$ (۴) $-\frac{48}{65}$

۱۲ اگر $\frac{1}{2} \cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}$ باشد، x کدام مقدار می‌تواند باشد؟ (x در ناحیه اول مثلثاتی است)

- (۱) $\frac{\pi}{15}$ (۲) $\frac{\pi}{5}$
(۳) $\frac{\pi}{20}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۳ حاصل عبارت $\frac{\cos 2\alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۱۴ حاصل $\frac{1}{\sin 75^\circ} + \frac{1}{\cos 75^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۵ حاصل عبارت $\frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} + \sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x$ کدام است؟

- (۱) $\sin x + \cos x$ (۲) $\sin x - \cos x$
(۳) $\cos x$ (۴) $\sin x$

۱۶ حاصل عبارت $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

۱۷ حاصل $\sin 36^\circ \times \cos 36^\circ \times \cos 72^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4} \sin 36^\circ$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 36^\circ$
(۳) $\frac{1}{4} \cos 36^\circ$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 36^\circ$

پاسخ (2) Homework

$$\begin{aligned}\sin^{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{\circ} \cos \sqrt{2}^{\circ} - \cos^{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{\circ} \sin \sqrt{2}^{\circ} &= \sin \sqrt{2}^{\circ} \cos \sqrt{2}^{\circ} (\sin^{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{\circ} - \cos^{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{\circ}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 1\sqrt{2}^{\circ} (\cos 1\sqrt{2}^{\circ}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2}^{\circ} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

۱

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 1\sqrt{2}^{\circ} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin 1\sqrt{2}^{\circ} &= \sin 2\sqrt{2}^{\circ} \cos 1\sqrt{2}^{\circ} + \cos 2\sqrt{2}^{\circ} \sin 1\sqrt{2}^{\circ} \\ &= \sin(2\sqrt{2} + 1\sqrt{2}) \\ &= \sin 3\sqrt{2}^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

۲

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} \text{ دو زاویه متمم یکدیگرند، در نتیجه: } \frac{3\pi}{4} \text{ و } \frac{\pi}{4}$$

۴

$$\cos^{\sqrt{2}} \frac{3\pi}{4} + \sin^{\sqrt{2}} \frac{3\pi}{4} = 1$$

$$\tan(-180^{\circ}) = -\tan(90^{\circ} - 90^{\circ}) = \tan 90^{\circ} = \sqrt{2}$$

۵

$$\begin{aligned}\cos(45^{\circ} - 30^{\circ}) &= \cos 45^{\circ} \times \cos 30^{\circ} - \sin 45^{\circ} \times \sin 30^{\circ} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

۶

۷

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x) = \cos x(\cos x) - \sin x(\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

۸

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

گزینه ۲

۹

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \alpha = 2$$

$$\begin{aligned}\text{عبارت} &= 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 3 \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -2 \cot \alpha + 3 \tan \alpha \\ &= -2(2) + 3\left(\frac{1}{2}\right) = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

گزینه ۱

۱۰

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

گزینه ۳

۱۱

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} \\ &= \frac{-48 - 15}{65} = -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

گزینه ۱

۱۲

بنا به اتحاد مثلثاتی: $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$

$$\Rightarrow \cos(3x + 2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 5x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 5x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{15}$$

گزینه ۴

۱۳

یادآوری:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{2}{\sin 2\alpha}} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{12}} \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

گزینه ۲

۱۴

یادآوری:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$\frac{\cos 75^\circ + \sin 75^\circ}{\sin 75^\circ \times \cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(75^\circ + 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 150^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \sin 120^\circ}{\sin 150^\circ}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{6}$$

گزینه ۳

۱۵

یادآوری:

$$\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b)$$

$$\text{عبارت} = \sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}$$

$$\text{عبارت} = \sin(2x - x) + \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$\text{عبارت} = \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$$

گزینه ۲

۱۶

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos x (\sin^{\sqrt{x}} x - \cos^{\sqrt{x}} x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^{\sqrt{x}} x \cdot (-\cos^{\sqrt{x}} x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \sin^{\sqrt{x}} x \cdot \cos^{\sqrt{x}} x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sin^{\sqrt{x}} x \right) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \sin^{\sqrt{x}} x \underset{x=\frac{\pi}{\sqrt{x}}}{=} -\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

یادآوری:

$$\cos^{\sqrt{x}} x - \sin^{\sqrt{x}} x = \cos^{\sqrt{x}} x$$

گزینه ۱

۱۷

$$\begin{aligned}(\sin 36^{\circ} \times \cos 36^{\circ}) \times \cos 72^{\circ} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sin 72^{\circ} \times \cos 72^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sin 144^{\circ} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sin 144^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(180^{\circ} - 36^{\circ}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin 36^{\circ}\end{aligned}$$

یادآوری:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} \alpha)$$

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

(فصل ۵ ریاضی ۲ و فصل ۳ حسابان ۱)

(صفحه ۹۶ تا ۱۰۴ کتاب درسی)

BOX 1: تابع نمایی

در این BOX با تعریف تابع نمایی، نمودار آن‌ها و ویژگی‌های آن‌ها آشنا می‌شوید.

تابع نمایی

توان‌های حقیقی

مشابه قوانین مربوط به اعداد توان‌دار با توان‌های گویا و پایه‌های حقیقی مثبت، برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است. فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$(1) \quad x^0 = 1 \quad (2) \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad (3) \quad x^r \times x^s = x^{r+s} \quad (4) \quad (x^r)^x = x^{rx}$$

$$(5) \quad (xy)^r = x^r y^r \quad (6) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}, (y \neq 0) \quad (7) \quad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}, (x \neq 0) \quad (8) \quad 1^r = 1$$

تعرین: هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$(1) \quad 3^{1-\sqrt{2}} \times 3^{1+\sqrt{2}} \quad (2) \quad 5^{2\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{8}} \quad (3) \quad \frac{2^{\sqrt{2}} \times 2^{2\sqrt{2}}}{4^{\sqrt{2}} \times 4^{2\sqrt{2}}}$$

پاسخ: (۱) در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$3^{1-\sqrt{2}} \times 3^{1+\sqrt{2}} = 3^{(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})} = 3^2 = 9$$

$$(2) \quad \text{چون } \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ است، پس توان‌ها با هم برابرند و داریم: } 5^{2\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{8}} = 5^{2\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = (5 \times 3)^{2\sqrt{2}} = 15^{2\sqrt{2}}$$

(۳) ابتدا هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج را به شکل یک عدد توان‌دار می‌نویسیم:

$$2^{\sqrt{2}} \times 2^{2\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}}, \quad 4^{\sqrt{2}} \times 4^{2\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 4^{3\sqrt{2}} \Rightarrow \text{حاصل} = \frac{2^{3\sqrt{2}}}{4^{3\sqrt{2}}} = \left(\frac{2}{4}\right)^{3\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\sqrt{2}}$$

تابع نمایی

تعریف: هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ را که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک می‌باشد، تابع نمایی می‌گوییم.

$$y = a^x \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

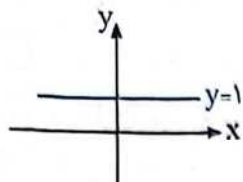
مثال: توابع $y = 3^x$ ، $y = (\sqrt{5})^x$ ، $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $y = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، همگی در دسته توابع نمایی قرار دارند، ولی $y = (-\sqrt{2})^x$ و

$y = 1^x$ به خاطر آن که در اولی $a = -\sqrt{2} < 0$ و در دومی $a = 1$ می‌باشد، در دسته توابع نمایی قرار نمی‌گیرند.

تذکر: در تابع نمایی $y = a^x$ ، عدد ثابت a پایه و توان متغیر است، اما در تابع $y = x^a$ ، پایه متغیر و توان عدد ثابت است.

مثال: تابع $y = 3^x$ یک تابع نمایی با پایه ۳ و توان x و تابع $y = x^3$ یک تابع یک‌جمله‌ای از درجه ۳ با پایه x و توان ۳ می‌باشد.

نکته: در تابع $y = a^x$ ، اگر $a = 1$ باشد، آن‌گاه ضابطه تابع به صورت $y = 1^x = 1$ درمی‌آید که ضابطه تابع ثابت می‌باشد و نمودار آن به صورت مقابل است:



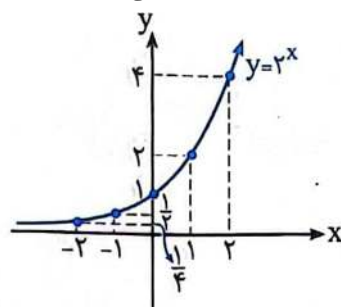
تمرین: نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم تابع نمایی $y = 2^x$ از نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم. به ازای برخی از مقادیر x ، مقدار y را به دست می‌آوریم و با مشخص کردن این نقاط روی دستگاه و وصل کردن آن نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2^0 = 1, \quad x = 1 \Rightarrow y = 2^1 = 2, \quad x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad x = -2 \Rightarrow y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

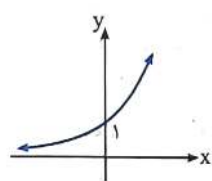
جدول زیر از نقاط به دست می‌آید و با وصل کردن نقاط به همدیگر، نمودار به دست می‌آید.



x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

همان‌طور که نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ ، $y = |x|$ و ... را می‌شناسیم باید نمودار تابع نمایی $y = a^x$ را به فاطر بسپاریم. نمودار تابع نمایی $y = a^x$ برای $a > 1$ و $0 < a < 1$ متفاوت است.

ویژگی‌های تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $a > 1$



(۱) نمودار تابع مانند نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت مقابل است:

(۲) دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0, +\infty)$ می‌باشد.

(۳) نمودار تابع، محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند.

(۴) نمودار تابع، محور x ها را قطع نمی‌کند.

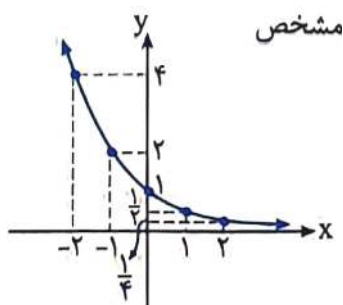
(۵) تابع در دامنه آن یک‌به‌یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(۶) در تابع نمایی $y = a^x$ ($a > 1$)، هرچه مقدار x بیشتر می‌شود، مقدار a^x نیز بزرگ‌تر می‌شود، پس به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه x

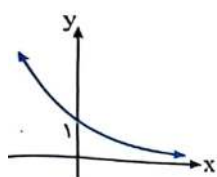
و y ، اگر $x > y$ ، آن‌گاه $a^x > a^y$ و برعکس. به عنوان مثال، $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ و در نتیجه $4^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}}$

تمرین: نمودار $y = (\frac{1}{3})^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

پاسخ: در جدول زیر به ازای برخی از مقادیر x ، مقدار y به دست آمده است و با مشخص کردن نقاط روی دستگاه و وصل کردن آن‌ها به هم، نمودار تابع به دست می‌آید:



x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4



ویژگی‌های تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$

(۱) نمودار تابع مانند نمودار $y = (\frac{1}{a})^x$ به صورت روبه‌رو است:

(۲) دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0, +\infty)$ می‌باشد.

(۳) نمودار تابع، محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند.

(۴) نمودار تابع، محور x ها را قطع نمی‌کند.

(۵) تابع در دامنه آن یک‌به‌یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(۶) در تابع نمایی $y = a^x$ در حالتی که $0 < a < 1$ ، هرچه مقدار x بیشتر می‌شود، مقدار y کمتر می‌شود. پس به ازای هر دو عدد حقیقی

دلخواه x و y ، اگر $x > y$ ، آن‌گاه $a^x < a^y$ و برعکس. به عنوان مثال، $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ و در نتیجه $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$

تمرین: در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

$$(1) \quad 5^3 \circ 5^{\sqrt{7}} \quad (2) \quad 3^{\frac{2}{5}} \circ 3^{\frac{7}{3}} \quad (3) \quad (\frac{1}{4})^{\sqrt{2}} \circ (\frac{1}{4})^{1/5} \quad (4) \quad (\frac{1}{\sqrt{2}})^{3/2} \circ (\frac{1}{4})^2$$

پاسخ: (۱) و (۲): پایه بزرگ‌تر از یک است، پس هرچه توان بزرگ‌تر باشد، عدد نیز بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین:

$$3 > \sqrt{7} \Rightarrow 5^3 > 5^{\sqrt{7}}, \quad 2/5 > \frac{7}{3} \Rightarrow 3^{2/5} > 3^{7/3}$$

$$\sqrt{2} < 1/5 \Rightarrow (\frac{1}{4})^{\sqrt{2}} > (\frac{1}{4})^{1/5} \quad (3) \quad \text{پایه بین ۰ و ۱ است. هرچه توان بزرگ‌تر شود، عدد کوچک‌تر می‌شود:}$$

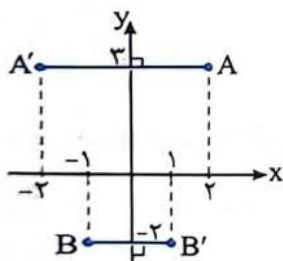
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^{3/2} = ((\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}})^{3/2} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2} \times 3/2} = (\frac{1}{2})^{1/6} \quad (4) \quad \text{ابتدا پایه‌ها را یکی می‌کنیم:}$$

$$(\frac{1}{4})^2 = ((\frac{1}{2})^2)^2 = (\frac{1}{2})^{2 \times 2} = (\frac{1}{2})^4$$

$$1/6 < 4 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{1/6} > (\frac{1}{2})^4$$

بازتاب (قرینه) نسبت به محور yها

• می‌خواهیم قرینه نقاط $A(2, 3)$ و $B(-1, -2)$ را نسبت به محور yها به دست آوریم. برای این کار، از نقاط داده شده پاره‌خطی عمود بر محور yها رسم می‌کنیم و این پاره‌خط را به همان اندازه امتداد می‌دهیم. نقاط به دست آمده قرینه نقاط A و B نسبت به محور yها می‌باشند.



• قرینه نقطه A، نقطه A' به مختصات $(-2, 3)$ و قرینه نقطه B، نقطه B' به مختصات $(1, -2)$ می‌باشد. با توجه به مختصات نقاط داده شده و قرینه آن‌ها، در قرینه نسبت به محور yها فقط طول آن‌ها قرینه می‌شود، بنابراین:

نکته: ۱) قرینه نقطه $A(a, b)$ نسبت به محور yها نقطه $A'(-a, b)$ است.

۲) اگر نمودار توابع f و g نسبت به محور yها قرینه باشند، آن‌گاه $f(-x) = g(x)$ و $g(-x) = f(x)$

۳) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم و آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم، آن‌گاه نمودار حاصل، نمودار تابع $y = f(-x)$ خواهد بود.

در تابع $y = 2^x$ اگر به جای x ، $-x$ قرار دهیم، آن‌گاه:

$$y = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

پس، قرینه نمودار $y = 2^x$ نسبت به محور yها، نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ به دست می‌آید.

نکته: نمودار توابع $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

یکی از مسائلی که باید یاد بگیریم، حل معادلات نمایی است. برای حل چنین معادلاتی باید در دو طرف پایه‌ها را یکی کنیم.

معادلات نمایی

تعریف: معادله‌ای را که در آن مجهول در توان گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامیم.

هر معادله به صورت $a^u = b^v$ ($a, b > 0, a, b \neq 1$) یک معادله نمایی است. اگر بتوان در معادله‌های نمایی، پایه دو طرف را یکسان کرد، می‌توان از نکته زیر برای حل معادله استفاده کرد.

نکته: اگر $a^u = a^v$ ($a > 0, a \neq 1$)، آن‌گاه $u = v$ و برعکس.

تمرین: هر یک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$7^{x+1} \times 49^{2x-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+8} \quad (2) \qquad 2^{3x-1} = \frac{1}{32} \quad (1)$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5} \Rightarrow 2^{3x-1} = 2^{-5} \Rightarrow 3x-1 = -5 \Rightarrow 3x = -5+1 = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \quad \text{پاسخ: (1)}$$

(۲) هر یک از عبارت‌ها را به صورت یک عبارت توان‌دار با پایه ۷ می‌نویسیم:

$$49^{2x-1} = (7^2)^{2x-1} = 7^{2(2x-1)} = 7^{4x-2}, \quad \left(\frac{1}{7}\right)^{x+8} = (7^{-1})^{x+8} = 7^{-x-8}$$

$$7^{x+1} \times 49^{2x-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+8} \Rightarrow 7^{x+1} \times 7^{4x-2} = 7^{-x-8} \Rightarrow 7^{(x+1)+(4x-2)} = 7^{-x-8} \Rightarrow 7^{5x-1} = 7^{-x-8}$$

$$\Rightarrow 5x-1 = -x-8 \Rightarrow 5x+x = -8+1 \Rightarrow 6x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$$

پرسش‌های تشریحی:

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۰۴ کتاب درسی)

• کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۱- محل تقاطع نمودار تابع $y = 2^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 2)$ است.

(شوربور ۱۴۰۲)

۲- نقطه $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ روی نمودار تابع، با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

۳- دامنه توابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ یکسان است.

۴- نمودار توابع $y = 4^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند.

• در جاهای خالی سوالات، عبارت مناسب قرار دهید.

۵- در x^2 ، متغیر در و عدد ثابت در است ولی در 2^x ، در توان و در پایه است.

۶- تابع $y = 2^x$ ، تابع یک‌به‌یک

۷- اگر $x > y$ ، آن‌گاه 3^x از 3^y است. (بزرگ‌تر - کوچک‌تر)

۸- برد تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ ، است.

۹- نمودار توابع $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) نسبت به محور قرینه یکدیگرند.

(فرداد ۱۴۰۲)

۱۰- دامنه تابع $f(x) = 2^x - 3$ برابر با و برد آن برابر با است.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۰۴ کتاب درسی)

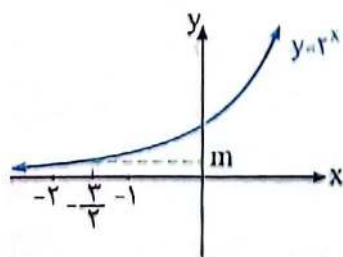
۱۱- کدام یک از توابع زیر، ضابطه یک تابع نمایی است؟

(آ) $y = x^2$ (ب) $y = (\frac{1}{\sqrt{5}})^x$ (پ) $y = \frac{2}{x}$

(ت) $y = 6^{-x}$ (ث) $y = (0/1)^x$ (ج) $y = 2^x + x$

۱۲- نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y = 4^x, \quad y = 3^x, \quad y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$$



۱۳- نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت مقابل است:

آ) عدد $2^{\sqrt{2}}$ را روی محور y ها مشخص کنید.

ب) عدد m برابر چه عددی است؟

(فرورداد ۱۴۰۲)

۱۴- کدام یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک به یک است؟

۴) $f(x) = 2^x$

۳) $f(x) = |x|$

۲) $f(x) = [x]$

۱) $f(x) = x^2$

۱۵- در جاهای خالی علامت $<$ یا $=$ یا $>$ قرار دهید.

ب) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{-2} \bigcirc (\frac{\sqrt{12}}{4})^{-3}$

آ) $(\frac{1}{\pi})^{-\frac{1}{2}} \bigcirc (\frac{1}{\pi})^{-\frac{2}{5}}$

(کار در کلاس صفحه ۹۸ کتاب درسی)

۱۶- آ) نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را در یک دستگاه رسم کنید.

ب) معادله $2^x = x^2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۰۴ کتاب درسی)

۱۷- هر یک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)

آ) $4^{2x+4} = \frac{1}{64}$

(خرداد ۱۴۰۲)

ب) $3^{x-2} = \frac{1}{27^x}$

(شهریور ۱۴۰۲)

پ) $3^{2x-1} = \frac{1}{27}$

۱۸- هر یک از عبارتهای زیر را ساده کنید.

آ) $(2 - \sqrt{3})^{\sqrt{2}+1} \times (2 + \sqrt{3})^{\sqrt{2}-1}$

ب) $\frac{(3\sqrt{5} \times 17\sqrt{5}) \div 51\sqrt{20}}{2^{-\sqrt{45}} \div (5/25)^{\sqrt{5}}}$

پ) $\frac{5^{\sqrt{3}} \times 12^{\sqrt{3}}}{10^{\sqrt{12}} \times 10^{-\sqrt{3}}}$

۱۹- دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$g(x) = \sqrt{8^x - \frac{16}{4^x}} \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \frac{3^x}{4^x - 128} \quad \text{ا)}$$

۲۰- حدود a را چنان تعیین کنید که تابع f با ضابطه $f(x) = \left(\frac{a+2}{a-1}\right)^x$ ، یک تابع نمایی باشد.

Homework

۱ اگر $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۲ تابع $f(x) = \sqrt[3]{2^{ax+b}}$ از نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(8) = 5$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

۳ تابع $f(x) = a + b(\frac{1}{2})^x$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(-1) = -1$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

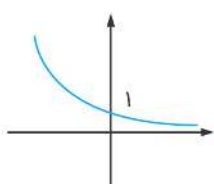
- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۴ باتوجه به نمودارهای $y_1 = (\frac{1}{3})^x$ و $y_2 = (\frac{1}{5})^x$ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هر دو نمودار، محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کنند.
(۲) به ازای $x < 0$ ، نمودار y_1 بالای نمودار y_2 قرار دارد.
(۳) به ازای $x > 0$ ، نمودار y_1 بالای نمودار y_2 قرار دارد.
(۴) نمودار هر دو تابع، حالت کاهشی دارند.

۵ کدام ضابطه زیر می‌تواند به نمودار باشد؟

- (۱) $y = (7)^x$
(۲) $y = (\frac{9}{8})^x$
(۳) $y = (\frac{1}{6})^x$
(۴) $y = (\sqrt{3} + 1)^x$

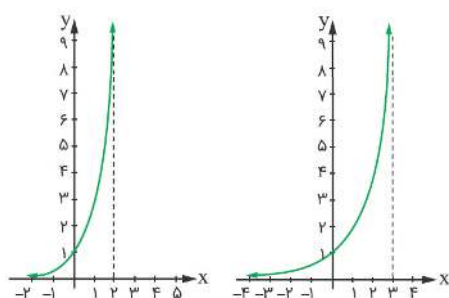


۶ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $3^{1-\sqrt{2}}$

ب) $2^{1/25}$

پ) $3^{\frac{3}{4}}$



به سؤالات داده شده پاسخ دهید.

۷ سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{2/5}$ پیدا کنید.

۸ نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

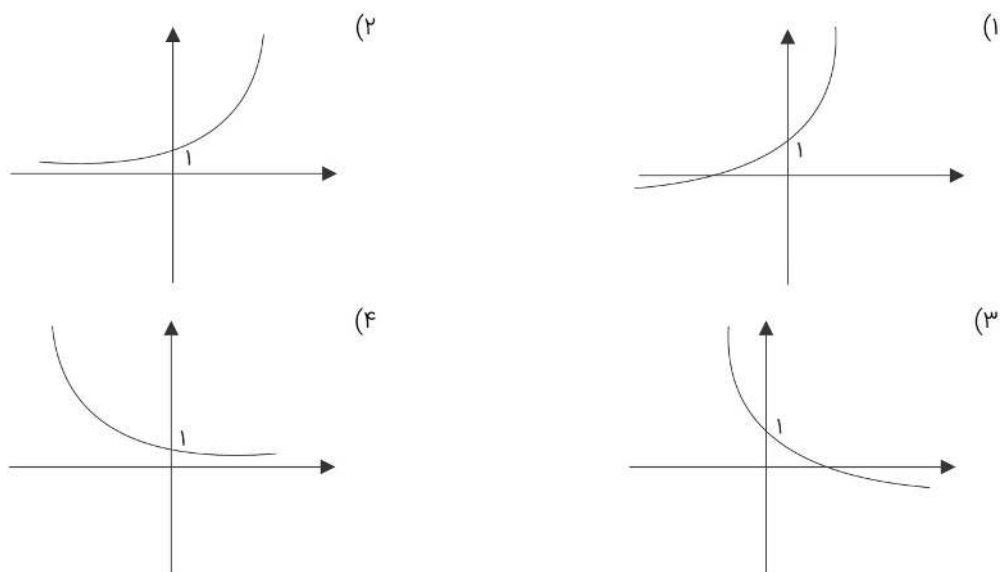
۹ اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آنگاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ ($a > 1$)

معادلات زیر را حل کنید.

$$2^{5x-1} = \frac{1}{64}$$

$$\log 3 + \log(3 + x) = \log(3x + 1) + \log 2$$

۱۲ نمودار $y = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^x$ مشابه کدام نمودار زیر است؟



۱۳ معادله $2^x - x^2 = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) بدون ریشه

۱۴ نمودارهای توابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ در چند نقطه با طول مثبت همدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) ۲

۱۵ در کدام یک از توابع نمایشی زیر با افزایش x مقدار y کم می‌شود؟

- (۱) $y = 3^x$
(۲) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
(۳) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
(۴) $y = (\sqrt{5})^x$

۱۶ اگر $\frac{1}{1024} \geq 4^{2x-1}$ باشد، حداقل مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) -۲
(۴) -۴

۱۷ مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{2})^{2x^2-x} \geq 4^{x^2+x+2}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-1, 2]$
(۲) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$
(۳) $\mathbb{R}$
(۴) $\emptyset$

۱۸ نمودار یک تابع $f(x) = 2^{ax+b}$ از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 8)$ عبور می‌کند. $f(0)$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۳) ۱
(۲) ۴
(۴) ۳

۱۹ مجموع جواب‌های معادله $\frac{4^x + 2}{2^{x+1} - 2} = 3$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۳) ۶
(۲) ۲
(۴) ۴

۲۰ مجموعه جواب نامعادله $4^{2x-1} > (\sqrt{2})^{4x^2}$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$
(۳) $\mathbb{R}$
(۲) $(-\infty, 2)$
(۴) $\emptyset$

پاسخ Homework

گزینه ۲

۱

$$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^x(2^{-2}+2^{-1}+1+2+2^2+2^3)} = 52$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{52 \times 15/75}{364} = \frac{119}{364} = 2/25 \Rightarrow x = 2$$

نکته:

$$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5 = \frac{1(1-3^6)}{1-3} = 364$$

$$2^{-2}+2^{-1}+1+2+2^2+2^3 = \frac{\frac{1}{2}(1-2^6)}{1-2} = \frac{63}{2} = 15/75$$

گزینه ۱

۲

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 = \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{2} (*)$$

$$f^{-1}(\lambda) = 5 \Rightarrow f(5) = \lambda \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \lambda = \sqrt[3]{2^{5a+b}}$$

$$2^{5a+b} = 2^9 \Rightarrow 5a+b = 9 \xrightarrow{(*)} 5a - \frac{a}{2} = 9 \Rightarrow \frac{9a}{2} = 9 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{(*)} b = -1$$

در آخر داریم:

$$a - b = 2 - (-1) = 3$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{p}\right)^0 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$f^{-1}(-1) = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{p}\right)^{-1} = -1 \\ \Rightarrow a + pb = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + pb = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -1, a = 1$$

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

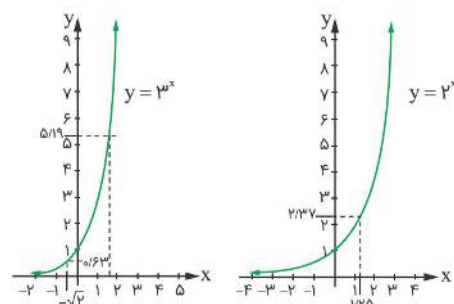
نمودار تابع نمایی، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، ولی محور x ها را قطع نمی‌کند؛ بنابراین گزینه "۱" درست می‌باشد. در نمودار تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد، نمودار حالت افزایش و اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار حالت کاهشی دارد؛ یعنی از چپ به راست با زیاد شدن x ها، y ها کاهش می‌یابد. در دو تابع y_1 و y_2 چون $0 < a < 1$ می‌باشد، بنابراین نمودارها حالت کاهشی دارند؛ در نتیجه گزینه "۴" نیز درست می‌باشد. همچنین در هر دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ ، هر چقدر مقدار a بیشتر شود، به ازای x های مثبت، نمودار بالاتر می‌رود و به ازای x های منفی، نمودار پایین‌تر می‌رود. چون $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ می‌باشد، بنابراین در $x > 0$ ، نمودار y_1 بالای نمودار y_2 و در $x < 0$ ، نمودار y_1 پایین نمودار y_2 قرار دارد؛ بنابراین گزینه "۲" نادرست می‌باشد.

نمودار داده‌شده کاهشی است؛ یعنی با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کاهش می‌یابند. بنابراین در ضابطه تابع نمایی $y = a^x$ ، a باید عددی بین صفر و یک باشد، که تنها گزینه "۳" این شرط را داراست.

الف) $3^{1-\sqrt{2}} \simeq 0/63$

ب) $2^{1/25} \simeq 2/37$

پ) $3^{2/7} \simeq 5/19$



$$3\sqrt{8}, 3\sqrt{7}, 3\sqrt{6}$$

$$2^{5x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 5x-2 > -10 \Rightarrow 5x > -8 \Rightarrow x > -\frac{8}{5}$$

$$x > y > z$$

$$2^{5x-1} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow 2^{5x-1} = 2^{-6} \Rightarrow 5x-1 = -6$$

$$\Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$$

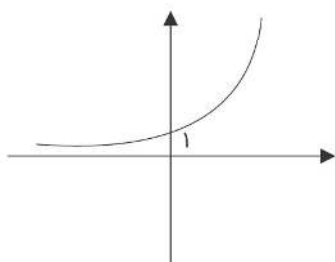
$$\log(3(3+x)) = \log(2(3x+1)) \Rightarrow 3(3+x) = 2(3x+1)$$

$$\Rightarrow 9+3x = 6x+2 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

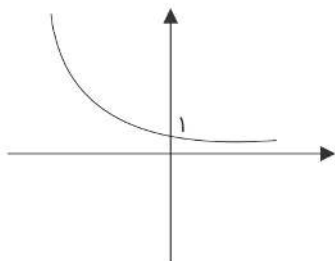
گزینه ۲

۱۲

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود:



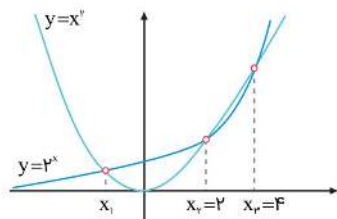
و اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود.



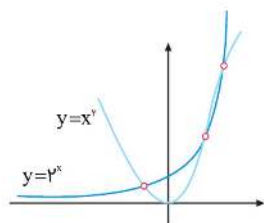
چون $1 > \frac{5}{\sqrt{6}}$ می‌باشد، در نتیجه نمودار مشابه گزینه ۲ خواهد بود.

$$2^x = x^2$$

به روش هندسی، مشخص می‌شود معادله سه ریشه حقیقی دارد.

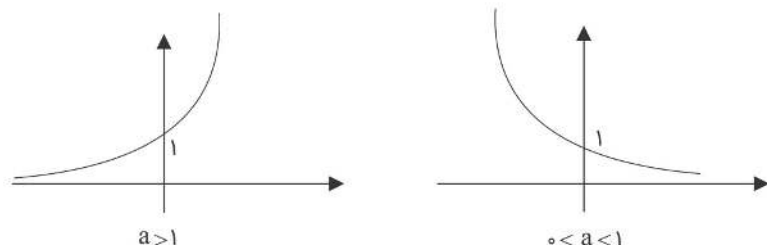


با ترسیم دو نمودار $y = 2^x$ و $y = x^2$ در یک دستگاه مختصات خواهیم داشت:



در دو نقطه با طول‌های $x = 2$ و $x = 4$ دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند.

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش x مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچکتر از صفر با کاهش مقدار x ، مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند. اگر $a > 1$ باشد، با افزایش x ، y ها نیز زیاد می‌شود.



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱ :

$$y = 3^x \quad a > 1 \quad \times$$

گزینه ۲ :

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{1}\right)^x \quad 0 < a < 1$$

گزینه ۳ :

$$y = \left(\frac{1}{6}\right)^{-x} = (6)^x \quad a > 1 \quad \times$$

گزینه ۴ :

$$y = (\sqrt{5})^x \quad a > 1 \quad \times$$

$$2^{2x-1} \geq \frac{1}{1024} \Rightarrow (2^2)^{2x-1} \geq 2^{-10} \Rightarrow 4x - 2 \geq -10 \Rightarrow 4x \geq -8 \Rightarrow x \geq -2$$

گزینه ۴

۱۷

$$\begin{aligned} (2^{\frac{1}{2}})^{2x^2-x} &\geq (2^2)^{x^2+x+2} \Rightarrow 2^{x^2-\frac{1}{2}x} \geq 2^{2x^2+2x+4} \\ \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x &\geq 2x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + 4 \leq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 16 = \frac{-39}{4} < 0$$

باتوجه به (*) علامت عبارت درجه دوم همواره موافق ضریب x^2 می باشد و مثبت است، پس از آنجایی که $\Delta < 0$ نامعادله بدون جواب می باشد.

گزینه ۲

۱۸

$$f(1) = 2 : 2^{a+b} = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(-1) = 8 : 2^{-a+b} = 2^3 \Rightarrow -a + b = 3$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$$f(x) = 2^{-x+2}$$

$$f(0) = 2^2 = 4$$

گزینه ۱

۱۹

$$3^x + 2 = 3 \times 2^{x+1} - 6$$

$$(2^2)^x + 2 = 3 \times 2 \times 2^x - 6$$

$$(2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 = 0 \xrightarrow{2^x=t} t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x_1=1 \\ t=4 \Rightarrow 2^x=2^2 \Rightarrow x_2=2 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$$

گزینه ۴

۲۰

$$(2^2)^{2x-1} > (2^{\frac{1}{2}})^{4x^2} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{2x^2}$$

$$4x-2 > 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 < 0$$

$$x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^2 < 0 \Rightarrow \text{غقق} \Rightarrow \text{جواب} = \emptyset$$

BOX 2: تابع لگاریتمی

در بسته قبل و با توجه به نمودار تابع نمایی، هر تابع نمایی، تابعی یک به یک است و در نتیجه وارون پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامیم. در این BOX نمایش تابع لگاریتمی، نمودار و برخی از ویژگی های آن گفته می شود.

تابع لگاریتمی

همان طور که دیده ایم، اگر دو تابع f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند، آن گاه:

$$D_{f^{-1}} = R_f, R_{f^{-1}} = D_f$$

(۱) دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} و برد تابع f با دامنه f^{-1} برابر است، یعنی:

$$(۲) \text{ اگر } f(a) = b, \text{ آن گاه } f^{-1}(b) = a$$

(۳) با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y = x$ ، نمودار f^{-1} به دست می آید.

تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می گوئیم. وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$

نشان می دهیم. $(\log_a x)$ را می خوانیم لگاریتم x در مبنای a ، بنابراین:

مثال: با توجه به نمادگذاری انجام شده، اگر $f(x) = 3^x$ باشد، آن گاه $f^{-1}(x) = \log_3 x$ می باشد و داریم:

$$f(2) = 3^2 = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = \log_3 9 = 2, f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{27} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{27}\right) = \log_3 \frac{1}{27} = -3$$

نکته: برای تبدیل یک تساوی نمایی به لگاریتم و هم چنین تبدیل تساوی لگاریتمی به نمایی از رابطه مقابل استفاده می کنیم:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰۵ کتاب درسی)

تعریف: هر یک از تساوی های نمایی زیر را به صورت یک تساوی لگاریتمی بنویسید.

$$(۱) 2^5 = 32 \quad (ب) \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: با استفاده از رابطه «اگر $a^x = y$ ، آن گاه $\log_a y = x$ »، هر یک از تساوی ها را به صورت یک تساوی لگاریتمی می نویسیم:

$$(۱) 2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5 \quad (ب) \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰۵ کتاب درسی)

تعریف: هر یک از تساوی های لگاریتمی زیر را به صورت یک تساوی نمایی بنویسید.

$$(۱) \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} \quad (ب) \quad \log_{\frac{1}{16}} 8 = -\frac{3}{4}$$

پاسخ: اگر $\log_b a = c$ ، آن گاه $a = b^c$ ، پس داریم:

$$(۱) \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \quad (ب) \quad \log_{\frac{1}{16}} 8 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = 8$$

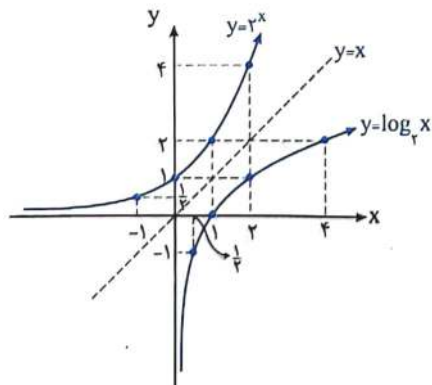
نکته: اگر a عددی حقیقی و مثبت ($a \neq 1$) باشد، آن گاه:

$$۱) a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \quad ۲) a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$$

تذکر: چون در تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ ، a همواره عددی مثبت و مخالف یک است، پس در تابع لگاریتمی با ضابطه $y = \log_a x$ ، a عددی مثبت و مخالف یک می باشد.

تعریف: نمودار تابع $f(x) = \log_2 x$ را رسم کنید و مشخص کنید عدد $\log_2 3$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

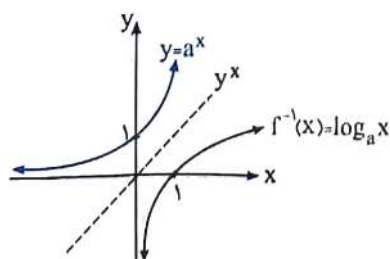
پاسخ: تابع $f(x) = \log_2 x$ وارون تابع نمایی $y = 2^x$ است. نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند. پس اگر نقاط روی نمودار $y = 2^x$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، نمودار تابع $f(x) = \log_2 x$ به دست می‌آید:



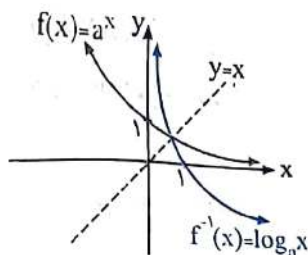
عدد ۲ بین دو عدد ۲ و ۴ قرار دارد. بنابراین $\log_2 3$ بین دو عدد $\log_2 2 = 1$ و $\log_2 4 = 2$ قرار می‌گیرد.

ویژگی‌های تابع لگاریتمی $f^{-1}(x) = \log_a x$

(۱) نمودار تابع $f^{-1}(x) = \log_a x$ وقتی که $a > 1$ باشد، مانند نمودار $y = \log_2 x$ است و نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد:



و نمودار تابع $f^{-1}(x) = \log_a x$ وقتی که $0 < a < 1$ باشد، با توجه به نمودار $f(x) = a^x$ به صورت مقابل می‌باشد:



(۲) دامنه و برد تابع $f^{-1}(x) = \log_a x$ با توجه به نمودار به صورت مقابل می‌باشد:

$D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$, $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ به این معنی است که لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود. لگاریتم برای اعداد منفی و صفر، بی‌معنی است.

(۳) نمودار تابع، محور x ها را در نقطه $(1, 0)$ قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.

(۴) تابع $f(x) = \log_a x$ یک تابع یک‌به‌یک است، زیرا خطوط موازی با محور x ها، نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(۵) اگر $a > 1$ ، آن‌گاه مقدار $y = \log_a x$ با افزایش x بیشتر می‌شود و اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه مقدار $y = \log_a x$ با افزایش x کمتر می‌شود.

تعیین: در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

$$\log_5 \frac{3}{5} \circ \log_5 \sqrt{2} \quad (3)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 4 \circ \log_{\frac{1}{3}} 6 \quad (2)$$

$$\log_2 7 \circ \log_2 5 \quad (1)$$

پاسخ: (۱) مبنای لگاریتم (برابر ۲) بزرگتر از یک است. هر چه عدد بزرگتر باشد، مقدار لگاریتم نیز بیشتر است:

$$7 > 5 \Rightarrow \log_2 7 > \log_2 5$$

(۲) مبنای لگاریتم (عدد $\frac{1}{3}$) بین صفر و یک است. هر چه عدد بزرگتر باشد، مقدار لگاریتم کمتر است:

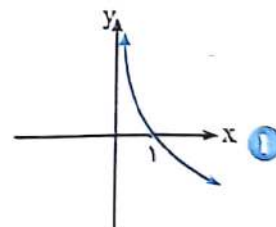
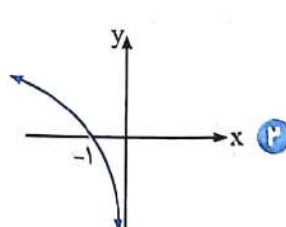
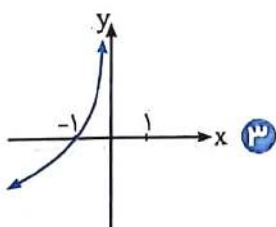
$$6 > 4 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 6 < \log_{\frac{1}{3}} 4$$

(۳) مبنای لگاریتم بزرگتر از یک است، همانند قسمت (۱) داریم:

$$\frac{3}{5} = 0.6 < \sqrt{2} \approx 1.4 \Rightarrow \log_5 \sqrt{2} > \log_5 \frac{3}{5}$$

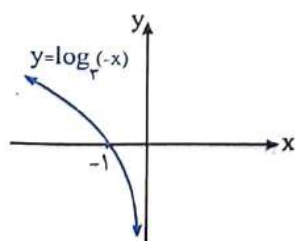
یادآوری: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم و آن را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، آن گاه نمودار حاصل، نمودار تابع $y = f(-x)$ خواهد بود.

تعریف: کدامیک از نمودارهای زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = \log_3(-x)$ است؟



پاسخ: نمودار تابع $f(x) = \log_3 x$ به صورت

می‌باشد. با تبدیل x به $-x$ ، ضابطه f به صورت $y = \log_3(-x)$ درمی‌آید. برای رسم این نمودار کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم (قرینه نقطه $(1, 0)$ نسبت به محور y ها برابر $(-1, 0)$ است):



تذکره: لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود. به عنوان مثال، به جای $\log_{10} 7$ می‌نویسیم $\log 7$.

دامنه توابع لگاریتمی

لگاریتم برای صفر و منفی تعریف نمی‌شود و همچنین مبنای لگاریتم عددی مثبت و مخالف یک است.

نکته: دامنه تابع $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ از حل نامعادلات $g(x) > 0$ (لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود)، $h(x) > 0$ و $h(x) \neq 1$ (در لگاریتم، مبنا عددی مثبت و مخالف یک می‌باشد) به دست می‌آید.

تعریف: دامنه تابع $f(x) = \log_{x-3} (x^2 - 2x)$ را به دست آورید.

$$x^2 - 2x > 0$$

پاسخ: لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود:

برای حل نامعادله $x^2 - 2x > 0$ ، عبارت $P = x^2 - 2x$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	0	2
$x^2 - 2x$	$+$	$-$

$$P > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2 \quad (1)$$

همچنین مبنای لگاریتم باید عددی مثبت و مخالف یک باشد:

$$x - 2 > 0, x - 3 \neq 1 \Rightarrow x > 3, x \neq 4 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow D_f : x > 3, x \neq 4 \Rightarrow D_f = (3, 4) \cup (4, +\infty)$$

پرسش‌های تشریحی:

• کدامیک از عبارت‌های زیر درست و کدامیک نادرست می‌باشد؟

۱- نمودار توابع $y = \log_3 x$ و $y = 3^x$ نسبت به محور y ها قرینه هستند.

۲- دامنه تابع $f(x) = \log_3 x$ بازه $(0, +\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۳- اگر $a^b = c$ ، آن‌گاه $\log_a c = b$ ($a, c > 0, a \neq 1$)

۴- تابع $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ ، تابعی غیر یک‌به‌یک است.

۵- اگر a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، آن‌گاه $\log_a 1 = 0$ است.

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۶- دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)، و برد آن است.

۷- وارون تابع نمایی، تابع است و وارون تابع لگاریتمی، تابع است.

۸- نمودار تابع $y = \log_a x$ ، محور x ها را در نقطه قطع می‌کند و محور y ها را قطع

۹- مقدار تابع $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ با افزایش x می‌یابد.

۱۰- با استفاده از نماد لگاریتم، تساوی‌های داده‌شده زیر را به صورت یک تساوی لگاریتمی بنویسید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱۰ کتاب درسی)

$$2^3 = 8 \quad (أ) \quad 3^{-2} = \frac{1}{9} \quad (ب) \quad 1^0 = 1 \quad (پ)$$

۱۱- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

$$\begin{array}{ll} \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \bigcirc \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{8} & \text{ب) } \log_4 5 \bigcirc \log_4 6 \text{ (آ)} \\ \log_{\frac{1}{3}} 12 \bigcirc \log_{\frac{1}{3}} 13 & \text{ت) } \log_3 3 \bigcirc \log \sqrt{8} \text{ (پ)} \end{array}$$

۱۲- به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) نمودار تابع $y = \log x$ را رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(8, 3)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

۱۳- مشخص کنید هر یک از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می گیرند؟

$$\log_3 200 \text{ (ب) } \log_2 57 \text{ (آ) } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{30} \text{ (پ)}$$

۱۴- دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \log(x-3) & \text{ب) } g(x) = \log_{x-2}(x^2-x) & \text{پ) } h(x) = \log_{x-3} \frac{x-2}{4-x} \end{array}$$

Homework

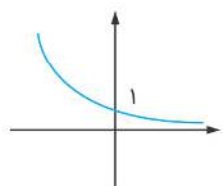
۱ دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\log_2(x-2)}}$ کدام است؟

- (۱) $(3, +\infty)$ (۲) $(2, +\infty)$
(۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[2, +\infty)$

۲ باتوجه به نمودارهای $y_1 = (\frac{1}{3})^x$ و $y_2 = (\frac{1}{5})^x$ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هر دو نمودار، محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کنند.
(۲) به ازای $x < 0$ ، نمودار y_1 بالای نمودار y_2 قرار دارد.
(۳) به ازای $x > 0$ ، نمودار y_1 بالای نمودار y_2 قرار دارد.
(۴) نمودار هر دو تابع، حالت کاهشی دارند.

۳ کدام ضابطه زیر می‌تواند مربوط به نمودار باشد؟

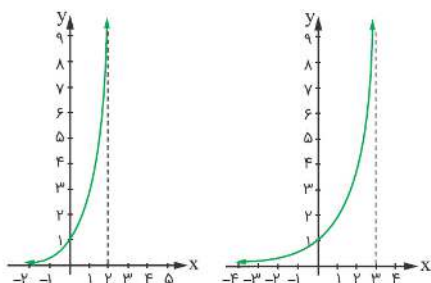


- (۱) $y = (7)^x$
(۲) $y = (\frac{9}{8})^x$
(۳) $y = (\frac{1}{6})^x$
(۴) $y = (\sqrt{3} + 1)^x$

۴ اگر لگاریتم عدد $2\sqrt{2}$ در مبنای x برابر با $4/5$ باشد، لگاریتم چه عددی در مبنای x^2 برابر ۳ است؟

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

- (الف) $3^{1-\sqrt{2}}$
(ب) $2^{1/25}$
(پ) $3^{3/7}$



به سؤالات داده شده پاسخ دهید.

۶ سه عدد بین اعداد $3^{2/5}$ و $3^{\sqrt{10}}$ پیدا کنید.

۷ اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آنگاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ ($a > 1$)

معادلات زیر را حل کنید.

۸ $2^{5x-1} = \frac{1}{64}$

۹ $\log 3 + \log(3+x) = \log(3x+1) + \log 2$

۱۰ ضابطه وارون تابع $f(x) = 1 + 3^{x-2}$ کدام است؟

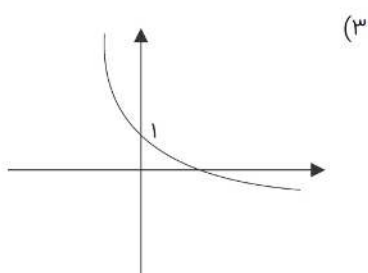
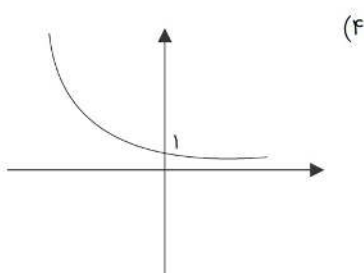
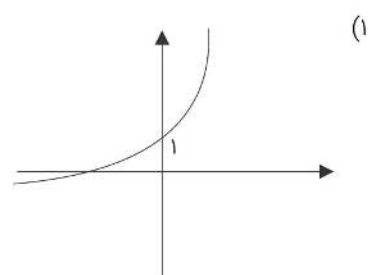
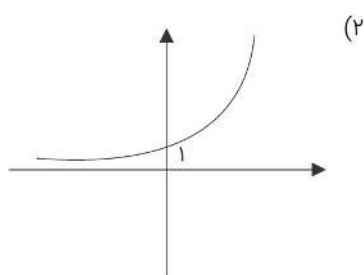
(۲) $y = 2 - \log_3(x+1)$

(۱) $y = 1 + \log_3(x-2)$

(۴) $y = 1 - \log_3(x+2)$

(۳) $y = 2 + \log_3(x-1)$

۱۱ نمودار $y = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^x$ مشابه کدام نمودار زیر است؟



۱۲ در کدام یک از توابع نمایی زیر با افزایش x مقدار y کم می‌شود؟

(۲) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$

(۱) $y = 3^x$

(۴) $y = (\sqrt{5})^x$

(۳) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{-x}$

۱۳ دامنه تابع $f(x) = \log_{(x+1)}(9-x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۲) دو

(۱) یک

(۴) بدون عدد صحیح

(۳) سه

۱۴ اگر $f(x) = \log_3(x-1)$ باشد، مقدار $f(f^{-1}(2) - 6)$ چقدر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۵ دامنه تابع $f(x) = \log \frac{x^2 - 4x + 4}{x+3}$ کدام است؟

- (۱) $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$
(۲) $(-4, +\infty)$
(۳) $(-3, +\infty)$
(۴) $(-4, 2)$

۱۶ اگر $4^{2x} + 4^{2x} = \sqrt[3]{2}$ باشد، حاصل $\log_3(6x + 10) + \log_3(-x)$ چقدر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۷ دامنه تعریف $f(x) = \log_{(x-2)}(5x - x^2)$ کدام است؟

- (۱) $(0, 5) - \{3\}$
(۲) $(2, 5) - \{3\}$
(۳) $(0, +\infty) - \{3\}$
(۴) $(2, +\infty) - \{3\}$

۱۸ مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{2})^{2x^2-x} \geq 2^{x^2+x+2}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-1, 2]$
(۲) $[\frac{5}{2}, +\infty)$
(۳) $\mathbb{R}$
(۴) $\emptyset$

۱۹ ضابطه وارون تابع $y = \log_3(2x - 1) - 1$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^{x-1} + 1)$
(۲) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^{x+2} + 2)$
(۳) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^{x+1} + 1)$
(۴) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^{x-2} + 2)$

۲۰ دامنه تابع $f(x) = \log_{(x+1)}(9 - x^2)$ دارای چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) بدون عدد صحیح

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\log_2(x - 2) > 0 \Rightarrow x - 2 > 2^0 \Rightarrow x > 3$$

اشتراک بازه‌های به دست آمده دامنه تابع است.

$$D = (2, +\infty) \cap (3, +\infty) = (3, +\infty)$$

نمودار تابع نمایی، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، ولی محور x ها را قطع نمی‌کند؛ بنابراین گزینه "۱" درست می‌باشد. در نمودار تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد، نمودار حالت افزایش و اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار حالت کاهشی دارد؛ یعنی از چپ به راست با زیاد شدن x ها، y ها کاهش می‌یابند. در دو تابع y_1 و y_2 چون $0 < a < 1$ می‌باشد، بنابراین نمودارها حالت کاهشی دارند؛ در نتیجه گزینه "۴" نیز درست می‌باشد. همچنین در هر دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ ، هر چقدر مقدار a بیشتر شود، به ازای x های مثبت، نمودار بالاتر می‌رود و به ازای x های منفی، نمودار پایین‌تر می‌رود. چون $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ می‌باشد، بنابراین در $x > 0$ ، نمودار y_1 بالای نمودار y_2 و در $x < 0$ ، نمودار y_1 پایین نمودار y_2 قرار دارد؛ بنابراین گزینه "۲" نادرست می‌باشد.

نمودار داده شده کاهشی است؛ یعنی با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کاهش می‌یابند. بنابراین در ضابطه تابع نمایی $y = a^x$ ، a باید عددی بین صفر و یک باشد، که تنها گزینه "۳" این شرط را داراست.

$$\log_x 2\sqrt{2} = 4/5 \Rightarrow x^{4/5} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 2^{\frac{5}{2} \times \frac{5}{4}} \Rightarrow x = 2^{\frac{25}{8}}$$

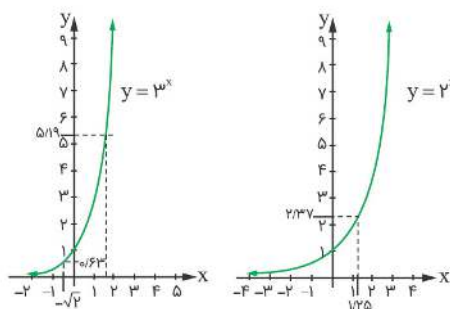
$$x = 2^{\frac{5}{2} \times \frac{5}{4}} \Rightarrow x = 2^{\frac{25}{8}}$$

$$\log_{2^{\frac{5}{8}}} y = 3 \Rightarrow y = (2^{\frac{5}{8}})^3 = 2^{\frac{15}{8}} = 4$$

الف) $3^{1-\sqrt{2}} \simeq 0.63$

ب) $2^{1/25} \simeq 2/37$

پ) $3^{5/19} \simeq 5/19$



پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

۶

$3^{\sqrt{1}}, 3^{\sqrt{7}}, 3^{\sqrt{6}}$

۷

$x > y > z$

پاسخ سؤالات ۸ تا ۹

۸

$$2^{5x-1} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow 2^{5x-1} = 2^{-6} \Rightarrow 5x-1 = -6$$

$$\Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$$

۹

$$\log(3(3+x)) = \log(2(2x+1)) \Rightarrow 3(3+x) = 2(2x+1)$$

$$\Rightarrow 9+3x = 4x+2 \Rightarrow x = \frac{7}{1}$$

گزینه ۳

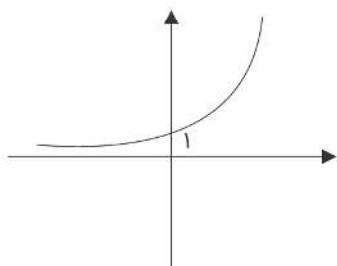
۱۰

$y = 1 + 3^{x-2} \Rightarrow 3^{x-2} = y - 1$

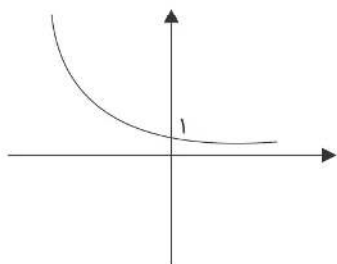
$x - 2 = \log_3(y - 1) \Rightarrow x = \log_3(y - 1) + 2$

$f^{-1}(x) = 2 + \log_3(x - 1)$

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود:

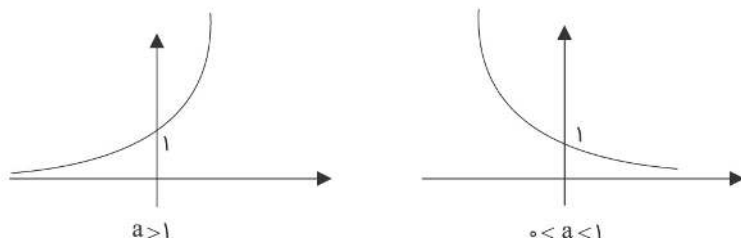


و اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود.



چون $\frac{5}{\sqrt{6}} > 1$ می‌باشد، در نتیجه نمودار مشابه گزینه ۲ خواهد بود.

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش x مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچک‌تر از صفر با کاهش مقدار x ، مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند. اگر $a > 1$ باشد، با افزایش x ، y ها نیز زیاد می‌شود.



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$y = 3^x \quad a > 1 \quad \times$$

گزینه ۲:

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{1}\right)^x \quad 0 < a < 1$$

گزینه ۳:

$$y = \left(\frac{1}{6}\right)^{-x} = (6)^x \quad a > 1 \quad \times$$

گزینه ۴:

$$y = (\sqrt{5})^x \quad a > 1 \quad \times$$

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

اشتراک $\rightarrow D = (-1, 3) - \{0\}$

دامنه صحیح $= \{1, 2\}$

گزینه ۱

۱۴

برای محاسبه $f^{-1}(2)$ ، تابع f را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\log_3(x-1) = 2 \Rightarrow x-1 = 3^2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow f^{-1}(2) = 10$$

$$f(f^{-1}(2) - 6) = f(10 - 6) = f(4) = \log_3 3 = 1$$

گزینه ۱

۱۵

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x+3} > 0 \xrightarrow{x \neq -3} x+3 > 0 \Rightarrow x > -3, x \neq 2 \Rightarrow D = (-3, 2) \cup (2, +\infty)$$

گزینه ۱

۱۶

$$4^{2x} + 4^{2x} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow 2 \times 4^{2x} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{1+4x} = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 + 4x = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{16}$$

$$a = \log_3(6x + 10) = \log_3\left(6 \times \frac{-1}{6} + 10\right) = \log_3 9 = 2$$

$$b = \log_6(-x) = \log_6 \frac{1}{6} = -1 \Rightarrow a + b = 2 - 1 = 1$$

گزینه ۲

۱۷

$$\left. \begin{array}{l} 5x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 5 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (2, 5) - \{3\}$$

گزینه ۴

۱۸

$$(2^{\frac{1}{2}})^{2x^2 - x} \geq (2^2)^{x^2 + x + 2} \Rightarrow 2^{x^2 - \frac{1}{2}x} \geq 2^{2x^2 + 2x + 4} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x \geq 2x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + 4 \leq 0 (*)$$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 16 = \frac{-39}{4} < 0$$

باتوجه به (*) علامت عبارت درجه دوم همواره موافق ضریب x^2 می‌باشد و مثبت است، پس از آنجایی که $\Delta < 0$ نامعادله بدون جواب می‌باشد.

گزینه ۳

۱۹

$$\log_3(2x-1) = y+1 \Rightarrow 2x-1 = 3^{y+1}$$

$$2x = 3^{y+1} + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(3^{y+1} + 1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(3^{x+1} + 1)$$

گزینه ۲

۲۰

$$\left. \begin{array}{l} 9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D = (-1, 3) - \{0\}$$

BOX 3: ویژگی‌های لگاریتم – معادلات لگاریتمی

برای ساده‌کردن محاسبات در عبارت‌های لگاریتمی از قوانینی استفاده می‌کنیم که در این BOX به آن‌ها اشاره می‌کنیم. این قوانین باید حفظ شوند.

الف) ویژگی‌های لگاریتم

(۱) اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، آن‌گاه $\log_a \frac{1}{a} = -1$ ، $\log_a a = 1$ و $\log_a 1 = 0$ ، زیرا:

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0, a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1, a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{a} = -1$$

لگاریتم عمل ضرب را به جمع تبدیل می‌کند.

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

(۲) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و c یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، آن‌گاه:

نکته: ویژگی (۲) را می‌توان برای هر تعداد عدد حقیقی استفاده کرد:

$$\log_c abd \dots = \log_c a + \log_c b + \log_c d + \dots (a, b, c, d, \dots > 0, c \neq 1)$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

(۳) اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

تمرین: اگر $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.48$ باشد، مقدار $\log 12$ را محاسبه کنید.

پاسخ: عدد ۱۲ را به صورت $12 = 2^2 \times 3$ می‌نویسیم. بنابراین:

$$\log 12 = \log(2^2 \times 3) \xrightarrow{\text{ضرب به جمع تبدیل می‌شود}} \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2 \times 0.3 + 0.48 = 0.6 + 0.48 = 1.08$$

نکته: (۱) در ویژگی (۳)، به جای n هر عدد حقیقی نیز قرار بگیرد، تساوی برقرار است.

(۲) در محاسبه لگاریتم، اگر مبنا توان داشته باشد از قاعدهٔ مقابل برای ساده کردن استفاده می‌کنیم: $\log_b x a = \frac{1}{x} \log_b a (a, b > 0, b \neq 1)$ توجه کنید که در این حالت، توان مبنا را با معکوس کردن، به عنوان ضریب برای لگاریتم می‌نویسیم.

$$\log_b^m a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

تذکره: دو نکتهٔ قبل را می‌توان به صورت روبه‌رو ادغام کرد:

نکته: در مسائل لگاریتم و برای به دست آوردن حاصل، معمولاً باید عدد جلوی لگاریتم و مبنا به فرم اعداد توان‌دار با پایهٔ یکسان نوشته شوند

یعنی باید اعداد مرکب را تجزیه کنیم، اعداد اعشاری را به صورت کسر بنویسیم و اعداد رادیکالی را با استفاده از فرمول $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ به صورت عدد توان‌دار بنویسیم.

تمرین: حاصل $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} + \log_8 16$ را به دست آورید.

پاسخ: اعداد $\frac{1}{25}$ و $\sqrt[3]{5}$ را به صورت اعداد توان‌دار با پایهٔ ۵ می‌نویسیم. همچنین دو عدد ۸ و ۱۶ را به صورت عدد توان‌دار با پایهٔ ۲ می‌نویسیم:

$$\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} = \log_{\frac{1}{5^2}} 5^{\frac{1}{3}} = \log_{5^{-2}} 5^{\frac{1}{3}} = \log_{5^{-2}} 5^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{-2} \log_5 5 = -\frac{1}{6} = -\frac{2}{12}$$

$$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \log_2 2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = -\frac{2}{12} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

لگاریتم عمل تقسیم را به تفریق تبدیل می‌کند.

(۴) برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و c ($c \neq 1$)، داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

نکته: با توجه به قانون $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ و تساوی $\log_{10} 10 = 1$ ، داریم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2, \log 2 = 1 - \log 5$$

تمرین: با فرض $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.47$ ، مقدار عددی عبارت $\log \frac{24}{25}$ را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱۲ کتاب درسی)

پاسخ: ابتدا از ویژگی $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ استفاده می‌کنیم و سپس هر یک از دو عدد ۲۴ و ۲۵ را تجزیه می‌کنیم:

$$\log \frac{24}{25} = \log 24 - \log 25 = \log(2^3 \times 3) - \log 5^2 = (\log 2^3 + \log 3) - 2 \log 5$$

$$= 3 \log 2 + \log 3 - 2 \log 5 \stackrel{\log 5 = 1 - \log 2}{=} 3 \log 2 + \log 3 - 2(1 - \log 2) = 5 \log 2 + \log 3 - 2 = 5(0.3) + 0.47 - 2 = -0.3$$

در برخی از مسائل لگاریتمی، مبنای لگاریتم در فرض با مبنای لگاریتم فواسته شده متفاوت است. برای حل این مسائل از ویژگی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (a, b, c > 0, b, c \neq 1)$$

(۵) قانون تغییر مبنای:

تمرین: اگر $\log_2 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{18} 24$ را بر حسب a به دست آورید.

پاسخ: چون مبنای لگاریتم در فرض عدد ۲ می‌باشد، با استفاده از قانون تغییر مبنای، $\log_{18} 24$ را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$\log_{18} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 18} = \frac{\log_2(2^3 \times 3)}{\log_2(2 \times 3^2)} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3^2} = \frac{3 \log_2 2 + \log_2 3}{1 + 2 \log_2 3} = \frac{3 + a}{1 + 2a}$$

حالت خاص ویژگی (۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad \text{یا} \quad \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

نکته: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند، آن‌گاه:

$${}_a \log_a b = b$$

(۶) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$${}_4 \log_4 5 = 5 \quad \text{مثال:}$$

تمرین: حاصل $3^{3+2 \log_3 2}$ را به دست آورید.

پاسخ: عبارت $3^{3+2 \log_3 2}$ را به صورت $3^3 \times 3^{2 \log_3 2}$ می‌نویسیم. برای به دست آوردن حاصل $3^{2 \log_3 2}$ ، داریم:

$$2 \log_3 2 = \log_3 2^2 = \log_3 4 \Rightarrow 3^{2 \log_3 2} = 3^{\log_3 4} = 4 \Rightarrow 3^3 \times 3^{2 \log_3 2} = 3^3 \times 4 = 27 \times 4 = 108$$

یکی از سوالات مربوط به لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است.

(ب) معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا دامنه تعریف معادله را پیدا می‌کنیم، سپس از خواص و ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به یکی از دو صورت $\log_b f(x) = a$ یا $\log_b f(x) = \log_b g(x)$ درمی‌آوریم.

(۱) اگر $\log_b f(x) = a$ ، آن‌گاه $f(x) = b^a$ و با حل این معادله، جواب‌هایی را که در دامنه تعریف قرار دارند، مشخص می‌کنیم.
(۲) اگر $\log_b f(x) = \log_b g(x)$ ، آن‌گاه $f(x) = g(x)$ و با حل معادله اخیر، جواب‌هایی را که در دامنه تعریف قرار دارند، مشخص می‌کنیم.

تعرین: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_2(3x-1) = 3 \quad (۱) \qquad \log_{\frac{1}{5}}(2x-1) + \log_5(3x-5) = -\log_{\frac{1}{5}} 5 \quad (۲)$$

پاسخ: (۱)

$$3x-1 > 0 \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

بط $x = 3$ جواب معادله است.

$$\log_2(3x-1) = 3 \Rightarrow 3x-1 = 2^3 \Rightarrow 3x = 8+1 = 9 \Rightarrow x = 3 > \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$$-\log_{\frac{1}{5}} 5 = -\log_{5^{-1}} 5 = \log_5 5 \quad (۲)$$

$$2x-1 > 0, 3x-5 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}, x > \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > \frac{5}{3}$$

$$\log_5(2x-1) + \log_5(3x-5) = \log_5((2x-1)(3x-5)) = \log_5 5 \Rightarrow (2x-1)(3x-5) = 5$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 13x + 5 = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x(6x-13) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{13}{6} \xrightarrow{x > \frac{5}{3}} x = \frac{13}{6}$$

پرسش‌های تشریحی:

(مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۱۴ کتاب درسی)

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\log_4 4 + \log_4 2 \quad (ب) \qquad \log 4 + \log 75 - \log 3 \quad (آ)$$

۲- با فرض $\log 2 = 0.3$ ، $\log 3 = 0.47$ و $\log 7 = 0.8$ ، مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱۲ کتاب درسی)

$$\log_4 3 \times \log_{15} 14 \quad (ب) \qquad \log_{42} 18 \quad (آ)$$

۳- اگر $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.5$ باشند، مقدار ترکیبی $\log \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ و $\log \sqrt[3]{12^2}$ را به دست آورید.

(شوربهر ۱۴۰۲)

۴- هر یک از معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

ا) $\log(x+2) = 3 \log 2 - \log(x-5)$

ب) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$

پ) $\log(x+3) + \log x = 1$

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۱۴ کتاب درسی)

(فرورد ۱۴۰۲)

(فرورد ۱۴۰۲)

(فرورد ۱۴۰۲)

۵- آیا دو تابع $f(x) = \log x^2$ و $g(x) = 2 \log x$ با هم برابرند؟ چرا؟

(فرورد ۱۴۰۲)

۶- از هر یک از دستگاه‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.

ا)
$$\begin{cases} \log(y+2) = 1 \\ \log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} \log_2 x = 1 + \log_2(y+1) \\ x^2 - y^2 = 32 \end{cases}$$

۷- دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

ا) $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2 - \log_2(x+1)}$

BOX 4: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی (صفحه ۱۱۵ تا ۱۱۸ کتاب درسی)

در BOX های ۱ و ۲ با نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ و تابع لگاریتمی $g(x) = \log_a x$ آشنا شدیم. در این BOX می‌فهمیم به کمک انتقال و قرینه، نمودار برفی از توابع نمایی و لگاریتمی را رسم کنیم.

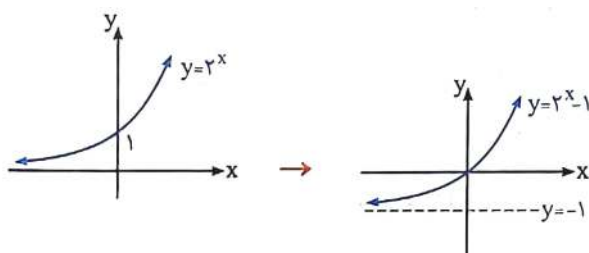
الف) نمودارها

انتقال عرضی و طولی

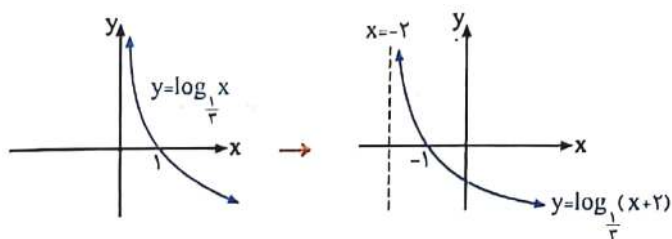
فرض کنیم b و k دو عدد مثبت باشند. می‌دانیم اگر نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم، با انتقال b واحد به سمت بالا یا پایین به ترتیب نمودار $y = f(x) + b$ یا $y = f(x) - b$ به دست می‌آید. همچنین با انتقال k واحد به سمت راست، نمودار $y = f(x - k)$ و با انتقال k واحد به سمت چپ، نمودار $y = f(x + k)$ به دست می‌آید.

تعریف: نمودار توابع $f(x) = 2^x - 1$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار $f(x) = 2^x - 1$ ، کافی است نمودار $y = 2^x$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین جابه‌جا کنیم (در این جابه‌جایی، محور x ها نیز یک واحد به سمت پایین جابه‌جا می‌شود):

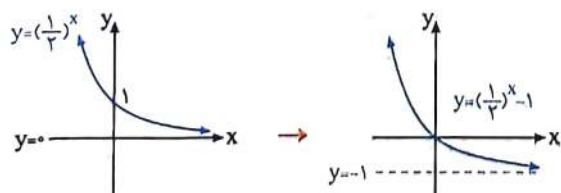


برای رسم نمودار $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ ، کافی است نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم (در این انتقال، خط $x = 0$ (محور y ها) نیز دو واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند):



نکته: توابعی با ضابطه $f(x) = b \cdot a^x + c$ رفتار توابع نمایی را دارند که رسم این توابع به کمک انتقال و قرینه انجام‌پذیر است. در رسم این توابع باید خط $y = 0$ (محور x ها) به اندازه c واحد به سمت بالا ($c > 0$) یا به سمت پایین ($c < 0$) انتقال پیدا کند و نمودار به خط $y = c$ نزدیک شود.

مثال: به عنوان مثال، برای رسم نمودار $y = (\frac{1}{p})^x - 1$ باید نمودار $y = (\frac{1}{p})^x$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم. در این انتقال خط $y = 0$ (محور x ها) نیز به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال داده می‌شود و نمودار به خط $y = -1$ نزدیک می‌شود.



توجه: اگر نقطه $(0, 1)$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، به نقطه $(0, 0)$ می‌رسد. بنابراین نمودار از مبدأ مختصات، یعنی نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد.

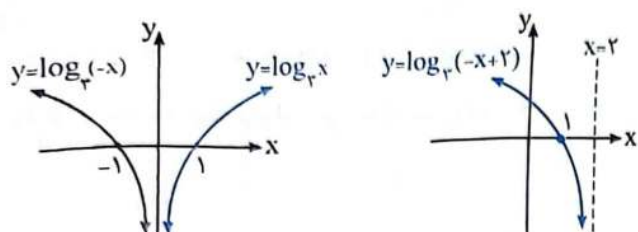
یادآوری: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم و آن را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، آنگاه نمودار حاصل، نمودار تابع $y = f(-x)$ خواهد بود.

نکته: توابع $y = \log_a x$ و $y = \log_a (-x)$ نسبت به محور y ها قرینه همدیگر هستند.

تذکره: به کمک انتقال و قرینه نسبت به محور y ها می‌توان نمودار توابع به فرم $y = f(-x \pm k)$ را رسم کرد.

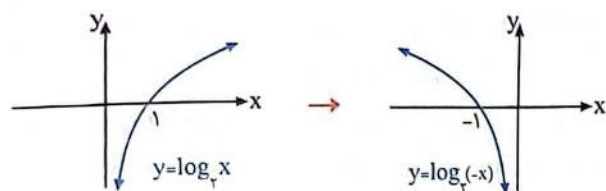
مثال: برای رسم نمودار تابع $y = \log_3 (-x + 2)$ ، داریم:

اگر ابتدا نمودار $y = \log_3 x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، نمودار $y = \log_3 (-x)$ به دست می‌آید و سپس با انتقال ۲ واحد نمودار $y = \log_3 (-x)$ به سمت راست، نمودار $y = \log_3 (-(x - 2))$ به دست می‌آید (توجه کنید که در انتقال ۲ واحد به سمت راست، خط $x = 0$ نیز باید ۲ واحد به سمت راست انتقال پیدا کند).

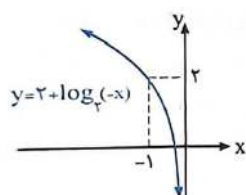


تعریف: نمودار تابع $y = 2 + \log_3 (-x)$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا از روی نمودار $y = \log_3 x$ ، نمودار $y = \log_3 (-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، کافی است نمودار $y = \log_3 x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم:



اگر نمودار $y = \log_3 (-x)$ را دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = 2 + \log_3 (-x)$ به دست می‌آید:



یادآوری: اگر نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست می‌آید.

نکته: نمودار توابع نمایی با ضابطه‌های $y = a^x$ و $y = -a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) و همچنین نمودار توابع لگاریتمی با ضابطه‌های $y = \log_a x$ و $y = -\log_a x$ نسبت به محور x ها قرینه یکدیگرند.

تعریف: در تابع با ضابطه $f(x) = \log_2(\Delta x - 1) - 2$:

(۱) مقدار $f(\frac{1}{4})$ را به دست آورید.

(۲) نمودار f ، خط $y = -1$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

پاسخ: (۱) با قراردادن عدد $\frac{1}{4}$ به جای x در ضابطه تابع f ، مقدار $f(\frac{1}{4})$ را به دست می‌آوریم:

$$f(\frac{1}{4}) = \log_2(\Delta(\frac{1}{4}) - 1) - 2 = (\log_2 \frac{1}{4}) - 2 = (\log_2 2^{-2}) - 2 = (-2 \log_2 2) - 2 = -4$$

(۲) با حل معادله $f(x) = -1$ ، طول نقطه تلاقی نمودار f با خط $y = -1$ به دست می‌آید:

$$f(x) = -1 \Rightarrow \log_2(\Delta x - 1) - 2 = -1 \Rightarrow \log_2(\Delta x - 1) = 1 \Rightarrow \Delta x - 1 = 2^1 \Rightarrow \Delta x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\Delta}$$

ب) کاربرد تابع لگاریتمی

• زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد.

• مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

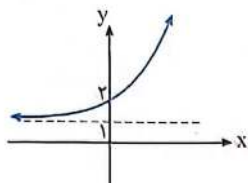
تعریف: اگر بزرگی زلزله‌ای برابر ۶ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱۷ کتاب درسی)

پاسخ: طبق فرض $M = 6$ است و داریم:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M = 11/8 + 1/5 \times 6 = 11/8 + 6/5 = 20/8 \Rightarrow E = 10^{20/8} \text{ Erg}$$

پرسش‌های تشریحی:

۱- در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{x-b}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید. (تمرین ۱ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی)



(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی)

۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = 2 + \log_3(x + 1) \quad (آ)$$



(فرداد ۱۴۰۲)

ب) $y = -\log(x-3)$

پ) $y = 1 - \log_{\frac{1}{5}}(-x)$

ت) $y = \frac{|x|}{x} \log x$

(فرداد ۱۴۰۲)

۳- نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید.

(شهریور ۱۴۰۲)

۴- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x - 1$ از نقطه $(9, 1)$ عبور کند:

آ) مقدار a را به دست آورید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید.

(فرداد ۱۴۰۲)

۵- نمودار تابع $f(x) = -\log_2(x+2)$ را رسم کنید. دامنه آن را به صورت بازه بنویسید.

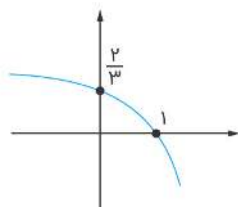
۶- نمودار تابع $y = \log_3 x$ را ابتدا ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g ، محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۷- اگر بزرگی یک زمین‌لرزه برابر $6/2$ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزادشده در این زلزله چه قدر است؟ (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱۷ کتاب درسی)

۸- اگر انرژی آزادشده در یک زلزله برابر $10^{20/5}$ ارگ باشد، بزرگی این زلزله را به دست آورید.

Homework (1)

۱ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = 1 + c \times 3^{a+bx}$ است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{10}{9}$
- (۲) $\frac{8}{9}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{7}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

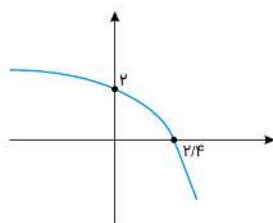
۲ اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟

- (۲) $\frac{4}{3}$
- (۴) ۴

- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۳) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ نمودار تابع $y = c + \log_5(ax + b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{2}{5}$
- (۲) $-\frac{3}{5}$
- (۳) $-\frac{1}{10}$
- (۴) $-\frac{3}{10}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۴

اگر $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 3 \simeq 0/4$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $(\log \frac{5}{3})x^2 + (\log 9)x - \log 15 = 0$ چقدر است؟

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (۱) $\frac{26}{3}$ | (۲) $\frac{14}{3}$ |
| (۳) $\frac{14}{11}$ | (۴) $\frac{26}{11}$ |

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵

اگر $A = \{ \frac{1}{\sqrt{\log_{\lambda} x + 4 \log_{x^{\lambda}} 2}} : x > 1 \}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| (۳) $\sqrt{6}$ | (۴) $\sqrt{3}$ |

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶

مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته $12/5$ درصد از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز، $\frac{1}{V}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_2 3 = 1/6$ و $\log_2 3 = 0/6$)

- | | |
|--------|---------|
| (۱) ۸ | (۲) ۲۸ |
| (۳) ۵۶ | (۴) ۱۲۶ |

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷

مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{1}{q}$ از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه $\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_2 5 = 2/4$ و $\log_3 5 = 1/4$)

- | | |
|---------|---------|
| (۱) ۳۸۰ | (۲) ۳۶۰ |
| (۳) ۴۴۰ | (۴) ۴۲۰ |

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸

اگر $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$ باشد، مقدار x کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۱ | (۲) ۲ |
| (۳) ۳ | (۴) ۴ |

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹

تابع نمایی $f(x) = 5 - 3^{ax+b}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(0) = \frac{1}{p} f(\frac{1}{p}) = 2$ باشد، مقدار جزء صحیح $f(-\frac{1}{p})$ کدام است؟

- | | |
|--------|---------|
| (۱) ۱ | (۲) ۲ |
| (۳) -۱ | (۴) صفر |

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۰ تابع $f(x) = \sqrt[3]{2^{ax+b}}$ از نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(8) = 5$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ ($\log 3 = 0.48$)

- (۱) ۳۶۰
(۲) ۳۰۰
(۳) ۲۷۰
(۴) ۲۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ اگر تساوی $\log_x y - 2 \log_y x = 1$ به ازای $x, y > 1$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

- (۱) $y = x^2$
(۲) $y = x^3$
(۳) $y = \sqrt{x}$
(۴) $xy = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ نمودار تابع با ضابطه $y = a(\frac{1}{3})^x$ در نقطه‌ای به عرض ۴ محور y ها را قطع می‌کند. مقدار تابع در $x = -2$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$
(۲) $\frac{9}{4}$
(۳) ۲۷
(۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۴ تابع $f(x) = a + b(\frac{1}{2})^x$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(-1) = -1$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ از تساوی $(-1)^{-1} \times 9^{x-1} = (-\frac{1}{3})^x$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۴
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ اگر در معادله $2\log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2$ مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) ۳ (۴) ۹

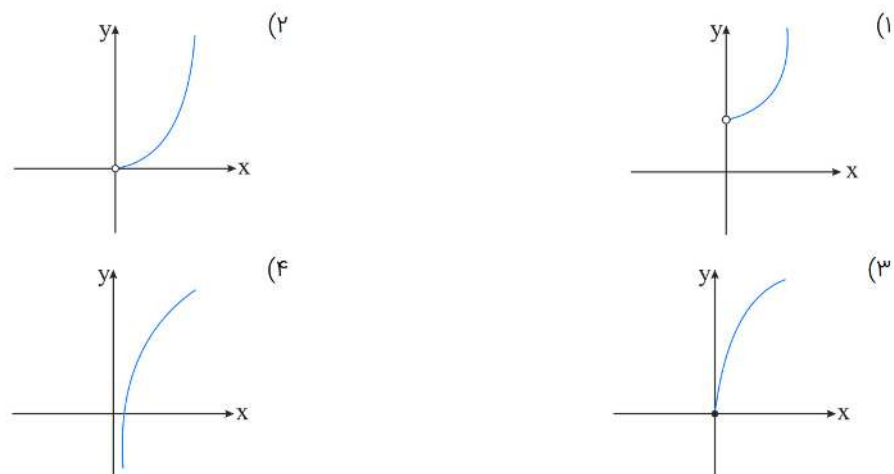
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۷۰۱۴۰۱

۱۷ در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ ($\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.48$)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴
(۳) ۳۰ (۴) ۳۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸ نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ، کدام است؟ (با تغییر)



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\left(\frac{1}{p}\right)^x + b$ ، محور x ها را با طول ۱- و محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع f در $x = 1$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۲۰ فرض کنید $[a, b]$ برد تابع $f(x) = 2 - \sqrt{5 \sin^2(x) - 1}$ باشد. مقدار $a + b$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

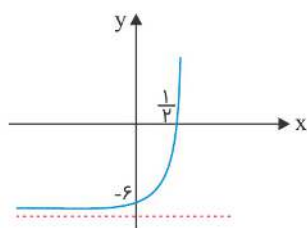
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۱ مجموع جواب‌های معادله $\log_2(4^x + 15) = x + 3$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۵
(۳) $\log_2 15$
(۴) $\log_4 15$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

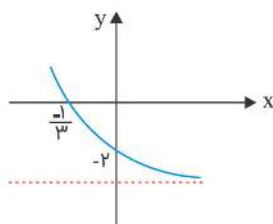
۲۲ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(2)$ کدام است؟



- (۱) ۲۳۴
(۲) ۱۰۸
(۳) ۷۲
(۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ کدام است؟



- (۱) ۵۴
(۲) ۶۰
(۳) ۴۸
(۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

پاسخ (1) Homework

گزینه ۲

۱

$$f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \Rightarrow c \times 3^a = -\frac{1}{3}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + c \times 3^{a+b} = 0 \Rightarrow 1 + c \times 3^a \times 3^b = 0$$

$$\xrightarrow{c \times 3^a = -\frac{1}{3}} 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(3^b) = 0 \Rightarrow 3^b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$f(-1) = 1 + c \times 3^{a-b} = 1 + c \times 3^a \times 3^{-b} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۴

۲

معادله را به صورت زیر مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\log_2(x-2)(x^2+2x+4) = 3 \Rightarrow x^3 - 8 = 8 \\ \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$$

حال این مقدار x را در عبارت داده شده جایگذاری می‌کنیم.

$$\log_{\sqrt[3]{2}} x = \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{16} = \log_2 16 = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

دو نقطه با مختصات مشخص $(0, 2)$ و $(2/4, 0)$ را روی تابع صدق می‌دهیم.

$$\begin{aligned}(0, 2) &\Rightarrow 2 = c + \log_{\Delta} b \\ (2/4, 0) &\Rightarrow 0 = c + \log_{\Delta} (2/4a + b) \\ &\Rightarrow \log_{\Delta} (2/4a + b) - \log_{\Delta} b = -2 \\ &\Rightarrow \log_{\Delta} \frac{2/4a + b}{b} = -2\end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned}\frac{2/4a + b}{b} &= \Delta^{-2} \Rightarrow 2/4 \frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{2\Delta} \\ &\Rightarrow \frac{24}{10} \cdot \frac{a}{b} = \frac{-24}{2\Delta} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-10}{2\Delta} = \frac{-2}{\Delta}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$\log \Delta = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \simeq 0/7$$

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 \simeq 0/8$$

$$\log 1\Delta = \log \Delta + \log 3 \simeq 1/1$$

$$\log \frac{\Delta}{3} = \log \Delta - \log 3 \simeq 0/3$$

$$\left(\log \frac{\Delta}{3}\right)x^2 + (\log 9)x - \log 1\Delta = 0 \Rightarrow 0/3x^2 + 0/8x - 1/1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1, x_2 = -\frac{1/1}{0/3}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = 1 + \frac{1/1}{0/3} = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\begin{aligned}\log_{\lambda} x + f \log_{x^f} 2 &= \frac{1}{f} \log_{\lambda} x + \frac{f}{f} \log_x 2 \geq 2 \sqrt{\frac{1}{f} \times \frac{f}{f}} = \frac{f}{f} \\ \Rightarrow \frac{1}{f} \log_{\lambda} x + \frac{f}{f} \log_x 2 &\geq \frac{f}{f} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{f} \log_{\lambda} x + \frac{f}{f} \log_x 2} \geq \frac{2}{\sqrt{f}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\log_{\lambda} x + f \log_{x^f} 2}} &\leq \frac{\sqrt{f}}{2}\end{aligned}$$

نکته ۱: دو عدد معکوس با ضرایب a و b که هر دو مثبت هستند، رابطه زیر را دارند:

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$$

نکته ۲: $\log_m n$ و $\log_n m$ معکوس هم هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

در هر هفته $12/5$ درصد از جرم باقی مانده را از دست می‌دهد یعنی $\frac{12/5}{100} = \frac{1}{\lambda}$ از جرم از دست می‌دهد و $\frac{7}{\lambda}$ از جرم باقی می‌ماند. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\log_{\lambda} 3 &= 1/6 \Rightarrow \log_3 2 = \frac{10}{16} \\ \log_{\lambda} 3 &= 0/6 \Rightarrow \log_3 7 = \frac{10}{6}\end{aligned}$$

اگر جرم اولیه را M فرض کنیم داریم:

$$\begin{aligned}\text{جرم باقی‌مانده} &= \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{t}{7}} \times M = \frac{1}{V} \times M \\ \xrightarrow{\frac{t}{7}=n} \left(\frac{V}{\lambda}\right)^n \times M &= \frac{1}{V} M \Rightarrow \left(\frac{V}{\lambda}\right)^n = \frac{1}{V} \\ \log_3 \left(\frac{V}{\lambda}\right)^n &= \log_3 \frac{1}{V} \Rightarrow n(\log_3 V - \log_3 \lambda) = -\log_3 V \\ \Rightarrow n\left(\frac{10}{6} - 3 \log_3 2\right) &= -\left(\frac{10}{6}\right) \Rightarrow n\left(\frac{10}{6} - 3\left(\frac{10}{16}\right)\right) = -\frac{10}{6} \Rightarrow n = 8 \\ \Rightarrow \frac{t}{7} = n &\Rightarrow t = 7 \times 8 = 56\end{aligned}$$

بنابراین پس از ۵۶ روز $\frac{1}{V}$ از جرم عنصر باقی می‌ماند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر در هر ۶۰ دقیقه $\frac{1}{q}$ جرم از دست برود، پس $\frac{\lambda}{q}$ آن باقی می‌ماند.

... پس از یک ساعت ، در لحظه صفر
 $\frac{\lambda}{q}a$ ، a ، ...

بنابراین یک دنباله هندسی داریم که بهتر است جمله اول را $\frac{\lambda}{q}a$ فرض کنیم، چون در لحظه صفر هنوز جرمی از دست نرفته است، پس:

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} a = \frac{\lambda}{q} a \left(\frac{\lambda}{q}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{q}\right)^n = \frac{1}{\epsilon}$$

بنابراین:

$$n = \log_{\frac{\lambda}{q}} \frac{1}{\epsilon} = \frac{-\log \epsilon}{\log \frac{\lambda}{q}} = \frac{-(\log 2 + \log 3)}{3 \log 2 - 2 \log 3} = \frac{-\log 2 (1 + \log_2 3)}{\log 2 (3 - 2 \log_2 3)}$$

با توجه به اطلاعات مسئله:

$$\frac{\log_2 5 = 2/4}{\log_2 5 = 1/4} \rightarrow \frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \frac{2/4}{1/4} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \frac{2/4}{1/4} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{12}{7}$$

پس:

$$n = \frac{-(1 + \frac{12}{7})}{3 - \frac{24}{7}} = +\frac{19}{3} \Rightarrow n = \frac{19}{3} \times 60 = 19 \times 20 = 380$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

$$\frac{3^x(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5)}{2^x(2^{-2} + 2^{-1} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3)} = 52$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{52 \times 15/75}{364} = \frac{819}{364} = 2/25 \Rightarrow x = 2$$

نکته:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = \frac{1(1 - 3^6)}{1 - 3} = 364$$

$$2^{-2} + 2^{-1} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = \frac{1(1 - 2^6)}{1 - 2} = \frac{63}{4} = 15/75$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$f(0) = 5 - 3^b = 2 \Rightarrow 3^b = 3^1 \Rightarrow b = 1$$

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$5 - 3^{\frac{a}{2}+1} = 4 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+1} = 1 = 3^0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - 3^{(-\frac{1}{2})(-2)+1} = 5 - 3^2$$

$$5 - \sqrt[3]{3^3} = 5 - \underbrace{3}_{1/7} \simeq -0.1$$

$$\Rightarrow \left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = [-0.1] = -1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 = \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{2} (*)$$

$$f^{-1}(8) = 5 \Rightarrow f(5) = 8 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 8 = \sqrt[3]{2^{5a+b}}$$

$$2^{5a+b} = 2^9 \Rightarrow 5a + b = 9 \xrightarrow{(*)} 5a - \frac{a}{2} = 9 \Rightarrow \frac{9a}{2} = 9 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{(*)} b = -1$$

در آخر داریم:

$$a - b = 2 - (-1) = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

مقدار اولیه عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{1}{10}$ باقی مانده را از دست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{9}{10}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = 24\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$1 = 24\left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{24}$$

از طرفین $\log_{10}$ می‌گیریم:

$$\begin{aligned} n(\log(\frac{9}{10})) &= \log(\frac{1}{24}) \Rightarrow n(\log 9 - \log 10) = \log(\frac{1}{24}) \\ \Rightarrow n(2 \log 3 - \log 10) &= -\log 24 \Rightarrow n(2 \times 0.477 - 1) = -0.3802 \\ \Rightarrow n(0.954 - 1) &= -0.3802 \Rightarrow 0.046n = 0.3802 \Rightarrow n = 12 \end{aligned}$$

پس ۱۲ ماه یعنی $12 \times 30 = 360$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم).

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

فرض می‌کنیم $\log_y x = t$ باشد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} - 2t &= 1 \Rightarrow 1 - 2t^2 = t \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{x, y > 1} \log_y x &= \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x^2 = y \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \Rightarrow a\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x \\ f(-2) &= 4\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 4 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$f^{-1}(-1) = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1 \\ \Rightarrow a + 2b = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -1, a = 1$$

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$(81)^{-1} = 3^{-4}, \quad 9^{x-1} = 3^{2x-2}, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^x = (-3)^{-x}$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$3^{-4} \times 3^{2x-2} = (-3)^{-x} \Rightarrow 3^{2x-6} = (-3)^{-x} \\ 2x - 6 = -x \Rightarrow x = 2$$

چون x زوج است، $(-3)^{-x}$ برابر همان 3^{-x} می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

بافرض $x = 9$ و تغییر متغیر $\log_a 9 = t$ معادله را تنظیم می‌کنیم:

$$2 \times \frac{1}{t} + \frac{1}{2}t = 2 \Rightarrow \frac{2}{t} + \frac{t}{2} = 2 \Rightarrow \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t = 2 \\ \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow 9 = a^2 \xrightarrow{a>0} a = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

در هر روز غلظت محلول $\frac{100-4}{100}$ یعنی $\frac{96}{100}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n = a \left(\frac{96}{100} \right)^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

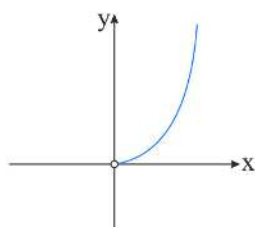
$$\begin{aligned} a \left(\frac{96}{100} \right)^n &= \frac{1}{3} a \Rightarrow n \log \left(\frac{96}{100} \right) = -\log 3 \Rightarrow n(\log 2^5 \times 3 - \log 10^2) = -\log 3 \\ \Rightarrow n(5 \log 2 + \log 3 - 2) &= -\log 3 \Rightarrow n(1/5 + 0/48 - 2) = -0/48 \Rightarrow n = \frac{-0/48}{-0/02} = 24 \end{aligned}$$

بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

دامنه تابع $x > 0$ است.

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = 3^{2 \log_3 x} = 3^{\log_3 x^2} = x^2$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

مختصات نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 2)$ را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم و با استفاده از دستگاه معادلات، a و b را به دست می‌آوریم.

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0, \quad a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \rightarrow a = -2, \quad b = 4$$

ضابطه تابع f را نوشته و مقدار تابع را در $x = 1$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \Rightarrow f(1) = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 3$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 5} 0 \leq 5\sin^2 x \leq 5 \xrightarrow{-1} -1 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4$$

$$\xrightarrow{5\sin^2 x - 1 \geq 0} 0 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq -2 \Rightarrow 2 \geq 2 - \sqrt{5\sin^2 x - 1} \geq 2 - 2$$

$$\Rightarrow 1 \geq f(x) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{5}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\log_2(2^x + 15) = x + 3 \Rightarrow 2^x + 15 = 2^{x+3}$$

$$\xrightarrow{2^x = t} t + 15 = 8t \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 = 2^x \Rightarrow x = \log_2 3 \\ t = 5 = 2^x \Rightarrow x = \log_2 5 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

باتوجه به شکل، دو نقطه $(\frac{1}{3}, 0)$ و $(0, -6)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(0, -6) : f(0) = -6 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{0+b} = -6 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b = 3$$

$$\Rightarrow 3^{-b} = 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right) : f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a-1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a-1} = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}a-1} = 3^2 \Rightarrow 3^{-\frac{1}{3}a+1} = 3^2 \Rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow a = -3$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \Rightarrow f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4-1} = -9 + 3^5$$

$$= -9 + 243 = 234$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

باتوجه به شکل، دو نقطه $(-\frac{1}{3}, 0)$ و $(0, -2)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(0, -2) : f(0) = -2 \Rightarrow -4 + 2^b = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right) : f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow -4 + 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1}$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^{-3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)+1} = -4 + 2^{5+1} = -4 + 2^6 = 60$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱ نامعادله $\left(\frac{1}{f}\right)^{x+1} > 8^{2x+1}$ را حل نمایید.

۲ در مورد تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} \log(-x)$ کدام گزینه درست است؟

$$D_f = (0, +\infty) \quad (۱)$$

(۲) نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها تقارن دارد.

(۳) نمودار تابع f در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند.

$$R_f = \mathbb{R} \quad (۴)$$

۳ نمودار تابع $g(x) = \left(\frac{1}{p}\right)^{x-1}$ را رسم کنید.

۴ توابع $y = x^2$ و $y = 2^x$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف نمودار توابع را رسم کنید.

ب در چند نقطه این دو تابع باهم مساوی هستند.

پ عدد $\sqrt{2}$ را در محور x ها در تابع $y = 2^x$ پیدا کنید و مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را مشخص نمایید.

۵ نوعی باکتری در بدن انسان به صورت نمایی تکثیر می‌شود. این باکتری با تعداد ۱۰۰ عدد شروع می‌شود. پس از گذشت نیم ساعت هر باکتری به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p(t) = 100 \times 10^{2t} \quad ; 0 \leq t \leq 16$$

الف پس از ۳ ساعت اندازه توده چقدر است؟

ب پس از چند ساعت مقدار توده ۱۰۲۴۰۰ می‌شود؟

۶ شدت زلزله رودبار در سال ۱۳۶۹ برابر $7/2$ ریشتر گزارش شده است. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده آن برحسب ارگ را پیدا کنید.

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 12 \quad (۷)$$

$$\log(x+3) + \log x = 1 \quad (۸)$$

۹

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-4x} = \left(\frac{625}{81}\right)$$

۱۰

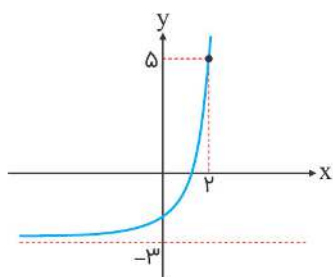
$$\log_{\sqrt{3}}(\log_{\sqrt{4}}(\log_{\sqrt{25}}x)) = 2$$

۱۱

نمودار $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 1$ را رسم نمایید.

۱۲

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a + 2^{x-b}$ است. a و b را به دست آورید.



۱۳

نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۲۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۸۰ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که بعد از ۷۰ سال باقی می‌ماند را بیابید.

۱۴

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda^x} - 4\right)(2^{-x} + 1)}$ کدام است؟

$$\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right) \quad (2)$$

$$(-\infty, -\frac{3}{2}] \quad (1)$$

$$\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right) \quad (4)$$

$$(-\infty, -\frac{2}{3}] \quad (3)$$

۱۵

کدام گزینه درست است؟

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x > (\sqrt{2}-1)^{x^2} \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{3^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} > \sqrt{3^{\sqrt{2}-1}} \quad (1)$$

هیچ‌کدام (4)

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} > x^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 0 < x < 1 \quad (3)$$

۱۶

معادله $4^x + 2^{x+1} + 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

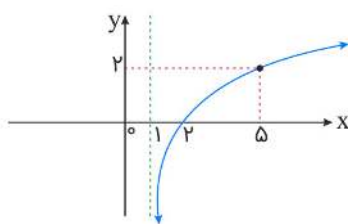
یک (2)

صفر (1)

سه (4)

دو (3)

۱۷ شکل زیر، مربوط به $f(x) = a + \log_v(x - b)$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) -۲

۱۸ برد تابع $f(x) = 3^{-x+1} - 2$ کدام است؟

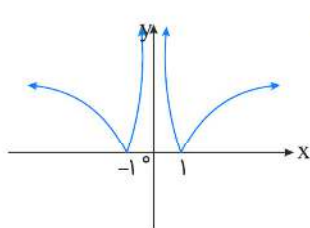
(۲) $\mathbb{R}$

(۱) $[-2, +\infty)$

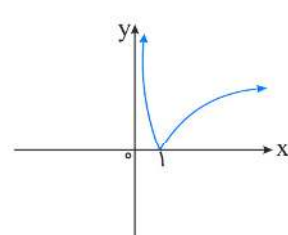
(۴) $(-\infty, -2)$

(۳) $(-2, +\infty)$

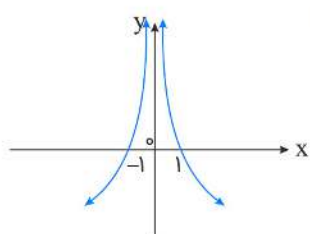
۱۹ نمودار مربوط به تابع $f(x) = |\log_a x|$ به ازای $0 < a < 1$ به کدام صورت است؟



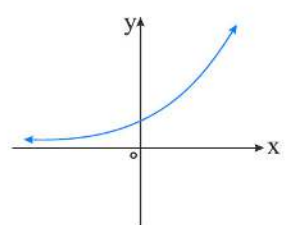
(۲)



(۱)

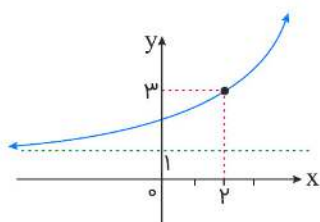


(۴)



(۳)

۲۰ نمودار زیر، مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟



(۱) $f(x) = \log_v x + 1$

(۲) $f(x) = \log_v(x + 1)$

(۳) $f(x) = v^x - 1$

(۴) $f(x) = v^{x-1} + 1$

۲۱ اگر شدت یک زمین لرزه، یک ریشتر افزایش پیدا کند، انرژی آزاد شده توسط آن، چند برابر می‌شود؟

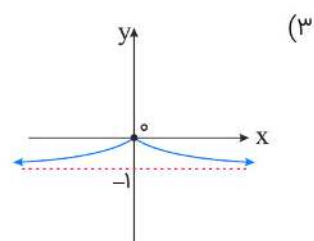
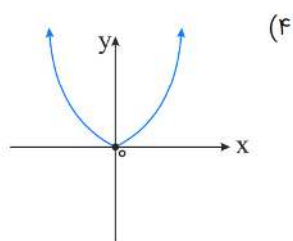
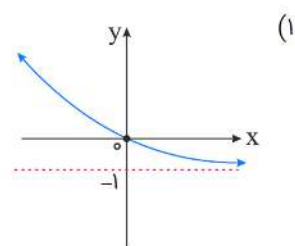
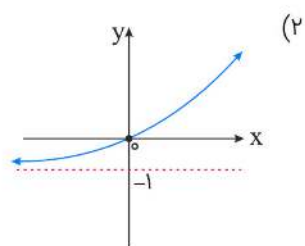
(۲) $10\sqrt{10}$

(۱) ۱۰

(۴) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(۳) $\sqrt{10}$

۲۲ نمودار تابع $f(x) = 2^{-|x|} - 1$ به کدام صورت است؟



۲۳ چند عدد صحیح در نامعادله $\frac{1}{27} < (\sqrt{3})^{x+1} < (\frac{1}{9})^x$ صدق می‌کند؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۳

۲۴ معادله $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ چند ریشه مثبت دارد؟

(۱) صفر

(۲) یک

(۳) دو

(۴) بی‌شمار

۲۵ تابع $f(x) = 2^{ax+b} - 4$ از نقاط $A(-\frac{1}{3}, 0)$ و $B(0, -2)$ می‌گذرد. $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

(۱) ۵۴

(۲) ۴۸

(۳) ۶۰

(۴) ۲۸

۲۶ مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{2}-1)^{x^2+x} > (\frac{1}{\sqrt{2}+1})^{3x+8}$ کدام است؟

(۱) $|x+1| < 3$

(۲) $|x+1| > 3$

(۳) $|x-1| < 3$

(۴) $|x-1| > 3$

پاسخ (2) Homework

۱

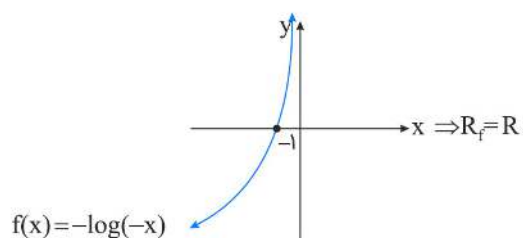
$$\begin{aligned} 1^{x+1} &> \left(\frac{1}{e}\right)^{x+1} \Rightarrow (1^e)^{x+1} > (e^{-1})^{x+1} \\ \Rightarrow e^{x+1} > e^{-x-1} &\Rightarrow e^x + 1 > -x - 1 \\ \Rightarrow 2x > -2 &\Rightarrow x > -1 \end{aligned}$$

گزینه ۴

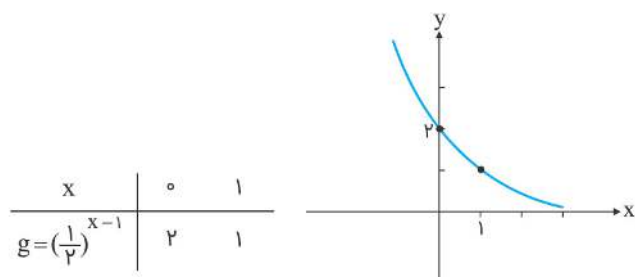
۲

$$-x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x} \log(-x) \Rightarrow f(x) = -\log(-x)$$

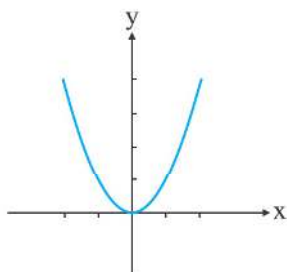


۳

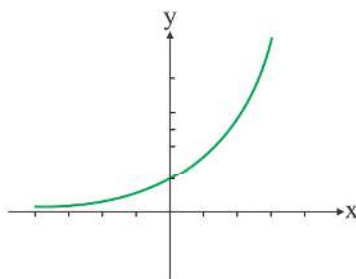




الف



x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

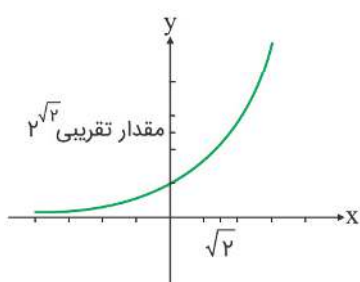


x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	1/4	1/2	1	2	4

باتوجه به نمودار توابع در قسمت قبل، در ۳ نقطه مساوی هستند.

ب

پ



$$p(3) = 100 \times 2^{p(3)} = 100 \times 64 = 6400$$

الف ۵

$$p(t) = 100 \times 2^{2t} = 102400 \Rightarrow 2^{2t} = 1024 = 2^{10} \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

ب

$$\log E = 11/\lambda + 1/\omega M = 11/\lambda + 1/\omega(7/2) = 22/6$$

۶

$$\Rightarrow E = 10^{22/6} \text{ Erg}$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

$$\log_5(3x) = \log_5 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

۷

$$\log x(x+3) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 10 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0$$

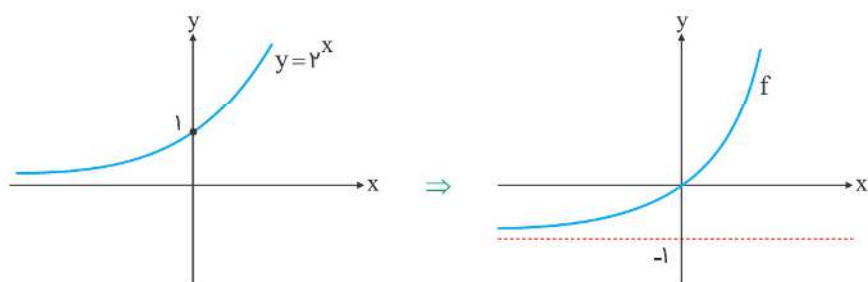
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 & \text{ق ق غ} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-4x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Rightarrow x^2 - 4x = -4 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_{\sqrt[3]{F}}(\log_{\sqrt[3]{F\Delta}} x) = (\sqrt[3]{F})^2 \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{F\Delta}} x = (\sqrt[3]{F})^{(\sqrt[3]{F})^2}$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt[3]{F\Delta})^{(\sqrt[3]{F})^{(\sqrt[3]{F})^2}} = (\sqrt[3]{F\Delta})^{(\sqrt[3]{F})^2} = 2\Delta$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 1 = 2^x - 1$$



بنا به نمودار رسم شده نمودار 2^{x-b} ، 2^{x-b} واحد به پایین آورده شده است، پس $a = -3$ است.

$$A \left| \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right. \in f : \Delta = -3 + 2^{2-b} \Rightarrow 2^3 = 2^{2-b} \Rightarrow 2 - b = 3 \Rightarrow b = -1$$

$$m(t) = \lambda \circ \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Rightarrow m(\sqrt{t}) = \lambda \circ \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lambda \circ \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\sqrt{t}/\Delta}$$

$$= \frac{\lambda \circ}{2^{\sqrt{t}/\Delta}} = \frac{\lambda \circ}{2^{\sqrt{t}}} = \frac{\lambda \circ}{\sqrt[2]{2^{\sqrt{t}}}} = \frac{\lambda \circ}{\lambda \sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

گزینه ۳

$$\left(\frac{1}{\lambda^x} - 4\right) \underbrace{(2^{-x} + 1)}_{\text{مثبت}} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^x} - 4 \geq 0 \Rightarrow 2^{-3x} \geq 4 \Rightarrow 2^{-3x} \geq 2^2$$

$$\Rightarrow -3x \geq 2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{2}{3}]$$

گزینه ۲

۱۵

گزینه "۱":

$$\frac{1}{\sqrt{p}+1} = \sqrt{p}-1 \Rightarrow \sqrt{3^{\frac{1}{\sqrt{p}+1}}} = \sqrt{3^{\sqrt{p}-1}}$$

گزینه "۲":

$$(\sqrt{p}-1)^x > (\sqrt{p}-1)^{x^p} \xrightarrow{0 < \sqrt{p}-1 < 1} x < x^p \\ \Rightarrow x^p - x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1$$

گزینه "۳": مثال نقض $x = 2$ دارد.

گزینه ۱

۱۶

$$p^x = t \Rightarrow t^p + pt + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^p = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \underbrace{p^x}_{\text{مثبت}} = \underbrace{-1}_{\text{منفی}} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

گزینه ۲

۱۷

$$\begin{cases} f(p) = 0 \Rightarrow 0 = a + \log_p(p-b) \\ f(5) = p \Rightarrow p = a + \log_p(5-b) \end{cases} \Rightarrow p = \log_p(5-b) - \log_p(p-b)$$

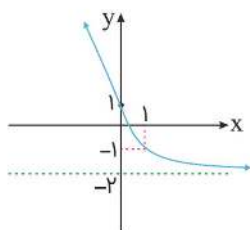
$$\Rightarrow \log_p \frac{5-b}{p-b} = p \Rightarrow \frac{5-b}{p-b} = p^p \Rightarrow 5-b = p^p(p-b) \Rightarrow b = 1$$

$$f(p) = 0 \Rightarrow 0 = a + \log_p(p-1) \Rightarrow 0 = a + \log_p 1$$

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow b - a = 1 - 0 = 1$$

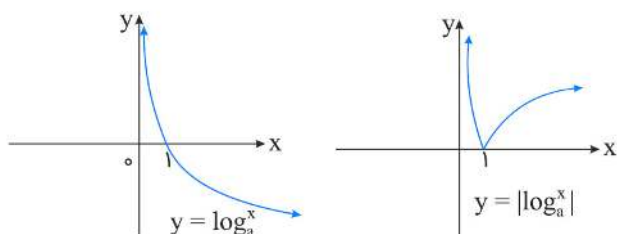
گزینه ۳

۱۸



$$\Rightarrow R_f = (-2, +\infty)$$

$$f(x) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$$



$$f(x) = \frac{1}{p} \times p^x + 1 \Rightarrow f(x) = p^{x-1} + 1$$

اگر بزرگی زلزله‌ای برابر با M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر با E در واحد ارگ است:

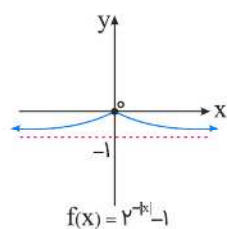
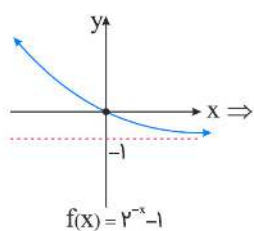
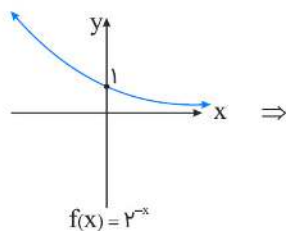
$$\log E = 11/\lambda + 1/\omega M$$

$$\begin{cases} \log E_1 = 11/\lambda + 1/\omega M_1 \\ \log E_r = 11/\lambda + 1/\omega (M_1 + 1) \end{cases} \Rightarrow \log E_r - \log E_1 = 1/\omega$$

$$\Rightarrow \log \frac{E_r}{E_1} = 1/\omega \Rightarrow \frac{E_r}{E_1} = 10^{1/\omega} \Rightarrow \frac{E_r}{E_1} = 10\sqrt{10}$$

گزینه ۳

۲۲



گزینه ۳

۲۳

$$\frac{1}{2^7} < (\sqrt{2})^{x+1} : 2^{-7} < 2^{\frac{x+1}{2}} \Rightarrow -7 < \frac{x+1}{2} \Rightarrow x > -9 \quad (1)$$

$$(\sqrt{2})^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^x : 2^{\frac{x+1}{2}} < 2^{-x} \Rightarrow \frac{x+1}{2} < -x \Rightarrow x+1 < -2x$$

$$\Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -9 < x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$$

گزینه ۱

۲۴

$$2^x = t \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ t = -3 \Rightarrow 2^x = -3 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

بنابراین معادله هیچ ریشه مثبتی ندارد.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{array} \right. \in f : 2^{-\frac{a}{3}+b} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{a}{3}+b} = 2^2 \Rightarrow -\frac{a}{3} + b = 2 \quad (I) \\ B \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right. \in f : 2^b - 2 = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1 \quad (II) \end{array} \right\}$$

$$(I), (II) \Rightarrow a = -3, b = 1$$

$$f(x) = 2^{-3x+1} - 2 \Rightarrow f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2^6 - 2 = 62$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2}-1)^{x^2+x} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{3x+8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \end{array} \right. \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^{x^2+x} > (\sqrt{2}-1)^{3x+8}$$

$$\xrightarrow[\text{کاهشی}]{0 < \sqrt{2}-1 < 1} x^2 + x < 3x + 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \xrightarrow{-1} -3 < x-1 < 3 \Rightarrow |x-1| < 3$$

فصل ششم: حد و پیوستگی

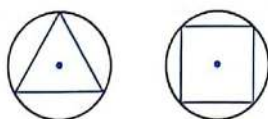
BOX 1: فرایندهای حدی

(صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۷ کتاب درسی)

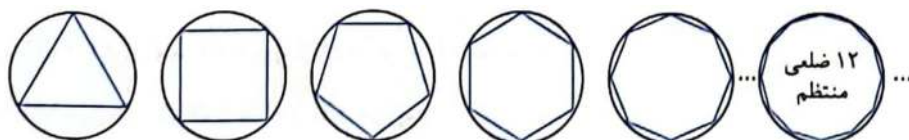
در این BOX، مفهوم هر چپ و راست، مفهوم هر، مناسبه هر از روی نمودار بیان می شود.

فرایندهای حدی

• در دایره های زیر به شعاع ۲ یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع به گونه ای رسم شده اند که رأس های آن ها روی دایره واقع اند. چنین چندضلعی هایی را محاطی می نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کم تر است.



• در زیر، شکل چندضلعی های محاطی رسم شده است.



• در تمام شکل های بالا، مساحت چندضلعی از مساحت دایره کم تر است اما مساحت چندضلعی های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می توانیم به مساحت دایره نزدیک تر کنیم، به شرط آن که تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی ها به مساحت دایره نزدیک می شود).

مفهوم میل کردن

تعریف: اگر x با مقادیر بزرگ تر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می گوئیم x به سمت a از راست میل می کند و می نویسیم:

$$x \rightarrow a^+$$

تعریف: اگر x با مقادیر کوچک تر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می گوئیم x به سمت a از چپ میل می کند و می نویسیم:

$$x \rightarrow a^-$$

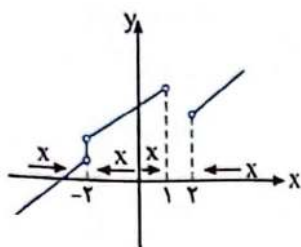
تعریف: اگر x بتواند هم با مقادیر بزرگ تر از a و هم با مقادیر کوچک تر از a به عدد a بسیار نزدیک شود در این صورت می گوئیم x به سمت

$$x \rightarrow a$$

a میل می کند و می نویسیم:

مثال: در شکل زیر، x فقط با مقادیر بزرگ تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود و در نتیجه $x \rightarrow 2^+$

هم چنین x فقط با مقادیر کوچک تر از یک می تواند به عدد یک نزدیک شود و در نتیجه $x \rightarrow 1^-$ اما برای $x = -2$ ، x هم با مقادیر بزرگ تر از -2 و هم با مقادیر کوچک تر از -2 به عدد -2 نزدیک می شود و در نتیجه $x = -2$.



مفهوم حد راست و حد چپ

حد راست: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (x_0, b) تعریف شده باشد. حد راست f در x_0 برابر عدد l است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

حد چپ: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) تعریف شده باشد. حد چپ f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن که x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

مفهوم حد تابع

حد تابع: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, b) شامل نقطه x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن که x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

نکته: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

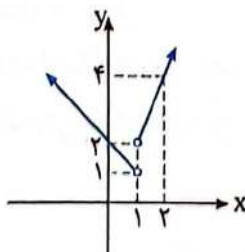
حد از روی نمودار

از روی نمودار تابع می‌توان حد تابع را (در صورت وجود) در نقطه داده شده به دست آورد برای این کار کافی است در دامنه تابع f و روی محور x به عدد a نزدیک شویم و تغییرات $f(x)$ را بررسی کنیم. اگر با نزدیک شدن به عدد a در داخل دامنه، مقادیر تابع (روی محور y) به یک مقدار منحصر به فرد نزدیک شوند، آن گاه تابع f در a حد دارد.

تمرین: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید. به کمک نمودار، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ را محاسبه کنید. آیا

تابع f در $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

پاسخ: f یک تابع دوضابطه‌ای است. برای رسم نمودار f ، خط $y = 2x$ را در محدوده $x > 1$ و خط $y = -x + 2$ را در محدوده $x < 1$ رسم می‌کنیم.



$$y = 2x, x > 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$$

$$y = -x + 2, x < 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 1 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

با توجه به نمودار، داریم:

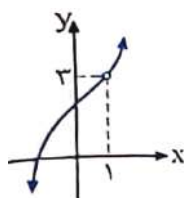
حد چپ و راست تابع f در $x = 1$ برابر نمی‌باشد و در نتیجه تابع f در $x = 1$ حد ندارد.

تعریف: نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که:

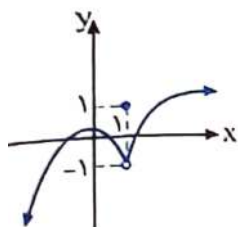
(۱) حد تابع f در نقطه $x = 1$ برابر ۳ باشد ولی $f(1)$ وجود نداشته باشد.

(۲) حد تابع f در نقطه $x = 1$ برابر ۱ باشد و $f(1) = 1$

پاسخ: (۱) باید نمودار تابعی را رسم کنیم که در $x = 1$ توخالی باشد ولی اگر این قسمت را روی محور y ها تصویر کنیم، تصویر آن عدد ۳ باشد:



(۲) مانند قسمت (۱) عمل می‌کنیم با این تفاوت که نقطه $(1, 1)$ را در نمودار مشخص می‌کنیم:

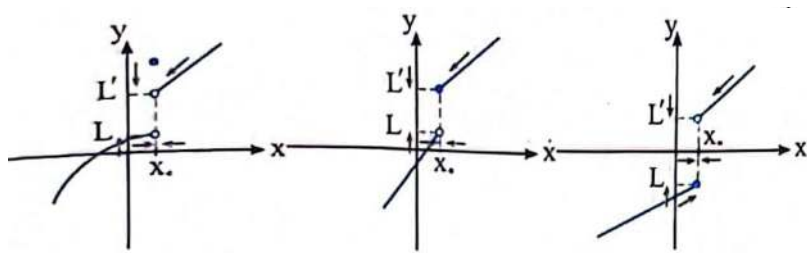


نکته: (۱) حد تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند x_0 ، به معین بودن یا معین نبودن تابع در x_0 بستگی ندارد. یعنی ممکن است:

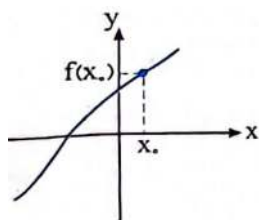
(آ) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، حد داشته باشد.

(ب) تابع f در x_0 تعریف شده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، تابع حد نداشته باشد.

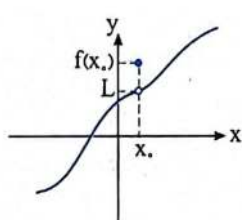
(۲) وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از x_0 به x_0 نزدیک می‌شود، مقدار تابع به L' و وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از x_0 به x_0 نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شود اما $L \neq L'$ ، لذا در $x = x_0$ حد ندارد.



(۳) هنگامی که تابع f در نقطه x_0 دارای حد باشد و تابع در این نقطه تعریف شده باشد، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد. یعنی ممکن است:



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$$

پرسش‌های تشریحی:

۱- عبارت زیر درست یا نادرست است؟

تابع f ممکن است در $x = a$ حد داشته باشد ولی مقدار نداشته باشد.

۲- اگر حد راست تابع f در $x = 2$ برابر -1 و حد چپ تابع f در $x = 2$ برابر 3 باشد، آن‌گاه تابع f در $x = 2$

۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ -1 & -1 < x \leq 1 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$ را رسم کنید. کدامیک از عبارت‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

(مشابه مثال ۱ صفحه ۱۲۶ و تمرین ۱ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی)

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

آ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -1$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

ث) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وجود ندارد.

(تمرین ۱۰ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی)

۴- اگر $f(x) = \frac{x}{|x|}$ باشد، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود دارد؟

(مشابه تمرین‌های ۲، ۳ و ۴ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی)

۵- در هر یک از قسمت‌های زیر، ضابطه تابعی مانند f را بنویسید که:

ب) در $x = 2$ حد نداشته باشد و $f(2) = 0$

آ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$ و $f(-1) = -2$

پ) در $x = 0$ تعریف نشده باشد و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

ث) در $x = -2$ حد چپ و راست داشته باشد ولی $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ موجود نباشد.

Homework

۱ حد تابع $f(x) = \frac{2}{[x] - 1}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x > 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ الف

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ب

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ پ

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ت

۳ آیا $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در $x = 0$ دارای حد است؟ با ذکر دلیل آن را توضیح دهید.

تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را رسم کرده به سؤالات زیر پاسخ دهید:

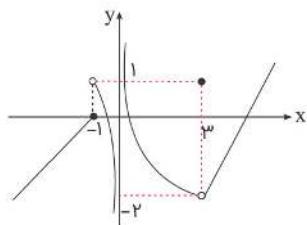
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ۴

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ۵

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ۶

نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟

۷



(۱) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 0$

(۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

۸

تابع $g(x)$ با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -3 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 5 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض می‌باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x)$

کدام است؟

(۲) -۱

(۱) ۷

(۴) ۱۵

(۳) ۵

۹

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & ; x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \\ 3x - a & ; x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

(۲) صفر

(۱) -۲

(۴) ۴

(۳) ۱

۱۰

اگر $f(x) = \begin{cases} 3 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$ کدام است؟

(۲) ۶

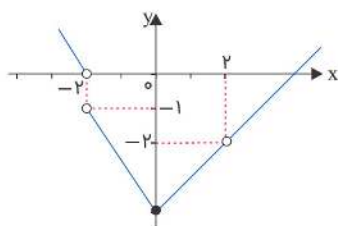
(۱) ۲

(۴) -۳

(۳) -۲

۱۱

باتوجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟



(۱) -۳

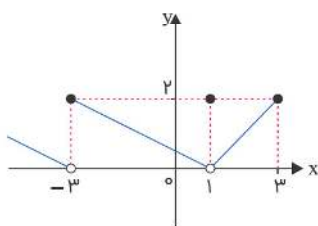
(۲) -۲

(۳) -۱

(۴) صفر

باتوجه به نمودار تابع $y = f(x)$ کدام گزینه نادرست است؟

۱۲



(۱) $f(1) = 2$

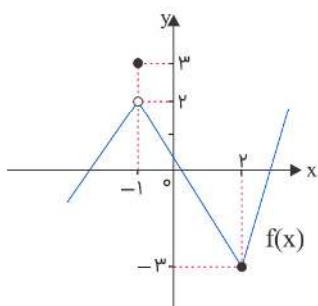
(۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(۳) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر می باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow +2} f(x)$ کدام است؟

۱۳



(۱) -3

(۲) -1

(۳) -4

(۴) -2

توابع $f(x) = \sqrt{2-x}$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $h(x) = \sqrt{2+x}$ مفروض اند. چند تابع از توابع مذکور در $x = 2$ حد دارند؟

۱۴

(۲) 2

(۱) 1

(۴) صفر

(۳) 3

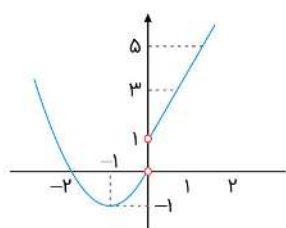
پاسخ Homework

۱

چون در مخرج کسر است $1 \neq 0$
 $\Rightarrow [x] \neq 1 \Rightarrow x \notin [1, 2)$

پس در ۱ همسایگی راست ندارد، پس حد ندارد.

۲



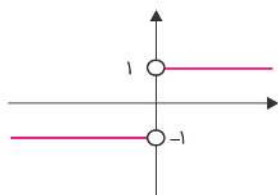
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{حد ندارد } x = 0 \text{ در } f$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{دارای حد نیست} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$



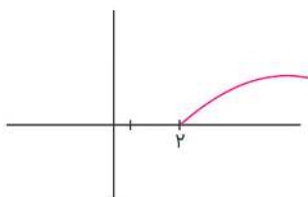
الف

ب

پ

ت

۳



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \text{حد وجود ندارد.}$$

حد وجود ندارد.

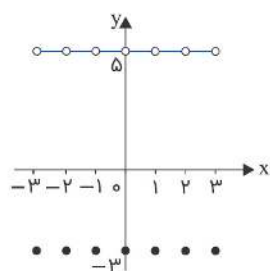
گزینه ۴

بنا به شکل نمودار f :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$$

گزینه ۴

بنا به نمودار $g(x)$:



$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = 5 + 5 + 5 = 15$$

گزینه ۳

۹

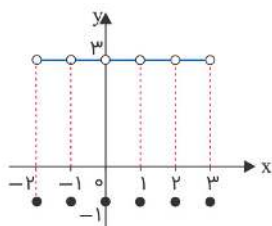
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$a(1)^2 + 2(1) - 1 = 3(1) - a \Rightarrow a + 1 = 3 - a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۲

۱۰

بنا به نمودار $f(x)$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = 3 + 3 = 6$$

گزینه ۱

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 + (-2) = -3$$

گزینه ۲

۱۲

بنا به شکل نمودار f ، گزینه "۲" نادرست است.

گزینه ۳

۱۳

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 + 2(-3) = -4$$

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$

$f(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲, ۲]$$

$g(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$$۲ + x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_h = [-۲, +\infty)$$

$h(x)$ در $x = ۲$ حد دارد.

در BOX قبل برای مناسبه در از رسم نمودار تابع استفاده می‌کردیم. رسم نمودار برای همه توابع امکان‌پذیر نمی‌باشد و همچنین می‌تواند زمان‌بر باشد. در این BOX با ارائه قواعد و دستورهایی در توابع را بدون رسم نمودار به دست می‌آوریم.

محاسبه حد تابع

حد تابع ثابت

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x) = k$ ، (k ددی حقیقی و ثابت است) در هر نقطه دلخواه a ، برابر همان مقدار ثابت k است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

حد تابع همانی

قضیه ۲: حد تابع $f(x) = x$ (تابع همانی) در هر نقطه a ($a \in \mathbb{R}$) برابر با a است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x \quad \text{به جای } x, a \text{ قرار می‌دهیم.}$$

تمرین: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} x \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-5) \quad (۱)$$

$$f(x) = -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5 \quad \text{تابع ثابت است.}$$

پاسخ: (۱)

$$f(x) = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \quad \text{تابع همانی است.}$$

(۲)

حد مجموع

قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l + m$$

به عبارت دیگر، اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، آن‌گاه حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آن‌ها در همان نقطه است.

حد تفاضل

قضیه ۴: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l - m$$

یعنی حد تفاضل دو تابع برابر است با تفاضل حدهای آن دو تابع.

حد حاصل ضرب

قضیه ۵: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \cdot m$$

یعنی حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با حاصل ضرب حدهای آن دو تابع.

نکته: قضیه‌های (۳) و (۵) را می‌توان به تعداد متناهی از توابع تعمیم داد، یعنی:

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) + h(x) + \dots + k(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} h(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} k(x)$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)h(x)\dots k(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} h(x) \dots \lim_{x \rightarrow a} k(x)$$

• از مطالب قبل می‌توان نتیجه‌های زیر را به دست آورد:

نتیجه ۱: اگر حد تابع f در نقطه a وجود داشته باشد و c یک عدد ثابت باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(اگر عددی ثابت در یک تابع ضرب شود، می توان آن را از حد بیرون آورد.)

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

نتیجه ۲: حد تابع $f(x) = x^n$ (عدد صحیح و مثبت n) در نقطه a برابر است با a^n ، یعنی:

مثال: $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 5^2 = 25$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = l^n$$

نتیجه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

نتیجه ۴: حد تابع چندجمله ای $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ (عدد صحیح و نامنفی n)، در نقطه x_0 برابر است با $f(x_0)$ ، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + c) = ax_0^n + bx_0^{n-1} + \dots + c = f(x_0)$$

پس برای به دست آوردن حد یک تابع چندجمله ای در یک نقطه، کافی است مقدار تابع را در آن نقطه به دست آوریم.

حد تقسیم

قضیه ۶: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ که $m \neq 0$ ، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{m}, \quad m \neq 0$$

یعنی حد خارج قسمت دو تابع، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج قسمت حدهای آن دو تابع.

تمرین: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ باشد، حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + 2g(x)) \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x)g(x)}$$

پاسخ: (۱) $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + 2g(x)) = 3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3(-1) + 2(3) = -3 + 6 = 3$

(۲) حد هر یک از عبارت های صورت و مخرج را به دست می آوریم و سپس حاصل ها را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - g(x)) &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2(-1) - 3 = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (-1) \times 3 = -3 \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x)g(x)} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

تمرین: اگر تابع f در $x = 3$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 5$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = A$ باشد، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 1)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 1}{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 1} = \frac{2A - 1}{A + 1} = 5$$

$$\Rightarrow 2A - 1 = 5(A + 1) \Rightarrow 2A - 1 = 5A + 5 \Rightarrow 3A = -6 \Rightarrow A = -2 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

حد تابع کسر گویا

اگر $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله ای هستند، برای محاسبه حد $f(x)$ در نقطه ای مانند a

کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم به شرط آن که $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) \neq 0$ ، پس حد

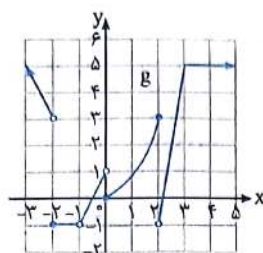
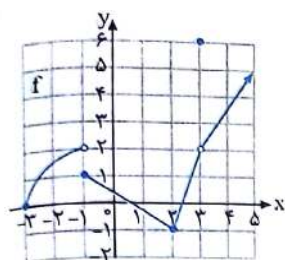
تابع $f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + c'}$ ، n و m دو عدد صحیح نامنفی) در a برابر است با مقدار تابع f در نقطه a ، به شرط آن که a ریشه مخرج کسر نباشد.

تمرین: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 4x}{x^2 + 1}$ را حساب کنید.

پاسخ: با قراردادن عدد -2 به جای x ، مقدار حد به دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 4x}{x^2 + 1} = \frac{2(-2)^3 + 4(-2)}{(-2)^2 + 1} = \frac{-16 - 8}{5} = -\frac{24}{5}$$

تمرین: با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

پاسخ: (۱) طبق نمودار $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$ می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2 + 5 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2$$

(۲) تابع g در $x = -1$ حد ندارد و داریم:

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = 2 - 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع } f + g \text{ در } x = -1 \text{ حد ندارد.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$$

(۳)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{-1}{-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{تابع } \frac{f}{g} \text{ در } x = 2 \text{ حد ندارد.}$$

• اگر $\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = l > 0$ ، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{mx + n} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (mx + n)} = \sqrt{l}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4x + 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1)} = \sqrt{4(2) + 1} = \sqrt{9} = 3$

• اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

توجه: اگر n زوج باشد، آن گاه l باید عددی مثبت باشد.

تمرین: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5x^2 + 4}$ را به دست آورید.

پاسخ: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{5x^2 + 4}$ برابر $\mathbb{R}$ است (همواره مثبت است)، بنابراین $x \rightarrow 1$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5x^2 + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 + 4)} = \sqrt{5(1)^2 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

با توجه به قضایا و نکات گفته شده، در حدگیری برخی از توابع مانند f ، مثالی از حدهای چپ و راست تابع f که ضابطه آن داده شده است، ارائه می‌کنیم.

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \geq 1 \\ 2x - ax & x < 1 \end{cases}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

پاسخ: حد راست تابع f در $x = 1$ را از ضابطه $f(x) = ax^2 + bx$ به دست می‌آوریم و آن را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx) = a(1)^2 + b(1) = a + b = 4 \quad (*)$$

حد چپ تابع f در $x = 1$ را از ضابطه $f(x) = 2x - ax$ به دست می‌آوریم و آن را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - ax) = 2 - a = 3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} -1 + b = 4 \Rightarrow b = 5$$

• در قضایا و نکات گفته شده، با شرط وجود حد دو تابع f و g در $x = a$ ، توابع $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ نیز در $x = a$ حد ندارد و با

فرض $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ نیز در $x = a$ حد دارد، ولی اگر یکی از این دو تابع یا هر دو تابع در $x = a$ حد نداشته باشند، آن گاه توابع

بالا در $x = a$ حد دارند یا خیر؟ به این سوالات در نکات بعدی با ذکر مثال‌هایی پاسخ می‌دهیم.

نکته: اگر فقط یکی از دو تابع f و g در $x = a$ حد نداشته باشند، توابع $f + g$ و $f - g$ حتماً در $x = a$ حد ندارند. اما $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن

است در $x = a$ حد داشته باشند.

مثال: تابع $f(x) = x^2$ در $x = 0$ حد دارد و تابع $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ حد ندارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$$

پس تابع $f + g$ در $x = 0$ حد ندارد. به همین ترتیب تابع $f - g$ نیز در $x = 0$ حد ندارد، اما تابع‌های $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ در $x = 0$ حد دارند:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0.$$

پس تابع $f.g$ در $x = 0$ دارای حدی برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{-1} = 0.$$

به همین ترتیب داریم:

پس تابع $\frac{f}{g}$ در $x = 0$ دارای حدی برابر صفر است.

تذکره: در نکته قبل ذکر شده است که ممکن است توابع $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در $x = a$ دارای حد باشند. یعنی می توان مثالی ارائه کرد که این دو تابع نیز در $x = a$ حد نداشته باشند. به مثال زیر دقت کنید:

تعریف: با فرض $f(x) = x^2$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$ آیا تابع $f.g$ در $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

پاسخ: تابع f در $x = 1$ حد دارد و تابع g در $x = 1$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 \times 1) = 1^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 \times (-1)) = -1$$

برای تابع $f.g$ ، داریم:

چون حد چپ و راست تابع $f.g$ در $x = 1$ با هم برابر نیستند، پس تابع $f.g$ در $x = 1$ حد ندارد.

نکته: اگر هیچ یک از دو تابع f و g در $x = a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f.g$ ، $f - g$ ، $f + g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در $x = a$ حد داشته باشند و همچنین ممکن است در $x = a$ حد نداشته باشند. در این حالت باید حتماً حد چپ و راست هر یک از توابع $f + g$ ، $f - g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آوریم و سپس بررسی کنیم.

پرسش های تشریحی:

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ باشد، حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - (g(x))^2}{(h(x))^3 + g(x)} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)(h(x))^2 \quad \text{ا)}$$

۲- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{5x+1} \quad (\text{ت}) & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x}{x^3 + 2x} \quad (\text{پ}) & \lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 - 5x + 2) \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow 1} 5 \quad (\text{آ}) \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + 1)\sqrt{x+3}}{x^2 - 4} \quad (\text{ج}) & \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} \quad (\text{د}) & \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{4+3x} \quad (\text{ث}) \end{array}$$

۳- اگر $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x > 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۴- دو تابع متفاوت مثال بزنید که در نقطه $x = -1$ دارای حد برابر باشند.

۵- در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f + g$ چه می‌توان گفت؟

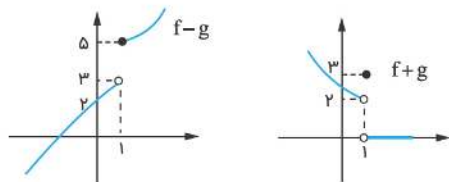
(آ) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

(ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۶- اگر تابع f در $x = 0$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 3}{3f(x) - 2} = \frac{2}{5}$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را به دست آورید.

Homework (1)

۱ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f + g$ و $f - g$ هستند. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟



(۱) حد ندارد.

(۲) $2/25$

(۳) $2/5$

(۴) $2/75$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

پاسخ (1) Homework

گزینه ۳

۱

$$(f + g) + (f - g) = 2f \Rightarrow f = \frac{1}{2}((f + g) + (f - g))$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f - g)}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (f - g)}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Homework (2)

۱ حد تابع $f(x) = \frac{2}{[x] - 1}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

درستی و نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

۲ اگر تابع $f + g$ در $x = a$ حد داشته باشد، آن‌گاه f و g حتما در $x = a$ حد دارند.

۳ اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد و g در $x = a$ حد نداشته باشد، آن‌گاه $\frac{g}{f}$ در $x = a$ حد ندارد.

۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x > 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

ت

۵ اگر f در $x = a$ حدی مخالف صفر داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{5f(x) + 3}{2f(x)} = 1$ باشد. آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{2 + f(x)}$ را محاسبه کنید.

۶ آیا $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در $x = 0$ دارای حد است؟ با ذکر دلیل آن را توضیح دهید.

تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را رسم کرده به سؤالات زیر پاسخ دهید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

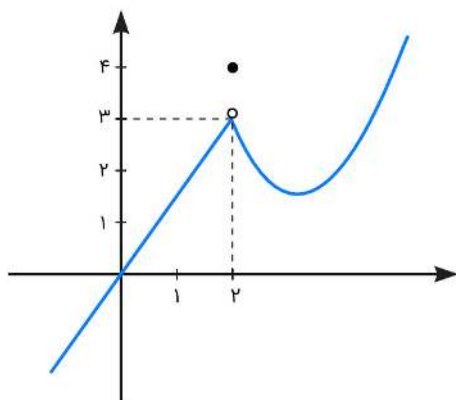
۸

۹

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

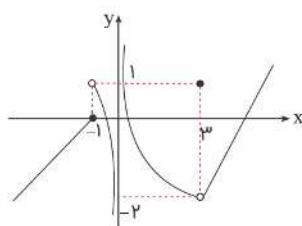
با استفاده از نمودار زیر حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (xf(x))$ را بیابید.

۱۰



نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟

۱۱



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 \quad (4)$$

۱۲

تابع $g(x)$ با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -3 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 5 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض می‌باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x)$ کدام است؟

$$-1 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

$$15 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

۱۳

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & ; x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \\ 3x - a & ; x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

$$2 \quad \text{صفر}$$

$$-2 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

۱۴ اگر $f(x) = \begin{cases} 3 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۶

(۳) -۲ (۴) -۳

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \begin{cases} x+3 & ; x > -1 \\ 2x+1 & ; x \leq -1 \end{cases}$ مفروض باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) f و g در $x = -1$ حد دارند.

(۲) f در $x = -1$ حد ندارد، ولی g در $x = -1$ حد دارد.

(۳) f در $x = -1$ حد دارد، ولی g در $x = -1$ حد ندارد.

(۴) f و g در $x = -1$ حد ندارند.

۱۶ اگر $f(x) = \begin{cases} ax-3 & ; x < 2 \\ x^2+3a & ; x \geq 2 \end{cases}$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) -۷ (۲) -۴

(۳) -۳ (۴) -۵

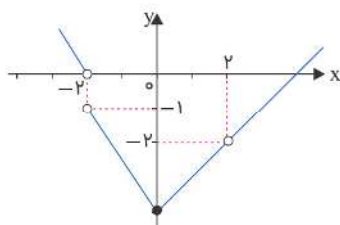
۱۷ باتوجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ کدام است؟

(۱) -۳

(۲) -۲

(۳) -۱

(۴) صفر



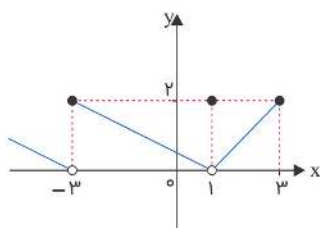
۱۸ باتوجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $f(1) = 2$

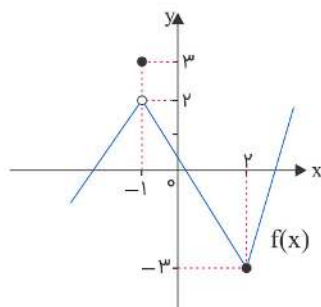
(۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(۳) وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$



۱۹ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر می باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow +2} f(x)$ کدام است؟



(۱) -۳

(۲) -۱

(۳) -۴

(۴) -۲

۲۰ توابع $f(x) = \sqrt{2-x}$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $h(x) = \sqrt{2+x}$ مفروض اند. چند تابع از توابع مذکور در $x = 2$ حد ندارند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۴) صفر

(۳) ۳

پاسخ (2) Homework

۱

چون در مخرج کسر است $[x] - 1 \neq 0$
 $\Rightarrow [x] \neq 1 \Rightarrow x \notin [1, 2)$

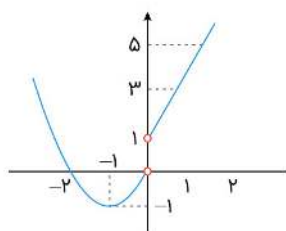
پس در ۱ همسایگی راست ندارد، پس حد ندارد.

پاسخ سؤالات ۲ تا ۳

۲ نادرست

۳ درست

۴



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{در } x = 0 \text{ حد ندارد}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

ت

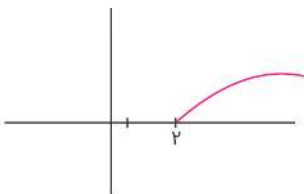
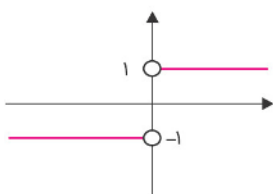
۵

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L &\Rightarrow \frac{5L + 3}{2L} = 1 \\ \Rightarrow 5L + 3 &= 2L \Rightarrow 3L = -3 \Rightarrow L = -1 \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{2 + f(x)} &= \frac{L - 1}{2 + L} = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

۶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \end{aligned} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

دارای حد نیست



۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

۸

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \text{حد وجود ندارد.}$$

۹

حد وجود ندارد.

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 3 = 6$$

۱۱

گزینه ۴

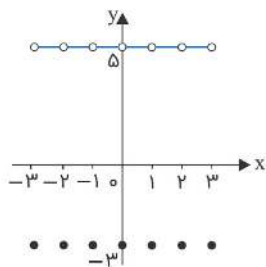
بنا به شکل نمودار f :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$$

گزینه ۴

۱۲

بنا به نمودار $g(x)$:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = 1 + 1 + 1 = 3$$

گزینه ۳

۱۳

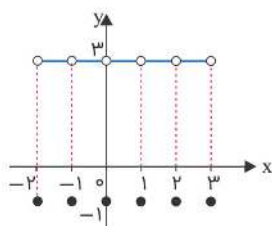
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$a(1)^2 + 2(1) - 1 = 3(1) - a \Rightarrow a + 1 = 3 - a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۲

۱۴

بنا به نمودار $f(x)$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = 3 + 3 = 6$$

گزینه ۴

۱۵

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_f = [-1, +\infty)$$

$f(x)$ در $x = -1$ حد ندارد. (چون تابع f برای $x < -1$ تعریف نشده است)
 $g(x)$ در $x = -1$ حد ندارد، چون حد راست و چپ نابرابر هستند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 3) = -1 + 3 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x + 1) = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

گزینه ۴

۱۶

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 3a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= -2 \Rightarrow (2a - 3) - (4 + 3a) = -2 \\ \Rightarrow -a - 7 &= -2 \Rightarrow a = -5 \end{aligned}$$

گزینه ۱

۱۷

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 + (-2) = -3$$

گزینه ۲

۱۸

بنا به شکل نمودار f ، گزینه "۲" نادرست است.

گزینه ۳

۱۹

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 + 2(-3) = -4$$

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$

$x = ۲$ در $f(x)$ حد ندارد.

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲, ۲]$$

$x = ۲$ در $g(x)$ حد ندارد.

$$۲ + x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_h = [-۲, +\infty)$$

$x = ۲$ در $h(x)$ حد دارد.

BOX 3: حد گویای $\frac{\circ}{\circ}$ ، حد تابع قدر مطلقى - حد تابع مثلثاتى - حد تابع جزء صحیح

(صفحه ۱۳۱ تا ۱۳۶ کتاب درسی)

در این BOX می‌فواهیم حد توابع گویایی را به دست بیاوریم که بعد از جای‌گذاری a به جای x ، حاصل کسر به صورت $\frac{\circ}{\circ}$ درمی‌آید.

انواع $\frac{\circ}{\circ}$

الف) حد گویای $\frac{\circ}{\circ}$

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x - x_0$: اگر چندجمله‌ای $ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ به ازای $x = x_0$ برابر صفر شود (x_0 ریشه چندجمله‌ای باشد)، آن‌گاه چندجمله‌ای بر $x - x_0$ بخش‌پذیر است. از این خاصیت می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.

تمرین: نشان دهید چندجمله‌ای $x^3 + 4x - 5$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است، سپس عبارت $x^3 + 4x - 5$ را تجزیه کنید.

پاسخ: اگر حاصل عبارت $x^3 + 4x - 5$ به ازای $x = 1$ (ریشه معادله $x - 1 = 0$) برابر صفر شود، آن‌گاه عبارت $x^3 + 4x - 5$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. جایگذاری از چندجمله‌ای $x = 1 \rightarrow (1)^3 + 4(1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$.

بنابراین $x^3 + 4x - 5$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت $x^3 + 4x - 5$ بر $x - 1$ ، عبارت $x^3 + 4x - 5$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x - 5 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 + 4x - 5 & \\ -x^2 + x & \\ \hline 5x - 5 & \\ -5x + 5 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow x^3 + 4x - 5 = (x - 1)(x^2 + x + 5)$$

نکته: اگر در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم: $P(x) = Q(x) = 0$ ، آن‌گاه برای محاسبه حد،

ابتدا $P(x)$ و $Q(x)$ را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم ($P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه می‌کنیم) و سپس $x - a$ را در صورت و مخرج ساده می‌کنیم و مقدار حد را با عددگذاری به دست می‌آوریم.

تمرین: حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} \quad (1) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2x^2 - 5x + 3} \quad (2)$$

پاسخ: (۱) $x = -1$ عبارت‌های صورت و مخرج کسر $\frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2}$ را برابر صفر می‌کند. با استفاده از اتحادهای جبری صورت و مخرج را

تجزیه و سپس با حذف عامل $x + 1$ در صورت و مخرج عددگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{-1+2} = \frac{-1}{1} = -1$$

(۲) عبارت $1 - x^3$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر و عبارت $2x^2 - 5x + 3$ را با تقسیم بر $x - 1$ تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{2x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x-1)(2x-3)} = \frac{-1 \times (1+1+1^2)}{2(1)-3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

(ب) حد توابع قدرمطلق

در محاسبه حد $|f|$ ، اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد، آن‌گاه حد از قدرمطلق عبور می‌کند، یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$

تمرین: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x|}{\sqrt{3x - 2}}$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x|}{\sqrt{3x - 2}} = \frac{|2^2 - 3(2)|}{\sqrt{3(2) - 2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

پاسخ:

اگر در هر توابع شامل قدرمطلق، حاصل هر با عددگذاری به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، ابتدا باید با استفاده از تعریف قدرمطلق، آن را بدون قدرمطلق بنویسیم و سپس حاصل هر را به دست آوریم.

تمرین: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + 3x - 4|}{x^2 - x}$ را به دست آورید.

پاسخ: با عددگذاری، حاصل حد به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. پس ابتدا باید تابع داده‌شده را بدون قدرمطلق بنویسیم.

تجزیه عبارت $x^2 + 3x - 4$ به صورت $(x-1)(x+4)$ می‌باشد. در عبارت $x + 4$ ، به جای x عدد یک را قرار می‌دهیم. داریم:

$$x = 1 \Rightarrow x + 4 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow |x^2 + 3x - 4| = |(x-1)(x+4)| = \underbrace{5}_{5} |x-1|$$

با توجه به مفهوم $x \rightarrow 1^+$ ، عبارت $|x-1|$ را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x-1| = (x-1) \Rightarrow 5|x-1| = 5(x-1)$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + 3x - 4|}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x-1)}{x(x-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

(ب) حد تابع‌های ساده مثلثاتی

همان‌گونه که برای عبارتهای جبری با استفاده از قضایایی که تاکنون گفته شده است، حد را محاسبه کرده‌ایم (بدون رسم نمودار و یا تشکیل جدول)، می‌توان حد توابع مثلثاتی را با استفاده از قضایای زیر و بدون استفاده از جدول و نمودار به دست آورد:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

قضیه: تابع $f(x) = \sin x$ در هر نقطه $a \in \mathbb{R}$ دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

قضیه: تابع $f(x) = \cos x$ در هر نقطه $a \in \mathbb{R}$ دارای حد است و داریم:

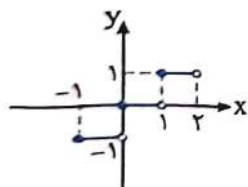
تمرین: حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x + \sin^2 x}{2 \cos x + 1} \quad (1) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2 \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \cos x = \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\text{پاسخ: ۱})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x + \sin^2 x}{2 \cos x + 1} = \frac{2 \cos(-\frac{\pi}{4}) + (\sin(-\frac{\pi}{4}))^2}{2 \cos(-\frac{\pi}{4}) + 1} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{1 + \frac{2}{4}}{2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(ت) حد تابع جزء صحیح



• نمودار تابع $y = [x]$ به صورت مقابل است:

• با توجه به نمودار f در نقطه‌ای به طول $x = 1$ ، داریم:

(۱) اگر $x \rightarrow 1^+$ ($x > 1$)، آن‌گاه مقادیر f برابر ۱ است:

$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(1/0.1) = f(1/0.01) = \dots = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

(۲) اگر $x \rightarrow 1^-$ ($x < 1$)، آن‌گاه مقادیر f برابر صفر است:

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

چون حد راست و چپ تابع در $x = 1$ با هم برابر نیستند، f در $x = 1$ حد ندارد. می‌توان با توجه به نمودار، نکته کلی بعدی را برای تابع $y = [x]$ در نقطه صحیح $x = m$ بیان کرد:

نکته: اگر m یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه تابع $y = [x]$ در $x = m$ حد ندارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m, \quad \lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$$

اما تابع $y = [x]$ در هر نقطه غیر صحیحی حد دارد و مقدار حد آن برابر است با مقدار تابع در آن نقطه.

مثال: اگر $x = \frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} [x] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

محاسبه حد چپ و حد راست در توابع شامل جزء صحیح

در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح، ابتدا باید با توجه به تعریف جزء صحیح ($[u] = n \Leftrightarrow n \leq u < n+1$)، به جای جزء صحیح عدد ثابتی قرار دهیم و سپس با توجه به قضایای حد، حدگیری را انجام دهیم.

تمرین: حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2[x] + \sqrt{x}}{[-x] + 3x}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا با استفاده از مفهوم حد و تعریف جزء صحیح، مقدار $[x]$ و $[-x]$ را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \xrightarrow[\text{عدد یک نزدیک می‌شود.}]{\text{x با مقادیر بزرگ‌تر از یک به}} 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \\ -2 < -x < -1 \Rightarrow [-x] = -2 \end{cases}$$

با قراردادن عدد ۱ به جای $[x]$ و -2 به جای $[-x]$ ، حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(1) + \sqrt{x}}{-2 + 3x} = \frac{2 + \sqrt{1}}{-2 + 3(1)} = \frac{3}{1} = 3$$

پرسش‌های تشریحی:

• درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱- مقدار $\lim [x]$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر صفر است.

۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ برابر یک است.

• جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

۳- حد تابع $f(x) = \frac{x+4}{|x|+3}$ وقتی $x \rightarrow -1^-$ برابر است.

۴- حد تابع $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ وقتی که $x \rightarrow 1^-$ برابر است.

۵- حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

(شعبه ریاضی ۱۳۰۲)

(فرورداد ۱۳۰۲)

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

(فرورداد ۱۳۰۲)

(فرورداد ۱۳۰۲)

(شعبه ریاضی ۱۳۰۲)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{2x^2 + 5x + 3} \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \quad (\text{ث})$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \quad (\text{ج})$$



(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

(فرورداد ۱۴۰۲)

(فرورداد ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

۶- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 140.2^-} [x] \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x+3}{[x]+2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{[x]} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2[x]-1}{x^2+3x+1} \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x]) \quad (\text{ث})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{[x]} \quad (\text{ج})$$

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

(فرورداد ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

۷- حاصل حدهای مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x) \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x + \cot x) \quad (\text{پ})$$

Homework (1)

۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$
(۲) صفر
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) ۱
(۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ اگر $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$
(۲) $\frac{1}{9}$
(۳) $\frac{2}{7}$
(۴) $\frac{3}{14}$

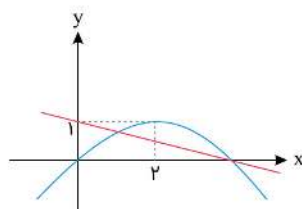
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴ مقدار $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [2 \sin x - 1]$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$ ، کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$
(۲) $-\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{5}{4}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

پاسخ (1) Homework

گزینه ۴

۱

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow [x] = -1, [-x] = 0, x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1+(-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۲

۲

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم: (هویتال)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۱

۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^3 = (\sqrt{\frac{1}{9}})^3 = \frac{1}{27}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۱

۴

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [2 \sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^-] - 1 = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

معادله سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x - 0)(x - 4) = ax(x - 4)$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

$$g(x) = \frac{-x}{4} + 1 = \frac{-1}{4}(x - 4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x(x - 4) - \frac{1}{4}(x - 4)}{4 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x - 4)(x + 1)}{-(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Homework (2)

۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

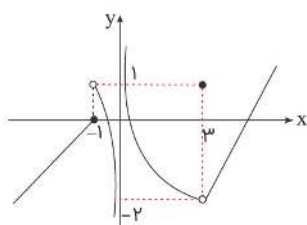
۳ (۳) -۱ (۴) -۲

۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x]}{[\cos x]}$ کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲)

۳ (۳) صفر (۴) ۲

۳ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



۱ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 0$

۲ $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$

۳ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$

۴ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$

۴ تابع $g(x)$ با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -3 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 5 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض می‌باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x)$ کدام است؟

۱ (۱) ۷ (۲) -۱

۳ (۳) ۵ (۴) ۱۵

۵ اگر $f(x) = \begin{cases} 3 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۶

۳ (۳) -۲ (۴) -۳

۶. توابع $f(x) = \sqrt{2-x}$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $h(x) = \sqrt{2+x}$ مفروض‌اند. چند تابع از توابع مذکور در $x = 2$ حد ندارند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

۷. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

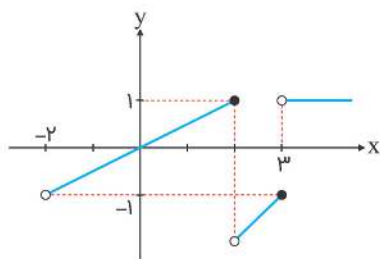
۸. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

۹. $\lim_{x \rightarrow \pi} [\cos x]$

۱۰. $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} [-\frac{1}{x^2}]$

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۱۱. اگر تابع f در نقطه $x = a$ تعریف نشده باشد، در a حد ندارد.
۱۲. اگر تابع f در $x = a$ حد چپ و راست داشته باشد، حد دارد.
۱۳. تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم نمایید و در مورد حد این تابع در نقاط بازه $(-3, 3)$ نظر دهید.
۱۴. باتوجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x + 2)$

۱۵ حاصل حدود زیر را بیابید.

الف

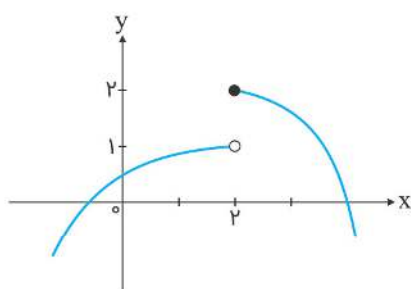
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{1 + \cos^2 x}$$

۱۶ دو تابع مانند f و g مثال بزنید که در $x = 1$ حد نداشته باشد ولی مجموع آن‌ها در $x = 1$ حد داشته باشد.

۱۷ باتوجه به نمودار زیر حاصل حدهای خواسته شده را بیابید.



الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

۱۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x}$$

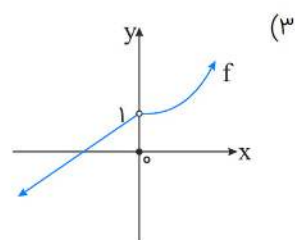
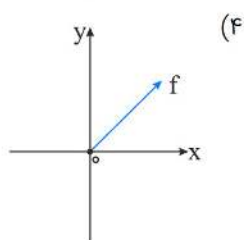
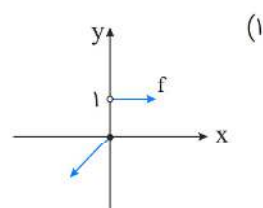
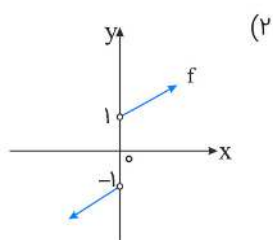
پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos 2x}$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[x] - 18}{x^2 - 3x}$$

۱۹ کدام یک از توابع زیر، در $x = 0$ حد دارد؟



۲۰ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \begin{cases} x & ; x > 2 \\ -x & ; x \leq 2 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f در $x = 2$ حد دارد ولی تابع g در $x = 2$ حد ندارد.

(۲) تابع f در $x = 2$ حد ندارد ولی تابع g در $x = 2$ حد دارد.

(۳) هر دو تابع f و g در $x = 2$ حد دارند.

(۴) هیچ یک از توابع f و g در $x = 2$ حد ندارند.

۲۱ اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$ کدام است؟

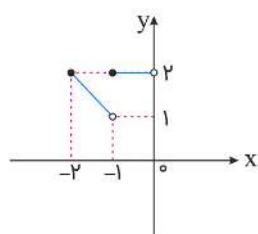
(۱) -۱

(۲) ۴

(۴) ۱

(۳) -۲

۲۲ باتوجه به نمودار تابع f ، کدام گزینه نا درست است؟



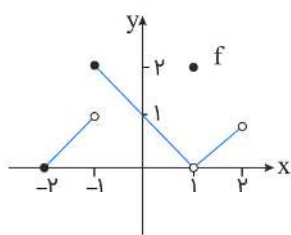
(۱) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

(۲) $\lim_{x \rightarrow -0.5} f(x) = 2$

(۳) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 2$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

۲۳ باتوجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) وجود ندارد.

(۴) -۲

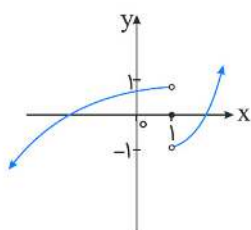
۲۴ باتوجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{2x-1}\right)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) موجود نیست.



۲۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x|x - x + 2}{x + 2}$ کدام است؟

(۱) -۳

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) -۲

۲۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x[x] - 1}{x^2 - 1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{-1}{2}$

(۳) وجود ندارد.

(۴) صفر

۲۷ در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} [x] - 1 & ; x \geq 1 \\ \frac{x-1}{|x-1|} & ; x < 1 \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

(۲) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

(۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

۲۸ می‌دانیم تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + 3a & ; x > 2 \\ a - x & ; x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

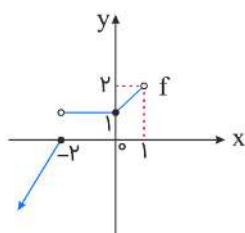
(۳) ۱

(۴) -۱

۲۹ کدام گزینه درست است؟

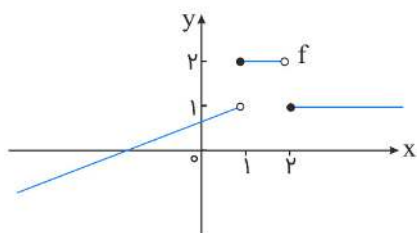
- (۱) اگر تابع f در $x = a$ تعریف نشده باشد، قطعاً در $x = a$ حد ندارد.
- (۲) اگر تابع f در $x = a$ تعریف شده باشد، قطعاً در $x = a$ حد دارد.
- (۳) اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد، قطعاً در $x = a$ تعریف شده است.
- (۴) هیچ کدام

۳۰ باتوجه به نمودار تابع f ، کدام گزینه درست است؟



- (۱) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
- (۲) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = 0$
- (۳) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ وجود ندارد.
- (۴) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

۳۱ باتوجه به شکل زیر، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ کدام است؟



- (۱) صفر
- (۲) -۱
- (۳) ۲
- (۴) ۱

۳۲ کدام گزینه درست است؟

- (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.
- (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = 0$
- (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = 0$

پاسخ (2) Homework

گزینه ۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

گزینه ۲

۲

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x]}{[\cos x]} = \frac{[\sin \pi^+]}{[\cos \pi^+]} = \frac{[0^-]}{[(-1)^+]} = \frac{-1}{-1} = 1$$

گزینه ۴

۳

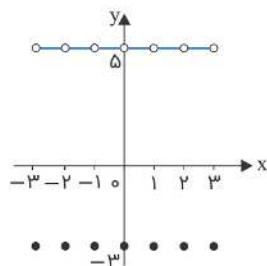
بنا به شکل نمودار f :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$$

گزینه ۴

۴

بنا به نمودار $g(x)$:

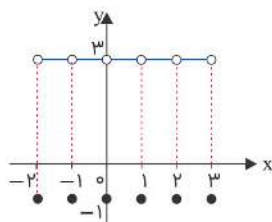


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = 5 + 5 + 5 = 15$$

گزینه ۲

۵

بنا به نمودار $f(x)$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = 3 + 3 = 6$$

گزینه ۲

۶

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$f(x)$ در $x = 2$ حد ندارد.

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2, 2]$$

$g(x)$ در $x = 2$ حد ندارد.

$$2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_h = [-2, +\infty)$$

$h(x)$ در $x = 2$ حد دارد.

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1}) \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{(x-1)(x+4)}$$

حد چپ موجود نیست پس تابع در $x = 1$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\cos x] = -1$$

$\frac{\pi}{4}$ رادیان حدودا 22.5° است که در ناحیه ۳ قرار دارد و $\cos x$ بین صفر و -۱ است، پس جزء صحیح آن -۱ می‌شود.

۸

۹

$$x > \frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} < -3 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 9 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < -9 \Rightarrow \left[\frac{-1}{x^2}\right] = -10$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^+} \left[-\frac{1}{x^2}\right] = -10$$

۱۰

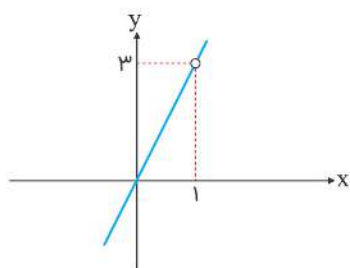
پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۲

۱۱ نادرست. ممکن است تابع در $x = a$ تعریف نشده باشد ولی دارای حد باشد.

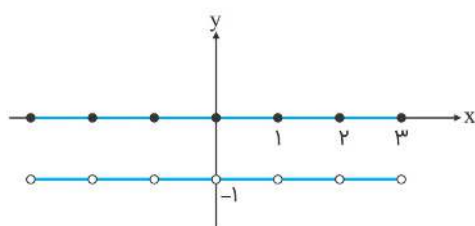
۱۱

۱۲ نادرست. باید حد راست و چپ باهم مساوی باشند:

۱۲



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$



$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

در تمامی نقاط دارای حد است.

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$$

۱۴ الف

$$x < 0 \Rightarrow x + 2 < 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

ب

۱۵
الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \pi}{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{(1)(-1)}{1+0} = -1$$

۱۶

$f(x) = [-x]$ و $f(x) = [x]$ در $x = 1$ حد ندارند ولی مجموع آنها $y = [x] + [-x]$ در $x = 1$ حد دارند.

$$\lim_{x \rightarrow 1} [x] + [-x] = -1$$

مثال‌های مشابه هم قبول است.

۱۷
الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

۱۸
الف

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + 2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+1)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} = 5(4) = 20 \end{aligned}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin x}{x} \times x \right)^2}{x \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

ج

$$x - \frac{\pi}{6} = y \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + y$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - \pi}{\cos 2x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + y\right) - \pi}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2y\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{-\sin 2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{f(y)}{1}}{\frac{-\sin 2y}{2y} \times 2y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{-2y} = -2 \end{aligned}$$

ت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[x] - 18}{x^2 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[3^-] - 18}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(2x+6)}{x(x-3)} = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳

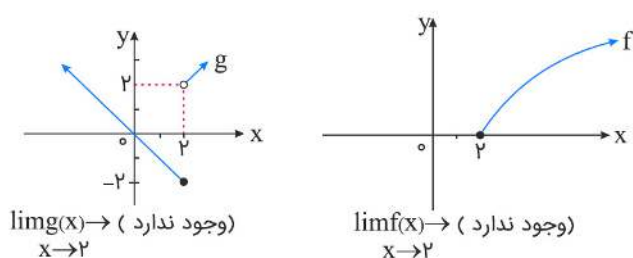
۱۹

یک تابع زمانی در یک نقطه حد دارد که حد چپ و راست آن در آن نقطه باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

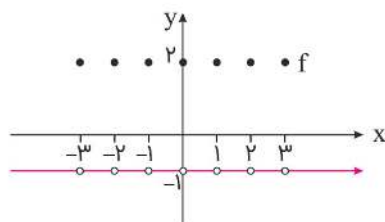
گزینه ۴

۲۰



گزینه ۳

۲۱



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = -2$$

گزینه ۴

۲۲

گزینه ۴ نادرست است.

گزینه ۳

۲۳

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Rightarrow \text{وجود ندارد} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

گزینه ۲

۲۴

$$(x \rightarrow 1^+) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \rightarrow 1^-\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

گزینه ۳

۲۵

$$x \rightarrow (-2)^- \Rightarrow |x| = -x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\cancel{x}^{\frac{-x}{x+2}} x - x + 2}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\cancel{-(x+2)}^{\cancel{-(x+2)}} (x-1)}{\cancel{x+2}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (1-x) = 3 \end{aligned}$$

گزینه ۱

۲۶

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x[x] - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲

۲۷

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ (وجود ندارد)}$$

گزینه ۱

۲۸

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} ([x] + 3a) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a - x)$$

$$\Rightarrow 2 + 3a = a - 2 \Rightarrow a = -2$$

گزینه ۴

۲۹

وجود یا عدم وجود حد در یک نقطه، به خود نقطه مربوط نمی‌شود بلکه به همسایگی (محذوف) آن نقطه مربوط می‌شود.

گزینه ۴

۳۰

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) \text{ (وجود ندارد)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

گزینه ۱

۳۱

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 - 1 = 0$$

گزینه ۴

۳۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} \text{ (وجود ندارد)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$$

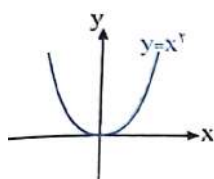
(صفحه ۱۳۷ تا ۱۴۲ کتاب درسی)

BOX 4: پیوستگی

در این BOX تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه را بررسی می‌کنیم. هم‌پنین در ادامه تعریف پیوستگی پپ، راست و پیوستگی روی بازه گفته می‌شود.

پیوستگی

مفهوم هندسی پیوستگی توابع: تابع $f(x) = x^2$ با دامنه $\mathbb{R}$ و نمودار آن را که یک سهمی است، در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌بینید سهمی در هیچ نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک‌تکه یا پیوسته است. در واقع می‌توان نمودار تابع $y = x^2$ را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.



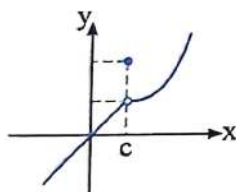
تعریف: تابع f را در نقطه $c \in \mathbb{R}$ پیوسته می‌گوییم، هرگاه:

(۱) تابع در $x = c$ حد داشته باشد.

(۲) حد تابع در $x = c$ با مقدار تابع در c برابر باشد، یعنی:

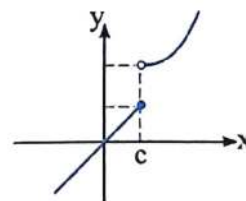
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

نکته: اگر تابع f در $x = c$ حد نداشته باشد و یا مقدار تابع f در $x = c$ (یعنی $f(c)$) با حد تابع در $x = c$ برابر نباشد و یا تابع f در $x = c$ تعریف نشده باشد، تابع f در $x = c$ پیوسته نمی‌باشد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



تابع f در $x = c$ حد دارد،

ولی حد آن با مقدار تابع برابر نمی‌باشد.



تابع f در $x = c$ حد ندارد.

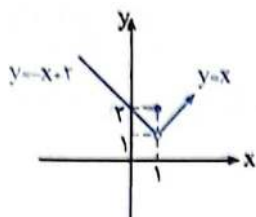
(حدهای چپ و راست با هم برابر نمی‌باشند).

تعرین: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و پیوستگی تابع را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (۱)$$

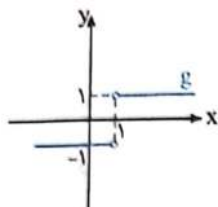
پاسخ: (۱) یک تابع سه ضابطه‌ای است. نمودار f به صورت مقابل است:



تابع f در $x = 1$ حدی برابر یک دارد و مقدار تابع f در $x = 1$ برابر ۲ است. چون مقدار تابع با حد تابع در $x = 1$ برابر نمی‌باشد، پس تابع f در $x = 1$ ناپیوسته است.

(۲) با حذف قدرمطلق، تابع g را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} = 1 & x > 1 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$



نمودار تابع g به صورت روبه‌رو است:

تابع g در $x = 1$ حد ندارد و در نتیجه ناپیوسته است. هم‌چنین تابع g در $x = 1$ مقدار ندارد.

نکته: در توابع چندضابطه‌ای، اگر $x = c$ طول نقطه مرزی باشد، آن‌گاه شرط پیوستگی f در $x = c$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

↓
شرط حدداشتن تابع f در $x = c$

تمرین: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \geq 1 \\ x^2 - x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x + \sqrt{1-x}}{x+1} & x < 0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در نقطه به طول $x = 1$ چگونه است؟

پاسخ: f در $x = 1$ پیوسته است. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 1) = 1$

تمرین: عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > -2 \\ 13 & x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

پاسخ: برای این‌که تابع f در $x = -2$ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$f(-2) = 13, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax + 1) = -2a + 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (2ax^2 + bx - 1) = 8a - 2b - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = 13 \\ 8a - 2b - 1 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = 12 \\ 8a - 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ -48 - 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ -2b = 62 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -31 \end{cases}$$

پیوستگی راست و پیوستگی چپ

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

پیوستگی راست: تابع f در $x = c$ از طرف راست پیوسته است، هرگاه:

در این صورت می‌گوییم f در $x = c$ پیوستگی راست دارد.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

پیوستگی چپ: تابع f در $x = c$ از طرف چپ پیوسته است، هرگاه:

در این صورت می‌گوییم f در $x = c$ پیوستگی چپ دارد.

نکته: اگر تابع f در $x = c$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد، آن‌گاه f در $x = c$ پیوسته است.

تعریف: پیوستگی راست و چپ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x > 2 \\ 7 & x = 2 \\ 3x & x < 2 \end{cases}$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

پاسخ: مقدار حد راست تابع f در $x = 2$ را از ضابطه $f(x) = 2x^2 - 1$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 1) = 2(2)^2 - 1 = 7 = f(2)$$

چون حد راست تابع f در $x = 2$ با مقدار تابع f در $x = 2$ برابر است، پس تابع f در $x = 2$ پیوستگی راست دارد.

مقدار حد چپ تابع f در $x = 2$ را از ضابطه $f(x) = 3x$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x = 6 \neq f(2) = 7$$

بنابراین تابع f در $x = 2$ پیوستگی چپ ندارد.

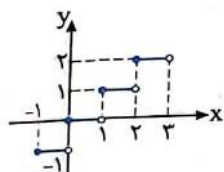
تعریف: به ازای چه مقداری از a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & x > 1 \\ -2a+1 & x = 1 \\ \frac{x-2}{2x} & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوستگی راست دارد؟

پاسخ: اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ باشد، آن‌گاه تابع f در $x = 1$ پیوستگی راست دارد:

$$f(1) = -2a + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{x+3} \right) = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2a + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2a = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

پیوستگی تابع جزء صحیح

نمودار تابع $f(x) = [x]$ به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در نقاط به طول صحیح ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ناپیوسته است. اما در این نقاط پیوستگی راست دارد و در بقیه نقاط (نقاط غیر صحیح) تابع پیوسته است.

پیوستگی روی بازه

۱) تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

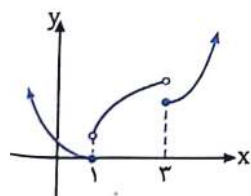
مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در هر نقطه از بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است، پس تابع f روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

۲) تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

۳) تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.

۴) تابع f روی بازه $(a, b]$ پیوسته است هرگاه در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

تعریف: نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار f ، کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟



(۱) روی بازه $(-\infty, 1]$ پیوسته است.

(۲) روی بازه $[1, 3]$ پیوسته است.

(۳) f در تمام نقاط بازه $(3, +\infty)$ پیوسته است.

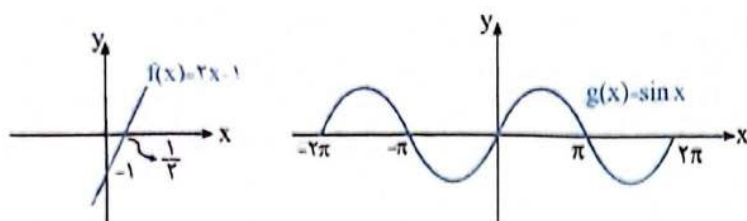
پاسخ: (۱) درست است، زیرا f در هر نقطه از بازه $(-\infty, 1]$ پیوسته و در $x=1$ پیوستگی چپ دارد. بنابراین f در بازه $(-\infty, 1]$ پیوسته است.

(۲) نادرست است، زیرا f در $x=1$ از راست پیوستگی ندارد. پس f روی بازه $[1, 3]$ پیوسته نمی‌باشد.

(۳) فقط پیوستگی راست در $x=3$ را بررسی می‌کنیم که چون در $x=3$ از راست پیوسته است، پس در $(3, +\infty)$ پیوسته است.

نکته: اگر $D_f = \mathbb{R}$ و تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال: توابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \sin x$ با نمودارهای زیر، روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند:



در نکته بعد، پیوستگی برخی از توابع خاص را روی دامنه آن‌ها بررسی می‌کنیم.

نکته: (۱) توابع چندجمله‌ای همه‌جا (روی $\mathbb{R}$) پیوسته‌اند.

مثال: تابع $f(x) = x^5 - 2x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

(۲) توابع کسری گویا در دامنه‌اش پیوسته‌اند.

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ پیوسته است و تابع $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ روی $D_g = \mathbb{R}$ پیوسته است.

(۳) توابع رادیکالی در دامنه‌شان پیوسته‌اند.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ روی بازه $[2, +\infty)$ پیوسته است.

(۴) توابع مثلثاتی در دامنه‌شان پیوسته‌اند.

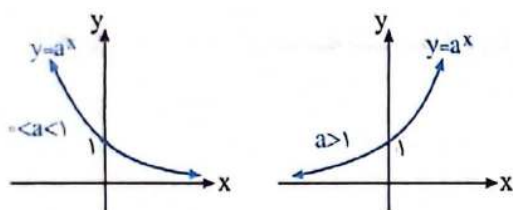
(۵) تابع $f(x) = \log_a x$ در دامنه خود، یعنی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x) = \log_3 x$ در بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

(۶) تابع $f(x) = a^x$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

(۷) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، آن‌گاه روی هر زیربازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

مثال: تابع $f(x) = 2^x$ روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته و در نتیجه روی هر زیربازه دلخواه از آن، مثلاً بازه $(-1, 4)$ نیز پیوسته است.



تمرین: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در بازه داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x}, [1,5] \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x}, (-3,0] \quad (1)$$

پاسخ: (1) تابع رادیکالی روی دامنه تابع و در نتیجه روی هر زیربازه‌ای از آن پیوسته است. دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x \geq 0\}, x^2 - 2x \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

تابع f روی بازه $(-3, 0]$ که زیربازه‌ای از دامنه f می‌باشد، پیوسته است.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x \neq 0\}, x^2 - 4x = x(x-4) \neq 0, 4 \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 4\} = \mathbb{R} - \{0, 4\} \quad (2)$$

تابع f فقط در دو نقطه $x=0$ و $x=4$ پیوسته نمی‌باشد و در بقیه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است. تابع f در بازه $[1,5]$ ، در نقطه‌ای به طول $x=4$ پیوسته نمی‌باشد، پس تابع f روی بازه $[1,5]$ پیوسته نیست.

همانند قضایای حد برای مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم دو تابع، برای پیوستگی نیز این قضایا برقرار است.

به عنوان نمونه، اگر دو تابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند، آن گاه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) در $x=a$ پیوسته می‌باشند.

مثال: دو تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته هستند، پس توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f \cdot g$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و تابع $\frac{f}{g}$ در همه جا به غیر از $x=0$ پیوسته است.

پرسش‌های تشریحی:

(شوربور ۱۴۰۲)

$$1- \text{ پیوستگی تابع } f(x) = \begin{cases} x-5 & x < 2 \\ -3 & x = 2 \\ x^2-7 & x > 2 \end{cases} \text{ را در } x=2 \text{ بررسی کنید.}$$

(شوربور ۱۴۰۲)

$$2- \text{ مقادیر } a \text{ و } b \text{ را طوری بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x > 0 \\ b+1 & x = 0 \\ -2x+a & x < 0 \end{cases} \text{ در } x=0 \text{ پیوسته باشد.}$$

(فرداد ۱۴۰۲)

۳- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = -1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ ax + b & x = -1 \\ x^2 - b & x > -1 \end{cases}$$

(دی ۹۵)

۴- عددهای a و b را چنان بیابید که تابع روبه‌رو در نقطه $x = 0$ پیوست باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + a & x > 0 \\ -4 & x = 0 \\ 3x + 2b & x < 0 \end{cases}$$

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی)

۵- مجموعه نقاط پیوستگی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} f(x) = \log_5(x^2 - 6x) \quad \text{ت} \quad f(x) = 2[x] - 3 \quad \text{پ} \quad f(x) = \sqrt{3 - 4x} \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x} \quad \text{آ} \\ f(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & -2 < x < 1 \\ \frac{4}{x} & x \leq -2 \end{cases} \quad \text{ج} \quad f(x) = 3^{\frac{x^2}{x+1}} \quad \text{د} \quad f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x \quad \text{ث} \end{aligned}$$

(فرداد ۹۴)

۶- حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 4 & x \geq 2 \\ x^3 - x & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته نباشد.

۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x + m}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را مشخص کنید.

Homework (1)

۱ تابع $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) صفر

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع $f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2 - 1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & ; |x^3| < x^2 \\ 1 + \cos \pi x & ; |x^3| = x^2 \\ [x^2] - [x] & ; |x^3| > x^2 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) در همه نقاط پیوسته است

(۳) بی شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۴ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x + a)^2|} : x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} : x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می تواند باشد؟

(۲) $\frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۴) $\frac{5\pi}{6}$

(۳) $\frac{5\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{6x^2 + (m+3)x + \frac{m}{2}} & ; x \neq a \\ \frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}} & ; x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار b باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$
(۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ برای مقدار مشخص k ، تابع $f(x) = \begin{cases} |[-x] - x| & ; \text{فرد } [x] \\ k - x + [x] & ; \text{زوج } [x] \end{cases}$ در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ ($k, n \in \mathbb{N}$)

- (۱) برای هیچ مقداری از n ، پیوسته نیست. (۲) برای جميع مقادیر n پیوسته است.
(۳) n فرد (۴) n زوج

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; \text{زوج } [x] \\ |x - [x - a]| & ; \text{فرد } [x] \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ ($a < -1$)

- (۱) صفر (۲) ۲
(۳) ۱ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ تابع $f(x) = \begin{cases} \tan \frac{(2x+1)\pi}{4} & ; x \leq 1 \\ \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} & ; 1 < x < 5 \\ b(x - [-x]) & ; x \geq 5 \end{cases}$ روی بازه $[1, 5]$ پیوسته است، مقدار ab کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{7}$ (۲) $-\frac{5}{5}$
(۳) $\frac{5}{7}$ (۴) $\frac{5}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ اگر در ریشه‌ای از معادله $5x^2 - ax + b = 0$ حد تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $[\frac{b-2a}{3}]$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2
(۳) ۱ (۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ پیوسته است؟

- (۱) $1/5$ (۲) 1
(۳) -1 (۴) $-1/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ ؛ $|x| \leq 2$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 2
(۳) 1 (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) -1
(۳) 1 (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

پاسخ (1) Homework

گزینه ۱

۱

تابع $[x^2 - ax]$ روی $\mathbb{R}$ ناپیوسته است، برای آنکه تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $b = 0$ شود. در این صورت $f(x) = -2a$ خواهد بود.

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۳

۲

در نقاط صحیح حد تابع از ضابطه اول و مقدار تابع از ضابطه دوم به دست می‌آید مثلاً در نقطه $x = 1$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= (1-a) \times 1 + (3a^2 - 1) \times (-2) \\ &= -6a^2 - a + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= (1-a) \times 0 + (3a^2 - 1) \times (-1) \\ &= -3a^2 + 1 \end{aligned}$$

پس لازم است:

$$-6a^2 - a + 3 = -3a^2 + 1$$

$$\Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

اگر $a = -1$ باشد:

$$b \sin\left(\frac{\pi}{-1}\right) = -3a^2 + 1 \Rightarrow 0 = -2 \quad \text{غقق}$$

اگر $a = \frac{2}{3}$ باشد:

$$b \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}\right) = -3a^2 + 1 \Rightarrow b \times (-1) = -3 \times \frac{4}{9} + 1$$

$$\Rightarrow -b = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$|x^3| = x^2 \Rightarrow x^2|x| = x^2 \Rightarrow x^2(|x| - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & ; x \in (-1, 1) - \{0\} \\ 1 + \cos \pi x & ; x = 0, 1, -1 \\ [x^2] - [x] & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

ضابطه سوم به ازای تمام x هایی که در آن x^2 صحیح ولی x غیر صحیح می شود، ناپیوسته است. همچنین در همه x های صحیح منفی ناپیوسته است. پس تابع f در بی شمار نقطه ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

چون در پیوستگی، باید مقدار حد چپ و راست با هم برابر باشد پس زیر رادیکال باید ریشه مضاعف داشته باشیم:

$$\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)} = \sqrt{(x+1)(3x+m-4)} \Rightarrow m-4 = 3 \Rightarrow m = 7$$

$$m = 7 : |x^3 + ((m-7)x + a)^2| = |x^3 + a^2|$$

$x = a$ ریشه صورت و مخرج است، پس: $a = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3 + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1|(x^2 - x + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -1 : f(-1) = \frac{2 \sin b}{3\sqrt{-1+2}} = \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

a باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. از طرفی ریشه مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m + 3)^2 - 4(6)\left(\frac{m}{2}\right) = m^2 + 6m + 9 - 12m = m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$x = a = \frac{-(m + 3)}{2 \times 6} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6(x + \frac{1}{2})^2}}{|2x^3 + \frac{1}{6}|} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x + \frac{1}{2}|}{|2x^3 + \frac{1}{6}|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x + \frac{1}{2}|}{|2|x + \frac{1}{2}||x^2 + \frac{1}{6} - \frac{x}{2}|} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{2 \tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2} \tan b = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر تابع را در $x = 3$ یعنی به ازای $n = 3$ بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} |[-x] - x| = |[-(3^+)] - 3| = 7 \\ f(3) &= |[-3] - 3| = 6 \end{aligned}$$

در نتیجه قطعاً در $x = 3$ ناپیوسته است و n نمی‌تواند فرد باشد.
و اگر در $x = 2$ و $x = -2$ بررسی کنیم:

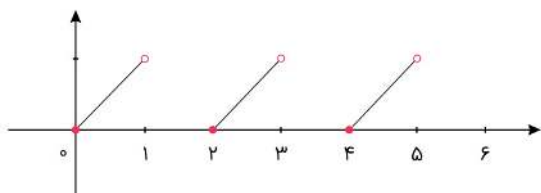
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = k - 2 + 2 = k \\ f(2) = k \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = |[-2^-] - 2| = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 4$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = k + 2 - 2 = k \\ f(-2) = k \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = |[-(-2^-)] + 2| = 4 \end{cases} \Rightarrow k = 4$$

پس در n زوج پیوسته است.

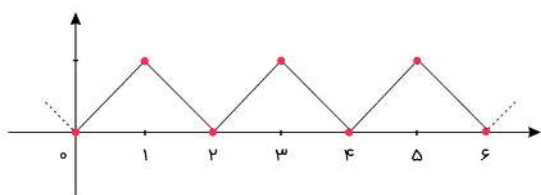
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

بخشی از نمودار تابع $x - [x]$ وقتی که $[x]$ زوج باشد، به صورت زیر است:



$$y = |x - [x]|, \quad [x] = 2k$$

تابع را به صورت $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; \text{زوج } [x] \\ |x - a - [x - a] + a| & ; \text{فرد } [x] \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. اگر a مثبت باشد، شکل بالا را a واحد به سمت بالا و راست منتقل می‌کنیم، پس پیوسته نمی‌شود. اما اگر $a < 0$ باشد، با انتقال، نمودار به صورت زیر پیوسته می‌شود:



برای پیوستگی در $\mathbb{R}$ لازم است ضابطه دوم یعنی $|x - [x - a]|$ به شکل زیر شود؛ یعنی شیب آن منفی شود و a زوج منفی باشد که امکان‌پذیر نیست پس a وجود ندارد.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد:

$$f(1) = \tan \frac{\pi}{2} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x-1)(x+2)|}{a(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{-a(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{-a} = \frac{-3}{a} \\ \frac{-3}{a} &= -1 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

در $x = 5$ پیوستگی چپ دارد:

$$f(5) = b(5 - [-5]) = 10b$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \frac{28}{-4a} = \frac{-7}{a}$$

$$f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \Rightarrow \frac{-7}{a} = 10b \Rightarrow ab = \frac{-7}{10} = -0.7$$

توجه: در حل سؤال بالا نیازی به محاسبه مقدار a نبود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

تابع f فقط در $x = 1$ ناپیوسته است:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

$$5x^2 - ax + b = 0 \xrightarrow{x=1} 5 - a + b = 0 \Rightarrow -a + b = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = -6 \Rightarrow b = -3, a = 2$$

$$\left[\frac{b-2a}{3} \right] = \left[\frac{-3-4}{3} \right] = \left[\frac{-7}{3} \right] = -3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin^2 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 1)(\sin x - 1)}{-(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2\sin x + 1}{\sin x + 1}\right) = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f(x) = [x] \sin \pi x ; x \in [-2, 2]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما از آنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.
پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم.
کلید سنجش صفر نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)[x] & ; -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & ; x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x = 0$ و $x = 2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2-1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + 2a + b = 1 \quad (I)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0-1)[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} a = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 < x < k \\ 6 - x & ; x \geq k \end{cases}$ در بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است. $f(k)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

۲ پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & ; x > 2 \\ -1 & ; x = 2 \\ 3 - x^2 & ; x < 2 \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ بررسی کنید.

۳ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 0 \\ a & ; x = 0 \\ \sqrt{x+1} + b & ; x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

۴ اگر $f(x) = x^2 - x$ باشد، توابع $[f(f(x))]$ و $[f(f(x))]$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱ ناپیوسته - پیوسته ۲ پیوسته - ناپیوسته

۳ ناپیوسته - ناپیوسته ۴ پیوسته - پیوسته

۵ بازه‌های پیوستگی تابع $y = \frac{x^2 - x}{x^3 - 8}$ را بیابید.

۶ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} b[x] + 3ax & ; x > 1 \\ 7 & ; x = 1 \\ \frac{3a\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^3 - 1} & ; x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، $a + b$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

۱ -۲۸ ۲ ۳۵

۳ ۲۸ ۴ ۲۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۷ نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ به ازای افزایشی است.

۸ انتهای کمان ۲ رادیان در ناحیه مثلثاتی قرار دارد.

۹ تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه در بازه (a, b) پیوسته باشد و در b ، داشته باشد.

۱۰ میانه داده‌های آماری ۱۸، ۱۰، ۹، ۱۶، ۱۲، ۷، ۱۶ برابر است.

۱۱ تابع f به معادله $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ در $x = 0$ پیوسته است، $f(0)$ برابر کدام گزینه است؟

۱ (۱) ۴ (۲)

۳ (۳) ۲ (۴)

۱۲ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = -1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & ; x < -1 \\ -2x + b & ; x = -1 \\ a - 5x & ; x > -1 \end{cases}$$

۱۳ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد ($[]$ نماد جزء صحیح است).

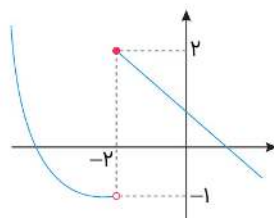
$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sin x & ; x > 0 \\ a + 1 & ; x = 0 \\ [x + 2] + b & ; x < 0 \end{cases}$$

۱۴ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos(\frac{\pi}{2}x) & ; x < 2 \\ b & ; x = 2 \\ [-x] + 4 & ; x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است. $a + b$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) صفر (۴) -۲

۱۵ تابع $f(x)$ به صورت زیر است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} [x] + f(x) & ; x < -2 \\ a + 1 & ; x = -2 \\ bf(x) & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ پیوسته باشد، مقدار $\sqrt[3]{4 - a}$ چقدر است؟



۱ (۱) ۳

۲ (۲) ۲

۳ (۳) ۱

۴ (۴) ۴

۱۶ نقاط ناپیوستگی دو تابع $f(x) = [x]; 0 < x < 3$ و $g(x) = \frac{1}{2x^2 + ax + b}$ یکسان است. مقدار $a + b$ چقدر است؟

۱ (۱) -۳

۲ (۲) ۳

۱۷ پیوستگی تابع $f(x)$ با ضابطه زیر را در $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x > 2 \\ 5 & ; x = 2 \\ x + [2x] & ; x < 2 \end{cases}$$

۱۸ مقدار k را طوری بیابید تا تابع زیر در $x = 4$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x - k & ; x > 4 \\ 5 + 3x^2 & ; x = 4 \\ -x + 1 & ; x < 4 \end{cases}$$

۱۹ تابع f با ضابطه زیر را در نظر بگیرید و به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; x < -1 \\ x^2 - 1 & ; -1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & ; 2 < x < 5 \end{cases}$$

الف ۱) نمودار تابع f را رسم کنید.

۲) دامنه و برد تابع f را به دست آورید.

۳) پیوستگی تابع f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ فقط مشخص کنید.

ب درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

۱) f روی بازه $(-\infty, -1]$ پیوسته است.

۲) f روی بازه $(-\infty, -1)$ پیوسته است.

۳) f روی بازه $[2, 5]$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0 \quad (4)$$

۲۰ پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 8} & ; x > 1 \\ 5 & ; x = 1 \\ 2x^2 - 5 & ; x < 1 \end{cases}$$

۲۱ پیوستگی $f(x) = [x^2] - [2x]$ در $x_0 = 1$ را بررسی کنید.

۲۲ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ -x^2 + b & ; x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۲۳ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} b[\frac{f}{x}] & ; x > 1 \\ b+x & ; x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۲۴ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^f x}{\sin^f x} & ; x > 0 \\ b+1 & ; x = 0 \\ a[x] & ; x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲
(۳) ۱ (۴) ۲

۲۵ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+1} & ; 0 < x < 3 \\ a+1 & ; x = 3 \\ b + \frac{x-3}{\sqrt{3x}-3} & ; x > 3 \end{cases}$ در $x = 3$ پیوسته باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f^2(x)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹
(۳) ۲ (۴) ۴

۲۶ چندتا از توابع زیر در بازه $[2, 3]$ پیوسته است؟
الف) $y = [x]$ ب) $y = [x] + [-x]$ پ) $y = x - [x]$ ت) $y = \tan x$

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

۲۷ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x^2]$ تا تا از تابع $g(x) = [x]$ است. (در بازه $(-2, 2)$)

- (۱) ۳ - بیشتر (۲) ۳ - کمتر
(۳) ۲ - بیشتر (۴) ۲ - کمتر

۲۸ مقدار a کدام باشد، تا تابع $f(x) = \begin{cases} ax-1 & ; x \geq 1 \\ \frac{2}{[x]-1} & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته شود؟

- (۱) ۱ (۲) -۱
(۳) -۲ (۴) صفر

تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a[fx] - b & ; x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ a \sin(\frac{\pi}{p}x) + b & ; x > 1 \end{cases}$ در $x_0 = 1$ پیوسته است. $a + b$ کدام است؟

۲۹

۱ (۲)

۲ (۱)

۳ (۴)

۳ (۱)
۲

پاسخ (2) Homework

گزینه ۴

۱

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) \Rightarrow k^2 = 6 - k \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = 2, -3$$

$k = 2$ قابل قبول است.

$$f(k) = f(2) = 6 - 2 = 4$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 - x^2 = 3 - 4 = -1$$

$$f(2) = -1$$

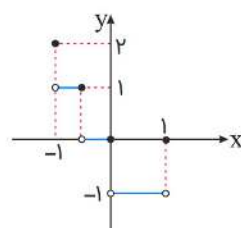
تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است. (پیوستگی چپ دارد)

۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x - [x] = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x + 1} + b = b + 1$$

$$f(0) = a \Rightarrow a = 1 = b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 1 = 1 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$



$$y = [f(x)] = [x^2 - x]$$

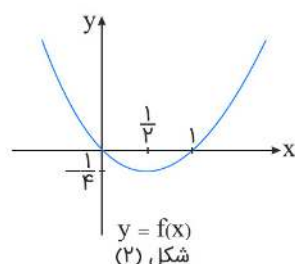
شکل (۱)

$$y = [f(x)] = [x^2 - x]$$

$$[f(f(\frac{1}{2}))] = [f((\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2})] = [f(-\frac{1}{4})] = [f(-1)] = 2$$

$$f(x) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{شکل ۱}} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} [f(f(x))] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} [f(f(x))] = f(-1) = 2$$



$$y = f(x)$$

$$[f(f(\frac{1}{2}))] = [f(-\frac{1}{4})] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [f(f(x))] \xrightarrow{\text{شکل ۲}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [f(f(x))] = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}^+} [f(x)] \xrightarrow{\text{شکل ۱}} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}^+} [f(x)] = 0$$

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ریشهٔ مخرج} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{بازه‌های پیوستگی} = (-\infty, 2) , (2, +\infty)$$

مقدار تابع $f(1) = 7$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (b[x] + 3ax) = b + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3a|x-1|}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3a(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = -a$$

چون تابع $f(x)$ در $x = 1$ پیوسته است، پس:

$$-a = b + 3a = 7 \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 28 \end{cases} \Rightarrow a + b = 21$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

۷ $a > 1$

۸ ناحیه دوم

۹ پیوستگی چپ

۱۰ ۱۲

چون f در $x = 0$ پیوسته است:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 2}{-x} = \frac{-1}{+1} = -1 \Rightarrow a + 5 = -1 = 2 + b \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -3 \end{cases} \\ f(-1) = 2 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + \sin x) = 2 + 0 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x + 2] + b = 1 + b \\ f(0) = a + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + b = a + 1 \Rightarrow b = 1, a = 1$$

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = a \cdot \cos \pi = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = [-(2^+)] + 4 = -3 + 4 = 1$$

$$f(2) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$-a = 1 = b \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

گزینه ۱

$$g(-2) = a + 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} g(x) = b \times 2 = 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g(x) = [(-2)^-] + (-1) = -3 - 1 = -4$$

چون $g(x)$ در -2 پیوسته است، پس:

$$\begin{cases} a + 1 = -4 \Rightarrow a = -5 \\ 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{4 - a} = \sqrt[3]{9} = 3$$

گزینه ۲

تابع $[x]$ در بازه $(0, 3)$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = 2$ ناپیوسته است، پس باید تابع $g(x)$ نیز در این دو نقطه ناپیوسته باشد، در نتیجه $x = 1$ و $x = 2$ ریشه‌های مخرج تابع $g(x)$ هستند.

$$2x^2 + ax + b = 2(x - 1)(x - 2) = 2(x^2 - 3x + 2) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2$$

۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [2x]) = 2 + [4^-] = 2 + 3 = 5$$

تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی از چپ دارد.

۱۸

برای پیوستگی راست در ۴ باید $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$ باشد.

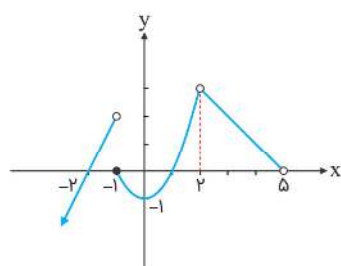
$$f(4) = 5 + 3(4)^2 = 53$$

$$\Rightarrow 4 - k = 53 \Rightarrow k = -49$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4 - k$$

۱۹
الف

(۱)



(۲)

$$\text{دامنه : } D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 5)$$

$$\text{بردار : } R_f = (-\infty, 3)$$

(۳) $[-1, 1]$: پیوسته، $(2, 5)$: پیوسته، $[-2, 0]$: ناپیوسته

ب

(۱) نادرست (۲) درست (۳) نادرست (۴) نادرست

۲۰

$$x \rightarrow 1^+ : \sqrt{1 + 1} = 2$$

$$x \rightarrow 1^- : 2 - 5 = -3$$

$$f(1) = 5$$

برابر نیستند، لذا تابع پیوسته نمی‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [1^+] - [2^+] = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-] - [2^-] = 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

پس f در $x = 1$ پیوسته است.

گزینه ۴

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + b) = b - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است پس:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - 4 = 5 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow a + b = 14$$

گزینه ۳

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b + 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b \left[\frac{f}{x} \right] = 3b$$

چون f در $x = 1$ پیوسته است:

$$b + 1 = 3b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} b \left[\frac{f}{x} \right] = b \left[\frac{f}{2^+} \right] = \frac{1}{2} [2^-] = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

$$f(0) = b + 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} a[x] = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos^2 x) = 2$$

$$b + 1 = -a = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

$$f(3) = a + 1, \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - \sqrt{x+1}) = 3 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(b + \frac{x-3}{\sqrt{3x}-3} \right) = b + \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)}$$

$$= b + \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)} = b + \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{3x}+3}{3} = b + 2$$

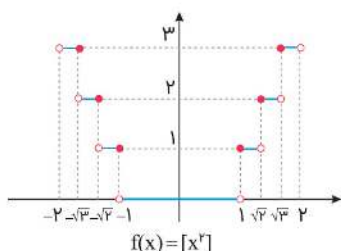
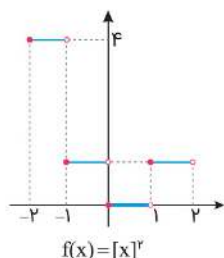
$$\begin{cases} a+1=1 \\ b+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f^2(x) = \left(-1 + \frac{12-3}{6-3} \right)^2 = \left(-1 + \frac{9}{3} \right)^2 = 2^2 = 4$$

می‌دانیم توابع $y = x - [x]$ و $y = [x]$ در نقاط صحیح از راست پیوسته هستند، بنابراین این توابع در بازه $[2, 3]$ پیوسته‌اند. تابع $y = \tan x$ فقط در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ تعریف نشده و در نتیجه ناپیوسته است و چون بازه $[2, 3]$ شامل چنین نقاطی نیست، پس روی آن پیوسته می‌باشد. تابع $y = [x] + [-x]$ در نقاط صحیح از راست ناپیوسته است، در نتیجه در بازه $[2, 3]$ پیوسته نیست.

توابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت درون آن عدد صحیح می‌شود، حد ندارند و در نتیجه پیوسته نیستند، مگر اینکه در آن نقطه دارای مینیمم یا ماکزیمم باشند، بنابراین در بازه $(-2, 2)$ تابع $f(x) = [x^2]$ در نقاط $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}$ پیوسته نیست. توجه کنید که f در $x = 0$ دارای مینیمم است، پس در این نقطه پیوسته می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2] = [0^+] = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2] = [0^+] = 0$$

و تابع $g(x) = [x]^2$ در نقاط ± 1 و $x = 0$ پیوسته نیست.



بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x^2]$ ، ۳ تا بیشتر از تابع $g(x) = [x]^2$ است.

گزینه ۲

۲۸

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax - 1) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{[x] - 1} = \frac{1}{[1^-] - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \\ f(1) = a - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

گزینه ۲

۲۹

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a \sin(\frac{\pi}{2}x) + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[2x] - b) = 2a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$$

BOX 5: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

همان طور که در فصل اول مشاهده کردید، اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $P(a) = 0$ ، آن گاه در تجزیه چندجمله‌ای $P(x)$ حتماً عامل $(x - a)$ وجود دارد.

برای محاسبه حالت مبهم در توابع کسری، با تجزیه صورت و مخرج و حذف عامل صفرکننده $(x - a)$ به محاسبه حد می‌پردازیم. به عنوان مثال:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - x}$$

برای تجزیه عبارت صورت از آن جا که $P(1) = 1^3 + 1 - 2 = 0$ پس $P(x)$ دارای عامل $(x - 1)$ است. پس کافی است $P(x)$ را بر $(x - 1)$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x - 2 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 + x - 2 & \\ -x^2 + x & \\ \hline 2x - 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x(x-1)} = 4$$

پس $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$ و در نتیجه:

نکته: اتحادهای جبری مورد استفاده در تجزیه چندجمله‌ای‌ها:

$$1) x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$2) (x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$3) x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$4) x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$5) (x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

$$6) (x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$$

$$7) x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$$

نکته: اگر برای محاسبه حالت $\frac{0}{0}$ صورت یا مخرج شامل عبارات گنگ بود با ضرب کردن صورت و مخرج در یک عبارت مناسب، کسر را به عبارتی گویا تبدیل می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$$

تمرین:

پاسخ: صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - (3)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{2 \times (\sqrt{1+8}+3)} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

تمرین:

پاسخ: برای گویا کردن عبارات گنگ با فرجه ۳، کافی است در پرانتز چاق ضرب کنیم و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، عبارت گنگ را گویا کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x})^3 - (2)^3} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 12$$

تمرین: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+x+2}}{x^3-8}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2[x]-x^2}{x^2-9x+14}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{3x-2}} \times \frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x)^2 - (\sqrt{3x-2})^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{x^2-3x+2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)} = \frac{4 \times 4}{1} = 16$

ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \frac{6}{8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+x+2}}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x^2+x+2}}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{4 \times \sqrt{8}}{12} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2[x]-x^2}{x^2-9x+14} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x^2}{x^2-9x+14} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(x-7)} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x^2+x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = 1$

تمرین: اگر $\lim_{x \rightarrow 63} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x}} - b}{x-63} = a$ باشد، مقدار a کدام است؟

$-\frac{1}{96}$ (۴)

$-\frac{1}{16}$ (۳)

$\frac{1}{96}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۲»

از آن جا که مخرج کسر صفر است پس حالت $\frac{0}{0}$ بوده، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 63} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x}} - 3}{x-63} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x}} + 3}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}} + 3} = \lim_{x \rightarrow 63} \frac{(\sqrt{1+\sqrt{1+x}})^2 - (3)^2}{(x-63)(\sqrt{1+\sqrt{1+x}} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 63} \frac{\sqrt{1+x} - 8}{(x-63)(\sqrt{1+\sqrt{1+x}} + 3)} \times \frac{\sqrt{1+x} + 8}{\sqrt{1+x} + 8} = \lim_{x \rightarrow 63} \frac{\cancel{x-63}}{(x-63)(\sqrt{1+\sqrt{1+x}} + 3)(\sqrt{1+x} + 8)} = \frac{1}{6 \times 16} = a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{96}$$

تمرین: اگر $f(x) = \begin{cases} x^6 + x^2 - 2 & x > 1 \\ x^2 - 1 & x = 1 \\ ax + 2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد داشته باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^6 + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 2) = a + 2 \Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$x^6 + x^2 - 2$	$x - 1$
$-x^6 + x^5$	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$
$x^5 + x^2 - 2$	
$-x^5 + x^4$	
$x^4 + x^2 - 2$	
$-x^4 + x^3$	
$x^3 + x^2 - 2$	
$-x^3 + x^2$	
$2x^2 - 2$	
$-2x^2 + 2x$	
$2x - 2$	
$-2x + 2$	
0	

نکته: چند اتحاد مثلثاتی که در محاسبه حد بعضی از توابع مورد استفاده قرار می گیرند عبارت اند از:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (2)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \quad (3)$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

از مورد شماره ۳ نتیجه می‌گیریم:

نکته: در ابتدای فصل حد، با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ دریافتیم که:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \times \frac{1}{\cos u} = 1 \times \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\tan u} = 1$$

نکته:

تمرین: مقادار حدهای زیر را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \Delta x}{\sin 3x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \tan x} - \sqrt{3 - \tan x}}{3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \tan \Delta x}{x^2 + 4x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x - \sin^2 x}{x^3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - \sqrt{x})}{1 - x}$$

پاسخ:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{1} = 1 \times \frac{2}{\cos(0)} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \frac{2}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \sqrt{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \Delta x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan \Delta x}{\Delta x} \times \Delta x}{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3x} = \frac{\Delta}{3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{2} \times 2}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = -\sqrt{2}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\tan x} - \sqrt{3-\tan x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{3+\tan x} + \sqrt{3-\tan x}}{\sqrt{3+\tan x} + \sqrt{3-\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2} \tan x}{x^2 (\sqrt{3+\tan x} + \sqrt{3-\tan x})}$$

$$= \frac{2}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \tan 4x}{x^2 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x}{x} \times x \times \frac{\tan 4x}{4x} \times 4x}{x^2 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}} (1+4)} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x - \sin^2 x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\cos x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \times (-2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} \times x^2 \times (-2) (\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2})^2}{x^3} = \frac{-x^2}{x^3} = -1$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x \sqrt{1-\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\tan^2 x}{x^2} \times x^2 \times \sqrt{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2} x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}} = 2\sqrt{2}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \times (\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (-2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \times x (-2) (\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2})^2}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^3 \cos x} = \frac{-1}{\cos 0} = -1$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$$

نکته: روش تغییر متغیر در محاسبه حدود:

در این روش با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را ساده‌تر کرده و سپس حد جدید را محاسبه می‌کنیم. در میل کردن x به سمت a ($x \rightarrow a$) عامل صفرکننده $(x-a)$ می‌باشد که در روش تغییر متغیر $x-a=t$ و از آن‌جا که $x \rightarrow a$ پس $t \rightarrow 0$ میل می‌کند.

تعریف: حدود زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cot \pi x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 4x}{4x - \pi} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x \cos x}{1 + \cos 2x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x} \quad (3)$$

پاسخ:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x}{4x - \pi} \xrightarrow[x = \frac{\pi}{4} + t]{x - \frac{\pi}{4} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2(\frac{\pi}{4} + t)}{4(\frac{\pi}{4} + t) - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + 2t)}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{4t} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cot \pi x \xrightarrow[x = t+1]{x-1=t} \lim_{t \rightarrow 0} t \cot \pi(t+1) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cot(\pi + \pi t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cot(\pi t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 \times \pi t}{\tan \pi t} = \frac{1}{\pi}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x} \xrightarrow[x = t+1]{x-1=t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(t+1)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi t}{2}}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2} \times \frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x \cos x}{1 + \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x \cos x}{2 \cos^2 x} \xrightarrow[x = \frac{\pi}{2} + t]{x - \frac{\pi}{2} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2(\frac{\pi}{2} + t)}{2 \cos(\frac{\pi}{2} + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + 2t)}{-2 \sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{-2 \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2t}{2t} \times 2t}{\frac{-2 \sin t}{t} \times t} = \frac{2t}{-2t} = -1$$

معادله آزاد (روش‌های تستی جهت استفاده دانش‌آموزان علاقه‌مند)

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ باشد، در این صورت f و g را در نقطه a هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $f \sim g$.

در محاسبه حد توابع می‌توان به جای f از هم‌ارز آن یعنی تابع g استفاده کرد.

هم‌ارزی‌های مهم در محاسبه حد توابع:

اگر $u = 0$ میل کند، داریم:

۱) $au^n + bu^{n-1} \dots + cu^m \sim cu^m$ (هم‌ارزی کم‌توان)

۲) $\sqrt[n]{1 \pm u} \sim 1 \pm nu$
 ۳) $(1+u)^n \sim 1+nu$ $\Rightarrow$ (هم‌ارزی برنولی)

۴) $a \sin u \sim au$

۵) $a \tan u \sim au$

۶) $u - \sin u \sim \frac{u^3}{6}$

۷) $u - \tan u \sim -\frac{u^3}{3}$

۸) $\tan u - \sin u \sim \frac{u^3}{2}$

۹) $1 - \cos^n u \sim \frac{n}{2} u^2$

$\lim_{x \rightarrow 1} 1 - \sqrt[n]{a} \sim \frac{1-a}{n}$

$f - g = \frac{f^n - g^n}{n}$

نکته:

نکته: اگر f و g هر دو به سمت ۱ میل کنند، آن‌گاه داریم (n عدد طبیعی است):

تعریف: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x} + x}{\sqrt[4]{x} - x}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + 2(x-1)}{\sqrt[3]{x-1} + 4(x-1)}$

۵) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{1+2x}}{\sin \frac{x}{e}}$

۷) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \sin x} - \sqrt[3]{1-\tan x}}{x}$

۹) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sin 5x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}$

۲) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)^4 + 3(x+2)^3 + (x+2)^2}{(x+2)^6 + 2(x+2)^2}$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

۶) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin 2x \tan 3x \dots \sin nx}{nx^{n-1} \sin 3x}$

۸) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[5]{x}-1)}{(x-3)^3}$

۱۰) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \tan 2x}{1 - \sqrt{\cos x}}$

پاسخ:

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x} + x}{\sqrt[4]{x} - x} \xrightarrow{\text{کم‌توان}} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x}} = \frac{2}{3}$

۲) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)^4 + 3(x+2)^3 + (x+2)^2}{(x+2)^6 + 2(x+2)^2} \xrightarrow{x+2=t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2t^4 + 3t^3 + t^2}{t^6 + 2t^2} \xrightarrow{\text{کم‌توان}} \sim \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + 2(x-1)}{\sqrt[3]{x-1} + 4(x-1)} \xrightarrow{\text{کم توان}} \sim \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{6}} = 0$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - (1 - \frac{x}{2})}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x} \xrightarrow{\text{کم توان}} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+2x}}{\sin \frac{x}{6}} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x}{2} - (1 + \frac{2x}{3})}{\frac{x}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7x}{6}}{\frac{x}{6}} = -7$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sin 2x \tan 3x \dots \sin nx}{nx^{n-1} \sin 2x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times 2x \times 3x \times \dots \times nx}{nx^{n-1} \times 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n! x^n}{2n x^n} = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - \sqrt[3]{1-\tan x}}{x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2\sin x}{2} - (1 - \frac{\tan x}{3})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \frac{\tan x}{3}}{x} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x}{3}}{x} = \frac{4}{3}$$

$$۸) \sqrt{x} - 1 \xrightarrow[n=2]{f=\sqrt{x}, g=1} \sim \frac{x-1}{2}$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 \xrightarrow[x=3]{f=\sqrt[3]{x}, g=1} \sim \frac{x-1}{3}$$

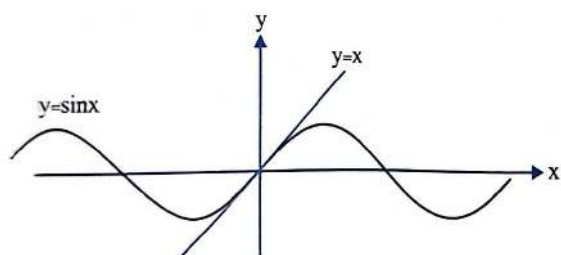
$$\sqrt[5]{x} - 1 \xrightarrow[x=5]{f=\sqrt[5]{x}, g=1} \sim \frac{x-1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[5]{x}-1)}{(x-1)^3} \sim \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\frac{x-1}{2})(\frac{x-1}{3})(\frac{x-1}{5})}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{30}(x-1)^3}{(x-1)^3} = \frac{1}{30}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{\sin 5x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \sim \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{5x}}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{5x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5\sqrt[3]{2}x}{-x} = -5\sqrt[3]{2}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \tan 2x}{1-\sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \tan 2x}{1-(\cos x)^{\frac{1}{2}}} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \times 2x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 4$$

نکته: با توجه به شکل روبه‌رو در همسایگی نقطه $x=0$ ، اندازه x از $\sin x$ بیشتر است.



$$x \rightarrow 0 \Rightarrow |x| > |\sin x|$$

بنابراین حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ در اصل برابر 1^+ (چون صورت از مخرج بزرگتر است) است و حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ در اصل برابر 1^- (چون مخرج از صورت بزرگتر است) است.

تمرین: حاصل عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin x}{x}]$ و $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{x}{\sin x}]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۰ ، ۰ (۴)

۱ ، ۰ (۳)

۰ ، ۱ (۲)

۱ ، ۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{x}{\sin x}] = [1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin x}{x}] = [1^-] = 0$$

پاسخ:

Homework (1)

۱ اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) -۴
(۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳ فرض کنید $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1) - 2\tan[x]}{x^n(1-\cos(\sqrt{3x}))}$ باشد، مقدار a^n ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{1}{9}$
(۲) $\frac{2}{9}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $1 - \frac{1}{2}$
(۳) -۲
(۴) $-\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x} + 1}$ ، کدام است؟

- (۱) $-1/5$
(۲) $-1/2$
(۳) $-5/8$
(۴) $-5/6$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶

فرض کنید $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^p(\frac{1}{\sqrt{1-x^p}} - 1)}{(1 - \cos(\sqrt{p}x))^n}$ مقدار $a + n$ کدام است؟

(۲) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{17}{4}$

(۱) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{15}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۷

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

(۲) $-\sqrt{2}$
(۴) 2

(۱) -2
(۳) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ (1) Homework

گزینه ۳

۱

ابتدا تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$xg(x) = f(x) - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$$

پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2 - 1}{x} = \frac{0}{0} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(-1 + \sin x)^2 - (1 + \sin x)^2}{(1 + \sin x)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1 + \sin x)^2 - (1 + \sin x)^2}{x(1 + \sin x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x(1 + \sin x)^2} = -4 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2 - 1}{x} = \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)\left(\frac{2 \cos x}{(1 + \sin x)^2}\right)}{1} = \frac{2 \times (-1) \times 2}{1} = -4 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

روش اول:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x})(\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x})}{\sqrt{2(1-\cos x)}(\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2-3x) - (2-5x)}{\sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}}(2\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-2\sin \frac{x}{2}(2\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}(\sin \frac{x}{2})} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{2|\sin \frac{x}{2}|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{-2\sin \frac{x}{2}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} + \frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos \frac{x}{2}} = \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^p} - 1) - p \tan[x]}{x^n(1 - \cos \sqrt{p}x)} &= a \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^p} - 1}{x^n \times \frac{1}{p}(p^2 x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{p}x^p - 1}{\frac{p}{p^2}x^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{x^{n+1}} = a \Rightarrow \begin{cases} n = p \\ a = -\frac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow a^n = \frac{1}{p}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}} \times \frac{1 + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+x)} = -\frac{3}{2}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} \stackrel{x \rightarrow -1}{=} \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

راه حل اول: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 7\sqrt{x} + 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)(4x+1)}$$

$$= \frac{-3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{-12}{10} = -1/2$$

راه حل دوم: با استفاده از هوییتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{7}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{1} = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

وقتی $x \rightarrow 0$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\cos^n x \sim 1 - \frac{n}{2}x^2$$

$$\tan x \sim x$$

پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^p \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^p}} - 1 \right)}{(1 - \cos(\sqrt{2x}))^n} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^p}} - 1 \right)^p}{\left(\frac{2x}{2} \right)^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^p}}{\sqrt{1-x^p}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^p}}{1 + \sqrt{1-x^p}} \right)^p}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 - (1-x^p) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^p} \times (1 + \sqrt{1-x^p})} \right)^p}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^p}{2} \right)^p}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{x^n} \xrightarrow{n=p} a = \frac{1}{2} \\ a + n &= p + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

پس باید رفع ابهام انجام دهیم. می‌دانیم $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ از طرفی می‌دانیم اگر x به سمت صفر میل کند، $\sin x$ هم‌ارز با x می‌شود، پس نتیجه می‌گیریم که $x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ به علاوه هم‌ارزی زیر را داریم:

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{1 \pm u} \sim 1 \pm \frac{u}{n}$$

پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{2}x} - \sqrt{1-\frac{1}{2}x}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}\left(\left(1+\frac{3}{4}x\right) - \left(1-\frac{1}{4}x\right)\right)}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}} = -2 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

حال کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} &\times \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x\sqrt{1+\cos x}}{(-x)\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{-1(2\sqrt{2})} = -2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

Homework (2)

حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x + 1} + x}$$

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x}$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[x] - 12}{x^2 - 10x + 25}$$

۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos 2x}$$

۴

حد توابع زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 1}{[2x - 1]}$$

۵

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

۶

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

۷

۲ (۲)

۱ (۱)

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) -۱
(۴) ۲

۹ اگر $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2+1}{3x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} (f \times g)(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) حد ندارد.

۱۰ اگر $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \cdot (x+1)$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۸
(۳) -۱
(۴) ۲

۱۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸

۱۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x[2x] - 2}{x^2 - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) -۱

۱۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{4}{5}$
(۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ (2) Homework

۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x + 4} + x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{2x + 4} - x)}{(\sqrt{2x + 4} + x)(\sqrt{2x + 4} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)A}{2x + 4 - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)A}{(x + 2)(-x + 4)} \\ &= \frac{-4(4)}{6} = \frac{-16}{3} \end{aligned}$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(3x + 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(3x + 1)}{x(x - 1)} = +3$$

۳

$$\lim_{x \rightarrow 17} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 10x + 17} = \lim_{x \rightarrow 17} \frac{(x - 17)(2x + 6)}{(x - 17)(x^2 + 17x - 1)} = \frac{12}{17}$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2(\frac{\pi}{2} + y) - \pi}{\cos(\frac{\pi}{2} + 2y)}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = y \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{-\sin 2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{-2y} = -1$$

۵

$$\frac{3 \times 2 + 1}{[4]} = \frac{7}{4} = 1$$

۶

$$\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{4 + 4 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

۷

گزینه ۲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۲

۸

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

۹

$$(f \times g)(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \times \frac{x^2+1}{3(x+1)} = \frac{(x-2)(x^2+1)}{3(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(x^2+1)}{3(x-1)} = \frac{(-3)(2)}{3(-2)} = 1$$

گزینه ۱

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{(x-3)}{x-3} \cdot (x+1) \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-(x-3)}{x-3} \cdot (x+1) \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x-1) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4 + (-4) = 0$$

گزینه ۳

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = 16$$

گزینه ۱

۱۲

$$x \rightarrow 1^+ : [2x] = [2(1^+)] = [2^+] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

گزینه ۴

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

فصل هفتم: آمار و احتمال (ریاضی ۲ ویژه رشته تجربی)

BOX 1: یادآوری احتمال – احتمال شرطی – پیشامدهای مستقل (صفحه ۱۴۴ تا ۱۵۲ کتاب درسی)

در سال قبل با برفی از مفاهیم احتمال و هم‌پنین مناسبه احتمال رفتار یک پیشامد از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ آشنا شدید. در این BOX ابتدا آن‌ها را یادآوری می‌کنیم و چند مثال بیان می‌کنیم.

یادآوری احتمال، احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل

پدیده‌های تصادفی: به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که از همه حالات ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم اما از این که کدام حالت قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداشته باشیم، پدیده تصادفی می‌گوییم.

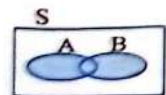
فضای نمونه‌ای: مجموعه شامل همه حالات‌های ممکن در به وقوع پیوستن پدیده‌های تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهند.

پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم و معمولاً آن را با A نشان می‌دهیم.

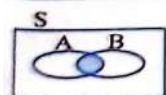
تعریف: می‌دانیم $\emptyset \subset S$ ، پس $\emptyset$ یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S است. $\emptyset$ را پیشامد نشدنی یا غیرممکن می‌نامیم.

تعریف: هم‌چنین $S \subseteq S$ ، بنابراین S یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S است. S را پیشامد حتمی می‌گوییم.

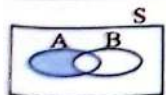
اعمال روی پیشامدها



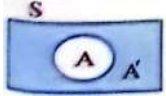
(۱) اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cup B$ مشخص شده است:



(۲) اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cap B$ مشخص شده است:



(۳) تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. در شکل مقابل پیشامد $A - B$ مشخص شده است:



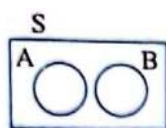
(۴) متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و A پیشامدی از آن باشد، در این صورت متمم A را با A' نمایش می‌دهیم و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند.

نکته: (۱) با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، نتایج زیر حاصل می‌شوند:

$$A' = S - A \quad (ب) \quad A \cup A' = S \quad (پ) \quad A \cap A' = \emptyset \quad (ت) \quad n(A') = n(S) - n(A)$$

(۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه:

پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت آن‌ها را دو پیشامد ناسازگار می‌گوییم. در واقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، هم‌زمان رخ نمی‌دهند. در شکل مقابل دو پیشامد ناسازگار A و B مشخص شده است:



احتمال رخداد یک پیشامد

• احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و برای محاسبه $P(A)$ کافی است تعداد اعضای A یعنی $n(A)$ را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$ تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی $P(A)$ عددی حقیقی است که شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

• برای تعیین احتمال رخداد یک پیشامد دلخواه مانند A ، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) مشخص کردن آزمایش تصادفی

(۲) مشخص کردن فضای نمونه‌ای و تعیین تعداد اعضای آن

(۳) مشخص کردن پیشامد مطلوب و تعیین تعداد اعضای آن

سپس با استفاده از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ، احتمال رخداد پیشامد به دست می‌آید.

تعریف: در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس مربع کامل باشد، چه قدر است؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی ۳۶ عضو دارد؛

$$A = \{(1,3), (3,1), (2,2), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(A) = 7$$

مجموع=۴ مجموع=۹

$$\Rightarrow P(A) = \frac{7}{36}$$

قوانین احتمال

اگر A پیشامدی دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشد، آن گاه:

$$۱) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$۲) \quad P(\emptyset) = 0$$

$$۳) \quad P(S) = 1$$

نکته: هر چه قدر تعداد اعضای A بیشتر باشد، کسر $\frac{n(A)}{n(S)}$ بزرگ‌تر و به عدد یک نزدیک‌تر بوده و اصطلاحاً می‌گوییم احتمال رخداد پیشامد A بیشتر است.

برای محاسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B از قانون جمع احتمالات استفاده می‌کنیم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قانون جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

احتمال پیشامد متمم: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در این صورت:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad , \quad P(A) = 1 - P(A')$$

تعریف: درون جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۲ مهره آبی وجود دارد. سه مهره با هم و به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن که حداکثر ۲ مهره خارج شده سیاه باشد را به دست آورید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای، تمام حالت‌های انتخاب ۳ مهره از ۹ مهره درون جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن حداکثر ۲ مهره خارج شده سیاه باشد، آن گاه متمم آن (A') پیشامدی است که در آن هر سه مهره

$$n(A') = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

خارج شده سیاه است. داریم:

احتمال شرطی

در پرتاب یک تاس، احتمال روشن شدن عدد ۲ برابر $\frac{1}{6}$ است، اما اگر گفته شود عدد روشده در پرتاب تاس، عددی زوج است، آن گاه احتمال روشن شدن عدد ۲ برابر $\frac{1}{3}$ خواهد بود. چنین احتمال‌هایی را که با اطلاعات جدید فضای نمونه تغییر می‌کند را احتمال شرطی می‌گوییم.

تعریف: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > 0$ ، در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم و از دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

محاسبه احتمال شرطی

در محاسبه احتمال شرطی، همه حالت‌های ممکن برابر همه حالت‌هایی است که در آن‌ها B رخ داده است. در واقع B فضای نمونه‌ای جدید ما خواهد بود و تمام حالت‌های مطلوب، همه حالت‌هایی است که هم B و هم A رخ داده باشند.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

و در فضای نمونه‌ای گسسته هم‌شانس داریم:

تمرین: (۱) اعداد ۱ تا ۶ را روی ۶ کارت می‌نویسیم و دو کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع آن‌ها زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد زوج است؟

(۲) در خانواده‌ای با سه فرزند، اگر دقیقاً ۲ فرزند خانواده دختر باشند، احتمال آن‌ها فرزند اول خانواده دختر باشد را به دست آورید.

پاسخ: (۱) پیشامدهای A و B را به صورت‌های زیر در نظر می‌گیریم: A : هر دو عدد زوج است. B : مجموع دو عدد زوج است.

تعداد حالت‌هایی که هر دو عدد زوج باشد برابر $n(A) = \binom{3}{2} = 3$ است. برای آن‌که جمع دو عدد زوج باشد، باید هر دو زوج یا هر دو فرد باشند:

$$n(B) = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6 \Rightarrow P(A|B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(۲) فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۳ فرزند به صورت زیر است:

$$S = \{(پ، پ، پ)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (پ، د، د)، (د، پ، پ)، (د، پ، د)، (د، د، پ)، (د، د، د)\}$$

اگر B پیشامدی باشد که در آن ۲ فرزند دختر باشند، آن گاه:

اگر A پیشامدی باشد که در آن فرزند اول خانواده دختر باشد، آن گاه:

$$A \cap B = \{(د، پ، پ)، (د، د، پ)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{3}$$

تذکره: در حل تمرین قبل، نیازی به نوشتن فضای نمونه‌ای S نداریم، اما باید از روی S ، پیشامد B را مشخص کنیم.

نکته: در محاسبه احتمال شرطی، اگر پیشامدهای A و B شمارشی نباشند، باید از فرمول $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ استفاده کنیم.

تمرین: فرض کنید احتمال این‌که تیم A اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{7}{10}$ است. احتمال قهرمانی تیم A برابر $\frac{8}{10}$ است و اگر اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، آن گاه احتمال قهرمانی به $\frac{9}{10}$ افزایش پیدا می‌کند. احتمال این‌که تیم A قهرمان شود یا اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، چه قدر است؟

(مشابه مثال صفحه ۱۴۶ کتاب درسی)

پاسخ: برای پاسخ به سوال باید دو پیشامد تعریف کنیم و از فرمول استفاده کنیم. پیشامدهای C و D را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

C : تیم A قهرمان شود. D : تیم A اصلی‌ترین رقیبش را ببرد.

باید مقدار $P(C \cup D)$ را به دست بیاوریم. طبق قانون جمع احتمالات داریم:

طبق فرض، $P(C) = 0/8$ و $P(D) = 0/7$ است. اما این که گفته شده، اگر اصلی ترین رقیب را ببرد، آن گاه احتمال قهرمانی برابر $0/9$

می شود، یعنی $P(C|D) = 0/9$ است. طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} \Rightarrow 0/9 = \frac{P(C \cap D)}{0/7}$$

$$\Rightarrow P(C \cap D) = 0/9 \times 0/7 = 0/63 \Rightarrow P(C \cup D) = 0/8 + 0/7 - 0/63 = 0/87$$

قانون ضرب احتمالات: از رابطه $P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} P(B)$ ، تساوی $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ به دست می آید که به آن قانون

ضرب احتمالات می گوئیم و از این قانون برای به دست آوردن احتمال هم زمان وقوع دو پیشامد استفاده می کنیم.

تعریف: درون جعبه ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می کنیم. احتمال آن که لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم A پیشامد سالم بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد. می خواهیم $P(A \cap B)$ را به دست آوریم.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

داریم:

$$P(A) = \frac{4}{5}, P(B|A) = P(\text{لامپ اول سالم} | \text{لامپ دوم معیوب}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

• در مثال های مربوط به احتمال شرطی دیدیم که برخی از پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می گذارند اما برخی پیشامدها وجود دارند که بر احتمال وقوع دیگری تأثیر ندارند. برای چنین پیشامدهایی نامگذاری دیگری داریم.

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد مستقل: پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A تأثیر نداشته باشد.

به عبارت دیگر پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه:

$$P(A|B) = P(A)$$

پس برای بررسی مستقل بودن پیشامد A از B، یک بار $P(A)$ (احتمال وقوع A با فضای نمونه ای S) و بار دیگر $P(A|B)$ (احتمال وقوع A در فضای نمونه ای جدید B) را به دست می آوریم. اگر این دو عدد یکسا نباشد، آن گاه پیشامد A از B مستقل است.

نکته: پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ باشد.

با توجه به فرمول $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و تساوی $A \cap B = B \cap A$ ، می توان نوشت:

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)P(A) \Rightarrow \text{پیشامد B از A مستقل است.}$$

نکته: (۱) اگر پیشامد A از پیشامد B مستقل باشد، آن گاه پیشامد B نیز از A مستقل است و می گوئیم دو پیشامد A و B از هم مستقل اند.

(۲) دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

در برخی از مثال ها می توان به طور شهودی استقلال دو پیشامد را تشخیص داد و نیازی به بررسی درستی تساوی

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ نمی باشد. به مثال زیر توجه کنید:}$$

تعریف: یک سکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. احتمال آن که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید را به دست آورید.

پاسخ: روش اول: فضای نمونه ای پرتاب یک سکه و یک تاس، ۱۲ عضو دارد که به صورت زیر است:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید به صورت زیر است:

$$A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

روش دوم: پشت آمدن سکه، تأثیری در احتمال زوج آمدن تاس ندارد. پس می توان پیشامدهای A و B را به صورت زیر در نظر گرفت که این

دو پیشامد مستقل از هم‌اند:

A: پیشامد پشت آمدن سکه B: پیشامد روشن شدن عددی زوج در پرتاب تاس

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

باید احتمال $P(A \cap B)$ را به دست بیاوریم. چون A و B مستقل‌اند، بنابراین:

$P(A)$ یعنی احتمال پشت آمدن سکه در یک پرتاب که این عدد برابر $\frac{1}{2}$ است.

$P(B)$ یعنی احتمال روشن شدن عددی زوج در پرتاب یک تاس که این عدد برابر $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، در این صورت:

(آ) A' و B نیز مستقل از هم هستند. $(P(A' \cap B) = P(A')P(B))$

(ب) A و B' نیز مستقل از هم هستند. $(P(A \cap B') = P(A)P(B'))$

(پ) A' و B' نیز مستقل از هم هستند. $(P(A' \cap B') = P(A')P(B'))$

تعریف: اگر A و B دو پیشامد مستقل، $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$ باشند، مقدار $P(B)$ را به دست آورید.

پاسخ: دو پیشامد A و B مستقل‌اند، پس دو پیشامد A و B' نیز مستقل خواهند بود. داریم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \quad (1) \quad , \quad B', A \Rightarrow P(A \cap B') = P(A)P(B') \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A)P(B') \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + P(B') - \frac{1}{4}P(B') \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = (1 - \frac{1}{4})P(B')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{4}P(B') \Rightarrow P(B') = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

گاهی اوقات در ظاهر پیشامدهایی وجود دارند که وقوع آن‌ها با هم در ارتباط است ولی نمی‌توان به طور قطع گفت که این دو پیشامد مستقل نیستند.

تعریف: در پرتاب دو تاس آبی و قرمز پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید (ابتدا تاس آبی و سپس تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم):

(مشابه مثال صفحه ۱۴۸ کتاب درسی)

A: مجموع عددهای روشده ۴ باشد. B: مجموع عددهای روشده ۷ باشد. C: تاس آبی عدد ۳ بیاید.

(۱) آیا A مستقل از C است؟ چرا؟

(۲) آیا B مستقل از C است؟ چرا؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $6 \times 6 = 36$ عضو دارد.

(۱) باید $P(A)$ و $P(A|C)$ را به دست آوریم. در صورت برابری این دو عدد، دو پیشامد A و C مستقل‌اند:

$$A \Rightarrow A = \{(1,3), (3,1), (2,2)\} \quad , \quad n(S) = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$C \Rightarrow C = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} \Rightarrow A \cap C = \{(3,1)\}$$

$$\Rightarrow P(A|C) = \frac{n(A \cap C)}{n(C)} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) \neq P(A|C) \Rightarrow \text{دو پیشامد A و C مستقل از هم نمی‌باشند.}$$

$$B \Rightarrow B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

$B \cap C = \{(3, 4)\} \Rightarrow n(B \cap C) = 1 \Rightarrow P(B | C) = \frac{n(B \cap C)}{n(C)} = \frac{1}{6} = P(B) \Rightarrow B$ مستقل از C است.

پرسش‌های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد می‌گوییم.

۲- منظور از $P(A | B)$ ، احتمال وقوع پیشامد است به شرط آن که بدانیم پیشامد رخ داده است.

۳- هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک در فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

۴- اگر وقوع پیشامد A بر احتمال وقوع پیشامد B تأثیری نداشته باشد، دو پیشامد A و B را می‌نامیم.

(شهریور ۱۳۰۲)

۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A \cap B)$ برابر است.

(فرورداد ۱۳۰۲)

۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

$$P(A \cap B) = P(S) \quad (2)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (1)$$

$$A \cap B = A \times B \quad (4)$$

$$A \cap B = \emptyset \quad (3)$$

۷- دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آن‌که هر دو عدد روشده زوج باشند، به شرط این‌که بدانیم مجموع اعداد روشده برابر ۸ باشد را به

(شهریور ۱۳۰۲)

دست آورید.

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۵۲ کتاب درسی)

۸- دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می‌کنیم.

(آ) اگر بدانیم مجموع عدد روشده در دو تاس ۸ شده است، احتمال این‌که تاس سفید ۵ آمده باشد را به دست آورید.

(ب) اگر بدانیم تاس سفید ۵ آمده است، احتمال این‌که مجموع دو تاس ۸ شده باشد را به دست آورید.

۹- احتمال این که یک تیم فوتبال اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورت بردن رقیب اصلی اش، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش می یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

(فرداد ۱۴۰۲)

۱۰- ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آن ها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

(فرداد ۱۴۰۲)

۱۱- فرض کنید در یک سال، احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\frac{6}{10}$ و احتمال قهرمانی تیم والیبال ایران $\frac{7}{10}$ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم ها قهرمان آسیا خواهد شد؟

(شوربور ۱۴۰۲)

۱۲- در پرتاب یک سکه و دو تاس با هم، احتمال آن که سکه رو یا مجموع اعداد روی دو تاس برابر ۵ باشد را به دست آورید.

۱۳- اگر $P(A') = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ باشد، مقدار $P(A | B)$ را به دست آورید.

Homework

۱

سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر $\frac{1}{15}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

- | | |
|---------------------|--------------------|
| (۱) $\frac{1}{3}$ | (۲) $\frac{1}{5}$ |
| (۳) $\frac{15}{91}$ | (۴) $\frac{5}{51}$ |

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲

یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار k ام "رو" ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+5}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه "رو" بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

- | | |
|--------|-------|
| (۱) ۱۲ | (۲) ۹ |
| (۳) ۸ | (۴) ۵ |

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳

یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار m ام "رو" ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{m}{m+3}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب m بار سکه "رو" بیاید. کدام مقدار می‌تواند nm باشد؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۵۰ | (۲) ۴۵ |
| (۳) ۴۰ | (۴) ۳۵ |

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴

احتمال اینکه یک کشتی‌گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{1}{5}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{1}{3}$ بوده و در صورتی که اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{1}{4}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی‌گیر قهرمان می‌شود یا رقیب اصلی خود را می‌برد؟

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (۱) $\frac{4}{15}$ | (۲) $\frac{11}{30}$ |
| (۳) $\frac{13}{30}$ | (۴) $\frac{7}{15}$ |

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵

احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر $۰/۰۸$ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر $۰/۵$ است. احتمال اینکه فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟

- (۱) $۰/۰۲$ (۲) $۰/۰۴$ (۳) ۲ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶

احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در دوره بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دوبار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد) (با تغییر)

- (۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۷}{۱۰}$ (۴) $\frac{۶}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷

احتمال اینکه یک دانش‌آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد $۰/۹$ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد $۰/۸۵$ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال اینکه در امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{۸}{۹}$ (۲) $\frac{۸۵}{۹۴}$ (۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$ (۴) $\frac{۴۵}{۴۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

طبق اطلاعات مسئله پیشامد "عدد سوم ۱۰ باشد" را با A نمایش می‌دهیم.
معنی این جمله این است که عدد انتخابی اول و دوم ۱۰ نمی‌باشند و عدد سوم ۱۰ است.

$$P(A) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15$$

حال از بین اعداد ۱ تا ۱۵ احتمال آن را حساب می‌کنیم که عدد اول و دوم مضرب ۳ نباشد و فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد. توجه داشته باشید که مضارب ۳ عبارتند از $\{3, 6, 9, 12, 15\}$.

$$P(B) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

پیشامد اینکه در n بار پرتاب دقیقاً k بار "رو" ظاهر شود مانند این است که تمام $k-1$ بار قبلی در $n-1$ پرتاب پشت ظاهر شده باشد:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{k+5} \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{k+5} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k}{k+5} \frac{n}{k} \Rightarrow 1 = \frac{n}{k+5} \Rightarrow n = k+5 \xrightarrow{+k} n+k = 2k+5$$

$n+k$ باید عددی فرد و بزرگتر از ۷ باشد. تنها گزینه با این ویژگی‌ها گزینه ۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

در پرتاب n ام، m امین "رو" ظاهر شود، یعنی در $n - ۱$ پرتاب قبلی $m - ۱$ بار "رو" ظاهر شده باشد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n} &= \frac{m}{m+3} \times \frac{\binom{n}{m}}{2^n} \\ \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m+1)!} &= \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!} &= \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{m!} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{m}{m+3} \times \frac{n}{m} \Rightarrow n = m+3 \\ \Rightarrow nm &= m(m+3) \xrightarrow{m=5} nm = 5 \times 8 = 40 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

پیشامد "بردن رقیب اصلی" را با A و پیشامد "کسب مدال طلا" را با B نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \\ P(B|A) &= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{10} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{6+10-3}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} P(\text{ابتلا}) &= 0.08, \quad P(\text{بهبود|ابتلا}) = 0.5 \\ \Rightarrow P(\text{بهبود} \cap \text{ابتلا}) &= P(\text{ابتلا}) \times P(\text{بهبود|ابتلا}) \\ &= 0.08 \times 0.5 = 0.04 \\ \Rightarrow 0.04 \times 100 &= 4\% \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۴

۶

A: متولد شدن خرگوش نر در اولین بارداری
B: متولد شدن خرگوش نر در دومین بارداری

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/6}{0/7} = \frac{6}{7}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۳

۷

A: قبولی در امتحان اول
B: قبولی در امتحان دوم

$$P(B) = 0/9, \quad P(A \cap B) = 0/85$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/85}{0/9} = \frac{17}{18}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

BOX 2: آمار توصیفی

(صفحه ۱۵۳ تا ۱۶۳ کتاب درسی)

آمار توصیفی به فاصله‌سازی داده‌ها و یا شافف‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می‌پردازد. در این بسته روش مناسب میانگین، میانه، دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌ها گفته می‌شود.

معیارهای گرایش به مرکز

میانگین و میانه به عنوان دو معیار گرایش به مرکز می‌باشند که می‌توان به کمک آن‌ها، نتیجه مطالعات را گزارش داد.

میانگین: حاصل تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد داده‌ها را میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌ها می‌گوییم و آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم. پس

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

اگر داده‌ها $x_1, x_2, \dots, x_N$ باشند، آن‌گاه:

که در آن N تعداد داده‌ها است.

تعریف: وزن ۸ نفر به صورت مقابل است. میانگین وزن این ۸ نفر را به دست آورید.

۷۳، ۷۸، ۸۲، ۷۹، ۸۴، ۷۷، ۷۹، ۸۰

پاسخ: مجموع وزن ۸ نفر را به دست می‌آوریم و سپس آن را بر عدد ۸ تقسیم می‌کنیم. عدد حاصل میانگین وزن این ۸ نفر است:

$$\bar{X} = \frac{73 + 78 + 82 + 79 + 84 + 77 + 79 + 80}{8} = \frac{632}{8} = 79$$

نکته:

(۱) اگر میانگین N داده آماری برابر $\bar{X}$ باشد، آن‌گاه مجموع داده‌ها برابر $N\bar{X}$ است: $\frac{x_1 + \dots + x_N}{N} = \bar{X} \Rightarrow x_1 + \dots + x_N = N\bar{X}$

(۲) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، میانگین نیز با آن‌ها برابر است و در غیر این صورت میانگین همواره عددی بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده است.

(۳) اگر میانگین داده‌های $x_1, \dots, x_N$ برابر $\bar{X}$ باشد، آن‌گاه با حذف و یا اضافه کردن تعدادی داده که میانگین آن‌ها نیز برابر $\bar{X}$ باشد، در میانگین داده‌ها تغییری به وجود نمی‌آید.

ویژگی‌های میانگین

قضیه: اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، آن‌گاه میانگین آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت جمع می‌شود.

قضیه: اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آن‌ها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

در دو قضیه بالا که ویژگی‌های میانگین گفته شده است را می‌توان به صورت یک نکته به صورت زیر بیان کنیم:

نکته: اگر $\bar{X}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_N$ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_N + b$ برابر $a\bar{X} + b$ می‌باشد و می‌نویسیم:

$$a\bar{X} + b = \overline{aX + b}$$

به عبارت دیگر اگر داده‌ها را در مقدار ثابت a ضرب و با مقدار ثابت b جمع کنیم، آن‌گاه برای به دست آوردن میانگین داده‌های جدید، کافی است، میانگین اولیه را در a ضرب و سپس با b جمع کنیم.

تعریف: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_N$ برابر ۱۲ باشد، میانگین داده‌های $4x_1 - 3, 4x_2 - 3, \dots, 4x_N - 3$ را به دست آورید.

پاسخ: هر داده آماری، چهار برابر شده است و سپس سه واحد از آن‌ها کم شده است، پس میانگین آن‌ها را ابتدا ۴ برابر می‌کنیم و سپس ۳

واحد از آن کم می‌کنیم. بنابراین:

$$4\bar{X} - 3 = 4 \times 12 - 3 = 45$$

$$\overline{4X - 3} = 4\bar{X} - 3 = 4 \times 12 - 3 = 45$$

با علائم ریاضی، داریم:

نکته: مجموع اختلافات داده‌ها از میانگین (انحراف از میانگین) برابر صفر است. به عبارت دیگر، اگر $\bar{X}$ میانگین داده‌های $x_1, \dots, x_N$

باشد، آن گاه: $(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_N - \bar{X}) = 0$

در واقع میانگین در مرکز داده‌ها قرار دارد، یعنی همان مقداری که داده‌ها از میانگین اضافی دارند، همان مقدار هم از میانگین کم دارند.

میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌ها بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

تذکر: لزومی ندارد که میانه عضوی از داده‌ها باشد.

روش پیدا کردن میانه:

(۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

(۲) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار می‌گیرد، برابر میانه است.

(۳) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار گرفته‌اند، برابر میانه است.

تمرین: (۱) میانه داده‌های ۲۴، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۶، ۲۵، ۲۴، ۲۶، ۲۹ را به دست آورید و سپس داده‌های قبل و بعد از میانه را مشخص کنید.

(۲) داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایه یازدهم قبل از یک مسابقه ورزشی است:

۱۰۰، ۹۱، ۸۲، ۷۵، ۹۸، ۱۰۵، ۹۸، ۸۸، ۱۰۱، ۸۹، ۹۲، ۹۷

(آ) میانه داده‌ها را به دست آورید. (ب) میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۹

پاسخ: (۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$Q_2 = 25$

تعداد داده‌ها برابر ۹ است، پس داده وسط (داده پنجم)، میانه داده‌ها است:

داده‌های قبل از میانه: ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۵

داده‌های بعد از میانه: ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۹

(۲) آ برای به دست آوردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۷۵، ۸۲، ۸۸، ۸۹، ۹۱، ۹۲، ۹۷، ۹۸، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۵

تعداد داده‌ها برابر ۱۲ است. میانگین دو داده وسط، یعنی داده‌های ۹۲ و ۹۷ میانه داده‌ها می‌باشد: $\text{میانه} = \frac{92+97}{2} = 94.5$

(۲) برای به دست آوردن میانگین، دوازده داده را با هم جمع می‌کنیم و حاصل را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{75+82+88+89+91+92+97+98+98+100+101+105}{12} = \frac{1116}{12} = 93$$

نکته: (۱) میانه فقط به این نکته توجه دارد که تعداد داده‌های بعد از آن برابر تعداد داده‌های قبل از آن باشد و به بزرگی و یا کوچک داده‌ها کاری ندارد. به عبارت دیگر، میانه نسبت به اندازه داده‌ها حساسیت نشان نمی‌دهد.

(۲) میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک که در آمار به آن‌ها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. در صورتی که میانه داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین در صورت وجود داده دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت از میانگین استفاده می‌کنیم.

شاخص‌های پراکندگی

به معیارهایی که نزدیکی یا دوری داده‌ها را از میانگین برای ما اندازه‌گیری می‌کنند، شاخص پراکندگی می‌گوییم. شاخص‌های پراکندگی در این قسمت عبارت‌اند از: (۱) دامنه تغییرات (۲) واریانس (۳) انحراف معیار (۴) ضریب تغییرات

دامنه تغییرات: دامنه تغییرات که آن را با R نمایش می‌دهیم عبارت است از اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده. به عبارت دیگر:

$$R = b - a = \text{کوچک‌ترین داده} - \text{بزرگ‌ترین داده}$$

تمرین: دامنه تغییرات داده‌های ۱۸، ۱۶، ۱۷، ۱۴، ۱۲، ۱۱، ۹، ۷، ۸، ۷، ۵، ۹، ۱۰ و ۱۵ را به دست آورید.

$$a = 5, b = 18 \Rightarrow R = b - a = 18 - 5 = 13$$

پاسخ:

نکته: (۱) دامنه تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد.

(۲) هر چه قدر دامنه تغییرات کم‌تر باشد، داده‌های آماری به هم نزدیک‌ترند و پراکندگی داده‌ها کم‌تر است و در صورتی که تمام داده‌ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات برابر صفر است و برعکس.

واریانس: میانگین مجذور انحرافات از میانگین داده‌ها را واریانس داده‌ها می‌گوییم و آن را با σ^2 نشان می‌دهیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N}$$

تمرین: واریانس داده‌های ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱ و ۱۳ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{۱۳ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۰ + ۱۰}{۵} = \frac{۵۵}{۵} = ۱۱$$

پاسخ: میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_5 - \bar{X})^2}{۵}$$

$$\sigma^2 = \frac{(۱۰ - ۱۱)^2 + (۱۰ - ۱۱)^2 + (۱۱ - ۱۱)^2 + (۱۱ - ۱۱)^2 + (۱۳ - ۱۱)^2}{۵} = \frac{۱ + ۱ + ۰ + ۰ + ۴}{۵} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

تذکره: واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده موردنظر است.

نکته: هر چه واریانس داده‌ها کوچک‌تر باشد، پراکندگی داده‌ها کم‌تر است، یعنی داده‌ها به هم و در نتیجه به میانگین خودشان نزدیک‌ترند و اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها همگی با هم برابرند و برعکس.

تمرین: (۱) اگر واریانس داده‌های a ، $b - 2$ ، $2c + 1$ و 17 برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a + b$ ، $4c + 1$ ، 35 ، 36 و 38 را به دست آورید.

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

(۲) نمره درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B به صورت مقابل است:

(آ) واریانس نمره‌های هر یک از دو کلاس A و B را به دست آورید.

(ب) یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

پاسخ: (۱) واریانس داده‌های a ، $b - 2$ ، $2c + 1$ و 17 برابر صفر است، پس این داده‌ها همگی با هم برابرند:

$$a = b - 2 = 2c + 1 = 17 \Rightarrow a = 19, b = 19, c = 8$$

داده‌های جدید: $a + b = 36$ ، $4c + 1 = 33$ ، 35 ، 36 ، 38

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{۳۶ + ۳۳ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۸}{۵} = \frac{۱۷۸}{۵} = ۳۵/۶$$

$$\bar{X} = \frac{۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲}{۵} = \frac{۵۰}{۵} = ۱۰$$

(۲) (آ) برای به دست آوردن واریانس کلاس A، میانگین را به دست می‌آوریم:

مجذور اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A به دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و حاصل را بر ۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(۸ - ۱۰)^2 + (۹ - ۱۰)^2 + (۱۰ - ۱۰)^2 + (۱۱ - ۱۰)^2 + (۱۲ - ۱۰)^2}{۵} = \frac{۴ + ۱ + ۰ + ۱ + ۴}{۵} = ۲$$

$$\bar{X} = \frac{۰ + ۵ + ۱۰ + ۱۵ + ۲۰}{۵} = \frac{۵۰}{۵} = ۱۰$$

برای به دست آوردن واریانس کلاس B، میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{(0-10)^2 + (5-10)^2 + (10-10)^2 + (15-10)^2 + (20-10)^2}{5} = \frac{100+25+0+25+100}{5} = \frac{250}{5} = 50.$$

ب) واریانس نمرات ریاضی کلاس A کوچک‌تر است و در نتیجه داده‌ها از پراکندگی کم‌تری برخوردارند و در نتیجه معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کلاس A تدریس کند.

ویژگی‌های واریانس:

۱) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آن‌ها تغییر نمی‌کند.

۲) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آن‌ها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

دو ویژگی واریانس را می‌توان در یک نکته به صورت زیر ادغام کرد:

نکته: اگر داده‌ها را با عدد ثابتی جمع کنیم، واریانس آن‌ها تغییری نمی‌کند و اگر داده‌ها را در عدد ثابتی ضرب کنیم، واریانس آن‌ها در مجذور

این عدد ضرب خواهد شد. با بیان ریاضی، اگر واریانس داده‌های $x_1, \dots, x_N$ برابر σ_x^2 باشد، آن‌گاه واریانس داده‌های $x_1 + b, \dots, x_N + b$ و

$x_N + b$ برابر σ_x^2 و واریانس داده‌های $ax_1, \dots, ax_N$ برابر $a^2 \sigma_x^2$ خواهد بود و در حالت کلی داریم:

$$(\sigma_{ax+b})^2 = a^2 \sigma_x^2$$

تعریف: واریانس تعدادی داده آماری برابر ۵ است. ابتدا به هر داده آماری ۴ واحد اضافه می‌کنیم و سپس آن‌ها را دو برابر می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_N$ داده‌های اولیه با واریانس $\sigma_x^2 = 5$ باشند، داده‌های جدید به صورت $2(x_1 + 4), 2(x_2 + 4), \dots, 2(x_N + 4)$ و

$2(x_N + 4)$ می‌باشند. می‌دانیم جمع عدد ثابت در واریانس تأثیر ندارد و داریم:

$$\sigma_{2(x+4)}^2 \xrightarrow{\text{حذف عدد}} \sigma_{2x}^2 = 2^2 \sigma_x^2 = 4 \times 5 = 20.$$

انحراف معیار:

• واحد واریانس برابر است با مجذور واحد متغیر. به عنوان مثال اگر واحد داده‌ها متر باشد، آن‌گاه واریانس برحسب مترمربع است. اگر از واریانس جذر بگیریم، آن‌گاه واحد این عدد با واحد داده‌ها یکی می‌شود.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_N - \bar{X})^2}{N}}$$

• جذر واریانس را انحراف معیار می‌گوییم و آن را با نماد σ نمایش می‌دهیم، پس:

• توجه کنیم که جذر عددی مثبت است، پس σ مثبت است و هرچه کوچک‌تر باشد، آن‌گاه داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و اگر $\sigma = 0$ باشد، آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.

نکته: اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, \dots, x_N$ برابر σ_x باشد، آن‌گاه انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, \dots, ax_N + b$ برابر $|a| \sigma_x$ است، در واقع:

$$\sigma_{ax+b} = |a| \sigma_x$$

ضریب تغییرات:

اگر بخواهیم پراکندگی نمرات دو کلاس در درس ریاضی را با هم مقایسه کنیم، ابتدا واریانس نمرات هر یک از کلاس‌ها را به دست می‌آوریم. با فرض یکسان بودن میانگین نمرات دو کلاس، واریانس نمرات هر کلاسی کم‌تر باشد، آن داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و در نتیجه پراکندگی کم‌تر ی‌دارند. اما اگر میانگین نمرات دو کلاس متفاوت باشد، از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم. هم‌چنین اگر بخواهیم پراکندگی دو دسته از داده‌ها را که هم‌واحد نیستند با هم مقایسه کنیم، از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم. هرچه ضریب تغییرات داده‌ها کم‌تر باشد، پراکندگی داده‌ها کم‌تر است.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

• ضریب تغییرات که آن را با نماد CV نشان می‌دهیم عبارت است از خارج‌قسمت انحراف معیار بر میانگین، پس:

مفهوم ضریب تغییرات: ضریب تغییرات عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

تعین: ضریب تغییرات داده‌های ۴، ۸، ۶، ۶، ۶، ۶، ۶، ۶ را به دست آورید.

$$\bar{X} = \frac{4+8+6+6+6+6+6+6}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

پاسخ: ابتدا میانگین داده‌های آماری را به دست می‌آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(4-6)^2 + (8-6)^2 + 6(6-6)^2}{8}} = \sqrt{\frac{4+4}{8}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{1}{6}$$

انحراف معیار این ۸ داده آماری برابر است با:

نکته: ضریب تغییرات برای داده‌های مثبت تعریف می‌شود.

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) سه عدد هستند که داده‌ای مرتب‌شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نمایش می‌دهند.

محاسبه چارک‌ها

(۱) ابتدا میانه داده‌ها را به دست می‌آوریم.

(۲) برای داده‌های مرتب‌شده قبل از میانه، یک میانه به دست می‌آوریم و آن را چارک اول می‌نامیم.

(۳) برای داده‌های مرتب‌شده بعد از میانه، یک میانه به دست می‌آوریم و آن را چارک سوم می‌نامیم.

۱۳، ۱۳، ۱۲، ۱۴، ۱۱، ۱۵، ۱۵، ۱۰، ۱۶، ۱۷، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸

تعین: چارک‌ها را برای داده‌های مقابل مشخص کنید.

۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۶، ۱۶، ۱۷، ۱۷، ۱۸

پاسخ: داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$Q_2 = \frac{\text{مجموع داده‌های هشتم و نهم}}{2} = \frac{14+15}{2} = 14.5$ ، داده‌ها را به دو گروه ۸ تایی تقسیم می‌کند: Q_2 است. Q_2 ، داده‌ها را به دو گروه ۸ تایی تقسیم می‌کند: $Q_2 = 14.5$

$Q_1 = \frac{\text{مجموع داده‌های چهارم و پنجم}}{2} = \frac{12+13}{2} = 12.5$ میانه هشت داده اول، Q_1 است:

$Q_3 = \frac{x_{12} + x_{13}}{2} = \frac{16+16}{2} = 16$ میانه هشت داده آخر، Q_3 است:

در این مثال، داده‌ها به ۴ گروه چهارتایی تقسیم شده‌اند:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \downarrow Q_1$ ، $x_5, x_6, x_7, x_8 \downarrow Q_2$ ، $x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} \downarrow Q_3$ ، $x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$

نکته: با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصله بین دو داده متوالی قرار گیرند.

پرسش‌های تشریحی:

• درستی یا نادرستی عبارتهای سه سوال زیر را مشخص کنید.

- ۱- اگر مقدار ثابت و مثبت C از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه $\sqrt{C}$ کاهش می‌یابد.
- ۲- ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان کلاس در ۱۰ سال دیگر افزایش می‌یابد.
- ۳- اگر مقدار ثابت و مثبت C در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار C برابر می‌شود.
- ۴- میانگین داده‌های $x_1, \dots, x_N$ برابر ۱۷ است. میانگین داده‌های هر یک از دسته‌های زیر را به دست آورید.

$$A) \quad x_1 + 5, x_2 + 5, \dots, x_N + 5$$

$$B) \quad 3x_1, 3x_2, \dots, 3x_N$$

$$P) \quad 4x_1 - 1, 4x_2 - 1, \dots, 4x_N - 1$$

- ۵- واریانس داده‌های دسته زیر را به دست آورید.

۱۲, ۱۳, ۱۳, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۵

- ۶- نمرات ریاضی یک کلاس به قرار زیر است:

۱۸, ۱۸, ۱۳, ۲۰, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹, ۲۰

(فرورد ۱۴۰۲)

میان و انحراف معیار را برای این جامعه آماری به دست آورید.

- ۷- کارخانه‌ای دو نوع تسمه‌تایم تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۷۵۰۰۰ کیلومتر و ۹۰۰۰۰ کیلومتر و واریانس برای نوع A و B به ترتیب ۴۰۰ کیلومتر مربع و ۶۲۵ کیلومتر مربع است. کدام نوع تسمه‌تایم بهتر است؟

- ۸- اگر واریانس داده‌های $a, b-1, 2c+4, d$ و ۱۶ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a+7, b+8, c+12, d+9, 17, 18, 18$ و ۱۹ را به دست آورید.

- ۹- اگر واریانس داده‌های $a, b-1, 2c+4, d$ و ۱۶ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a+7, b+8, c+12, d+9, 17, 19, 19$ و ۱۹ را به دست آورید.

- ۱۰- اگر میانگین و واریانس داده‌های $x_1, \dots, x_N$ به ترتیب ۵ و ۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2x_1+5, \dots, 2x_N+5$ را به دست آورید.

- ۱۱- ثابت کنید مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.



۱۲- اختلاف داده‌ها از میانگین به صورت ۳-، ۲-، ۱-، ۰-، ۱-، ۲- است. مقدار a و واریانس داده‌ها را به دست آورید.

Homework (1)

۱ برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به ترتیب برابر ۹ و ۳۹ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم کدام است؟

۱۸, ۲۳, ۳۹, ۱, ۳, ۴۲, a , a , $2a + 1$, ۲۳, ۹

(۲) $21/8$

(۱) ۲۰

(۴) $54/5$

(۳) ۴۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به طوری که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

(۲) $2/5$

(۱) $1/25$

(۴) $4/5$

(۳) $3/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر یکی از داده‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ را با یک عدد فرد که فقط کوچک‌تر از همان عدد است، جایگزین کنیم، به طوری که واریانس داده‌های جدید کمتر از واریانس داده‌های اولیه باشد؛ میانگین داده‌های جدید کدام است؟

(۲) $4/25$

(۱) ۴

(۴) $4/75$

(۳) $4/5$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۴ اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند. انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

(۲) $\sqrt{11}$

(۱) $\sqrt{10}$

(۴) $\sqrt{28}$

(۳) $\sqrt{21}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸
(۳) ۶ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

در یک دسته ۷ تایی از اعداد طبیعی متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد طبیعی دیگری را اضافه می‌کنیم به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین دسته آخر، مکعب انحراف معیار باشد. اختلاف کوچک‌ترین عضو دسته اول و دسته آخر، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را در دسته جدید قرار می‌دهیم. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و غیرتکراری باشند. میانگین داده‌های دسته جدید کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۵/۵
(۳) ۵۰ (۴) ۵۰/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر ۱، ۲a، ۱، ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های ۱۱، ۶a، ۹، ۸ باشد، مقدار انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{3}{\sqrt{5}}$
(۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{2}{5}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر ۲۵، ۱۷ - ۲a، ۱۶، ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز ۱۳، a، ۴، ۶ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۹/۵
(۳) ۱۱ (۴) ۱۱/۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۰ انحراف معیار شش داده آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر $a, -1, b, -1, 3$ است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) -۲
(۴) -۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ چارک دوم تعدادی داده آماری برابر ۳ است. قرینه میانگین داده‌های کوچکتر از میانه، ۶ واحد کوچکتر از میانگین داده‌های بزرگتر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) $4/5$
(۳) ۳
(۴) $1/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دوتای آن‌ها را با کوچکترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به طوری که اعداد در دسته دوم (دسته جدید) تک‌رقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم کدام است؟

- (۱) $0/2\sqrt{5}$
(۲) $0/4\sqrt{10}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $1/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ کوچکترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$
(۲) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$
(۳) $\frac{1}{12\sqrt{6}}$
(۴) $\frac{1}{24\sqrt{6}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴ در یک مطالعه آماری ۸۳ داده جمع‌آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد، حداقل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

- (۱) صفر
(۲) ۱۳
(۳) ۳
(۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول) برابر بزرگترین عضو دسته قبل است؛ یعنی $\dots, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}$. میانه عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- (۱) $6144/5$
(۲) $6145/5$
(۳) $12289/5$
(۴) $12288/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ میانگین شش داده آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها به صورت $1, b^2, 9, 0, a^2, 9$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) -۴ (۲) ۴
(۳) ۲ (۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۷ داده‌های جمع‌آوری شده در یک مطالعه آماری اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همه داده‌ها ۲ واحد بیافزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۸ ۹ داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت داده آماری، از میانگین برابر ۱ یا -۱ و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۹ در داده‌های ۱۰، ۲، ۵، ۴، ۸، ۱۲، ۲ با حذف داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، دامنه تغییرات چند درصد کاهش می‌یابد؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۴۰
(۳) ۲۵ (۴) ۲۰

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۲۰ اگر انحراف معیار پنج داده برابر صفر باشد و با ترکیب داده‌های ۸، ۵ و ۱۱ با پنج داده اولیه، میانگین هشت داده تغییر نکند، انحراف معیار این هشت داده، کدام است؟

- (۱) $1/25$ (۲) $1/5$
(۳) $2/25$ (۴) $2/5$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۱ در داده‌های آماری ۱۵، ۱۷، ۱۰، ۱۲/۵، ۱۳، ۹، ۱۶، ۱۷/۵، ۱۴، تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۲
(۳) ۰/۳ (۴) ۰/۴

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۲

داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{2}{7}} \simeq 0/534\right)$

۰/۲۰ (۲)

۰/۱۵ (۱)

۰/۳۰ (۴)

۰/۲۵ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳

ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۱، ۱۱، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴، ۱۴
------	--

۰/۱۵ (۲)

۰/۱۲ (۱)

۰/۱۸ (۴)

۰/۱۷ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

پاسخ (1) Homework

گزینه ۴

۱

چارک اول $Q_1 = 9$ و چارک سوم $Q_3 = 39$ است، بنابراین داده‌های بین چارک‌های اول و سوم $a, a, 23, 23, 18$ خواهد بود.

$$\frac{a + a + 23 + 23 + 18}{5} = 26 \Rightarrow 2a + 64 = 130$$

$$\Rightarrow 2a = 66 \Rightarrow a = 33$$

داده‌ها به صورت زیر مرتب می‌شود.

$$1 \quad 3 \quad \boxed{9} \quad 18 \quad 23 \quad \boxed{23} \quad 33 \quad 33 \quad \boxed{39} \quad 42 \quad 64$$

$\downarrow$ Q_1 $\downarrow$ Q_2 $\downarrow$ Q_3

میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{42 + 64}{2} = \frac{106}{2} = 53$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۱

۲

داده‌ای که جابه‌جا شده با هم برابر بوده است پس بعد از جابه‌جایی واریانس تغییر نخواهد کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

گزینه ۴

۳

تنها با تبدیل ۸ به ۷ می‌توانیم عددی فرد اضافه کنیم که فقط از ۸ کوچک‌تر باشد و از ۲، ۴ و ۶ بزرگ‌تر است، پس:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 7}{4} = \frac{19}{4} = 4.75$$

دقت کنید که در این حالت با کم شدن دامنه تغییرات، واریانس و انحراف معیار نیز کم می‌شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹

باید اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین باشند. بنابراین همه اعداد زوج ۱۸, ۱۶, ۱۴, ۱۲, ۱۰ را کنار می‌گذاریم. از اعداد باقی‌مانده که فرد هستند (۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹) به‌صورتی دوتا دوتا انتخاب می‌کنیم که اختلاف آن‌ها تکراری نباشد و همچنین بیشترین میانگین شود. بنابراین داریم:

$$۱۷ - ۹ = ۸$$

$$۱۹ - ۱۳ = ۶$$

$$۱۵ - ۱۱ = ۴$$

درنتیجه دنباله اعداد زیر حاصل می‌شود:

۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸

حال انحراف معیار این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۶ + ۱۸}{۸} = \frac{۸۸}{۸} = ۱۱$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ + ۵^۲ + ۳^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲}{۸}} = \sqrt{\frac{۲(۴۹ + ۲۵ + ۹ + ۱)}{۸}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۸۴)}{۸}} = \sqrt{۲۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی را به شکل زیر نشان می‌دهیم (دسته اول):

$$2k, 2k + 2, 2k + 4, 2k + 6, 2k + 8, 2k + 10, 2k + 12$$

اعداد متوالی و تعدادشان فرد است، پس میانگین برابر عدد وسط است یعنی $2k + 6$

$$\bar{x} = 2k + 6$$

از همه اعداد موجود در دسته $2k$ را کم می‌کنیم و مطمئن هستیم که انحراف معیار دسته ایجاد شده با انحراف معیار دسته قبلی برابر است:

$$\text{دسته جدید} : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

$$\sigma = 4$$

در سؤال گفته شده در دسته اول میانگین دو برابر انحراف معیار است پس: $\bar{x} = 8$

$$\bar{x} = 2k + 6 = 8 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

میانگین دسته آخر، مجذور انحراف معیار است، پس:

$$8 = \text{میانگین} = \text{داده وسط} : \text{دسته اول}$$

$$16 = \sigma^2 = \text{داده وسط} : \text{دسته آخر}$$

اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر برابر اختلاف داده‌های وسط دو دسته است: $16 - 8 = 8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

نکته: واریانس n داده آماری که تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \times d^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{7^2 - 1}{12}} = 2 \text{ : انحراف معیار ۷ عدد طبیعی متوالی برابر است با: } 2$$

اگر ۷ داده اول را ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ فرض کنیم، میانگین برابر ۴ دارند و انحراف معیار ۲ که نصف میانگین است. دسته‌ای که میانگین (داده وسطی) آن $\sigma^2 = 8$ است، دسته ۱۱, ۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۵ می‌باشد. کوچک‌ترین عضو دسته اول برابر ۱ و کوچک‌ترین عضو دسته آخر برابر ۵ است. پس اختلاف آن‌ها $5 - 1 = 4$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

باتوجه به توضیحات داده شده در صورت سؤال اعداد به صورت یک عدد زوج و یک عدد فرد از دسته اول به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\underbrace{1, 100}_{99} \quad \underbrace{2, 99}_{97} \quad \underbrace{3, 98}_{95} \quad \underbrace{4, 97}_{93} \quad \dots \quad \underbrace{49, 52}_3 \quad \underbrace{50, 51}_1$$

اعداد دسته جدید: ۱, ۳, ۵, ..., ۹۹

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + 99}{50} = \frac{1 + 3 + \dots + (2 \times 50 - 1)}{50}$$

$$= \frac{(50)^2}{50} = 50 \Rightarrow \bar{x} = 50$$

نکته: می‌دانیم: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

میانگین داده‌ها عبارت است از:

$$\bar{x} = \frac{8 + 9 + 6a + 11}{4} = \frac{28 + 6a}{4} = 7 + \frac{3a}{2}$$

با توجه به مربع انحراف از میانگین داده‌ها پس:

$$\left(8 - 7 - \frac{3a}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow 1 - \frac{3a}{2} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{3a}{2} = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \\ 1 - \frac{3a}{2} = -2 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \times$$

انحراف معیار داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 4 + 1}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۶ + ۴ + a + ۱۳}{۴} = \frac{۲۳ + a}{۴}$$

برای داده ۶ داریم:

$$\left(۶ - \frac{۲۳ + a}{۴}\right)^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۲۴ - ۲۳ - a}{۴} = \pm ۲ \Rightarrow \frac{۱ - a}{۴} = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱ - a = ۸ \Rightarrow a = -۷ \\ ۱ - a = -۸ \Rightarrow a = ۹ \end{cases}$$

اگر برای داده ۴ امتحان کنیم:

$$\left(۴ - \frac{۲۳ + a}{۴}\right)^۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۷ \Rightarrow (۴ - ۴)^۲ = ۰ \text{ غ ق} \\ a = ۹ \Rightarrow (۴ - ۸)^۲ = ۱۶ \text{ درست} \end{cases}$$

پس:

$$\sigma^۲ = \frac{۴ + ۱۶ + ۲a - ۱۷ + ۲۵}{۴} = \frac{۲۰ + ۱۸ - ۱۷ + ۲۵}{۴} = \frac{۴۶}{۴} = ۱۱/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

$$\sigma = ۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۳^۲ + (-۱)^۲ + b^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ + a^۲}{۶}$$

$$a^۲ + b^۲ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۳ \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم جمع انحرافات از میانگین همواره صفر است یعنی:

$$۳ + (-۱) + b + (-۱) + ۰ + a = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \quad (۲)$$

$$a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab \xrightarrow{(۱), (۲)} ۱۳ = ۱ - ۲ab \Rightarrow ab = -۶$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ = b \\ x = ۲ = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

زوج $n: x_1, x_2, \dots, x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}, \dots, x_n$

$$-\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{x_{\frac{n}{2}+1} + \dots + x_n}{\frac{n}{2}}\right) - 6$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\frac{n}{2}} = 6 \Rightarrow 2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = 6 \Rightarrow 2\bar{x} = 6 \Rightarrow \bar{x} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

باتوجه به صورت مسئله اعداد دسته دوم همگی زوج تک‌رقمی و غیرتکراری هستند پس اعداد دسته دوم ۲، ۴، ۶، ۸ خواهند بود.
درنتیجه اعداد دسته اول ۱، ۳، ۷، ۹ می‌باشند. داریم:

$$\{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+3+7+9}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10}$$

$$\{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

سه عدد زوج متوالی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$x-2, x, x+2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3} = \frac{8}{3}$$

میانگین هر سه عدد زوج متوالی عدد وسط است و چون در محاسبه ضریب تغییرات، میانگین در مخرج قرار دارد، بنابراین برای یافتن کوچک‌ترین ضریب تغییرات بزرگ‌ترین میانگین را انتخاب می‌کنیم که متعلق به سه‌تایی $\{94, 96, 98\}$ می‌باشد:

$$\bar{X} = 96$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{96} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times 48} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{24\sqrt{6}}$$

نکته: واریانس سه عدد زوج متوالی برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{d^2}{12}(N^2 - 1) = \frac{4}{12}(9 - 1) = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

اگر هیچ‌کدام از داده‌ها با میانگین برابر نباشند، مجموع انحرافات از میانگین نمی‌تواند صفر شود! چون ۸۳ داده داریم و امکان ندارد که جمع تعداد فردی از ۱ یا -۱ با هم به صفر برسند، پس حداقل یکی از داده‌ها باید برابر میانگین باشد!

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

تعداد اعداد دسته دوم برابر ۲ تا است. دسته سوم ۴ تا، دسته چهارم ۸ تا و به همین طریق پیش خواهد رفت یعنی 2^{n-1} ، پس دسته سیزدهم با جمله $1 + 2^{12}$ آغاز شده و به 2^{13} ختم می‌شود. همچنین می‌دانیم این دسته 2^{12} یعنی ۴۰۹۶ عضو دارد.

دسته سیزدهم: $\{4097, 4098, \dots, 8191, 8192\}$

میانۀ این ۴۰۹۶ داده برابر میانگین داده‌های ۲۰۴۸ و ۱۲۰۴۹ است.

$$\text{میانۀ} = \frac{(4096 + 2048) + (4096 + 2049)}{2} = 6144/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\sigma^2 = 4 \Rightarrow 4 = \frac{1 + b^2 + 9 + 0 + a^2 + 9}{6} \Rightarrow a^2 = 5 - b^2$$

چون a و b اعدادی صحیح هستند، پس حتماً یکی از آن‌ها اندازه ۱ دارد و دیگری اندازه ۲. اما برای این‌که مجموع انحرافات از میانگین صفر شود، حتماً باید یکی از آن‌ها را منفی در نظر بگیریم. پس $ab = -2$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

نکته: در داده‌هایی که به صورت دنباله حسابی هستند، میانه و میانگین برابرند. داده‌های آماری اعداد طبیعی متوالی هستند، پس جملات دنباله‌ای حسابی می‌باشند. بنابراین طبق نکته میانگین و میانه برابر است. با افزودن ۲ واحد به تمام داده‌ها، همچنان دنباله‌ای حسابی می‌باشد، بنابراین اختلاف میانه و میانگین برابر با صفر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است، بنابراین اختلاف چهار داده از میانگین برابر با ۱ و اختلاف چهار داده از میانگین نیز برابر با -۱ می‌باشد.

$$\sigma^2 = \frac{4(1)^2 + 4(-1)^2 + 0}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\begin{array}{ccc} 2, 2, 4, 5, 8, 10, 12 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \end{array}$$

دامنه تغییرات اولیه را می‌یابیم:

$$R_1 = 12 - 2 = 10$$

دامنه تغییرات جدید بعد از حذف ۱۲:

$$R_2 = 10 - 2 = 8$$

توجه کنید که ۲ کوچک‌تر از ۲ نیست و آن را حذف نمی‌کنیم. (هر چند تأثیری در حل سؤال نداشت)

$$\frac{10}{2} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \times 100}{10} = 20\%$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

انحراف معیار زمانی صفر است که داده‌ها برابر باشند. همه پنج داده را x فرض می‌کنیم:

$$x = \frac{5x + 8 + 5 + 11}{8} \Rightarrow x = 8$$

ابتدا واریانس را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = \frac{(11-8)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2 + 5(8-8)^2}{8} = \frac{18}{8} = 2/25$$

$$\sigma = \sqrt{2/25} = 1/5$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

برای پیدا کردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$9, 10, 12/5, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 17/5$$

تعداد داده‌ها زوج است بنابراین میانه برابر با میانگین دو داده پنجم و ششم است. داریم:

$$\text{میانه} = \frac{13 + 14}{2} = 13/5$$

میانگین داده‌ها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{میانگین} = \frac{9 + 10 + 12/5 + 13 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 17/5}{10} = 13/7$$

بنابراین تفاضل میانه از میانگین برابر است با:

$$13/7 - 13/5 = 0/2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

راه حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{5 + 7 + 3 \times 8 + 2 \times 10}{7} = \frac{12 + 24 + 20}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:
واریانس:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(5 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + 3 \times (8 - 8)^2 + 2 \times (10 - 8)^2}{7} \\ &= \frac{9 + 1 + 0 + 8}{7} = \frac{18}{7} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار: } \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3}{8} \times 0.534 \simeq 0.20$$

راه حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همه داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &-3, -1, 0, 0, 0, 2, 2 \\ \bar{x}_{\text{جدید}} &= \frac{2 + 2 - 1 - 3}{7} = 0 \\ \sigma^2 &= \frac{2 \times 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}{7} = \frac{18}{7} \Rightarrow \sigma = 3\sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_{\text{اصلی}} = \bar{x}_{\text{جدید}} + 8 = 0 + 8 = 8$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} \simeq 0.20$$

راه حل اول:

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = \frac{50 + 44 + 98}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{5 \times (10 - 12)^2 + 4 \times (11 - 12)^2 + 7 \times (14 - 12)^2}{16}$$

$$= \frac{5 \times 4 + 4 \times 1 + 7 \times 4}{16} = \frac{20 + 4 + 28}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \simeq 0/15$$

راه حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همه داده‌ها کم می‌کنیم:

داده‌ها: $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\text{تعداد ۵}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\text{تعداد ۴}}, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_{\text{تعداد ۷}}$

$$\bar{x}_{\text{کوچک}} = \frac{0 + 4(1) + 7(4)}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\bar{x}_{\text{اصلی}} = \bar{x}_{\text{کوچک}} + 10 = 2 + 10 = 12$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} \simeq 0/15$$

Homework (2)

۱. نمرات ۶ درس دانش‌آموزی اعلام شده که میانگین آن‌ها ۱۸ بوده است؛ سپس نمرات ۴ درس دیگر او نیز اعلام شد که میانگین آن ۴ درس ۱۵ بوده است.
میانگین ۱۰ درس او را حساب کنید.
۲. انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌های زیر را حساب کنید:

۱۱, ۲۵, ۲۶, ۱۸
۳. میانگین داده‌های آماری ۱, ۵, ۱۰, x و y برابر ۱۲ است. میانگین داده‌های ۷, ۱۳, $3x$ و $3y$ را حساب کنید.

عبارات زیر را کامل کنید.
۴. اگر مجموعه دامنه گزاره‌نمای $(x^2 - 9)(4x - 5)(x^2 - 5) = 0$ اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب آن دارای عضو است.
۵. دو تاس و سه سکه را با هم می‌اندازیم. فضای نمونه این آزمایش عضو دارد.
۶. احتمال قبولی علی در درس ریاضی ۹۰ درصد و احتمال قبولی رضا در این درس ۷۰ درصد است. با احتمال درصد علی در درس ریاضی قبول و رضا مردود می‌شود.
۷. اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۱۶ باشد، انحراف معیار داده‌های $-2x_1 + 7, -2x_2 + 7, \dots, -2x_n + 7$ برابر است با:
۸. در یک جامعه آماری، نمونه‌ای که معرف خوبی برای جامعه نیست و به سمت خاصی انحراف پیدا می‌کند، نمونه نام دارد.
۹. ضریب تغییرات داده‌های ۷, ۵, ۵, ۳ و ۵ را به‌دست آورید.
۱۰. میانگین ۱۲ داده آماری ۱۰ است. اگر ۳ داده ۹, ۱۰ و ۱۱ را کنار بگذاریم، میانگین ۹ داده باقی‌مانده چقدر می‌شود؟

(۱) ۱۱	(۲) ۱۰
(۳) ۱۰/۵	(۴) ۹
۱۱. معدل شش درس یک دانش‌آموز برابر ۱۷ بوده است. اگر دو نمره ۱۵ و ۱۹ را به نمرات او اضافه کنیم، معدل جدید دانش‌آموز چقدر است؟
۱۲. اگر میانگین داده‌های ۱۶, ۱۱, ۱۷, ۱۰, x, ۱۰, ۱۳, ۱۷, ۹, ۱۶ برابر $13/1$ باشد، میانه داده‌ها چقدر است؟

۱۳ داده‌های آماری ۲۰، ۹، ۸، ۷، ۵، ۵ مفروض‌اند. واریانس داده‌ها کدام است؟

(۲) $\frac{79}{3}$

(۱) $\frac{157}{6}$

(۴) $\frac{80}{3}$

(۳) $\frac{155}{6}$

۱۴ اگر انحراف از میانگین داده‌های ۱۰، x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 مساوی صفر باشد، میانگین اعداد ۵، x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 کدام است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۹

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰/۵

۱۵ اگر مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات آن ۳۴۰ باشد، مطلوب است:

الف) واریانس

ب) ضریب تغییرات

حسابان

۱۶ کدامیک از جملات درست و کدامیک نادرست است؟

الف) مستطیل طلائی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.

ب) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشت هستند.

پ) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و ممکن است پیشامد B رخ ندهد.

ت) برای ده داده آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ خواهیم داشت $(\bar{x})$ میانگین داده‌ها):

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

آمار و احتمال

۱۷ دمای هوای شش روز از ماه اسفند شهر تهران به صورت زیر است:

۱۹	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۵	دما (برحسب سانتی‌گراد)
----	----	----	----	----	----	------------------------

الف) میانگین و واریانس دمای این شش روز را به دست آورید.

ب) ضریب تغییرات این دماها را به دست آورید.

۱۸ داده‌های جمع‌آوری شده زیر مربوط به تراکنش‌های مالی شعبه بانکی در بازه زمانی ۹ تا ۱۰ صبح (به میلیون تومان) می‌باشد. میانه و چارک سوم آن‌ها را مشخص کنید.

۷۰، ۳۰، ۸۰، ۲۰، ۳۰، ۳۴

۱۹ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای اعداد زیر به دست آورید.

۲, ۲, ۳, ۳, -۳, ۰, ۶, ۳

۲۰ انحراف از میانگین ۸ داده آماری، اعداد ۳, -۲, -۲, ۰, ۱, ۲, ۴, a می‌باشند. اگر مجموع داده‌ها ۳۲ باشد، میانگین مربعات آن‌ها کدام است؟

۲۰/۷۵ (۲)

۱۹/۲۵ (۱)

۲۱/۷۵ (۴)

۲۰/۲۵ (۳)

۲۱ کارخانه‌ای سه نوع لامپ A و B و C را تولید می‌کند که میانگین طول عمر و انحراف معیار آن‌ها در جدول زیر آمده است. کدام نوع لامپ بهتر است؟

لامپ	انحراف معیار	میانگین طول عمر
A	۲۰۰۰	۱۱۰۰۰
B	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
C	۱۵۰۰	۱۲۰۰۰

C (۲)

A (۱)

B و A (۴)

B (۳)

۲۲ در یک سری داده آماری، ضریب تغییرات ۰/۴ است. اگر ۳ برابر میانگین را به هر داده بیافزاییم، ضریب تغییرات جدید کدام است؟

$\frac{1}{15}$ (۲)

۰/۱ (۱)

$\frac{1}{25}$ (۴)

۰/۲ (۳)

پاسخ (2) Homework

۱ رابطه کلی: اگر میانگین m داده $\bar{x}$ و میانگین n داده $\bar{y}$ باشد، میانگین $m + n$ داده با هم که $\bar{z}$ می‌نامیم، از دستور زیر حساب می‌شود:

$$\bar{z} = \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m + n}$$

$$m = 6, \bar{x} = 18, n = 4, \bar{y} = 15$$

$$\bar{z} = \frac{6 \times 18 + 4 \times 15}{6 + 4} = \frac{108 + 60}{10} = \frac{168}{10} = 16.8$$

$$\bar{x} = \frac{11 + 25 + 26 + 18}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

$$s^2 = \frac{(20 - 11)^2 + (20 - 25)^2 + (20 - 26)^2 + (20 - 18)^2}{4} = \frac{81 + 25 + 36 + 4}{4} = 36.5$$

$$\sigma = \sqrt{36.5} \approx 6$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$\frac{1 + 5 + 10 + x + y}{5} = 12 \Rightarrow \frac{16 + x + y}{5} = 12 \Rightarrow x + y = 44$$

$$\bar{x} = \frac{7 + 13 + 3x + 3y}{4} = \frac{20 + 3(44)}{4} = 38$$

۴ دو

۵ ۲۸۸

۶ ۲۷

۷ ۸

$$\bar{x} = \frac{3 + 5 + 5 + 5 + 7}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-5)^2 + 3(5-5)^2 + (7-5)^2}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{5}}}{5}$$

گزینه ۲

۱۰

$$\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{۱۲} = ۱۰ \Rightarrow \text{مجموع داده‌ها} = ۱۲۰$$

$$۱۲۰ - \underbrace{(۱۱ + ۱۰ + ۹)}_{۳۰} = ۹۰ \Rightarrow \frac{۹۰}{۹} = ۱۰$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6}{6} = ۱۷ \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_6 = ۱۰۲$$

$$\bar{X}_{\text{جدید}} = \frac{۱۰۲ + ۱۵ + ۱۹}{۸} = \frac{۱۳۶}{۸} = ۱۷$$

$$\bar{x} = \frac{۱۶ + ۹ + ۱۷ + ۱۳ + ۱۰ + x + ۱۰ + ۱۷ + ۱۱ + ۱۶}{۱۰} = ۱۳/۱$$

$$\frac{۱۱۹ + x}{۱۰} = ۱۳/۱ \Rightarrow ۱۱۹ + x = ۱۳۱ \Rightarrow x = ۱۲$$

داده‌ها باید به صورت صعودی مرتب شوند:

$$۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, \underbrace{۱۲, ۱۳}_{\text{میان}}, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷$$

$$\text{میان} = \frac{۱۲ + ۱۳}{۲} = ۱۲/۵$$

گزینه ۲

۱۳

$$\text{میانگین} : \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۵ + ۵ + ۷ + ۸ + ۹ + ۲۰}{۶} = \frac{۵۴}{۶} = ۹$$

$$\text{واریانس} : \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(۵-۹)^2 + (۵-۹)^2 + (۷-۹)^2 + (۸-۹)^2 + (۹-۹)^2 + (۲۰-۹)^2}{۶}$$

$$\sigma^2 = \frac{۱۶ + ۱۶ + ۴ + ۱ + ۰ + ۱۲۱}{۶} = \frac{۱۵۸}{۶} = \frac{۷۹}{۳}$$

اگر انحراف از میانگین تعدادی عدد مساوی صفر باشد، به این معنا است که همه اعداد باهم مساوی اند.

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10$$

$$\bar{x} = \frac{10 + 10 + 10 + 10 + 5}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$n = 50$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 100$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{50}^2 = 340$$

$$\bar{x} = \frac{100}{50} = \frac{2}{1} \quad , \quad (\bar{x})^2 = \frac{4}{1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{340}{50} - \frac{4}{1} = \frac{17}{2} - \frac{4}{1} = \frac{34}{2} - \frac{4}{1} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{2}$$

حسابان

درست

الف

نادرست

ب

نادرست

پ

درست

ت

۱۷
الف

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{6} = \frac{(15-16)^2 + (14-16)^2 + (15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2 + (19-16)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

ب

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{16} = \frac{\sqrt{24}}{48} = 0.102$$

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱۸

۲۰, ۳۰, ۳۰, ۳۴, ۷۰, ۸۰

$$\text{میانگین دو داده وسط} = \frac{30 + 34}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

$$Q_3 = \text{چهارم سوم} = 70$$

$$\bar{x} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 3 - 3 + 0 + 6}{8} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{N} = \frac{2(2-2)^2 + 3(3-2)^2 + (-3-2)^2 + (0-2)^2 + (6-2)^2}{8} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{6} = \text{جذر واریانس} = \text{انحراف معیار}$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \text{ضریب تغییرات}$$

۱۹

مجموع انحراف از میانگین داده‌های آماری برابر صفر است، پس:

$$(x_1 - \bar{x}) + \dots + (x_8 - \bar{x}) = 0 \\ \Rightarrow -3 - 2 - 2 + 0 + 1 + 2 + 4 + a = 0 \Rightarrow 0 + a = 0 \Rightarrow a = 0$$

واریانس این ۸ داده آماری برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2}{8} = \frac{9 + 4 + 4 + 0 + 0 + 1 + 4 + 16}{8} = \frac{38}{8} = 4/75$$

می‌خواهیم میانگین مربعات این ۸ داده یعنی $\frac{x_1^2 + \dots + x_8^2}{8}$ را به دست آوریم، پس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_8^2}{8} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 4/75 = \frac{x_1^2 + \dots + x_8^2}{8} - \left(\frac{32}{8}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{x_1^2 + \dots + x_8^2}{8} = 4/75 + 16 = 20/75$$

برای هر نوع لامپ ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{2000}{11000} = \frac{2}{11} = 0/18$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10} = 0/1$$

$$CV_C = \frac{\sigma_C}{\bar{x}_C} = \frac{1500}{12000} = \frac{1}{8} = 0/125$$

پس $CV_A > CV_C > CV_B$ بنابراین B بهتر است، زیرا ضریب تغییراتش کوچک‌تر است.

با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

$$(CV)' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 3\bar{x}} = \frac{\sigma}{4\bar{x}} = \frac{CV}{4} = \frac{0/4}{4} = 0/1$$