

آموزش آنلاین

ریاضی یازدهم ریاضی و تجربی

مدرس: دکتر سامان سلامیان

درس ـ نکته ـ تست ـ سوالات امتحان نهایی

مقدمه:

به نام خردمند خردآفرین

مجموعه پیش‌رو برای کلاس‌های آنلاین سالانه یازدهم تجربی و حسابان ۱ رشته ریاضی دوره متوسطه دوم که در پنج فصل مشترک هستند، گردآوری و تنظیم شده است. هدف این مجموعه؛ نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه است. نکات مهم خلاصه‌وار و برای شب امتحان و آزمون آورده شده است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم .البته برای حل مثال‌های سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد. پس این جزوه؛ خلاصه اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ ابتدا به کمک درسنامه‌ای همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری ؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموز قدرت و توان برگه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است. با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور «روش مفهومی» و «حل مسئله به کمک حل مسئله» در این مجموعه به‌کار گرفته شده است که در تمام این سال‌ها موفق بوده است.

تکلیف (Homework) : در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به "هیچ" سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکورآزمایشی برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که «امسال» ریاضی را «می‌خوانم» با من همراه نشوید؛ زیرا اصلا ریاضی خواندنی نیست ؛ بلکه نوشتنی و مسئله حل‌کردنی و توضیح‌دادنی است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید. مهم‌ترین ابزار موفقیت در ریاضی؛ تمرین کردن وحل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس ؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه ؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات تالیفی ؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمونهای آزمایشی استاندارد است؛ به‌طوریکه با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد .همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین؛ حضور پر رنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع‌اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه؛ تنها راه گرفتن نمره کامل «بیست» در آزمون و درصد خوب در آزمون‌های تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که ؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق کردید و یا با خواندن وحل یک تست به طراح آن «آفرین» گفتید که به چه جالبی فلان موضوع را پنهان کرده است یا مورد سوال قرار داده؛ یعنی اینکه دارید ؛ مسیر را درست می‌روید .تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با حل مسئله و «تکرار و تمرین» ممکن است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام‌کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند.تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید؛ تکالیف (Homework) پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را؛ خودتان حل کنید و به کمک پاسخ‌نامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. در هر قسمت از درس ابتدا قسمت‌های مشترک هر دو رشته ابتدا تدریس می‌شود و سپس بنا به وضعیت مخاطبان کلاس؛ قسمت‌های مربوط به کتاب حسابان ۱ درس داده خواهد شد. واضح است که این قسمت‌ها برای دوستان رشته تجربی در امتحانات مدرسه‌شان نخواهد آمد ولی با توجه به سطح کنکورهای اخیر بهتر است برای پیش‌افتادن از رقبای داوطلبان رشته تجربی ؛ برای کنکور سراسری این مطالب را در حد کتاب حسابان بدانند.ضمن این‌که اکثر مطالب مربوط به کتاب حسابان ۱ در کتاب ریاضی ۳ تجربی سال دوازدهم خواهد بود و در کنکور از همه آنها سوال خواهد آمد .دانش‌آموزان رشته ریاضی در کتاب حسابان ۱ فصل ۲ یعنی هندسه و فصل هفت یعنی آمار و احتمال را نداشته و در کتاب هندسه و جبر و احتمال کامل‌تر خواهند خواند. البته می‌توانند در جلساتی که این مباحث تدریس می‌شوند به‌عنوان میهمان سر کلاس باشند.

در حقیقت در این کلاس و مجموعه؛ سال یازدهم هر دو رشته تجربی و ریاضی به‌موازات هم تدریس خواهد شد. قسمت‌های مربوط به هر رشته کاملا تفکیک شده و مشخص است که دوستان برای امتحان مدرسه متوجه قسمت‌های مربوط به خود باشند. این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود. استفاده از این مجموعه با ذکر منبع بلامانع است. در کلاس درس آنلاین ریاضی یازدهم؛ نحوه بیان موضوع‌های درسی، ورود به مطلب و توضیح درس با این جزوه کاملا متفاوت است ولی چیدمان مطالب و سوالات، مشابه روند این مجموعه می‌باشد.

بهروز باشید.

دکترسامان سلامیان

فهرست مندرجات

عنوان صفحه

فصل اول: جبر و معادله

BOX 1: معادله درجه ۲ ..... ۱

BOX 2: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم ۱۳

BOX 3: تابع درجه دوم ۲۵

BOX 4: معادلات گویا و رادیکالی ۵۴

BOX 5: بخش اول هندسه تحلیلی ۷۳

BOX 6: بخش دوم هندسه تحلیلی ۹۸

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی ۱۱۴

درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۱۳۵

فصل دوم: هندسه

BOX 1: ترسیم‌های هندسی ۱۶۳

BOX 2: نسبت و تناسب ـ قضیهٔ تالس ۱۸۴

BOX 3: عکس قضیه ـ برهان خلف ـ عکس قضیه تالس ـ قضیه‌های دوشرطی ـ مثال نقض ۱۸۹

BOX 4: تشابه مثلث‌ها ۲۰۶

فصل سوم: تابع (فصل سوم ریاضی ۲ و فصل دوم حسابان ۱)

BOX 1: تابع و یادآوری ۲۲۸

BOX 2: انواع تابع (توابع گویا و دامنه آن) ـ تساوی دو تابع ۲۳۳

BOX 3: توابع رادیکالی و جزء صحیح ۲۴۲

BOX 4: وارون یک تابع ـ تابع یک‌به‌یک ۲۵۴

BOX 5: اعمال روی توابع ۲۷۲

BOX 6: ترکیب توابع ۲۹۳

فصل چهارم: مثلثات

BOX 1: یادآوری و واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۳۰۷

BOX 2: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۳۲۶

BOX 3: توابع مثلثاتی ۳۴۹

BOX 4: مثلثات ـ نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۳۶۶

عنوان | صفحه

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

BOX 1: تابع نمایی ۳۸۳

BOX 2: تابع لگاریتمی ۴۰۰

BOX 3: ویژگی‌های لگاریتم ـ معادلات لگاریتمی ۴۱۴

BOX 4: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی ۴۱۸

فصل ششم: حد و پیوستگی

BOX 1: فرایندهای حدی ۴۵۰

BOX 2: محاسبه حد تابع ۴۶۱

BOX 3: حد گویای صفر صفرم،حد تابع قدرمطلقی، حد تابع مثلثاتی، حد تابع جزء صحیح ۴۷۷

BOX 4: پیوستگی ۴۹۹

BOX 5: محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم) ۵۲۸

فصل هفتم: آمار و احتمال

BOX 1: یادآوری احتمال ـ احتمال شرطی ـ پیشامدهای مستقل ۵۴۸

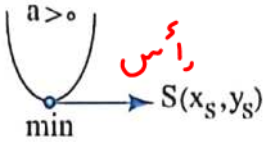
BOX 2: آمار توصیفی ۵۶۰

ریاضیات پایه یازدهم

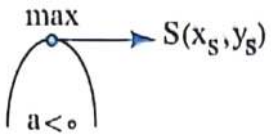
فصل اول: جبر و معادله

BOX 1: معادله درجه ۲ (مشترک تجربی و ریاضی)

۱) اگر $a > 0$ باشد، سهمی رو به بالا و دارای مینیمم (min) است.



۲) اگر $a < 0$ باشد، سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم (max) است.



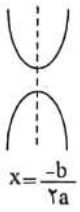
نکته: برای به دست‌آوردن مختصات رأس سهمی (min یا max) به روش زیر عمل می‌نماییم:

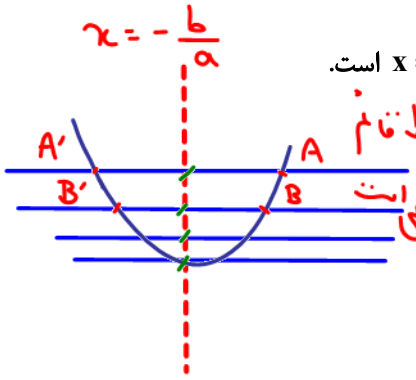
۱) طول رأس سهمی را می‌یابیم: $x_S = -\frac{b}{2a}$

۲) برای تعیین عرض رأس سهمی به دو صورت می‌توان عمل کرد:

الف) $y_S = f(x_S) = f(\frac{-b}{2a})$ ب) $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$

نکته: محور تقارن سهمی خط قائمی گذرنده از رأس سهمی و به معادله $x = \frac{-b}{2a}$ است.





مراحل رسم سهمی

در حالت کلی:

ابتدا مختصات رأس سهمی را تعیین نموده، سپس دو نقطهٔ دلخواه در قبل و بعد طول رأس سهمی (x_S) به عنوان نقطه کمکی مفروض می‌کنیم.

در حالت خاص:

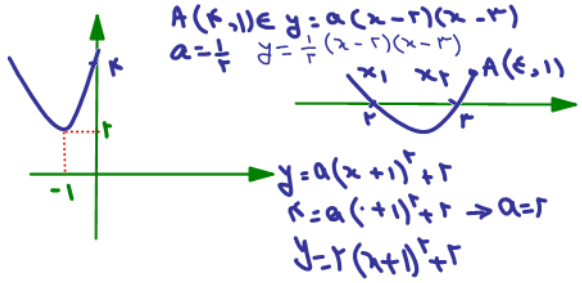
الف) با داشتن ۲ ریشه و یک نقطه $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

ب) با داشتن رأس و یک نقطه $y = a(x-x_S)^2 + y_S$

ج) با داشتن ۳ نقطه $y = ax^2 + bx + c$

تمرین: نمودار سهمی مقابل را رسم کنید.

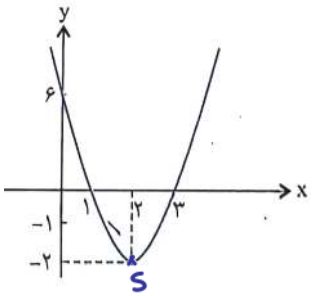
$y = 2x^2 - 8x + 6$



پاسخ:

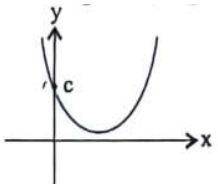
$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2(2)} = 2 \Rightarrow y_S = 2(2)^2 - 8\times 2 + 6 = -2$$

x	۱	۲	۳
$y=f(x)$	۰	-2	۰



نکته: برای تعیین محل تلاقی هر منحنی با محور عرض‌ها کافی است به جای x صفر قرار دهیم و برای تعیین محل تلاقی هر منحنی با محور طول‌ها کافی است به جای y صفر قرار دهیم.

بنابراین محل برخورد چندجمله‌آی $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور عرض‌ها، نقطه $f(0)=c$ خواهد بود.



صفرهای تابع (ریشه‌های تابع)

صفرهای تابع همان جواب‌های معادله $f(x)=0$ در صورت وجود است که عبارت‌اند از مجموعه مقادیری از x (دامنه f) که بـه ازای آن‌هـا $f(x)$ صفر است، اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

روش‌های تعیین صفرهای معادله درجه دوم

۱) تجزیه: در صورت امکان و سهولت، معادله درجه دوم را با استفاده از یکی از اتحادهای زیر به عوامل درجه اول تجزیه کرده و سپس هر یک از عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

اتحادهای مهم در تجزیه عبارات جبری:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a\neq 0$ باشد، یک معادلهٔ درجه دوم می‌نامیم.

روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

۱) روش تجزیه

ویژگی حاصل‌ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به عبارت دیگر:

$$AB=0 \Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

در حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا معادلهٔ درجه دوم را به حاصل‌ضرب دو عبارت جبری تجزیه کرده و سپس از ویژگی فوق استفاده می‌کنیم.

تمرین: معادلهٔ $x^2+5x+6=0$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ: عبارت درجهٔ دوم $x^۲+۵x+۶$ را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه می‌کنیم. باید دو عدد مشخص کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۶ و حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۵ باشد. این دو عدد، ۲ و ۳ هستند. بنابراین:

$$x^۲+۵x+۶=(x+۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \\ x+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=-۳ \end{cases}$$

۲) روش ریشه‌گیری

ابتدا نکتهٔ زیر را که به قاعدهٔ ریشه‌گیری معروف بوده و در حل معادلهٔ درجه دوم به کار می‌رود، بیان می‌کنیم:

نکته: فرض کنید a یک عدد حقیقی و $a \geq ۰$ باشد، در این صورت: $x^۲=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، $b=۰$ و اعداد a و c مختلف‌العلامه باشند، برای یافتن ریشه‌های این معادله، می‌توان از این روش استفاده کرد. در واقع داریم: $ax^۲+c=۰ \Rightarrow ax^۲=-c \Rightarrow x^۲=-\frac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

توجه کنید که چون طبق فرض a و c مختلف‌العلامه هستند، پس $-\frac{c}{a}$ مثبت بوده و در نتیجه معادله دارای دو جواب قرینه می‌باشد. بدیهی است که اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله در این حالت ریشه نخواهد داشت.

تمرین: معادلهٔ $(۲x-۱)^۲=۲۵$ را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

پاسخ:

$$(۲x-۱)^۲=۲۵ \xrightarrow{\text{روش ریشه‌گیری}} ۲x-۱=\pm\sqrt{۲۵}=\pm۵$$

هر یک از معادله‌های $۲x-۱=۵$ و $۲x-۱=-۵$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x-۱=۵ \\ ۲x-۱=-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۵+۱ \\ ۲x=-۵+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۶ \\ ۲x=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases}$$

۳) روش مربع کامل

مراحل حل یک معادلهٔ درجه دم به روش مربع کامل، به صورت زیر است:

۱) جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) اگر ضریب $x^۲$ عددی غیر از یک باشد، طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب $x^۲$ برابر یک شود.

۳) به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.

۴) اگر دو طرف معادله مثبت باشد، به روش ریشه‌گیری ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم.

تمرین: معادلهٔ $x^۲+۴x=۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ: به دو طرف معادله عدد ۴ را اضافه می‌کنیم $(۴=۲^۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲ \xrightarrow{\div ۲} ۴=\text{ضریب } x)$:

$$x^۲+۴x+۴=۴ \Rightarrow (x+۲)^۲=۴ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x+۲=\pm۲ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۲ \\ x+۲=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۴ \end{cases}$$

نکته: در حل معادلات درجه‌دوم به روش مربع کامل، عبارت $x^۲+Ax$ را می‌توان با استفاده از فرمول $x^۲+Ax=(x+\frac{A}{۲})^۲-(\frac{A}{۲})^۲$ به مربع کامل تبدیل کرد.

۴) روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، به عبارت $b^۲-۴ac$ که وجود ریشه‌های معادله به علامت آن بستگی دارد، مبین یا دلتای معادله

معادله درجه دوم حداکثر ۲ ریشه دارد.

می‌گوییم و آن را با حرف Δ نمایش می‌دهیم. در این صورت با توجه به علامت Δ، داریم:



آ) اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب) اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه است که به آن ریشهٔ مضاعف یا مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم و ریشهٔ‌مضاعف معادله برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a} = x_1 = x_2$$

۲ ریشه ساده یا یک ریشه مضاعف



پ) اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است که از روابط زیر به دست می‌آید:

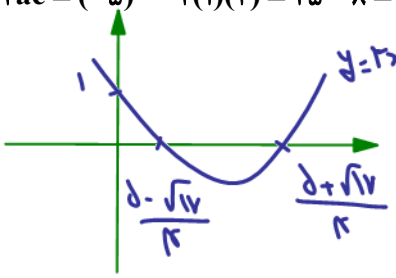
$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$



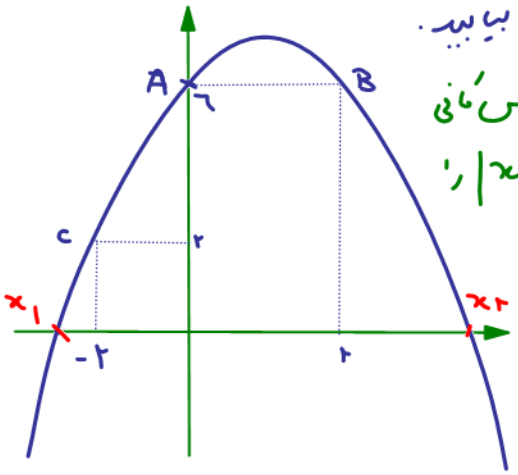
تمرین: ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 5x + 1 = 0$ را با فرمول کلی به دست آورید.

پاسخ: در معادلهٔ داده‌شده، $a = 2$، $b = -5$ و $c = 1$ می‌باشد. مقدار Δ را از فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(2) = 25 - 8 = 17 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+\sqrt{17}}{2(2)} = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \\ \beta = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-\sqrt{17}}{2(2)} = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$



در سهمی مقابل فاصله نقاط برخورد با محور طول ها را از هم بیابید.



می دانیم که با داشتن ۳ نقطه می توان معادله سهمی را نوشت. پس کافی است ریشه ها (صفرها) ی معادله را بیابیم و $|x_1 - x_2|$ را حساب کنیم.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$A(0,2) \in f(0) = 0 + 0 + c = 2 \rightarrow c = 2$

$B(2,2) \in f(2) = 4a + 2b + 2 = 2 \rightarrow 2a + b = 0$

$C(-2,2) \in f(-2) = 4a - 2b + 2 = 2 \rightarrow 2a - b = -2$

$4a = -2 \quad a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$

$0 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \qquad \Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 4(-\frac{1}{2})(2) = 13$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{13}}{-1} = 1+\sqrt{13}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{13}}{-1} = 1-\sqrt{13}$

$|x_1 - x_2| = 2\sqrt{13}$ یا $|x_1 - x_2| = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{13}}{|-\frac{1}{2}|} = 2\sqrt{13}$

نکته: $y = ax^2 + bx + c$ $\quad x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1 x_2 = P = \frac{c}{a}$ $\quad D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم:

در بسیاری از موارد با استفاده از تغییر متغیر می‌توان معادلات را به فرم درجه ۲ مرتب نموده و سپس با روش‌های گفته‌شده در ابتدای فصل به حل آن بپردازیم.

تمرین: صفرهای توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $(x^2+x)^2-3(x^2+x)=-2$ ب) $x-2\sqrt{x+1}-2=0$ پ) $x^4-2x^2-3=0$

ت) $(x^2+\frac{1}{x^2})-(x+\frac{1}{x})=0$ ث) $(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$ (تمرین کتاب درسی)

حل معادلاتی که به حل معادله درجه ۲ ختم می شود.

الف) $x^2+x=t$ تغییر متغیر $\longrightarrow t^2-3t+2=0$ مجموع ضرایب صفر $\longrightarrow \begin{cases} t_1=1=x^2+x \\ t_2=\frac{c}{a}=2=x^2+x \end{cases}$

$x^2+x-1=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ۲ ریشه

$x^2+x-2=0 \rightarrow x_1=1, x_2=-2$

ب) $x-2\sqrt{x+1}-2=0$ $(x+1)-2\sqrt{x+1}-3=0$ $\sqrt{x+1}=t \rightarrow t^2-2t-3=0$ $a+c=b$

$\begin{cases} t_1=-1=\sqrt{x+1} \\ t_2=-\frac{c}{a}=3=\sqrt{x+1} \end{cases}$ غ.ق.ق

$9=x+1$

$x=8$

پ) $x^4-2x^2-3=0$ $(x^2)^2-2x^2-3=0$ $x^2=t \rightarrow t^2-2t-3=0$ $a+c=b$

$\begin{cases} t_1=-1=x^2 \text{ غ.ق.ق} \\ t_2=-\frac{c}{a}=3=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

ت) $x+\frac{1}{x}=t$ طرفین به توان ۲ $\longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2x(\frac{1}{x})=t^2 \rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

$(x^2+\frac{1}{x^2})-(x+\frac{1}{x})=0 \rightarrow t^2-t-2=0$ $a+c=b$

$\begin{cases} t_1=-1=x+\frac{1}{x} \rightarrow -x=x^2+1 \rightarrow x^2+x+1=0 \text{ ۲ ریشه ندارد} \\ t_2=-\frac{c}{a}=2=x+\frac{1}{x} \end{cases}$ ۲ طرف ضرب در x

t^2-2 t

$2x=x^2+1 \rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0$

$x=1$

نکته $\begin{cases} x+\frac{1}{x}\geq 2 & x>0 \\ x+\frac{1}{x}\leq -2 & x<0 \end{cases}$ $x=1$ $x=-1$

$x+\frac{1}{x}\notin(-2,2)$

مثال: معادله $\tan x+\cot x=\sqrt{2}$ چند جواب دارد؟ هیچی

$\tan x=t \rightarrow t+\frac{1}{t}=\sqrt{2}=1/4 \rightarrow t\in\emptyset$ $t+\frac{1}{t}\notin(-2,2)$

ث) $t^2-7t+6=0 \longrightarrow$ مجموع ضرایب صفر $\longrightarrow \begin{cases} t_1=1=\frac{x^2}{3}-2 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3 \\ t_2=\frac{c}{a}=6=\frac{x^2}{3}-2 \rightarrow x^2=24 \rightarrow x=\pm 2\sqrt{6} \end{cases}$

Homework

۱ مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲ به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲+۳x+m^۲=۲$، معکوس یکدیگرند؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ برابر ۶ است؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱

۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ ۴) -۱ و $\frac{۹}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$

۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۵ به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲-ax+۴=۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ + (۲m - ۱)x + ۲ - m = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم و دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $۲ + \sqrt{۳}$
۲) $۵ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۵ + ۴\sqrt{۳}$
۴) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^۲ + x = t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=t} t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (t - ۱۲)(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{matrix}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x_۱ = -۴ \\ x_۲ = ۳ \end{matrix}$$
$$t = ۶ \Rightarrow x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x_۳ = -۳ \\ x_۴ = ۲ \end{matrix}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

وقتی گفته می‌شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می‌گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ‌تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^۲ + bx + c = ۰$ در می‌آوریم:

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲ \Rightarrow mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰ \xrightarrow{x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ ریشه ها}} x_۱x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱x_۲ = \frac{m^۲ - ۲}{m} = ۱$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۲ = m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۲)(۲) = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰ \\ m = -۱ \Rightarrow -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(-۱)(-۱) = ۹ - ۴ = ۵ > ۰ \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > ۰$ فقط $m = -۱$ جواب قابل‌قبول است.

۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۹۳

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه دو داده‌شده، باشد می‌دانیم $\alpha^۲+\beta^۲=۶$ است. $\alpha^۲+\beta^۲$ برابر است با:

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P=۶$$

ب) درصورتی‌که $\Delta>۰$ باشد معادلهٔ درجه دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\dfrac{m+۳}{m}\\ P=\alpha\beta=\dfrac{۵}{m}\end{cases}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=\left(\frac{m+۳}{m}\right)^۲-۲\left(\frac{۵}{m}\right)=۶\Rightarrow\frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶$$

$$\xrightarrow{\times m^۲} m^۲+۶m+۹-۱۰m=۶m^۲\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰\Rightarrow(۵m+۹)(m-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=۱\Rightarrow x^۲-۴x+۵=۰\Rightarrow\Delta=-۴<۰\Rightarrow\text{ فاقد ریشهٔ حقیقی}\\ m=-\dfrac{۹}{۵}\Rightarrow-\dfrac{۹}{۵}x^۲-\dfrac{۶}{۵}x+۵=۰\Rightarrow\Delta>۰\Rightarrow\text{ دارای دو ریشهٔ حقیقی}\end{cases}$$

پس فقط به ازای $m=-\frac{۹}{۵}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است، لذا:

$$S' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱) + (\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} - ۲ = -۵$$

$$P' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱)(\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} - \frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} + ۱$$

$$= \frac{۱ - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + ۱ = \frac{۱ - \frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} + ۱ = ۲$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

۵ گزینه ۳

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{a}{۳}\xrightarrow{\beta=۳\alpha}\alpha+۳\alpha=\frac{a}{۳}\Rightarrow ۴\alpha=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=۱۲\alpha$$

$$\alpha.\beta=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\beta=۳\alpha}\alpha.۳\alpha=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \alpha^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \alpha=\pm\frac{۲}{۳}$$

$$a=۱۲\alpha=۱۲(\pm\frac{۲}{۳})=\pm ۸\Rightarrow ۸-(-۸)=۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۲

$$S=\frac{-(-(a^{۲}+b^{۲}-۱۲))}{۱}\Rightarrow a+b=a^{۲}+b^{۲}-۱۲$$

$$a+b=(a+b)^{۲}-۲ab-۱۲(I)$$

از طرفی : $P=\frac{a\mid b-۱}{۱}\Rightarrow ab=(a+b)-۱$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{جایگذاری در رابطهٔ}} a+b=(a+b)^{۲}-۲(a+b)+۲-۱۲$$

$$\Rightarrow (a+b)^{۲}-۳(a+b)-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{۳+\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=۵ & \checkmark \text{ قابل‌قبول} \\ a+b=\frac{۳-\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=-۲ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s=\frac{۱}{p}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۱}{\frac{(۲-m)}{۳}}\Rightarrow\frac{-۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۴m+۲m^۲+۲-m=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m=-۱\\ m=-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta>۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}m=-۱\Rightarrow ۳x^۲+(-۲-۱)x+۲+۱=۰\Rightarrow ۳x^۲-۳x+۳=۰\Rightarrow\Delta<۰ & \text{غ ق ق}\\ m=\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۳x^۲+(۲\times\frac{۷}{۲}-۱)x+۲-\frac{۷}{۲}=۰\Rightarrow ۳x^۲+۶x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow\Delta>۰ & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین $m=\frac{۷}{۲}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ گزینه ۴

$a_۲$, $۲a_۵$, $a_۸$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$۲a_۵=\frac{a_۲+a_۸}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a_۱q^۴=\frac{a_۱q+a_۱q^۷}{۲}\Rightarrow ۴q^۳=۱+q^۶$$

$$\Rightarrow q^۶-۴q^۳+۱=۰\xrightarrow{q^۳=t}t^۲-۴t+۱=۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}\Rightarrow q^۳=۲\pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow q=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}\ ,\ q=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جملهٔ هشتم بزرگ‌ترین جمله است و درنتیجه $q=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}$، پس:

$$\frac{a_۸}{a_۲}=\frac{a_۱q^۷}{a_۱q}=q^۶=\left(۲+\sqrt{۳}\right)^۲=۷+۴\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

BOX 2: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} & \text{(مجموع دو ریشه)} \\ D=|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} & \text{(تفاضل دو ریشه)} \\ P=\alpha\times\beta=\dfrac{c}{a} & \text{(حاصل‌ضرب دو ریشه)} \end{cases}$$

تمرین: ۱) بدون حل معادلهٔ $3x^2-9x+2=0$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را به دست آورید.

۲) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+1=0$ باشند، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

آ) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ ب) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

پاسخ: ۱) در معادلهٔ داده‌شده، $a=3$، $b=-9$ و $c=2$ است. جمع ریشه‌ها برابر $-\dfrac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\dfrac{c}{a}$ است.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-9}{3}=\frac{9}{3}=3\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

۲) مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+1=0$ را به دست می‌آوریم: $S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-7}{1}=7\ ,\ P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{1}=1$

آ)
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{7}{1}=7$$

ب) عبارت $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ را برابر A در نظر می‌گیریم و حاصل A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}A^2=(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$$

$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}=7+2\sqrt{1}=7+2=9\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}A=\pm 3$$

چون A عددی مثبت است، پس داریم: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3$

در بعضی از مسائل می‌خواهیم دو عددی را مشخص کنیم که مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را می‌دانیم. برای این کار باید معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهیم. با حل معادله، ریشه‌های به دست آمده همان دو عدد موردنظر هستند.

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، آن‌گاه برای نوشتن معادله، ابتدا S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) را به دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ مقابل را تشکیل می‌دهیم: $x^2-Sx+P=0$

تمرین: معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3+\sqrt{5}$ و $3-\sqrt{5}$ باشند.

پاسخ: با فرض $\alpha=3+\sqrt{5}$ و $\beta=3-\sqrt{5}$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6\ ,\ P=\alpha\beta=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$$

معادله: $x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-6x+4=0$

$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow \alpha,\beta \quad S=\alpha+\beta \quad P=\alpha\beta \quad D=|\alpha-\beta|$

① $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

② $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

③ $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm 2\sqrt{P}}$

④ $\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=D.S(S^2-2P)$

پرسش‌های تشریحی

۱- معادله زیر را حل کنید.

$-2x^6+11x^3+40=0$ $\quad x^3=t$

$-2t^2+11t+40=0$

$t_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-4(-2)(40)}}{2(-2)}=\dfrac{-11\pm\sqrt{121+320}}{-4}=\dfrac{-11\pm 21}{-4}$

$\dfrac{-32}{-4}=8$ $\quad \dfrac{-10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

$x^3=8\longrightarrow x=2$

$x^3=-\dfrac{5}{2}\longrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{-5}{2}}=-\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

۲- بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $5x^2-11x+1=0$ را به دست آورید.

$a=5 \quad b=-11 \quad c=1$

$S=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{11}{5} \quad P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{5}$

۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+4=0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$a=1 \quad b=-8 \quad c=4$

آ) $\alpha+\beta$ $\quad S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=8$

ب) $\alpha\beta$ $\quad P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=4$

پ) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{S}{P}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{c}=2$

ت) $\alpha^2+\beta^2$ مجموع مربعات ریشه‌ها

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=(8)^2-2(4)=64-8=56$

در سؤال بالا مجموع مکعبات ۲ ریشه را بیابید $\quad$ مجموع مکعبات ۲ ریشه $=\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=(8)^3-3(4)(8)$

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$

$S^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$P \quad S$

۴- در معادلهٔ درجه دوم $x^2+(m+3)x-7+m=0$، مقدار m را طوری به دست آورید که:

$a=1 \quad b \quad c$

آ) مجموع ریشه‌ها برابر ۴ شود.

$x_1+x_2=S=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(m+3)}{1}=4\longrightarrow -m-3=4$

$-7=m$

ب) حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\dfrac{3}{2}$ شود.

$x_1x_2=P=\dfrac{c}{a}=-7+m=-\dfrac{3}{2}$

$m=-\dfrac{3}{2}+7=\dfrac{11}{2}=5/5$

۵- در معادلهٔ $2x^2-(2m+1)x+m=0$، مقدار m را طوری به دست آورید که:

آ) یکی از ریشه‌ها، قرینهٔ ریشهٔ دیگر باشد.

ب) یکی از ریشه‌ها، عکس ریشهٔ دیگر باشد.

پ) یکی از ریشه‌ها، یک واحد بیشتر از دو برابر ریشهٔ دیگر باشد.

۶- طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۰ و محیط آن ۱۳ باشد. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۷- در معادلهٔ $2x^2-8x+m=0$، اگر یکی از جواب‌ها دو برابر جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

Homework

۱ مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲ به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲+۳x+m^۲=۲$، معکوس یکدیگرند؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ برابر ۶ است؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱

۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ ۴) -۱ و $\frac{۹}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$

۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۵ به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲-ax+۴=۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ + (۲m - ۱)x + ۲ - m = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم و دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $۲ + \sqrt{۳}$
۲) $۵ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۵ + ۴\sqrt{۳}$
۴) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^۲ + x = t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=t} t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (t - ۱۲)(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{matrix}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x_۱ = -۴ \\ x_۲ = ۳ \end{matrix}$$
$$t = ۶ \Rightarrow x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x_۳ = -۳ \\ x_۴ = ۲ \end{matrix}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۹۰

گام اول

وقتی گفته می‌شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می‌گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ‌تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^۲ + bx + c = ۰$ در می‌آوریم:

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲ \Rightarrow mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰ \xrightarrow{x_۲ \text{ و } x_۱ \text{ ریشه ها}} x_۱x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱x_۲ = \frac{m^۲ - ۲}{m} = ۱$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۲ = m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۲)(۲) = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰ \\ m = -۱ \Rightarrow -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(-۱)(-۱) = ۹ - ۴ = ۵ > ۰ \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > ۰$ فقط $m = -۱$ جواب قابل‌قبول است.

۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه دو داده‌شده، باشد می‌دانیم $\alpha^۲+\beta^۲=۶$ است. $\alpha^۲+\beta^۲$ برابر است با:

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P=۶$$

ب) درصورتی‌که $\Delta>۰$ باشد معادلهٔ درجه دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\dfrac{m+۳}{m}\\ P=\alpha\beta=\dfrac{۵}{m}\end{cases}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=\left(\frac{m+۳}{m}\right)^۲-۲\left(\frac{۵}{m}\right)=۶\Rightarrow\frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶$$

$$\xrightarrow{\times m^۲} m^۲+۶m+۹-۱۰m=۶m^۲\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰\Rightarrow(۵m+۹)(m-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=۱\Rightarrow x^۲-۴x+۵=۰\Rightarrow\Delta=-۴<۰\Rightarrow\text{ فاقد ریشهٔ حقیقی}\\ m=-\dfrac{۹}{۵}\Rightarrow-\dfrac{۹}{۵}x^۲-\dfrac{۶}{۵}x+۵=۰\Rightarrow\Delta>۰\Rightarrow\text{ دارای دو ریشهٔ حقیقی}\end{cases}$$

پس فقط به ازای $m=-\frac{۹}{۵}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است، لذا:

$$S' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱) + (\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} - ۲ = -۵$$

$$P' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱)(\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} - \frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} + ۱$$

$$= \frac{۱ - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + ۱ = \frac{۱ - \frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} + ۱ = ۲$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

۵ گزینه ۳

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{a}{۳}\xrightarrow{\beta=۳\alpha}\alpha+۳\alpha=\frac{a}{۳}\Rightarrow ۴\alpha=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=۱۲\alpha$$

$$\alpha.\beta=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\beta=۳\alpha}\alpha.۳\alpha=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \alpha^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \alpha=\pm\frac{۲}{۳}$$

$$a=۱۲\alpha=۱۲(\pm\frac{۲}{۳})=\pm ۸\Rightarrow ۸-(-۸)=۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۲

$$S=\frac{-(-(a^{۲}+b^{۲}-۱۲))}{۱}\Rightarrow a+b=a^{۲}+b^{۲}-۱۲$$

$$a+b=(a+b)^{۲}-۲ab-۱۲(I)$$

از طرفی : $P=\frac{a+b-۱}{۱}\Rightarrow ab=(a+b)-۱$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{جایگذاری در رابطهٔ}} a+b=(a+b)^{۲}-۲(a+b)+۲-۱۲$$

$$\Rightarrow (a+b)^{۲}-۳(a+b)-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{۳+\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=۵ & \checkmark \text{ قابل‌قبول} \\ a+b=\frac{۳-\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=-۲ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s=\frac{۱}{p}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۱}{\frac{(۲-m)}{۳}}\Rightarrow\frac{-۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۴m+۲m^۲+۲-m=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m=-۱\\ m=-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta>۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}m=-۱\Rightarrow ۳x^۲+(-۲-۱)x+۲+۱=۰\Rightarrow ۳x^۲-۳x+۳=۰\Rightarrow\Delta<۰ & \text{غ ق ق}\\ m=\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۳x^۲+(۲\times\frac{۷}{۲}-۱)x+۲-\frac{۷}{۲}=۰\Rightarrow ۳x^۲+۶x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow\Delta>۰ & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین $m=\frac{۷}{۲}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ گزینه ۴

$a_۲$ ، $۲a_۵$ ، $a_۸$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$۲a_۵ = \frac{a_۲ + a_۸}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲a_۱q^۴ = \frac{a_۱q + a_۱q^۷}{۲} \Rightarrow ۴q^۳ = ۱ + q^۶$$
$$\Rightarrow q^۶ - ۴q^۳ + ۱ = ۰ \xrightarrow{q^۳=t} t^۲ - ۴t + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow t = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow q^۳ = ۲ \pm \sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow q = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}\ ,\ \ q = \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جملهٔ هشتم بزرگ‌ترین جمله است و درنتیجه $q = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}$، پس:

$$\frac{a_۸}{a_۲} = \frac{a_۱q^۷}{a_۱q} = q^۶ = \left(۲ + \sqrt{۳}\right)^۲ = ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

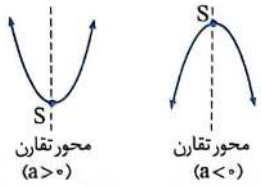
BOX 3: تابع درجه دوم (صفحه ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی)

از سال گذشته با خواص تابع درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ آشنایی داریم که نمودار آن را سهمی می‌گوییم. در ابتدا برای یادآوری، ویژگی‌های تابع درجهٔ دوم گفته شده است.

تابع درجه دوم

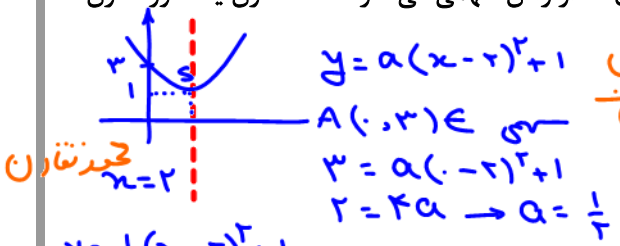
سهمی

● نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$، یک سهمی اقلیم و یا به اختصار یک سهمی می‌گوییم. سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$، همواره به یکی از دو صورت مقابل است:



● در شکل‌های بالا به نقطهٔ S رأس سهمی می‌گوییم.

● اگر $a>0$ باشد، سهمی دارای پایین‌ترین نقطه یا مینیمم و اگر $a<0$ باشد، سهمی دارای بالاترین نقطه یا ماکزیمم می‌باشد که د رهر صورت نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم سهمی همان رأس سهمی است. هم‌چنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن یا محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.



خواص سهمی به معادلهٔ $(a\neq 0)\ ,\ y=a(x-\alpha)^2+\beta$

۱) نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادلهٔ $x=\alpha$ معادلهٔ خط تقارن (محور تقارن) سهمی است.

۳) اگر $a>0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

نکته: از خاصیت (۲)، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر دو نقطهٔ دلخواه از سهمی، اگر عرض این دو نقطه با هم برابر باشند، آن‌گاه طول این دو نقطه نسبت به خط $x=\alpha$ قرینهٔ یکدیگرند.



خواص سهمی به معادله $(a\neq 0)\ ,\ y=ax^2+bx+c$

۱) نقطه به مختصات $S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$، معادلهٔ خط تقارن یا محور تقارن این سهمی است.

۳) اگر $a>0$، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a<0$، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

تذکر: به جای یافتن عرض نقطهٔ رأس سهمی به کمک رابطهٔ $-\frac{\Delta}{4a}$، می‌توان طول رأس یعنی $x=-\frac{b}{2a}$ را در معادلهٔ سهمی قرار داد تا عرض آن به دست آید.

تمرین: تعیین کنید کدام‌یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام‌یک مینیمم؟ سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را تعیین کنید.

۱) $y=3x^2-12x+5$

۲) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۱۵)

پاسخ: ۱) ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، پس سهمی دارای مینیمم است. طول نقطهٔ مینیمم، $x=-\frac{b}{۲a}$ است: $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱۲}{۲(۳)}=۲$

با قراردادن عدد ۲ به جای x، کم‌ترین مقدار سهمی به دست می‌آید: $x=۲ \Rightarrow y=۳(۲)^۲-۱۲(۲)+۵=۱۲-۲۴+۵=-۷$

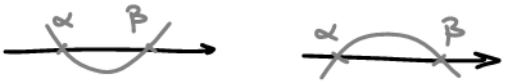
پس کم‌ترین مقدار سهمی برابر -۷ است.

۲) ضریب $x^۲$ عددی منفی است، پس سهمی دارای ماکزیمم است:

$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲(-\frac{۱}{۳})}=۳ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}\times ۳^۲+۲\times ۳-۱=-۳+۶-۱=۲$

پس بیشترین مقدار سهمی برابر ۲ است.

صفرهای تابع درجه ۲



نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم. بنابراین برای پیداکردن صفرهای تابع f باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم. در تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$، می‌توان تعداد صفرهای تابع را به کمک علامت Δ مشخص کرد.

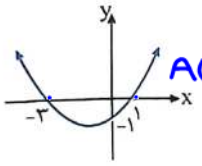
تمرین: صفرهای تابع $f(x)=۳x^۲-۴x+۱$ را مشخص کنید.

پاسخ: ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$، صفرهای تابع f می‌باشند: $f(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۴x+۱=۰ \;,\; a=۳ \;,\; b=-۴ \;,\; c=۱$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۱۲=۴ \Rightarrow \alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴+۲}{۶}=\frac{۶}{۶}=۱ \;,\; \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴-۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

نکته: اگر α و β صفرهای تابع درجه ۲ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ است که با داشتن یک فرض دیگر می‌توان مقدار a را نیز به دست آورد.

تمرین: معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید. (مشابه مثال صفحه ۱۶ کتاب درسی)

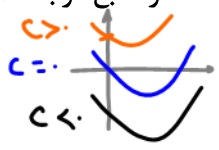


$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$
$-۱=a(۳)(-۱)$
$\frac{۱}{۳}=a$
$y=\frac{۱}{۳}(x+۳)(x-۱)=\frac{۱}{۳}(x^۲+۲x-۳)=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۲}{۳}x-۱$
$\frac{۱}{۳}(x^۲-۵x+۶)$

پاسخ: با توجه به نمودار، اعداد $\alpha=-۳$ و $\beta=۱$، صفرهای تابع f هستند. پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x+۳)(x-۱)$ می‌باشد. مختصات نقطهٔ $(۰,-۱)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$f(۰)=-۱ \Rightarrow a(۰+۳)(۰-۱)=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۳}(x+۳)(x-۱)=\frac{۱}{۳}\underbrace{(x^۲-x+۳x-۳)}_{x^۲+۲x-۳}=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۲}{۳}x-۱$

نکته: محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور عرض‌ها، برابر $f(۰)=c$ می‌باشد. پس عدد c در تابع درجهٔ ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yها است.

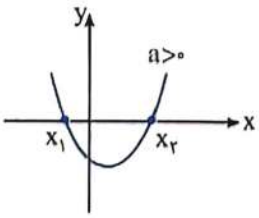


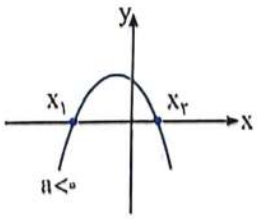
بحث روی علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ و نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$

در این قسمت می‌خواهیم بدون به دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم و فقط با استفاده از علامت S و P، علامت ریشه‌های معادله (در صورت وجود) را مشخص کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، یعنی $\Delta>۰$ باشد. برای بحث در علامت ریشه‌ها، ابتدا $P=\frac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) را به دست می‌آوریم:

۱) اگر $P<۰$، آن‌گاه دو ریشهٔ معادله مختلف‌العلامت‌اند (یکی مثبت و دیگری منفی) و نمودار تابع f به یکی از دو حالت زیر است:





نکته: اگر $\frac{c}{a}<0$، آن‌گاه Δ حتماً مثبت است، لذا فقط شرط $\frac{c}{a}<0$ را بررسی می‌کنیم.

به عنوان مثال، در معادلهٔ درجه دوم $3x^2+11x-1=0$، $P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{3}$ عددی منفی است، پس (Δ حتماً مثبت است) معادله دارای دو ریشه، یکی مثبت و دیگری منفی است.

تمرین: به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $(m-3)x^2+4mx-m+5=0$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد؟

پاسخ: اگر $P=\frac{c}{a}$ عددی منفی باشد، آن‌گاه معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-m+5}{m-3}<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<3 \text{ یا } m>5$$

۲) اگر $P>0$ (حاصل‌ضرب دو عدد، عددی مثبت است)، آن‌گاه دو ریشه متحدالعلامت‌اند (هر دو ریشه مثبت و یا هر دو ریشه منفی هستند).
برای تشخیص مثبت‌بودن هر دو ریشه و یا منفی‌بودن آن‌ها، S (جمع ریشه‌ها) را تشکیل می‌دهیم:
آ) اگر $S>0$ (جمع دو عدد)، آن‌گاه هر دو ریشه مثبت‌اند.
ب) اگر $S<0$ (جمع دو عدد)، آن‌گاه هر دو ریشه منفی‌اند. بنابراین:

نکته: ۱) شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی مثبت آن است که $S=-\frac{b}{a}>0$ ، $P=\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$

۲) شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی منفی آن است که $S=-\frac{b}{a}<0$ ، $P=\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$

تمرین: بدون حل معادله، علامت ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7x+1=0$ را مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا Δ را به دست می‌آوریم: $\Delta=b^2-4ac=49-12=37>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

هم‌چنین $P=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$ عددی مثبت است و در نتیجه هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. S را به دست می‌آوریم: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{7}{3}$

S عددی منفی است و چون S جمع دو عدد (هر دو مثبت یا هر دو منفی) است، پس دو عدد باید منفی باشند. لذا معادلـه دارای دو ریشـهٔ حقیقی منفی می‌باشد.

۳) اگر $P=0$، آن‌گاه $c=0$ می‌باشد و در نتیجه ریشه‌ها $\alpha=0$ و $\beta=-\frac{b}{a}$ می‌باشند.

اگر نمودار تابع درجهٔ‌دوم داده شود و بخواهیم از روی نمودار، علامت a، b و c را تعیین کنیم باید به نکتهٔ زیر خیلی توجه کنیم.

نکته: نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ و $(a\neq 0)$ داده شده است، می‌توانیم به کمـک آن علامـت ضـرایب a، b و c را بـا توجـه بـه توضیحات مشخص کنیم.

علامت a: اگر سهمی رو به بالا باشد، $a>0$ و اگر رو به پایین باشد، $a<0$ می‌باشد.

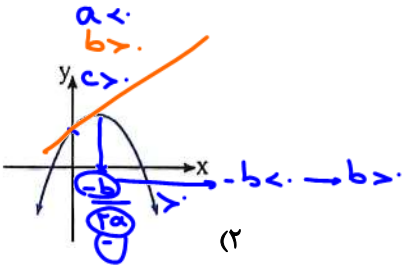
علامت b: طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ است. با توجه به علامت a و علامت x، علامت b تعیین می‌شود.

علامت c: محل برخورد سهمی با محور yها، $f(0)=c$ است. با توجه به محل برخورد، علامت c تعیین می‌شود.

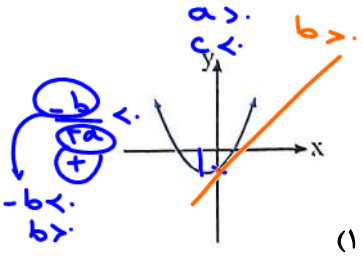
تمرین: در هر یک از قسمت‌های زیر، سهمی $y=ax^2+bx+c$ رسم شده است. علامت a، b و c را مشخص کنید.

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۱۷)

روش سریع تعیین علامت b:
در محل برخورد سهمی با محور yها خط مماس بکشید علامت تیپ خط مماس علامت b است



۲)



۱)

پاسخ: ۱) سهمی رو به بالاست، پس ضریب x^2 عددی مثبت است: $a>0$

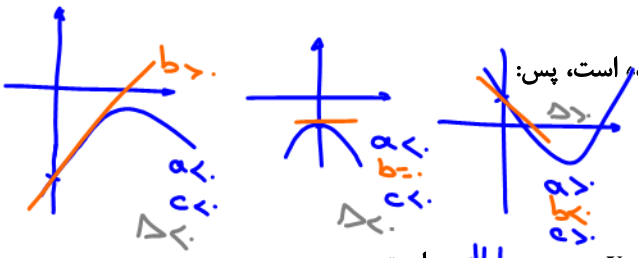
سهمی محور yها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کرده است، پس: $f(0)=c<0$

همچنین طول رأس سهمی منفی است، پس: $x=-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} -b<0 \Rightarrow b>0$

۲) سهمی رو به پایین است، پس a عددی منفی می‌باشد. رأس سهمی در ناحیهٔ اول قرار دارد و در ناحیهٔ اول، طول عددی مثبت است،

بنابراین: $x=-\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow b>0$ (2a: منفی)

سهمی، محور yها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، پس: $f(0)=c>0$



پرسش‌های تشریحی

- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- اگر $a>0$ ، آن‌گاه دهانهٔ سهمی $y=ax^2+bx+c$ رو به بالا است.

۲- مقدار ماکزیمم سهمی $y=-x^2+6x-1$ برابر $y_S=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-(36-4=32)}{-4}=8$ است.

۳- مقدار مینیمم تابع $y=3x^2+6x+5$ برابر با $y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(36-4(3)(5))}{4(3)}=\frac{24}{12}=2$ است. (خرداد ۱۴۰۲)

۴- صفرهای تابع $f(x)=x^2-4x+3$، اعداد ۱ و ۳ هستند. (ریشه‌های)

- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

ن ۵- سهمی $y=-2x^2+4x-1$ دارای ماکزیمم است. ($\frac{c}{a}=\frac{7}{1}>0$ ریشه‌ها هم‌علامت)

ن ۶- معادلهٔ $x^2+6x+7=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. ($\Delta=(6)^2-4(7)>0$ هر ۲ ریشه منفی $-\frac{b}{a}=-6$) (خرداد ۱۴۰۲)

ن ۷- معادلهٔ محور تقارن $y=x^2-6x+1$، خط $x=-3$ است. ($x=-\frac{b}{2a}=3$)

۸- مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=-2x^2+8x-5$ برابر با چند است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲− ۴) ۳−

$y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(64-4(-2)(-5)=24)}{4(-2)=-8}=3$ (عرض ماکزیمم)

۹- بدون حل و تعیین ریشه‌ها، علامت ریشه‌های هر یک از معادله‌های زیر را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

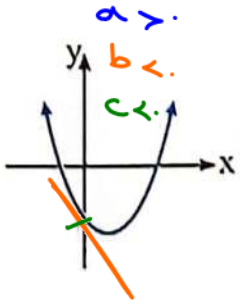
آ) $x^2 - 11x + 3 = 0$

ب) $5x^2 + 12x + 7 = 0$

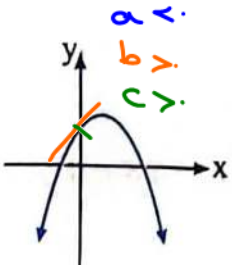
۱۰- در هر یک از قسمت‌های زیر، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنید.

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

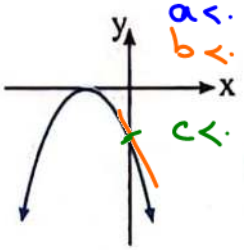
آ)



ب)

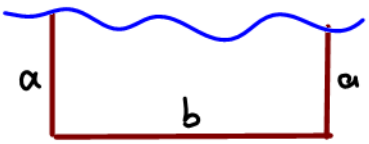


پ)



۱۱- قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۵)



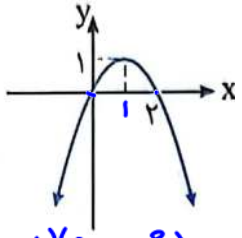
۱۲- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را با شرایط زیر رسم کنید:

آ) $a > 0 \ , \ b > 0 \ , \ c < 0$

ب) $a < 0 \ , \ b < 0 \ , \ c > 0$

۱۳- معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید:

آ)



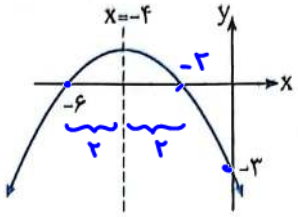
$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$A(1,1)\in y=a(x-0)(x-2)$

$1=a(1)(-1)$

$a=-1 \rightarrow y=-x(x-2)$

ب)



$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$A(0,-3)\in y=a(x+6)(x+2)$

$-3=a(6)(2) \rightarrow a=-\frac{1}{4}$

$y=-\frac{1}{4}(x+6)(x+2)$

۱۴- حدود m را طوری مشخص کنید که معادلهٔ $(m-2)x^2-2(m+1)x+12=0$، دو ریشهٔ حقیقی منفی داشته باشد.

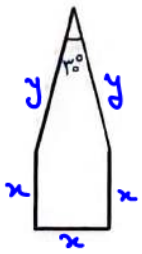
$\frac{c}{a}>0 \quad -\frac{b}{a}<0 \quad \Delta\geq 0$

$\frac{c}{a}=\frac{12}{m-2}>0 \rightarrow m-2>0 \rightarrow m>2$ الف

$-\frac{b}{a}=\frac{2(m+1)}{m-2}<0 \rightarrow m+1<0 \rightarrow m<-1$ ب

الف و ب $=\emptyset$ ← به ازای هیچ مقداری از m وجود ندارد

۱۵- پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 30° قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)



$3x+2y=6 \rightarrow y=\frac{6-3x}{2}$

$S_{\text{پنجره}}=x^2+\frac{1}{2}yy\sin 30^\circ=x^2+\frac{1}{4}y^2=x^2+\frac{1}{4}\left(\frac{6-3x}{2}\right)^2$

$S=x^2+\frac{1}{16}(36+9x^2-36x)=\frac{25}{16}x^2-\frac{36}{16}x+\frac{36}{16}$

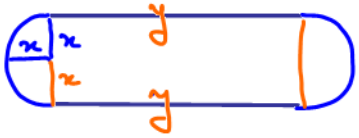
$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{36}{16}}{2(\frac{25}{16})}=\frac{36}{50}=\frac{72}{100}=0.72\,m=72\,cm$

۱۶- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم با فرض $\pi=3$، ۲۱۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

(مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.



دو تا محیط نیم دایره

$2y+2\left(\frac{2\pi x}{2}\right)=2100$

$2y+6x=2100 \xrightarrow{\div 2} y+3x=1050 \rightarrow y=1050-3x$

آ) $S_{\text{مستطیل}}=(\text{طول})(\text{عرض})=y(2x)=2xy=2x(1050-3x)=-6x^2+2100x$

$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{2100}{2(-6)}=\frac{1050}{6}=175 \rightarrow y=1050-3x \rightarrow y=525$

ب) $S_{\text{استادیوم}}=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{دایره}}=2xy+\pi x^2=2x(1050-3x)+3x^2=-3x^2+2100x$

$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-2100}{2(-3)}=\frac{700}{2}=350 \rightarrow y=1050-3x \rightarrow y=0$

نتیجه: بیشترین مساحت استادیوم وقتی است که به شکل دایره باشد. یعنی ۲ تا نیم دایره به هم بچسبند.

Homework

۱ صفرهای تابع f با ضابطهٔ $f(x) = (x^۲ + ۴x)^۲ - ۲(x^۲ + ۴x) - ۱۵$ را به دست آورید.

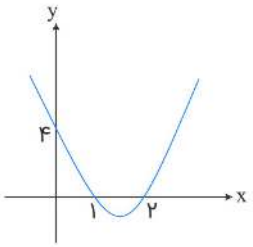
۲ راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا کشیده شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به‌صورت $h(t) = ۱۰۰t - ۵t^۲$ است.

الف چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می‌گردد؟

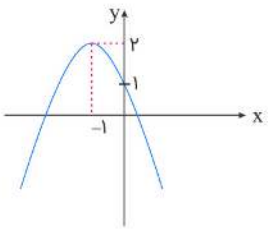
۳ معادلهٔ سهمی زیر را بنویسید.



۴ محیط مستطیلی ۱۵۰ متر است. حداکثر مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۳۶۲۵}{۴}$
۲) $\frac{۵۶۲۵}{۴}$
۳) $\frac{۱۶۸۷۵}{۴}$
۴) $\frac{۲۱۸۷۵}{۴}$

۵ اگر ضابطهٔ نمودار زیر به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟



۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

۶ به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-۶)x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) $m < -۶$
۲) $m > ۳$
۳) $۰ < m < ۳$
۴) $۳ < m < ۶$

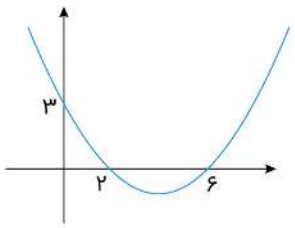
۷ اگر صفرهای نمودار تابع $f(x) = mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲$ معکوس یکدیگر باشند، مجموع صفرهای تابع کدام است؟

۱) ۳
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) -۳
۴) $\frac{۳}{۲}$

۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، نمودار تابع $f(x) = (m-۲)x^۲ + ۵x + m + ۱$ از چهار ناحیهٔ مختصاتی می‌گذرد؟

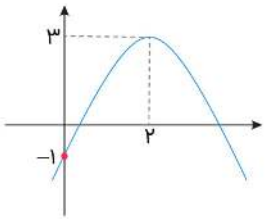
۱) $-۲ < m < ۱$
۲) $-۱ < m < ۲$
۳) $m < -۲$ یا $m > ۱$
۴) $m < -۱$ یا $m > ۲$

۹ نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت شکل زیر است. $f(-۱)$ کدام می‌باشد؟



۱) $\frac{۲۱}{۴}$
۲) $\frac{۱۹}{۴}$
۳) $\frac{۱۱}{۲}$
۴) $\frac{۸}{۲}$

۱۰ نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت شکل زیر است، مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۷}{۴}$

۴) $-\frac{۵}{۴}$

۱۱ قرار است کنار رودخانه، محوطهٔ مستطیلی شکل ایجاد کنیم، برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود، اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن این محوطه چقدر است؟



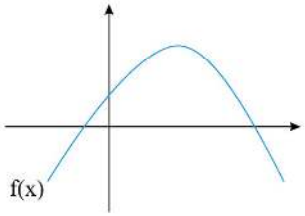
۱) ۱۲۰۰

۲) ۱۲۵۰

۳) ۲۵۰۰

۴) ۲۵۵۰

۱۲ اگر سهمی زیر مربوط به $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد، آنگاه مقدار $abc - bc\Delta$ کدام است؟ $(\Delta = b^۲ - ۴ac)$



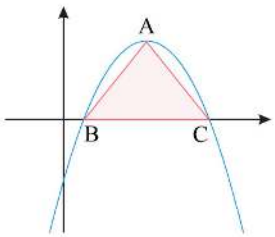
۱) مثبت

۲) منفی

۳) صفر

۴) نامشخص

۱۳ نمودار تابع $f(x) = -x^۲ + ۶x - ۵$ به‌صورت زیر است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



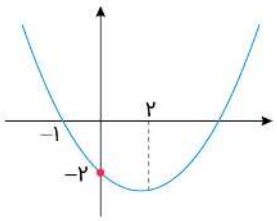
۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۶

۴) ۱۲

۱۴ نمودار $f(x) = ax^۲ + bx + c$ مطابق شکل زیر است. $f(-\frac{۴}{۳})$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۷}{۳۸}$

۲) $\frac{۱۷}{۳۸}$

۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$

۴) $\frac{۱۷}{۴۵}$

۱۵ اگر α و β صفرهای سهمی $y = ۲۵\alpha x^۲ + ۴x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۱۶ به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x = ۴$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟ (با تغییر)

۱) $a < -۴ \ , \ a \neq -۵$
۲) $a > -۴$
۳) $a < ۴$
۴) $a > ۴$

۱۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + (m-۲)x + m + ۱ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

۱) $-۱ < m < ۰$
۲) $m < ۰$
۳) $۲ < m < ۸$
۴) $m > ۸$

۱۸ به ازای چند مقدار a، سهمی $y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) هیچ مقدار a
۲) تمام مقادیر a
۳) ۱
۴) ۲

۱۹ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴, ۰)$
۲) $(-۴, -۲)$
۳) $(-۶, ۰)$
۴) $(-۶, -۴)$

۲۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^۲ - ۳x - ۱۰$ را حداقل چند واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

۲۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-۳)x^۲ + ax - ۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a \leq ۲$
۲) $۰ < a \leq ۲$
۳) $۲ < a < ۳$
۴) $۰ < a < ۳$

۲۲ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m+۲)x^۲ + ۳x + ۱ - m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۱$ یا $m < -۲$
۲) $-۲ < m < ۱$
۳) فقط $m < -۲$
۴) فقط $m > ۱$

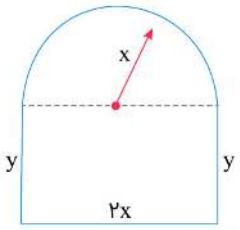
۲۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۲$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۲$
۲) $-۱ < m < ۲$
۳) هر مقدار m
۴) هیچ مقدار m

۲۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + (a+۳)x - ۱$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a < -۹$
۲) $a < -۳$
۳) $a > -۱$
۴) $-۳ < a < ۰$

۲۵ یک پنجره به شکل مستطیل است که در بالای آن یک نیم‌دایره قرار دارد (مطابق شکل). اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، عرض مستطیل (y) چقدر می‌تواند باشد که حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\pi \simeq ۳$) (شعاع نیم‌دایره x است.)

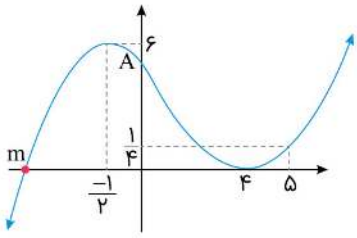


۱) $\frac{۳}{۷}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۶}{۵}$
۴) $\frac{۶}{۷}$

۲۶ در تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$، داریم $۴a + ۲b + c < ۰$، اگر $b^۲ < ۴ac$ باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) $a > ۰$
۲) $c > ۰$
۳) $ac > ۰$
۴) $b < ۰$

۲۷ در شکل زیر نمودار دو سهمی در نقطهٔ A مشترکند. مقدار m کدام است؟



۱) $\frac{-۱-\sqrt{۳}}{۴}$
۲) $\frac{-۲-\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲}$

۲۸ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۳ + kx^۲ - x - ۲$ برابر (۲-) است. مجموع مربعات صفرهای دیگر تابع کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

۲۹ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x = |x - ۱|$ کدام است؟

۱) بدون ریشه
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۰ به‌ازای کدام مقادیر m، معادله $|x| + |x - ۳| = m$ فاقد جواب است؟

۱) $m < ۳$
۲) $m > ۳$
۳) $m = ۳$
۴) $m \geq ۳$

۱

$$x^۲ + ۴x = t \Rightarrow t^۲ - ۲t - ۱۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (t+۳)(t-۵) = ۰$$

$$t = -۳, t = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + ۴x = ۵ \Rightarrow x = ۱, -۵ \\ x^۲ + ۴x = -۳ \Rightarrow x = -۱, -۳ \end{cases}$$

۲

الف

$$t_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰۰}{-۱۰} = ۱۰\,s$$

ب

$$h(۱۰) = ۱۰۰(۱۰) - ۵(۱۰)^۲ = ۱۰۰۰ - ۵۰۰ = ۵۰۰\,m$$

پ

$$h = ۰ \Rightarrow ۱۰۰t - ۵t^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow ۵t(۲۰ - t) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \text{ ق ق غ} \\ t = ۱۰ \text{ ق ق} \end{cases}$$

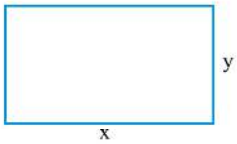
۳

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$f(x) = a(x-۱)(x-۲)$$

$$A\Big|_{۴}^{۰} : ۴ = a(-۱)(-۲) \Rightarrow a = ۲$$

$$f(x) = ۲(x-۱)(x-۲) = ۲(x^۲ - ۳x + ۲)$$
$$f(x) = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

۴ گزینه ۲



محیط : $۲(x+y)=۱۵۰$

$x+y=۷۵ \Rightarrow y=۷۵-x$

مساحت : $S=x.y=x(۷۵-x)$

$$S=-x^{۲}+۷۵x \Rightarrow \max \left| \begin{array}{l} x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۷۵}{۲(-۱)}=\frac{۷۵}{۲} \\ S_{max}=-(\frac{۷۵}{۲})^{۲}+\frac{۷۵^{۲}}{۲}=۷۵^{۲}(-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}) \Rightarrow S_{max}=۷۵^{۲}(\frac{۱}{۴}) \Rightarrow S_{max}=\frac{۵۶۲۵}{۴} \end{array} \right.$$

۵ گزینه ۴

رأس سهمی : $(m\,,\,k) : f(x)=a(x-m)^{۲}+k$

رأس سهمی : $(-۱\,,\,۲) : f(x)=a(x+۱)^{۲}+۲$

نقطه روی منحنی : $(۰\,,\,۱) \in f : ۱=a(۰+۱)^{۲}+۲ \Rightarrow a=-۱$

$f(x)=-(x+۱)^{۲}+۲=-x^{۲}-۲x+۱$

$a+b+c=-۲$

۶ گزینه ۴

برای اینکه تابع دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m-۶)x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$$

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ - ۴(m-۶)(-۳) > ۰$$

$$۴m^۲ + ۴(۳m - ۱۸) > ۰$$

$$m^۲ + ۳m - ۱۸ > ۰ \Rightarrow (m+۶)(m-۳) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m > ۳ \\ \text{یا} \\ m < -۶ \end{cases}$$

$$۲)\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲m}{m-۶} < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۶$$

$$۳)\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-۳}{m-۶} > ۰ \Rightarrow m - ۶ < ۰ \Rightarrow m < ۶$$

اشتراک جواب‌ها : $۳ < m < ۶$

۷ گزینه ۱

صفرهای تابع $f(x)$ همان ریشه‌های معادله $mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$ است، پس شرط معکوس بودن ریشه‌ها $a = c$ و $\Delta > ۰$ است.

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$$

$$m = m^۲ - ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -۱ : -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴ \Rightarrow \Delta > ۰ \ \checkmark \\ m = ۲ : ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۱۶ < ۰ \quad \text{(غ‌ق‌ق)بدون ریشه} \end{cases}$$

$$m = -۱ : -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$$

مجموع ریشه‌ها:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = \frac{-۳}{-۱} = ۳$$

۸ گزینه ۲

شرط آنکه نمودار تابع سهمی از چهار ناحیه بگذرد:

$$a.c < ۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱) < ۰$$

m	$-\infty$	-۱		۲	$+\infty$
$(m-۲)(m+۱)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

ج

$-۱ < m < ۲$

۹ گزینه ۱

صفرهای تابع سهمی $\alpha = ۲$ و $\beta = ۶$ می‌باشند، پس داریم:

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow f(x) = a(x-۲)(x-۶)$$

و نمودار از نقطهٔ $(۳\ ,\ ۰)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در ضابطه صدق می‌کند:

$$۳ = a(۰-۲)(۰-۶) \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

$$f(x) = \frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۶) \Rightarrow f(-۱) = \frac{۱}{۴}(-۳)(-۷) = \frac{۲۱}{۴}$$

۱۰ گزینه ۲

نکته: اگر $S(m,k)$ رأس سهمی باشد، ضابطه سهمی به‌صورت $f(x) = a(x-m)^۲ + k$ می‌باشد.

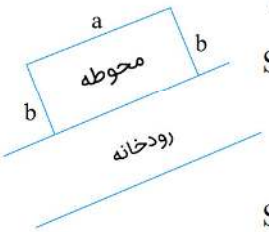
$$S(۲,۳)$$

$$f(x) = a(x-۲)^۲ + ۳ \xrightarrow{(۰,-۱)\in f} -۱ = a(۰-۲)^۲ + ۳ \Rightarrow a = -۱$$

$$f(x) = -(x-۲)^۲ + ۳$$

$$f(\frac{۱}{۲}) = -(\frac{۱}{۲}-۲)^۲ + ۳ = -\frac{۹}{۴} + ۳ = \frac{۳}{۴}$$

۱۱ گزینه ۲



$$\text{محیط } P = a + ۲b \Rightarrow a + ۲b = ۱۰۰ \Rightarrow a = ۱۰۰ - ۲b$$

$$S = a \cdot b \Rightarrow S = (۱۰۰ - ۲b) \times b \Rightarrow S = -۲b^{۲} + ۱۰۰b$$

بنابه نمودار درجه دوم:

$$S_{max} = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۱۰۰^{۲} - ۰)}{۴(-۲)} = \frac{۱۰۰۰۰}{۸} = ۱۲۵۰ \text{ m}^{۲}$$

۱۲ گزینه ۲

نمودار max دارد: $a < ۰$

$$\frac{-b}{۲a} > ۰ \Rightarrow b > ۰$$

محل تلاقی f با محور yها: $c > ۰$

چون صفرهای تابع f دوتا می‌باشد، معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد: $\Delta > ۰$

$$\underset{(-)}{a} \cdot \underset{(+)}{b} \cdot \underset{(+)}{c} - \underset{(+)}{b} \cdot \underset{(+)}{c} \cdot \underset{(+)}{\Delta} = (-) - (+) = (-)$$

۱۳ گزینه ۱

$$\text{رأس سهمی : } A \begin{cases} x = \frac{-۶}{۲(-۱)} = ۳ \\ y = -۹ + ۱۸ - ۵ = ۴ \end{cases}$$

$$f(x) = ۰ : -x^{۲} + ۶x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & : B(۱, ۰) \\ x = ۵ & : C(۵, ۰) \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \times h}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث } ABC \; S_{ABC} = \frac{(۴)(۴)}{۲} = ۸$$

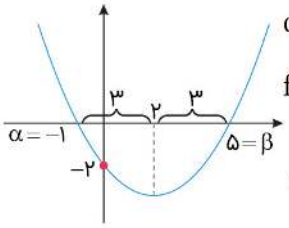
h ارتفاع مثلث است.

۱۴ گزینه ۳

نکته: اگر α و β صفرهای تابع سهمی $f(x)$ باشند، داریم:

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

نکته: $x = -\frac{b}{2a}$ (طول رأس سهمی) معادله محور تقارن سهمی است.



$$\alpha = -1, \beta = 5$$

$$f(x) = a(x+1)(x-5)$$

نقطه : $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$: $-2 = a(1)(-5) \Rightarrow a = \frac{2}{5}$

$$f(x) = \frac{2}{5}(x+1)(x-5) \Rightarrow f(-\frac{4}{3}) = \frac{2}{5}(-\frac{4}{3}+1)(-\frac{4}{3}-5)$$

$$= \frac{2}{5}(-\frac{1}{3})(\frac{-19}{3}) = \frac{38}{45}$$

۱۵ گزینه ۱

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{5}$$

α ریشهٔ معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} + \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1 < \alpha \quad \times$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{-1}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 > \alpha \quad \checkmark$$

بنابراین $\alpha = -\frac{1}{5}$ و $\beta = 1$ قابل‌قبول است.

$$y = -5x^2 + 4x + 1$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5} \quad , \quad y_S = -5(\frac{2}{5})^2 + 4(\frac{2}{5}) + 1 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow S(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$$

بنابراین S در ناحیهٔ اول قرار دارد.

۱۶ گزینه ۱

مجموع ضرایب معادله برابر با صفر است، بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله $x = ۱$ می‌باشد. حال معادله را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ & x - ۱ \\ \hline -(x^۳ - x^۲) & x^۲ + ax + ۴ \\ \hline ax^۲ + (۴-a)x - ۴ & \\ -(ax^۲ - ax) & \\ \hline ۴x - ۴ & \\ -(۴x - ۴) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ = (x-۱)(x^۲ + ax + ۴)$$

معادله دارای سه ریشهٔ مثبت است، درنتیجه باید معادلهٔ $x^۲ + ax + ۴$ دو ریشهٔ متمایز مثبت داشته باشد. پس در معادلهٔ $x^۲ + ax + ۴$ شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۱۶ > ۰ \Rightarrow a < -۴ \text{ یا } a > ۴ \\ P = \dfrac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۴}{۱} > ۰ \ \checkmark \\ S = -\dfrac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\dfrac{a}{۱} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -۴$$

همچنین ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + ax + ۴$ نباید $x = ۱$ باشد $(a \neq -۵)$. بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$a < -۴ \ , \ a \neq -۵$$

۱۷ گزینه ۱

شرط آنکه معادلهٔ درجه دومی، ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > ۰$، $S = \frac{-b}{a} > ۰$ و $P = \frac{c}{a} > ۰$ باشند.

$$x^۲ + (m-۲)x + m + ۱ = ۰$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m-۲)}{۱} > ۰ \Rightarrow m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+۱}{۱} > ۰ \Rightarrow m > -۱$$

از اشتراک دو شرط بالا $-۱ < m < ۲$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > ۰$ نیست ولی ما شرط $\Delta > ۰$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ - ۴(m+۱) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ - ۴m - ۴ > ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۸m > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m > ۸ \\ \text{یا} \\ m < ۰ \end{cases}$$

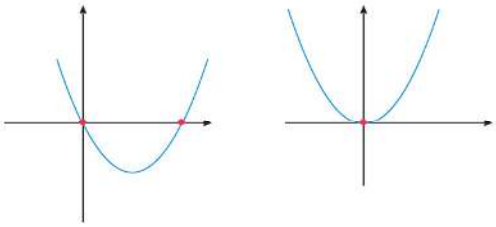
از اشتراک $-۱ < m < ۲$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-۱ < m < ۰$

۱۸ گزینه ۱

$$y = ax^{۲} + (۳ + ۲a)x = x(ax + ۳ + ۲a) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ax + ۳ + ۲a = ۰ \Rightarrow x = -\dfrac{۳ + ۲a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به‌صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



سهمی روبه‌بالا $\Rightarrow a > ۰ \quad (*)$

ریشهٔ غیر صفر $> ۰ \Rightarrow -\dfrac{۳ + ۲a}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۳ + ۲a}{a} < ۰$

$\xrightarrow{a>۰} ۳ + ۲a < ۰ \Rightarrow a < -\dfrac{۳}{۲}$

بنابراین طبق (*) برای a مقداری یافت نشد.

۱۹ گزینه ۴

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta > ۰$، $p > ۰$ و $s > ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴ \times ۲ \times (m+۶) = m^۲ - ۸m - ۴۸ > ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m-۱۲)(m+۴)}_{p} > ۰$$

x	$-\infty$	-۴	۱۲	$+\infty$
p(x)	+	۰ −	۰	+

$$\Rightarrow m < -۴ \quad \text{یا} \quad m > ۱۲$$

$$۲)p > ۰ \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{۲} > ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$۳)s > ۰ \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m+۶}{۲} > ۰ \Rightarrow m > -۶$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

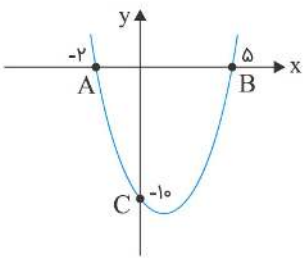
$$m \in (-۶, -۴)$$

۲۰ گزینه ۳

$$y = x^۲ - ۳x - ۱۰ \Rightarrow y = (x-۵)(x+۲)$$
$$\xrightarrow{y=۰} x = -۲ \ , \ x = ۵$$

باتوجه‌به صفرهای تابع، نمودار تابع محور xها را در نقاط $A(-۲, ۰)$ و $B(۵, ۰)$ قطع می‌کند. همچنین محور yها را در نقطهٔ $C(۰, -۱۰)$ قطع می‌کند.

همچنین به علت مثبت بودن ضریب $x^۲$، دهانهٔ این سهمی روبه‌بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:



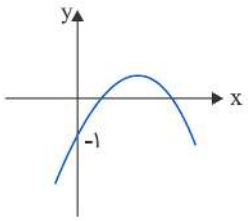
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور xها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به‌سمت xهای مثبت انتقال دهیم.

$$(-\infty\ ,\ -۶) \cup [-۶\ ,\ ۲] = (-\infty\ ,\ ۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

روش دوم:

باتوجه‌به اینکه $a < ۳$ است حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به‌دست‌آمده را از $a < ۳$ کم می‌کنیم.

چون عرض از مبدأ -۱ است و $a < ۳$؛ پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه‌به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

۱) باید دو ریشه داشته باشد $\Rightarrow \Delta > ۰$

۲) جمع ریشه‌ها > ۰

۳) ضرب ریشه‌ها > ۰

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴(a-۳)(-۱) > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a+۶) > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \quad (I)$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} > ۰ \Rightarrow \frac{-a}{a-۳} > ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۳ \quad (II)$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a-۳} > ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow ۲ < a < ۳$$

به ازای بازهٔ به‌دست‌آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می‌کند. پس با کم کردن این بازه از $a < ۳$ خواسته سؤال محقق می‌شود.

$$(-\infty\ ,\ ۳) - (۲\ ,\ ۳) = (-\infty\ ,\ ۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

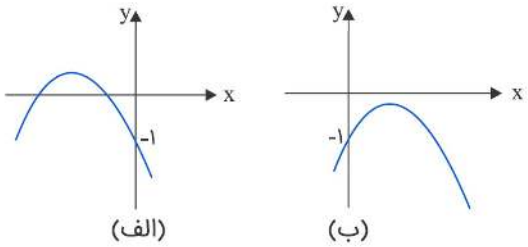
درنتیجه به ازای بازهٔ فوق برای a نمودار تابع از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.

۲۱ گزینه ۱

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند این است که ضریب $x^۲$ یا همان a منفی باشد.
که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳$$

روش اول:
تابع صورت سؤال را می‌توان در دو حالت زیر فرض کرد:



$$f(x) = (a - ۳)x^۲ + ax - ۱ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -۱$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > ۰ \ , \ S < ۰ \ , \ \Delta > ۰$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq ۰$ باشد.
برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴(a - ۳) > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰$$

$$\Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \quad (I)$$

$$S < ۰ \Rightarrow -\frac{a}{a - ۳} < ۰ \xrightarrow{a-۳<۰} -a > ۰ \Rightarrow a < ۰ \quad (II)$$

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a - ۳} > ۰ \quad (III)$$

(با توجه به اینکه $a - ۳ < ۰$، همواره برقرار است.)

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow a < -۶$$

برای حالت (ب):

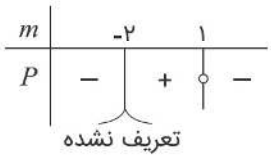
$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴(a - ۳) \leq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ \leq ۰ \Rightarrow -۶ \leq a \leq ۲$$

چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی‌گذرد داریم:

۲۲ گزینه ۱

این منحنی باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد؛ درنتیجه کافی است حاصل‌ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$



$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، $\Delta > 0$ می‌شود.

۲۳ گزینه ۴

گام اول

الف) منحنی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگ‌تر از صفر است.

ب) منحنی در دو نقطهٔ منفی محور xها را قطع می‌کند بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad , \quad S = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده داریم:

$$a = (m-2) \ , \ b = -2(m+1) \ , \ c = 12$$

حال هر سه شرط گفته‌شده را بررسی می‌کنیم:

$$I)\Delta > 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(m-2)(12) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 48m + 96 > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$II)S < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$III)P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک بین دو مجموعهٔ جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی موردنظر به ازای هیچ مقدار m، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

۲۴ گزینه ۱

گام اول

الف) نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادلهٔ $f(x)=0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله منفی است، بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.

ج) مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a، اشتراک بین سه مجموعه جواب به‌دست‌آمده است.

گام دوم

$$f(x)=ax^{۲}+(a+۳)x-۱$$

$$۱)\ \Delta>۰ \Rightarrow (a+۳)^{۲}-۴(a)(-۱)>۰ \Rightarrow (a+۳)^{۲}+۴a>۰$$

$$\Rightarrow a^{۲}+۶a+۹+۴a>۰ \Rightarrow a^{۲}+۱۰a+۹>۰$$

$$\Rightarrow (a+۹)(a+۱)>۰ \Rightarrow a<-۹ \text{ یا } a>-۱ \quad (I)$$

$$۲)\ S=x_{۱}+x_{۲}=-\frac{a+۳}{a}<۰$$

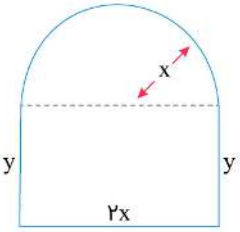
$$\Rightarrow \frac{a+۳}{a}>۰ \Rightarrow a<-۳ \text{ یا } a>۰ \quad (II)$$

$$۳)\ P=x_{۱}.x_{۲}=-\frac{۱}{a}>۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}<۰ \Rightarrow a<۰ \quad (III)$$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a عبارت است از:

$$(I)\cap(II)\cap(III): a<-۹$$

۲۵ گزینه ۴



محیط پنجره:

$$۲y + ۲x + \pi x = ۶$$

$$\xrightarrow{\pi \simeq ۳} ۲y = -۵x + ۶ \Rightarrow y = \frac{-۵}{۲}x + ۳ \quad (I)$$

برای اینکه بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید بیشترین مساحت را دارا باشد، پس:

$$\text{مساحت} : S = ۲xy + \frac{\pi}{۲}x^۲ \xrightarrow{\pi \simeq ۳} S = ۲x(-\frac{۵}{۲}x + ۳) + \frac{۳}{۲}x^۲$$

$$S = -۵x^۲ + ۶x + \frac{۳}{۲}x^۲ \Rightarrow S = \frac{-۷}{۲}x^۲ + ۶x$$

$$\Rightarrow x_{max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲(-\frac{۷}{۲})} = \frac{۶}{۷}$$

در رابطه (I) قرار دهید:

$$y_{max} = \frac{-۵}{۲}(\frac{۶}{۷}) + ۳ = \frac{-۱۵}{۷} + ۳ = \frac{۶}{۷}$$

۲۶ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه $۴a + ۲b + c < ۰$ است، پس $f(۲) < ۰$ است، ازطرفی چون $b^۲ < ۴ac$ است، درنتیجه $b^۲ - ۴ac < ۰$ و نهایتاً $\Delta < ۰$ خواهد بود، پس سهمی محور xها را قطع نمی‌کند و دهانهٔ آن رو به پایین است و درنتیجه $a < ۰$ و $c < ۰$ خواهد بود.

$$a < ۰ , \ c < ۰ \Rightarrow ac > ۰$$

۲۷ گزینه ۴

سهمی سمت راست را به‌صورت $y = a(x-۴)^۲$ در نظر می‌گیریم و نقطهٔ $(۵\ ,\ \frac{۱}{۴})$ را در آن صدق می‌دهیم.

$$\frac{۱}{۴} = a(۵-۴)^۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}(x-۴)^۲$$

نقطهٔ مشترک دو سهمی $(۴\ ,\ ۰)$ خواهد بود. معادلهٔ سهمی سمت چپ را به‌صورت $y = a(x+\frac{۱}{۲})^۲ + ۶$ در نظر می‌گیریم و نقطهٔ $(۴\ ,\ ۰)$ را در آن صدق می‌دهیم:

$$۴ = a(۰+\frac{۱}{۲})^۲ + ۶ \Rightarrow \frac{a}{۴} = -۲ \Rightarrow a = -۸ \Rightarrow y = -۸(x+\frac{۱}{۲})^۲ + ۶$$

حال صفرهای سهمی سمت چپ را پیدا می‌کنیم:

$$y = ۰ \Rightarrow -۸(x+\frac{۱}{۲})^۲ + ۶ = ۰ \Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{x<۰} x+\frac{۱}{۲} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۸ گزینه ۲

صدق ریشه در معادله:

$$x = -۲ : (-۲)^۳ + k(-۲)^۲ - (-۲) - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow -۸ + ۴k + ۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow ۴k = ۸ \Rightarrow k = ۲$$

$$f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲$$

$$f(x) = x(x^۲-۱) + ۲(x^۲-۱) \Rightarrow f(x) = (x^۲-۱)(x+۲)$$

$$f(x) = ۰ : (x^۲-۱)(x+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_۱ = -۲ \\ x_۲ = -۱ \\ x_۳ = +۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع مربعات}} (-۱)^۲ + (۱)^۲ = ۲$$

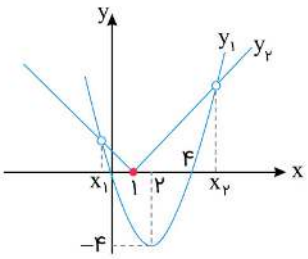
۲۹ گزینه ۳

حل به روش هندسی:

$$x^۲ - ۴x = |x - ۱|$$

$$y_۱ = x^۲ - ۴x \Rightarrow \min \begin{vmatrix} x = ۲ \\ y = -۴ \end{vmatrix}$$

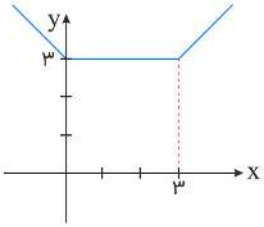
$$y_۲ = |x - ۱|$$



۲ ریشه دارد.

۳۰ گزینه ۱

به کمک رسم نمودار می‌توانیم به جواب سوال برسیم:



باتوجه‌به شکل اگر m پایین‌تر از $y = ۳$ باشد معادله جواب نخواهد داشت.

BOX 4 : معادلات گویا و رادیکالی (صفحه ۱۹ تا ۲۴ کتاب درسی)

با عبارت‌های گویا در سال قبل آشنا شده‌اید. در این قسمت معادلات گویا را حل می‌کنیم. هم‌چنین رش حل معادلات رادیکالی را خواهیم گفت.

الف) معادلات گویا

تعریف: کسرهایی را که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند.

مقدار یک عبارت گویا وقتی بامعنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، مقدار آن عبارت گویا تعریف نشده است.

حل معادلات گویای $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

برای حل این نوع معادلات طرفین وسطین می‌کنیم، معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن‌که مخرج هیچ‌یک از دو کسر را صفر نکند، قابل قبول است.

تمرین: معادلهٔ $\frac{۴x-۱}{x+۲}=\frac{x+۵}{۲x}$ را حل کنید.

پاسخ: $x=۰$ و $x=-۲$ ریشه‌های مخرج کسر هستند.

$$\frac{۴x-۱}{x+۲}=\frac{x+۵}{۲x} \Rightarrow ۲x(۴x-۱)=(x+۲)(x+۵) \Rightarrow ۸x^۲-۲x=x^۲+۵x+۲x+۱۰ \Rightarrow ۷x^۲-۹x-۱۰=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۹)^۲-۴(۷)(-۱۰)=۸۱+۲۸۰=۳۶۱=۱۹^۲ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۹\pm۱۹}{۱۴} \Rightarrow x=۲, x=-\frac{۵}{۷}$$

هیچ‌یک از جواب‌های به دست آمده، ریشهٔ مخرج نیستند، پس هر دو جواب قابل قبول است.

یادآوری: کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م):

مخرج مشترک بین دو یا چند کسر، همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است و برای محاسبهٔ ک.م.م مخرج کسرها، کافی است در صورت امکان مخرج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک را به دست آوریم.

نکته: برای حل معادلات گویا، دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم و عبارت جبری به دست‌آمده را حل می‌کنیم. از بین جواب‌های به دست آمده، آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکند.

تمرین: ۱) معادلهٔ $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^۲-۲x}=۱-\frac{۲}{x-۲}$ را حل کنید.

۲) اگر $x=۱$ جواب معادلهٔ $\frac{x+۲}{x-a}+\frac{۲x}{x+a}=-۱$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: ۱) ک.م.م مخرج کسرها برابر $x(x-۲)$ است. دو طرف معادله را در $x(x-۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$۵(x-۲)-۴=x(x-۲)-۲(x) \Rightarrow ۵x-۱۰-۴=x^۲-۲x-۲x \Rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰$$

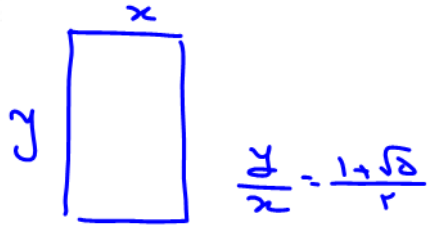
$$\Delta=b^۲-۴ac=۸۱-۵۶=۲۵>۰ \Rightarrow x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۹\pm۵}{۲} \Rightarrow x_۱=۲, x_۲=۷$$

چون $x=۲$ مخرج کسر معادله را صفر می‌کند، غیر قابل قبول است و لذا معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی $x=۷$ دارد.

۲) با قراردادن عدد ۱ به جای x در معادله و حل معادله برحسب a، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x+۲}{x-a}+\frac{۲x}{x+a}=-۱ \xrightarrow{x=۱} \frac{۱+۲}{۱-a}+\frac{۲(۱)}{۱+a}=-۱$$

مستطیل طلایی است. اگر $y=1$ باشد، آن‌گاه $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.



عدد طلایی: عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را عدد طلایی می‌گوییم.

ب) معادلات رادیکالی

تعریف: هر معادله‌ای را که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود داشته باشد، یک معادلهٔ‌رادیکالی می‌گوییم.

مثال: معادلات $x+\sqrt{x-1}=4$ و $2x+\sqrt[3]{x+2}=5$، معادلاتی رادیکالی هستند.

نکته: برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری به طرفین تساوی جابه‌جا کرد که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با توان‌رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.



تمرین: معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{x-2}-3=0$ ۲) $x+\sqrt{x+4}=2$

پاسخ:

۱) $\sqrt{x-2}-3=0 \Rightarrow \sqrt{x-2}=3 \xrightarrow{\text{به‌توان۲می‌رسانیم}} x-2=9 \Rightarrow x=9+2=11$

با قراردادن $x=11$ در معادلهٔ اولیه $(\sqrt{x-2}-3=0)$، مشاهده می‌کنیم که تساوی عددی به وجود می‌آید:

$\sqrt{11-2}-3=\sqrt{9}-3=3-3=0$

۲) $x+\sqrt{x+4}=2 \Rightarrow 2-x=\sqrt{x+4} \xrightarrow{\text{به‌توان۲می‌رسانیم}} (2-x)^2=x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=x+4$

$\Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$

$x=0$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند: $x+\sqrt{x+4}=2 \xrightarrow{x=0} 0+\sqrt{4}=2 \Rightarrow 2=2$

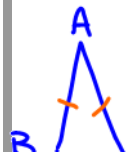
پس $x=0$ جواب معادله می‌باشد.

$x=5$ در معادلهٔ‌اولیه صدق نمی‌کند، پس $x=5$ جواب معادله نمی‌باشد:

$x+\sqrt{x+4}=2 \xrightarrow{x=5} x+\sqrt{5+4}=2 \Rightarrow 5+3\neq 2$

نکته: حتماً جواب‌هایی که در معادلهٔ رادیکالی به دست می‌آورید را در معادلهٔ اولیه قرار دهید و از آن‌جا جواب‌های صحیح را انتخاب کنید. ممکن است بعضی از جواب‌ها در معادلهٔ اولیه صدق نکند.

تمرین: مثلث متساوی‌الساقین ABC با رأس‌های $A(\alpha,-1)$، $B(2,1)$ و $C(1,-2)$ و قاعدهٔ BC مفروض است. α کدام است؟



پاسخ: مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$AB=AC \Rightarrow \sqrt{(2-\alpha)^2+(1+1)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-2+1)^2} \xrightarrow{\text{به‌توان۲می‌رسانیم}} (2-\alpha)^2+4=(1-\alpha)^2+1$

$\Rightarrow 4-4\alpha+\alpha^2+4=1-2\alpha+\alpha^2+1 \Rightarrow -4\alpha+2\alpha=2-8 \Rightarrow -2\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=3$

$$\xrightarrow{\times(1-a)(1+a)} (1-a)(1+a)\times\frac{3}{1-a}+(1-a)(1+a)\times\frac{2}{1+a}=-(1-a)(1+a)$$

$$\Rightarrow 3(1+a)+2(1-a)=-1+a^2 \Rightarrow 3+3a+2-2a=-1+a^2 \Rightarrow a+5=-1+a^2 \Rightarrow a^2-a-6=0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-2 \end{cases}$$

کاربرد معادلات گویا

چند سؤال از کاربرد معادلات گویا در کتاب درسی مطرح شده است. نحوهٔ نوشتن معادله‌ها تقریباً یکسان است. به دقت به مثال حل‌شده توجه کنید.

تمرین: دو نقاش A و B با هم در ۶ ساعت ساختمانی را رنگ‌آمیزی می‌کنند. اگر نقاش A بخواهد به تنهایی این ساختمان را رنگ‌آمیزی کند، ۵ ساعت زودتر از نقاش B این کار را انجام می‌دهد. نقاش B به تنهایی در چند ساعت این ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کند؟

پاسخ: فرض کنیم نقاش B در x ساعت، این ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{1}{x}$ ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کند. چون نقاش A، ۵ ساعت زودتر از نقاش B این کار را انجام می‌أهد، پس نقاش A در $x-5$ ساعت این ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کند و در نتیجه در یک ساعت، $\frac{1}{x-5}$ ساختمان توسط نقاش A رنگ‌آمیزی می‌شود. از آن‌جایی که دو نفری در ۶ ساعت این ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{1}{6}$ ساختمان رنگ‌آمیزی می‌شود، داریم:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6x(x-5)} 6x(x-5)\times\frac{1}{x}+6x(x-5)\times\frac{1}{x-5}=6x(x-5)\times\frac{1}{6} \Rightarrow 6(x-5)+6x=x(x-5)$$

$$\Rightarrow 6x-30+6x=x^2-5x \Rightarrow x^2-17x+30=0 \;,\; \Delta=(-17)^2-4(1)(30)=169$$

$$\xrightarrow{x>0} x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{17+\sqrt{169}}{2}=\frac{17+13}{2}=15$$

مستطیل طلایی:

مستطیلی را که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد، مستطیل طلایی می‌گوییم. می‌خواهیم نسبت طول به عرض را در مستطیل طلایی به دست آوریم. فرض کنیم طول مستطیل، x و عرض آن، y باشد. طبق فرض، داریم:

$$\frac{\text{مجموع طول و عرض}}{\text{طول}}=\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \Rightarrow \frac{x+y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x}+\frac{y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow 1+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\;(*) \longrightarrow 1+\frac{1}{A}=A$$

فرض کنیم $A=\frac{x}{y}$ باشد، در این صورت $\frac{y}{x}$، عکس $\frac{x}{y}$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} 1+\frac{1}{A}=A \xrightarrow{\times A} A+1=A^2 \Rightarrow A^2-A-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(-1)=5 \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ A=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

عدد $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ عددی منفی است، پس نمی‌تواند نسبت دو عدد مثبت باشد و در نتیجه غیر قابل قبول است. پس $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نسبت طول به عرض

پرسش‌های تشریحی

۱- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مجموعه جواب معادلهٔ $\sqrt{x+3}+1=0$ برابر تهی است. (شهریور ۱۴۰۲)

۲- معادله زیر را حل کنید. (خرداد ۹۶)

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\frac{1+x}{x}=\frac{x-1}{x-2}$$

۳- به ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{4-t}{2-2t}=\frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t=-3$ است؟ (دی ۹۵)

۴- مجموع یک عدد صحیح با معکوسش برابر با -2 می‌باشد. تشکیل معادله و حل آن، مقدار این عدد را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

۵- یک خط متروی بین شهری، ۷۵ کیلومتر طول دارد. اگر در مسیر برگشت، به سرعت قطار ۱۰ کیلومتر در ساعت افزوده شود، آن‌گاه زمان بازگشت ۱۵ دقیقه کم‌تر می‌شود. طول زمان رفت و برگشت این قطار را محاسبه کنید. (مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

۶- دو نفر با هم می‌توانند در ۴ ساعت، ساختمانی را رنگ‌آمیزی کنند. اگر سرعت کار یکی از آن‌ها ۴ برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام بدهند؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۷- علی و رضا ویرایش یک مجلهٔ ادبی را انجام می‌دهند. اگر رضا به تنهایی این کار را انجام دهد، ۶ ساعت و اگر دو نفر با هم انجام دهند، ۴ ساعت زمان نیاز است. علی به تنهایی در چند ساعت ویرایش مجله را انجام می‌دهد؟ (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۸- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ (خرداد ۱۴۰۲)

ب) $2x = \sqrt{4x-1}$ (شهریور ۱۴۰۲)

پ) $\sqrt{2-x} = x$ (خرداد ۱۴۰۲)

۹- بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی هستند؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $\sqrt{x}+1=0$

ب) $\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}=0$

پ) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+7=0$

ت) $\sqrt{x-4}-\sqrt{3-x}=4$

۱۰- با تشکیل یک معادله، عدد صحیحی پیدا کنید که مجموع آن با جذرش برابر ۲۰ باشد. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی)

۱۱- اگر $x=2$ یک جواب معادلهٔ $\frac{2x^2}{a+x}+\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$ باشد: (خرداد ۹۵)

آ) a را تعیین کنید.

ب) به ازای $a=2$ ریشه‌های این معادله را در صورت وجود به دست آورید.

۱۲- معادلهٔ $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

Homework (1)

۱ نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

۱) $۰/۳+\sqrt{۵}$
۲) $۰/۲(۱+\sqrt{۵})$
۳) $۰/۶+۰/۲\sqrt{۵}$
۴) $۰/۴(۱+\sqrt{۵})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ از تقسیم اندازهٔ قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ معادلهٔ $\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}-\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴ معادلهٔ $\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $۲y=x^۲$ و $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

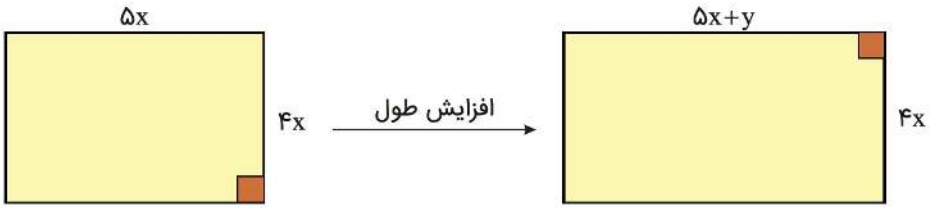
۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

عدد طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.



$$\frac{۵x+y}{۴x}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow ۵x+y=۲x(۱+\sqrt{۵})$$

پس طول مستطیل طلایی را می‌توان $۲x(۱+\sqrt{۵})$ در نظر گرفت:

$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{(۴x)(۲x(۱+\sqrt{۵}))}{(۴x)(۵x)}=\frac{۲(۱+\sqrt{۵})}{۵}=۰/۴(۱+\sqrt{۵})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

به $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ عدد طلایی می‌گوییم. در مستطیل به طول و عرض a و b، قطر برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

$$\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱+(\frac{b}{a})^۲=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}\Rightarrow(\frac{b}{a})^۲=\frac{۲+۲\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow(\frac{a}{b})^۲=\frac{۴}{۲+۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۱

در سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{۲\sqrt{۲-x}}{-x-۲}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$$

با طرفین وسطین داریم:

$$۱۰(۲-x)=(۲-x)(-x-۲)$$

$۲-x$ را خط می‌زنیم و جواب $x=۲$ حاصل می‌شود، اما چون ریشهٔ مخرج معادلهٔ اولیه است آن را نمی‌پذیریم.

$$-x-۲=۱۰\Rightarrow x=-۱۲$$

هیچ جواب مثبتی در کار نیست.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴ گزینه ۴

دامنهٔ معادله فقط $x=۲$ است، بنابراین جواب معادله یا $x=۲$ است و یا اینکه جواب حقیقی ندارد. $x=۲$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=۲\Rightarrow\sqrt{۴-۳}=\sqrt{۲+۰}-\sqrt{۲-۲}\Rightarrow ۱=\sqrt{۲}$$

پس $x=۲$ جواب معادله نیست و درنتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\Rightarrow x^{۲}=y+۳+y-۳-۲\sqrt{y^{۲}-۹}$$
$$\xrightarrow{۲y=x^{۲}}\sqrt{y^{۲}-۹}=۰\xrightarrow{y\geq ۳}y=۳\Rightarrow x=\sqrt{۶}$$

نقطهٔ تلاقی $A(\sqrt{۶},۳)$ است:

$$|AO|=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Homework (2)

۱ ژیلا به تنهایی کاری را در دو ساعت انجام می‌دهد. اگر مینا به او کمک کند این کار را در یک ساعت و بیست دقیقه انجام می‌دهد. مینا به تنهایی این کار را در چند دقیقه انجام خواهد داد؟

معادلات داده‌شده را حل کنید.

۲ $۲x - \sqrt{x} = ۶$

۳ $$\frac{۱}{x+۱} = \frac{۱-۲x}{x^۳+۱} + \frac{۲}{x^۲-x+۱}$$

درستی و نادرستی عبارات داده شده را مشخص نمایید.

۴ معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد به‌صورت $x^۲ + Sx - P = ۰$ است.

۵ مستطیل طلایی مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر نسبت طول به عرض آن است.

۶ معادلهٔ $\sqrt{x+۲} = ۴ - x$ را حل کنید.

۷ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$x + \sqrt{۲x+۱۰} = ۷$$

۸ معادلهٔ $\frac{x-۱}{x-۳} = \frac{x+۱}{x+۴} + \frac{۲x}{x-۳}$ را حل کنید.

۹ حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۴x + ۳ = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۵}$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۲

۳) -۶ ۴) -۴

۱۰ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{۲x+۱} = \sqrt{۳x+۴} - ۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴

۳) ۸ ۴) ۳

۱۱ اگر $x = a$ ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴$ باشد، حاصل $\frac{a+۱}{۲a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۳۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) ۱

۱۲ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x}{۲-x} + \frac{۲}{x} = \frac{-۳}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بدون ریشه

۱۳ بهروز یک مجلّه را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو باهم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳

۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۱۴ اگر $x = \alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{x+۲} + \sqrt{x+۱} = ۱$ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{\sqrt{x - x^۳ - ۵\alpha}} = \sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر

۳) -۱ ۴) ۲

۱۵ معادلهٔ $\sqrt{x^۳ - x} + \sqrt{x+۲} = ۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بدون ریشهٔ حقیقی

۱۶ دو برادر تکلیف درس ریاضی را باهم در ۲ ساعت انجام می‌دهند. اگر برادر بزرگ‌تر ۳ برابر برادر کوچک‌تر تکلیف ریاضی را انجام دهد، برادر بزرگ‌تر به تنهایی این تکلیف درس ریاضی را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۸

۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۷ اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱۲-x}{x^۲+x} = \frac{x}{x+۱} + \frac{A}{x}$ برابر با ۱ باشد، جواب دیگر کدام است؟

۱) ۷ ۲) -۷

۳) -۱ ۴) ریشهٔ دیگری ندارد.

۱۸ معادله $\sqrt{۳-x} + \sqrt{۱۶ + \sqrt{x-۳}} = ۴$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) بدون جواب

۱۹ اگر محیط یک مستطیل برابر ۱۶ واحد و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول مستطیل کدام است؟

۱) $۲(\sqrt{۵}+۱)$ ۲) $۴(\sqrt{۵}+۱)$

۳) $۴(\sqrt{۵}-۱)$ ۴) $۲(\sqrt{۵}-۱)$

۲۰ ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x-۲$ چگونه هستند؟

۱) فقط یک ریشهٔ منفی دارد. ۲) یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت دارد.

۳) فقط یک ریشهٔ مثبت دارد. ۴) معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲۱ اگر $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$ باشد، حاصل $\frac{۲a+۱}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۳۳}{۱۶}$

۲۲ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{x-۳}+\sqrt{۲x+۳}+۲=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بدون ریشه

۲۳ دو کارگر کاری را در ۴ روز تمام می‌کنند، اما اگر کارگر اول به تنهایی آن کار را انجام دهد، ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم (وقتی به تنهایی کار را انجام دهد) تمام می‌کند، کارگر اول در چند روز کار را تمام می‌کند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵

۳) ۱۰ ۴) ۵

۲۴ اگر $x=-۱$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x-A}{x-۳}=\frac{x+A}{x+۴}+\frac{۲x}{x-۳}$ باشد، ریشهٔ دیگر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۲۵ معادلهٔ $\frac{x+۱}{x}=\frac{x+۴}{x+۵}+\frac{۳x+۵}{x^۲+۵x}$ دارای چند ریشهٔ حقیقی است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) بدون ریشه ۴) ۳

پاسخ Homework (2)

۱

مینا در x دقیقه
ژیلا در ۱۲۰ دقیقه
: $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{۱}{۸۰}$

هر دو با هم در ۸۰ دقیقه $\xrightarrow{\times ۲۴۰x}$ $۲۴۰+۲x=۳x$

$\Rightarrow x=۲۴۰\ \min$

۲

$\sqrt{x}=۲x-۶ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=۴x^۲-۲۴x+۳۶=۰$

$۴x^۲-۲۵x+۳۶=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵-۴(۴)(۳۶)$

$=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۲۵\pm۷}{۸}$

$=\begin{cases}۴\\ \frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}\end{cases}$ غ.ق.ق (در معادله صدق نمی‌کند)

۳

$\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱-۲x}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}+\frac{۲}{x^۲-x+۱}$

$\xrightarrow{\times(x+۱)(x^۲-x+۱)} x^۲-x+۱=۱-۲x+۲(x+۱)$

$x^۲-x+۱=۱\cancel{-۲x}\cancel{+۲x}+۲ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=-۱ & \text{غ.ق.ق}\\ x=۲\end{cases}$

۴ نادرست. جواب درست $x^۲-Sx+P=۰$ می‌باشد.

۵ درست

۶

$\sqrt{x+۲}=۴-x \quad (۱)$

$x+۲=(۴-x)^۲ \Rightarrow x+۲=x^۲-۸x+۱۶$

$\Rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۷ \end{cases}$

$x=۷$ جواب معادله نیست زیرا در معادله صادق نیست. (غ.ق.ق $\sqrt{۹}=-۳$)

۷

$x+\sqrt{۲x+۱۰}=۷ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{۲x+۱۰}=۷-x$

$۲x+۱۰=۴۹-۱۴x+x^۲$

$x^۲-۱۶x+۳۹=۰ \quad \Rightarrow \quad (x-۳)(x-۱۳)=۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=۳ \\ x=۱۳ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$

۸

$(x-۳)(x+۴)\left(\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}\right)$

$۲x(x+۴)+(x+۱)(x-۳)=(x+۴)(x-۱)$

$\Rightarrow ۲x^۲+۸x+x^۲-۲x-۳=x^۲+۳x-۴$

$۲x^۲+۳x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \text{ ق ق} \\ x=\frac{-۱}{۲} \text{ ق ق} \end{cases}$

۹

گزینه ۴

$x^۲+۴x+۳=t : t=\sqrt{t+۲}$

$t^۲=t+۲ \Rightarrow t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۱ : -۱\neq\sqrt{-۱+۲} \text{ غ ق ق} \\ t=۲ : ۲=\sqrt{۲+۲} \text{ ق ق} \end{cases}$

$t=۲ : x^۲+۴x+۳=۲ \Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰$

ریشه‌ها : $\begin{cases} x_۱=-۲+\sqrt{۳} \\ x_۲=-۲-\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow x_۱+x_۲=-۴$

(یا می‌توان گفت: $S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=-۴$)

۱۰ گزینه ۱

$$\sqrt{۲x+۱}=\sqrt{۳x+۴}-۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲x+۱=۳x+۴+۱-۲\sqrt{۳x+۴}$$

$$۲\sqrt{۳x+۴}=x+۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴(۳x+۴)=x^۲+۸x+۱۶$$

$$x^۲-۴x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۴ \end{cases}$$

هر دو ریشه قابل‌قبول هستند.

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = ۰\times ۴=۰$$

۱۱ گزینه ۴

$$\sqrt{۳x+۱}=۴-\sqrt{x+۳}$$

به توان ۲ برسانید:

$$۳x+۱=۱۶-۸\sqrt{x+۳}+x+۳ \Rightarrow ۸\sqrt{x+۳}=۱۸-۲x$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{x+۳}=۹-x$$

به توان ۲ برسانید:

$$۱۶(x+۳)=۸۱-۱۸x+x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۸x-۱۶x+۸۱-۴۸=۰ \Rightarrow x^۲-۳۴x+۳۳=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \quad \text{ق.ق} \quad ✓ \\ x=۳۳ \quad \text{غ.ق.ق} \quad \times \end{cases}$$

$$a=۱:\frac{a+۱}{۲a}=\frac{۱+۱}{۲(۱)}=۱$$

۱۲ گزینه ۲

ک.م.م مخرج‌ها: $۲x(۲-x)$

$$۲x(۲-x)\times\left(\frac{x}{۲-x}+\frac{۲}{x}=\frac{-۳}{۲}\right) \Rightarrow ۲x^۲+۴(۲-x)=-۳x(۲-x)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۸-۴x=-۶x+۳x^۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰$$

$$(x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \quad \text{ق.ق} \\ x=-۲ \quad \text{ق.ق} \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد ریشه‌ها}=۲$$

۱۳ گزینه ۴

اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند x ساعت فرض شود، آنگاه زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کند $x+۹$ ساعت خواهد بود.

بهروز در یک ساعت $\frac{۱}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد و فرهاد در یک ساعت $\frac{۱}{x+۹}$ کل کار و هر دو باهم در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کل کار را انجام می‌دهند.

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۹}=\frac{۱}{۲۰} \xrightarrow{\times ۲۰x(x+۹)} ۲۰(x+۹)+۲۰x=x(x+۹)$$
$$\Rightarrow ۲۰x+۱۸۰+۲۰x=x^۲+۹x \Rightarrow x^۲-۳۱x-۱۸۰=۰$$
$$\Rightarrow (x-۳۶)(x+۵)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۳۶$$

۱۴ گزینه ۲

$$\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱}=۱ \Rightarrow \sqrt{x+۲}=۱-\sqrt{x+۱}$$

به توان ۲ برسانید:

$$x+۲=۱-۲\sqrt{x+۱}+x+۱ \Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=۰ \Rightarrow x+۱=۰$$
$$\Rightarrow x=-۱ \Rightarrow \alpha=-۱$$
$$\sqrt{\sqrt{x-x^۳}-۵\alpha}=\sqrt{۵} \xrightarrow{\alpha=-۱} \sqrt{\sqrt{x-x^۳}+۵}=\sqrt{۵}$$

به توان ۲ برسانید:

$$\sqrt{x-x^۳}+۵=۵ \Rightarrow \sqrt{x-x^۳}=۰$$
$$\Rightarrow x-x^۳=۰ \Rightarrow x(۱-x^۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۰ \\ x_۲=۱ \\ x_۳=-۱ \end{cases}$$
$$x_۱x_۲x_۳=(۰)(۱)(-۱)=۰$$

۱۵ گزینه ۴

توجه:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=۰\Rightarrow\begin{cases}A=۰\\B=۰\end{cases}\quad\text{جواب مشترک}$$

$$\sqrt{x^۳-x}+\sqrt{x+۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}\\x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

ریشهٔ مشترک وجود ندارد، پس معادله بدون ریشهٔ حقیقی است.

۱۶ گزینه ۴

$t_۱$: زمان انجام تکلیف برادر بزرگ‌تر

$t_۲$: زمان انجام تکلیف برادر کوچک‌تر

چون سرعت انجام تکلیف برادر بزرگ‌تر ۳ برابر سرعت انجام تکلیف برادر کوچک‌تر می‌باشد، پس:

$$t_۱=\frac{۱}{۳}t_۲\Rightarrow t_۲=۳t_۱$$

$$\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{۳t_۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۳+۱}{۳t_۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۳t_۱=۸\Rightarrow t_۱=\frac{۸}{۳}\ \text{ساعت}$$

۱۷ گزینه ۲

صدق ریشه در معادله:

$$x=۱:\frac{۱۲-۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۱+۱}+\frac{A}{۱}\Rightarrow\frac{۱۱}{۲}=\frac{۱}{۲}+A\Rightarrow A=۵$$

طرفین معادله را در $x(x+۱)$ ضرب نمایید:

$$\frac{۱۲-x}{x^۲+x}=\frac{x}{x+۱}+\frac{۵}{x}\Rightarrow ۱۲-x=x^۲+۵(x+۱)$$

$$\Rightarrow x^۲+۶x-۷=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\ \checkmark\ \text{ق.ق}\\x=-۷\ \checkmark\ \text{ق.ق}\end{cases}$$

۱۸ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۳-x}: ۳-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \\ \sqrt{x-۳}: x-۳ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۳\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D = \{۳\}$$

امتحان دامنه:

$$x = ۳ \Rightarrow ۰ + \sqrt{۱۶+۰} = ۴ \Rightarrow ۴ = ۴$$

معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹ گزینه ۳

اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم:

رابطه (ا):

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$$

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است:

$$۲(L+W) = ۱۶ \Rightarrow L+W = ۸ \Rightarrow W = ۸-L$$

بنا به رابطه (ا):

$$\frac{L}{۸-L} = \frac{۸}{L} \Rightarrow L^۲ = ۶۴ - ۸L \Rightarrow L^۲ + ۸L - ۶۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = ۴(\sqrt{۵}-۱) \\ L = -۴(\sqrt{۵}+۱) < ۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۲۰ گزینه ۳

$$\sqrt{۲x^۲ - ۵x + ۲} = x - ۲$$

به توان ۲ برسانید:

$$۲x^۲ - ۵x + ۲ = x^۲ - ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ (در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند) غ ق ق} \\ x = ۲ \text{ ق ق} \end{cases}$$

۲۱ گزینه ۳

$$\sqrt{۲x-۵}=\sqrt{x+۱}-۱$$

به توان ۲ برسانید:

$$۲x-۵=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=۷-x$$

به توان ۲ برسانید:

$$۴(x+۱)=۴۹-۱۴x+x^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۱۸x+۴۵=۰$$

بررسی جواب‌ها:

$$(x-۱۵)(x-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۱۵: \sqrt{۱۵+۱}-\sqrt{۳۰-۵}=۱\Rightarrow -۱\neq ۱ \text{ غ ق ق} \\ x=۳: \sqrt{۳+۱}-\sqrt{۶-۵}=۱\Rightarrow ۱=۱ \end{cases}$$

پس $a=۳$ می‌باشد:

$$\frac{۲a+۱}{a}=\frac{۲(۳)+۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

۲۲ گزینه ۴

$$\sqrt{x-۳}+\sqrt{۲x+۳}=-۲$$

سمت چپ معادله همواره مثبت و سمت راست آن همواره منفی است، پس بدون ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

۲۳ گزینه ۴

$$\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$t_۲=t_۱+۱۵: \frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۱+۱۵}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴t_۱(t_۱+۱۵)(\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۱+۱۵}=\frac{۱}{۴})$$

$$\Rightarrow ۴(t_۱+۱۵)+۴t_۱=t_۱(t_۱+۱۵)\Rightarrow ۴t_۱+۶۰+۴t_۱=t_۱^{۲}+۱۵t_۱\Rightarrow t_۱^{۲}+۷t_۱-۶۰=۰$$

$$\Rightarrow (t_۱+۱۲)(t_۱-۵)=۰\Rightarrow \begin{cases} t_۱=-۱۲ \text{ غ ق ق} \\ t_۱=۵ \text{ ق ق} \end{cases}$$

۲۴ گزینه ۲

صدق ریشه در معادله:

$$x=-۱: \frac{-۲}{-۱-۳}+\frac{-۱+A}{-۱+۴}=\frac{-۱-A}{-۱-۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{-۱+A}{۳}=\frac{۱+A}{۴} \Rightarrow A=۱$$

$$\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳} \Rightarrow ۲x(x+۴)+(x+۱)(x-۳)=(x-۱)(x+۴)$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۶x-۳=۳x-۴ \Rightarrow ۲x^{۲}+۳x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \text{ ق ق} \\ x=-\frac{۱}{۲} \text{ ق ق} \end{cases}$$

۲۵ گزینه ۳

ک.م.م مخرج‌ها: $x(x+۵)$

طرفین معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنید:

$$x(x+۴)+(۳x+۵)=(x+۱)(x+۵) \Rightarrow x^{۲}+۴x+۳x+۵=x^{۲}+۶x+۵$$

$$\Rightarrow ۷x+۵=۶x+۵ \Rightarrow x=۰$$ غ‌ق‌ق (چون ریشه مخرج است)

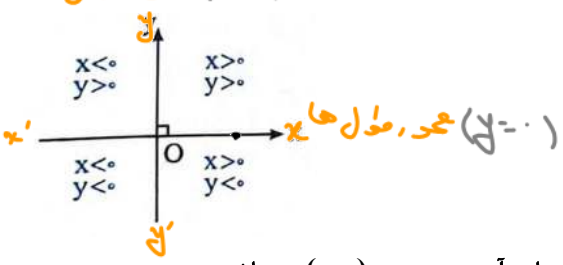
(فصل ۱ درس ۱ تجربی و درس ۵ حسابان)

BOX 5: بخش اول هندسه تحلیلی (معادلهٔ خط) (صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی)

با معادلهٔ خط، رسم خط، نوشتن معادلهٔ خط، دو خط متقاطع، دو خط موازی و دو خط عمود آشنایی دارید. در این بسته، مطالب را یادآوری می‌کنیم و مسائلی را حل می‌کنیم.

الف) معادلهٔ خط

برای تعیین یک نقطه از صفحه،از دستگاه محورهای مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور xها) و $y'Oy$ (محور yها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطهٔ A از صفحه، یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در نمودار مقابل مشخص شده است:



نکته: ۱) اگر نقطه‌ای روی محور xها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(x,0)$ می‌باشد.

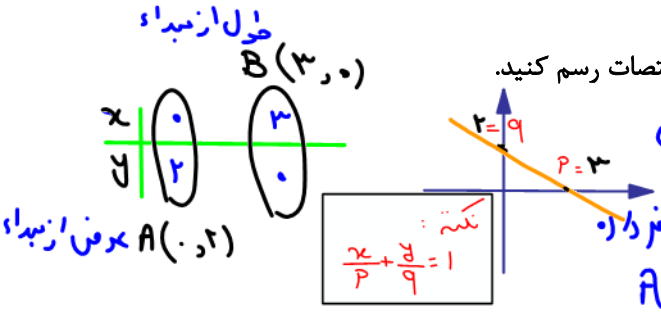
۲) اگر نقطه‌ای روی محور yها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(0,y)$ می‌باشد.

معادلهٔ خط: معادلهٔ یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $ax+by+c=0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی $a^2+b^2\neq 0$

ب) رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادلهٔیک خط و مشخص‌کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

تمرین: نمودار خط به معادلهٔ $2x+3y=6$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



شیب خط

شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطهٔ دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه روی یک خط باشند و $x_A\neq x_B$ باشد، آن‌گاه:

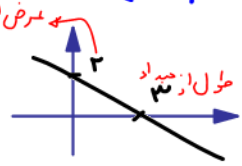
$$\text{شیب خط}=m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

مثال: شیب خط گذرنده از نقاط $A(1,-4)$ و $B(3,2)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-(-4)}{3-1}=\frac{6}{2}=3$$

نکته

اگر خطی محور xها را در $A(a,0)$ و محور yها را در $B(0,b)$ قطع کند، معادلهٔ آن $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ است. مثال:



$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \longrightarrow 2x+3y=6$ (طرفین ضرب در ۶)

محاسبهٔ شیب خط با داشتن معادلهٔ خط

۱) اگر معادلهٔ خط به صورت $ax+by+c=0$ (یا $ax+by=c$) باشد و $b\neq 0$، آن‌گاه:

$$\text{شیب خط}=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{a}{b}$$

مثال: شیب خط به معادلهٔ $2x+3y=1$ برابر $-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{2}{3}$ است.

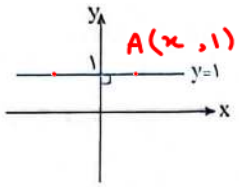
$2x+3y=1 \longrightarrow 3y=-2x+1 \longrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ (شیب یا ضریب x دیده = m)

۲) اگر معادلهٔ خط به صورت $y=mx+h$ باشد، آن‌گاه شیب خط برابر m (ضریب x) است.

مثال: شیب خط به معادلهٔ $y=-\frac{1}{2}x+3$ برابر $m=-\frac{1}{2}$ است. یا تب حط $\sqrt{3}$ برابر $y=\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}$ است $m=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

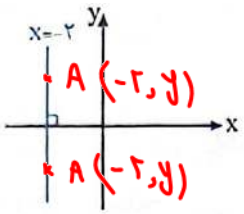
نکته:

۱) اگر خط L موازی محور xها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطهٔ (a,b) بگذرد، معادلهٔ آن به صورت $y=b$ است. به عنوان مثال، خط $y=1$ موازی محور xها است و شیب آن برابر صفر است.



معادلهٔ محور xها به صورت $y=0$ است

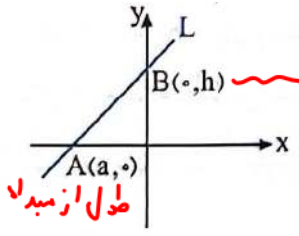
۲) اگر خط L موازی محور yها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی‌شود و اگر خط از نقطهٔ (a,b) بگذرد، معادلهٔ آن به صورت $x=a$ است. به عنوان مثال، خط $x=-2$ موازی محور yها است و این خط شیب ندارد.



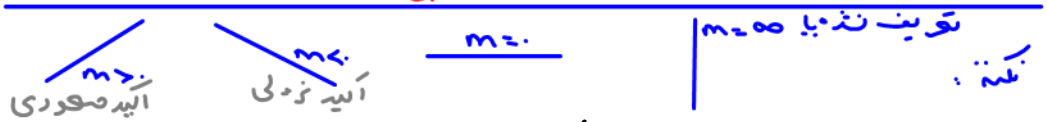
معادلهٔ محور yها به صورت $x=0$ است

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست

با توجه به شکل مقابل، خط L محور xها را در نقطهٔ $A(a,0)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می‌گوییم. هم‌چنین خط L محور yها را در نقطهٔ $B(0,h)$ قطع کرده است. h را عرض از مبدأ خط L می‌گوییم.



معادلهٔ خط: $\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$ (طبق نکته بالای صفحه)



نکته: معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y=mx+h$ می‌باشد.

حالا می‌خواهیم معادلهٔ خط را بنویسیم. در دو حالت می‌توانیم معادلهٔ خط را بنویسیم و باید در تمام مسائل نوشتن معادلهٔ خط، شرایط یکی از این دو حالت را در نظر بگیریم.

پ) نوشتن معادلهٔ خط

حالت اول: اگر شیب خط و نقطه‌ای از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ بگذرد، آن‌گاه معادلهٔ خط از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $y-y_1=m(x-x_1)$

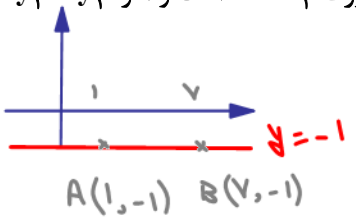
تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-۱,۳)$ بگذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.

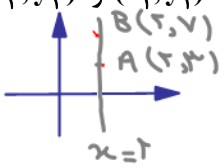
حالت دوم: اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ بگذرد، آن‌گاه شیب خط از رابطهٔ $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ به دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادلهٔ خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطهٔ مقابل استفاده کرد:

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)\quad ,\quad x_۲\neq x_۱$$

تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $(۲,-۵)$ و $(-۲,۷)$ بگذرد.

نکته: اگر $x_۱=x_۲$، آن‌گاه معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ به صورت $x=x_۱$ است و اگر $y_۱=y_۲$، آن‌گاه معادلهٔ خط به صورت $y=y_۱$ می‌باشد.





ت) وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازی‌اند و یا متقاطع.

حالت اول: دو خط موازی

اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی‌اند.

نکته: اگر دو خط با هم موازی باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و برعکس.

تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۳,-۴)$ بگذرد و موازی خط $۵x-۳y=۱$ باشد.

حالت دوم: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، دو خط متقاطع‌اند. در واقع اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ معادلهٔ دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}ax+by+c=۰\\a'x+b'y+c'=۰\end{cases}$، محل تلاقی دو خط به دست می‌آید.

تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات $x+۲y=-۵$ و $۲x-y=۰$ و نقطهٔ $(۳,۵)$ می‌گذرد.

دو خط عمود بر هم

یکی از حالت‌های متقاطع بودن دو خط، عمود بودن آن است. با توجه به ویژگی مهم آن، سؤالات خوبی مطرح می‌شود.

نکته: اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm'=-۱$، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینهٔ هم می‌باشند.

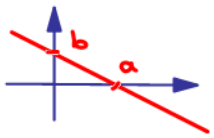
تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد و بر خط به معادلهٔ $y=-۲x+۳$ عمود باشد.

پرسش‌های تشریحی:

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- از هر دو نقطهٔ متمایز ..... یک خط عبور می‌کند.

۲- اگر خط L، محور xها را در نقطهٔ با طول a قطع کند، آن‌گاه a ، ..... خط L نامیده می‌شود و اگر خط L، محور yها را در نقطهٔ با عرض b قطع کند، آن‌گاه b، ..... خط L نامیده می‌شود.



۳- معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۰,۷)$ و شیب ۲− برابر ..... است.

۴- دو خط موازی دارای ..... برابر هستند.

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۵- شیب خط $2x+5y=11$ برابر $-\frac{2}{5}$ است.

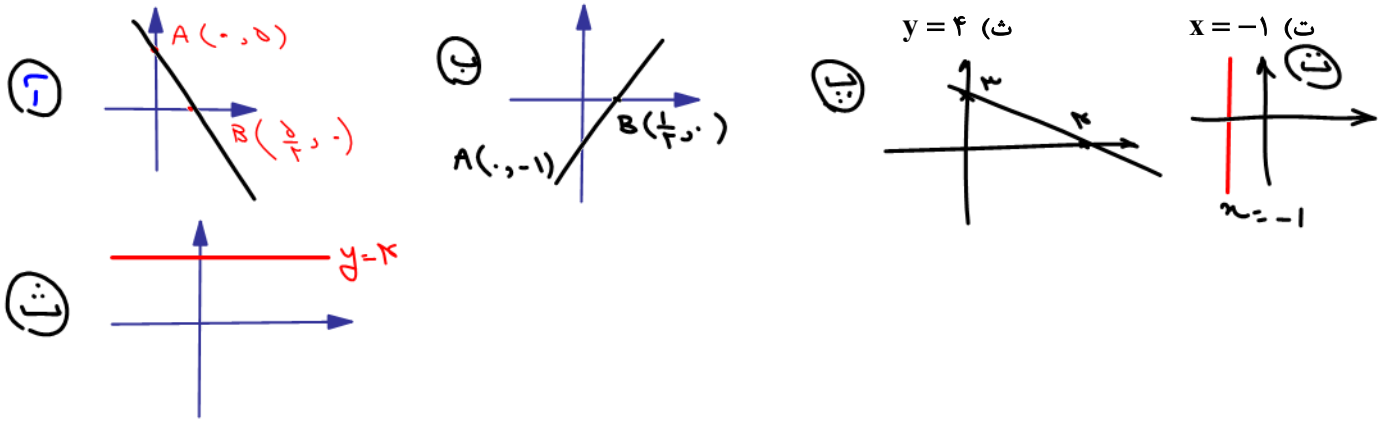
۶- شیب هر خط موازی با محور xها برابر یک است.

۷- دو خط $x+2y=1$ و $y=2x+3$ بر هم عمود هستند. (شهریور ۱۴۰۲)

۸- نمودار هر یک از خط‌های زیر را رسم کنید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲ کتاب درسی)

آ) $y=-2x+5$ ب) $2x-y=1$ پ) $3x+4y=12$

ت) $x=-1$ ث) $y=4$



۹- در هر یک از قسمت‌های زیر، معادلهٔ خط را بنویسید.

آ) خط از نقطهٔ $(۳,۰)$ بگذرد و با خط $5x+3y=2$ موازی باشد. (مشابه کار در کلاس ۶ صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

ب) خط از نقطهٔ $(۴,۲)$ بگذرد و عمود بر خط به معادلهٔ $3x+2y=4$ باشد.

۱۰- معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۳,۲)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۱,۶)$ را بنویسید.

ادامه حل ۱۰ : با شیب $\frac{1}{2}$ و نقطه $(3,2)$ معادله خط :

$y = mx + h = \frac{1}{2}x + h$

$2 = \frac{1}{2}(3) + h \rightsquigarrow h = \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$2y = x + 1$ ← فرم دوم

۱۱- معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(-2,3)$ و نقطهٔ تلاقی دو خط به معادلات $4x - y = 1$ و $x + 2y = 7$ را بنویسید.

دو خط را قطع می دهیم $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ (+)

$9x = 9 \rightsquigarrow x = 1 \rightsquigarrow 4x - y = 1 \rightsquigarrow y = 3 \rightsquigarrow A(1,3)$

$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

$y - 3 = -\frac{5}{3}(x - 1)$ جواب

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

۱۲- دو خط به معادلات $3x + (2m+1)y = 4$ و $mx + 7y = 11$ داده شده است.

آ) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند. شیب‌ها برابر

ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند. شیب‌ها قرینه و عکس

$ax + by = c$

$3x + (2m+1)y = 4$

$m_1 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = \frac{-3}{2m+1}$

$mx + 7y = 11$

$m_2 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{m}{7}$

ب) $\frac{-3}{2m+1} = \frac{7}{m} \rightarrow 7(2m+1) = -3m$

$14m + 7 = -3m \rightarrow m = -\frac{7}{17}$ جواب ب

$\frac{-3}{2m+1} = -\frac{m}{7} \rightsquigarrow 21 = m(2m+1) \rightarrow 21 = 2m^2 + m \rightarrow 2m^2 + m - 21 = 0$ حل درجه ۲

$\Delta = 169$

$m = 3, -\frac{7}{2}$: آ) جواب ب

۱۳- مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط به معادلات $2x + (-m+4)y = 3$ و $(5+3m)x + (m^2+4)y = 7$ با هم موازی باشند.

شیب ها برابر

شیب $= -\frac{(5+3m)}{m^2+4}$ ، شیب $= \frac{-2}{-m+4}$

$-\frac{(5+3m)}{m^2+4} = \frac{-2}{-m+4} \rightarrow (5+3m)(-m+4) = 2(m^2+4) \rightarrow 5m^2 - 7m - 12 = 0$

$\begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -\frac{c}{a} = \frac{12}{5} \end{cases}$

آگر $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $a+c=b$

$a + c = b$

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$

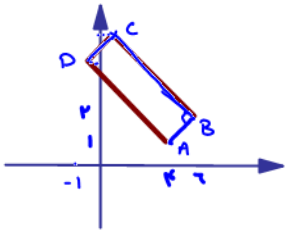
(مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

۱۴- مربع ABCD که $A(4,1)$ و $B(6,2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

آ) شیب ضلع AB را بیابید و معادلهٔ آن را بنویسید.

ب) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

پ) اگر $D(-1,11)$ یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.



$m_{AB} = \frac{1}{2}$

آ) ضلع AB : $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$

$m_{BC} = -2$

ب) ضلع BC : $y - 2 = -2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14$

$m_{AB} = m_{DC} = \frac{1}{2}$ ضلع DC با AB موازی است پس شیب آن‌ها برابر است

پ) ضلع DC : $y - 11 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 11$

$\begin{cases} y = -2x + 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{23}{2} \end{cases}$

$+\begin{cases} -y = 2x - 14 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{23}{2} \end{cases}$

$0 = \frac{5}{2}x + \frac{23}{2} - 14 \rightarrow x = 1 \rightsquigarrow y = -2x + 14 \rightarrow y = 12$

می بینم نقطه C نقطه برخورد ۲ ضلع BC و DC هست :

$C(1,12)$

۱۵- مقدار a را طوری به دست آورید که نقاط $(3,1)$، $(5,-3)$ و $(-1,2a)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند!

برای استقامت باشند

سوال داره میگه این سه نقطه روی یک خط هستند.

کافی است با داشتن دو تا از آن نقاط خط را پیدا کنیم و سپس مختصات C را در آن بگذاریم :

$A(3,1)$, $B(5,-3)$ معادله خط عبوری از A و B را بنویسیم و سپس مختصات $C(a,2a-1)$

$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \rightsquigarrow y - 1 = \left(\frac{-3-1}{5-3} = \frac{-4}{2} = -2\right)(x - 3) \rightsquigarrow y = -2x + 7$

$2a - 1 = -2a + 7$

$4a = 8$

$a = 2$

ابتدا ۲ خط معلوم را قطع دهیم و نقطه تقاطع را در خط متغیر دار (m دار) گذاریم.

۱۶- مقدار m را طوری به دست آورید که سه خط به معادله‌های $x+3y=-1$، $3x-2y=8$ و $(m+1)x+my=7$ از یک نقطه بگذرند.

$\begin{cases} x+3y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} -3x-9y=3 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$ (+)

$-11y=11 \rightarrow y=-1$

$x+3y=-1 \rightarrow x=2 \rightarrow A(2,-1)$

نقطه برخورد ۲ تا از خط‌ها

این نقطه A باید در خط بعدی صدق کند:

$(m+1)2+(-1)m=7$

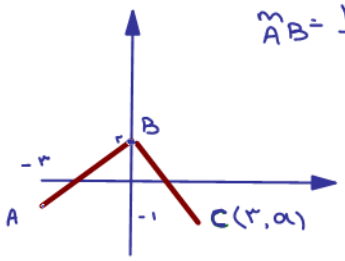
$2m+2-m=7 \rightarrow m=5$

۱۷- مربع ABCD که $A(-3,-1)$ و $B(0,2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

آ) معادلهٔ ضلع AB را بنویسید.

$m_{AB}=\frac{2-(-1)}{0-(-3)}=\frac{3}{3}=1$ $\quad y+1=1(x+3)$ $\quad y=x+2$

ب) اگر $C(3,a)$ و $D(0,2a-2)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس‌های C و D را بیابید.



ضلع BC بر AB عمود است پس آن عکس و قرینه m_{AB} است $\rightarrow m_{BC}=-1$

معادله ضلع BC را می‌یابیم:

$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)$

$y-2=-1(x-0) \rightarrow y=-x+2$ $\quad C(3,a)\in y=-x+2$

$a=-3+2 \rightarrow a=-1$

$C(3,-1)$

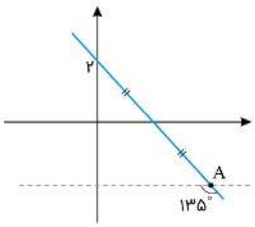
$D(0,2a-2) \xrightarrow{a=-1} D(0,-4)$

۱ نقاط $A(۲,۰)$ و $C(۰,-۱)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

۱) $(۰,\frac{۳}{۲})$
۲) $(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲})$
۳) $(\frac{۳}{۴},-\frac{۵}{۴})$
۴) $(\frac{۵}{۴},\frac{۱}{۴})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۳\sqrt{۶}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۵\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ نقطه $(-۶,۳)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x-۳y=۴$ و $x+۴y=-۳$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر با اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$
۲) $\frac{۱۹}{\sqrt{۱۰}}$
۳) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ نقاط $A(-۱,۴)$، $B(۳,۱)$، $C(x,y)$ و $D(-۱-x,y+۳)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ نقاط $A(x,y)$، $B(-۱-x,y-۳)$، $C(۰,-۳)$ و $D(-۴,۰)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵/۵
۳) ۱۵
۴) ۱۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ نقطهٔ $(۴/۵\ ,\ ۲)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $۴x+y=۳$ و $x-۴y=۵$ هستند. بیشترین فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$
۳) $۲\sqrt{۱۷}$
۴) $\sqrt{۱۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادلهٔ $y-ax=۱$ و $ay-x=a-۱$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطهٔ $(۱,۲)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۳/۵
۳) $\sqrt{۴۶}$
۴) $۲\sqrt{۳۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۴,-۲)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطهٔ D در ربع سوم، کدام است؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۹ نمودارهای دو تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$ و $۳y+x=۱۷$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۴\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ نقاط B، C و $M\ (۳,۲)$ روی خط $x+۲y=۷$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ میانهٔ AM برابر $۵\sqrt{۵}$ واحد و BC قاعدهٔ مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A، کدام است؟

۱) ۵
۲) -۲
۳) -۵
۴) -۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + ۲x = ۱۶$، $۲y - x = ۲$ و $y = ۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵

۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ فاصلهٔ نقطهٔ A روی خط $x + y = a$ از دو نقطهٔ $B(-۳, ۲)$ و $C(-۱, ۴)$ به‌ترتیب برابر $\sqrt{۲۹}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۳ شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲, ۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم، که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳, -۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸

۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB : y + ۲x = ۷$، $AC : ۴y - ۳x = ۱۷$ و $BC : ۲y - ۷x = -۱۹$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟

۱) ۴/۴ ۲) ۳

۳) ۲/۵ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(۱, ۹)$، $B(۳, ۳)$ و $C(۷, ۱۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۱۰}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ مثلثی با رأس‌های $A(۱, ۵)$، $B(۷, ۳)$ و $C(۲, -۲)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۷ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $۲y = x^۲$ و $x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۸ نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x - y = ۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با ارتفاع AH را روی خط $۳x - y = ۵$ می‌سازیم، به‌طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (با تغییر)

۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲}, \frac{-۱}{۲})$

۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۶})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹ سهمی $y = -x^۲ + ۲x + ۱$ خط راست گذرا از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ نمودارهای دو تابع $y = |x-۲| + |x+۱|$ و $y = x + ۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) ۱۲

۳) ۱۳ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ و $y = \frac{۱}{۲}x + ۲$، کدام است؟

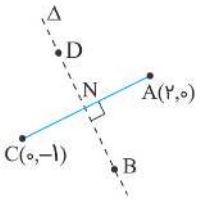
۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲



معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AC را می نویسیم.

$$N = \frac{A+C}{۲} = (۱, -\frac{۱}{۲})$$

$$m_{AC} = \frac{۰+۱}{۲-۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta : y + \frac{۱}{۲} = -۲(x-۱)$$

$$\Rightarrow \Delta : y = \frac{۳}{۲} - ۲x$$

رئوس B و D از مربع موردنظر روی خط Δ قرار دارد. بنابراین B را به‌صورت $B(x, \frac{۳}{۲} - ۲x)$ در نظر می‌گیریم.

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB}.m_{BC} = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۲} - ۲x}{x-۲} \times \frac{\frac{۵}{۲} - ۲x}{x-۰} = -۱ \Rightarrow (۲x - \frac{۳}{۲})(۲x - \frac{۵}{۲}) = ۲x - x^۲$$

$$\Rightarrow (۲x)^۲ - ۴(۲x) + \frac{۱۵}{۴} = ۲x - x^۲$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ - ۱۰x + \frac{۱۵}{۴} = ۰ \xrightarrow{\div ۵} x^۲ - ۲x + \frac{۳}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۱ - \frac{۳}{۴}} = ۱ \pm \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲} \\ x_۲ = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

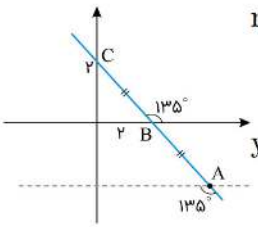
باتوجه‌به گزینه‌ها طول نقطه مطلوب $\frac{۳}{۲}$ است.

$$x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} - ۳ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow B(\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲})$$

۲ گزینه ۱

در شکل مشخص است که خط از نقطه $\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}$ گذشته و شیب آن برابر است با $m = \tan ۱۳۵^\circ = -۱$

پس معادله خط عبارتست از:



$$y = -x + ۲$$

نقطه B نقطه‌ای به مختصات زیر است:

$$y = ۰ \Rightarrow -x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow B \begin{vmatrix}۲\\۰\end{vmatrix}$$

چون B وسط A و C است پس:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{x_A + ۰}{۲} \Rightarrow x_A = ۴$$
$$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{۲ + y_A}{۲} \Rightarrow y_A = -۲$$

بنابراین طول OA عبارتند از:

$$OA = \sqrt{(۴ - ۰)^۲ + (-۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۱

نقطهٔ $B(-۶, ۳)$ روی هیچ‌کدام از خطوط قرار ندارد. محل تقاطع دو خط $\ell_۱ : x - ۳y = ۴$ و $\ell_۲ = x + ۴y = -۳$ را به دست می‌آوریم:

$$\ell_۱ : x - ۳y = ۴ \Rightarrow y_۱ = \frac{x - ۴}{۳}$$
$$\ell_۲ = x + ۴y = -۳ \Rightarrow y_۲ = \frac{-x - ۳}{۴}$$
$$\xrightarrow{\text{تقاطع}} \frac{x - ۴}{۳} = \frac{-x - ۳}{۴} \Rightarrow x = +۱\ ,\ y = -۱$$

پس $A(۱, -۱)$ رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است. نقطهٔ وسط AB که قطر متوازی‌الاضلاع است را به دست می‌آوریم:

$$\text{AB نقطهٔ وسط } O : O = (\frac{۱ - ۶}{۲}, \frac{۳ - ۱}{۲}) = (-\frac{۵}{۲}, +۱)$$

فاصلهٔ O از دو خط را به دست می‌آوریم:

$$OH_۱ = \frac{|-\frac{۵}{۲} - ۳ - ۴|}{\sqrt{۱ + ۹}} = \frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$$
$$OH_۲ = \frac{|-\frac{۵}{۲} + ۴ + ۳|}{\sqrt{۱ + ۱۶}} = \frac{۹}{۲\sqrt{۱۷}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

$$AB||CD : \frac{۴ - ۱}{-۱ - ۳} = \frac{y - y - ۳}{x + ۱ + x} = \frac{-۳}{۲x + ۱} \Rightarrow -\frac{۳}{۴} = \frac{-۳}{۲x + ۱}$$
$$\Rightarrow ۲x + ۱ = ۴ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$
$$AB \perp BC : \frac{-۳}{۴} \times \frac{y - ۱}{\frac{۳}{۲} - ۳} = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(y - ۱) = -۱ \Rightarrow y = -۱$$
$$C(\frac{۳}{۲}, -۱) \Rightarrow |AB| = ۵\ ,\ |BC| = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \text{محیط} = ۲(|AB| + |BC|) = ۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

$$AB||CD : m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{y - y + ۳}{x + ۱ + x} = \frac{۰ + ۳}{-۴ - ۰}$$

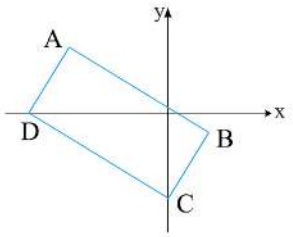
$$\Rightarrow ۲x + ۱ = -۴ \Rightarrow x = -\frac{۵}{۲}$$

$$AD \perp DC : m_{AD} \times m_{DC} = -۱ \Rightarrow \frac{y}{x + ۴} \times (-\frac{۳}{۴}) = -۱ \Rightarrow y = ۲$$

$$x = -\frac{۵}{۲}, y = ۲ \Rightarrow A(-\frac{۵}{۲}, ۲)\ ,\ B(\frac{۳}{۲}, -۱)$$

$$AB = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵\ ,\ BC = \sqrt{۲^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{۵}{۲}$$

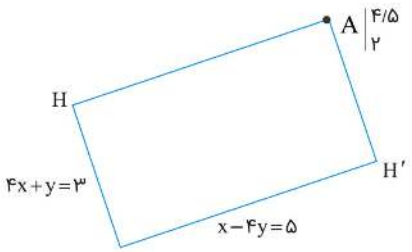
$$\text{مساحت مستطیل} = (AB)(BC) = (۵)(\frac{۵}{۲}) = ۱۲/۵$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ گزینه ۱

خطوط داده‌شده بر هم عمودند و نقطهٔ داده‌شده روی هیچ کدام از خطوط صدق نمی‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از دو خط را محاسبه می‌کنیم:



$$AH = \frac{|۱۸ + ۲ - ۳|}{\sqrt{۱۶ + ۱}} = \frac{۱۷}{\sqrt{۱۷}} = \sqrt{۱۷}$$

$$AH' = \frac{|۴/۵ - ۸ - ۵|}{\sqrt{۱۷}} = \frac{۸/۵}{\sqrt{۱۷}} = \frac{۱۷ \times \sqrt{۱۷}}{۲ \times ۱۷} = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع مستطیل برابر نصف اضلاع آن می‌باشد، بنابراین فاصله‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ درنتیجه بیشترین آن‌ها $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ می‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۲

نکته: فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$y-ax=۱\Rightarrow y=ax+۱$$

$$ay-x=a-۱\Rightarrow y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}+۱$$

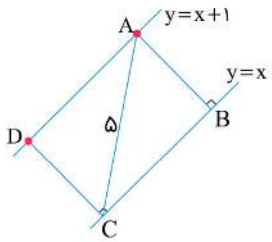
دو ضلع مقابل مستطیل موازی‌اند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$\frac{۱}{a}=a\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=\pm ۱$$

$$a=۱\Rightarrow\begin{cases}y=x+۱\\y=x\end{cases}$$

$$a=-۱\Rightarrow\begin{cases}y=-x+۱\\y=-x+۲\end{cases}$$

$a=-۱$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $A(۱,۲)$ در هیچ کدام از دو ضلع مقابل صدق نمی‌کند. فاصلهٔ دو خط موازی $y=x+۱$ و $y=x$ برابر عرض مستطیل است.



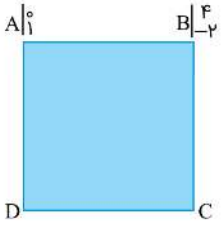
$$|AB|=\frac{|۱-۰|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ ,\ |BC|=\sqrt{۲۵-\frac{۱}{۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۲}}$$

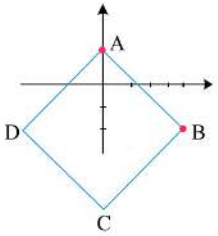
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۷}{\sqrt{۲}}=۳/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۳

$$m_{AB} = \frac{-۲-۱}{۴-۰} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow m_{AD} = \frac{۴}{۳}$$





$$AD \text{ معادله } : y - ۱ = \frac{۴}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x + ۱$$

فرض کنید مختصات نقطهٔ D به صورت (x, y) باشد، پس:

$$AD = ۵ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{*} x^۲ + \frac{۱۶}{۹}x^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۹}x^۲ = ۲۵ \Rightarrow x = \pm ۳$$

پس مختصات طول نقطهٔ D در ربع سوم ۳- است.

توجه: به روش زیر هم می‌توان مختصات نقطهٔ D را به دست آورد:

اگر $x_D = -۳$ باشد، پس: $y_D = -۳$

$$AD = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

که درست است.

۹ گزینه ۱

$$y=\begin{cases}۲x+۱ & ;x\geq ۱\\ ۳ & ;-۲\leq x<۱\\ -۲x-۱ & ;x<-۲\end{cases},\quad ۳y+x=۱۷\Rightarrow y=\frac{-x}{۳}+\frac{۱۷}{۳}$$

$$۲x+۱=\frac{-x}{۳}+\frac{۱۷}{۳}\Rightarrow\frac{۷}{۳}x=\frac{۱۴}{۳}\Rightarrow x=۲\xrightarrow[\text{برخورد}]{\text{نقطه}}(۲,۵)$$

$$-۲x-۱=\frac{-x}{۳}+\frac{۱۷}{۳}\Rightarrow\frac{۵x}{۳}=\frac{-۲۰}{۳}\Rightarrow x=-۴\xrightarrow[\text{برخورد}]{\text{نقطه}}(-۴,۷)$$

فاصلهٔ این دو نقطه را می‌یابیم:

$$|AB|=\sqrt{(۲-(-۴))^۲+(۵-۷)^۲}=\sqrt{۳۶+۴}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

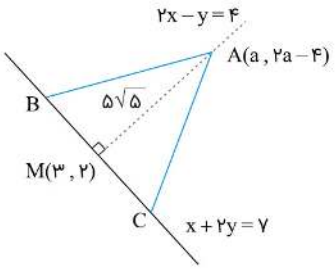
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۲

معادلهٔ خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM}=\frac{-۱}{m_{BC}}=۲$$

$$AM:y-۲=۲(x-۳)\Rightarrow y=۲x-۴$$



$$|AM|=۵\sqrt{۵}\Rightarrow AM^۲=۱۲۵$$

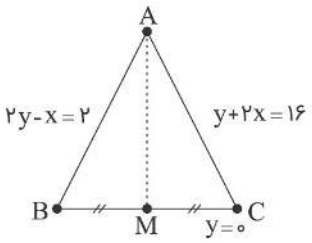
$$(a-۳)^۲+(۲a-۶)^۲=۱۲۵\Rightarrow ۵(a-۳)^۲=۱۲۵$$

$$(a-۳)^۲=۲۵\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\ a=-۲\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۲

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ M را به دست آوریم:

از تقاطع دو خط $y+۲x=۱۶$ و $۲y-x=۲$ مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید.

$$۲\times\begin{cases}۲y-x=۲\\ y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴y-۲x=۴\\ y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow y=۴\ ,\ \ x=۶\Rightarrow A(۶,۴)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$۲y-x=۲\xrightarrow{y=۰}x=-۲\Rightarrow B(-۲,۰)$$

$$y+۲x=۱۶\xrightarrow{y=۰}x=۸\ \ \Rightarrow C\,(۸\,,\,۰)$$

سپس مختصات نقطهٔ M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}\right)\Rightarrow M\,(۳,۰)$$

اکنون فاصلهٔ دو نقطهٔ M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM=\sqrt{(۳-۶)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ گزینه ۱

چون نقطهٔ A روی خط $x+y=a$ قرار دارد پس مختصات آن به‌صورت $A(x, a-x)$ است:

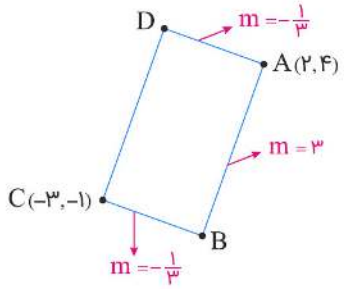
$$AB=\sqrt{۲۹} : AB=\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۲)^۲}=\sqrt{۲۹}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x^۲+y^۲+۶x-۴y=۱۶ \quad (۱)$$
$$AC=۵ : AC=\sqrt{(x+۱)^۲+(y-۴)^۲}=۵$$
$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x^۲+y^۲+۲x-۸y=۸ \quad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲) از هم کم می‌کنیم : $۴x+۴y=۸$

$$\Rightarrow x+y=۲ \xrightarrow{y=a-x} a=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۳



نقطهٔ B روی خط $y-۴=۳(x-۲)$ قرار دارد: $B(a, ۳a-۲)$

از طرفی شیب BC برابر $-\frac{۱}{۳}$ است:

$$\frac{۳a-۲+۱}{a+۳}=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹a-۳=-a-۳ \Rightarrow a=۰$$
$$B(۰,-۲)$$
$$AB=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}$$
$$BC=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

محیط : $۲\sqrt{۴۰}+۲\sqrt{۱۰}=۶\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۱

$$\begin{cases} AB: y + ۲x = ۷ \\ BC: ۲y - ۷x = -۱۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y + ۴x = ۱۴ \\ ۲y - ۷x = -۱۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x = ۳ , y = ۱$$

$$\Rightarrow B(۳, ۱)$$

$$BH = AC \text{ از } B \text{ فاصلهٔ} = \frac{|۴(۱) - ۳(۳) - ۱۷|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۲۲}{۵} = ۴/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۳

خط گذرنده از C و B را می‌یابیم:

$$B(۳, ۳) , C(۷, ۱۱)$$

$$m = \frac{۱۱ - ۳}{۷ - ۳} = ۲$$

$$y = ۲x - ۳ \Rightarrow y - ۲x + ۳ = ۰$$

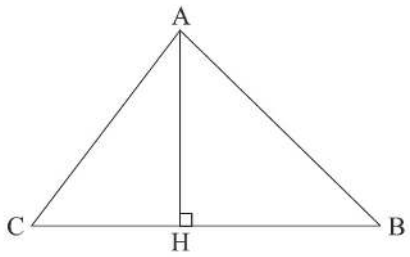
فاصلهٔ A تا این خط را می‌یابیم:

$$AH = \frac{|۹ - ۲ + ۳|}{\sqrt{(-۲)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۴

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصلهٔ رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادلهٔ خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(۷,۳), C(۲,-۲) \Rightarrow m = \frac{۳+۲}{۷-۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$$
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۲ = x - ۲ \Rightarrow x - y - ۴ = ۰$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۵)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۵ - ۴|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۴

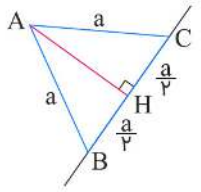
$$x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳} \Rightarrow x^۲ = y + ۳ + y - ۳ - ۲\sqrt{y^۲ - ۹}$$
$$\xrightarrow{۲y = x^۲} \sqrt{y^۲ - ۹} = ۰ \xrightarrow{y \geq ۳} y = ۳ \Rightarrow x = \sqrt{۶}$$

نقطهٔ تلاقی $A(\sqrt{۶}, ۳)$ است:

$$|AO| = \sqrt{۶ + ۹} = \sqrt{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۸ گزینه ۲



$$\text{محیط} = ۳a = \sqrt{۲۷۰} = ۳\sqrt{۳۰} \Rightarrow a = \sqrt{۳۰}$$

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۳۰} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$AH : y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{-x}{۳} + \frac{۵}{۳}$$

$$A(b, -\frac{b}{۳} + \frac{۵}{۳}) \quad , \quad H(۲, ۱)$$

$$|AH| = \sqrt{(b-۲)^۲ + (\frac{۲}{۳} - \frac{b}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۱۰}{۹}}|b-۲| = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow |b-۲| = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b-۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow b = \frac{۱۳}{۲} \\ b-۲ = -\frac{۹}{۲} \Rightarrow b = \frac{-۵}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\frac{۱۳}{۲} , \frac{-۱}{۲}) \quad , \quad A(\frac{-۵}{۲} , \frac{۵}{۶})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹ گزینه ۴

معادلهٔ خط موردنظر $y = x - ۱$ است، این خط را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$-x^۲ + ۲x + ۱ = x - ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

پس نقاط برخورد $A(-۱, -۲)$ و $B(۲, ۱)$ است، وسط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{A+B}{۲} = (\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲})$$

راس سهمی هم $S(۱, ۲)$ است:

$$|SM| = \sqrt{(۱ - \frac{۱}{۲})^۲ + (۲ + \frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۲۵}{۴}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۴

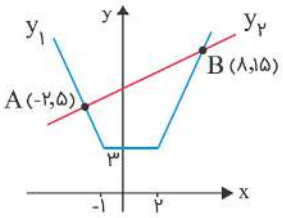
$$y_1 = |x-2| + |x+1| \quad , \quad y_2 = x+7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x+2-x-1 & ; x \le -1 \\ -x+2+x+1 & ; -1 < x \le 2 \\ x-2+x+1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x+1 & ; x \le -1 \\ 3 & ; -1 < x \le 2 \\ 2x-1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x-1 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x+1 = x+7 \Rightarrow x = -2$$



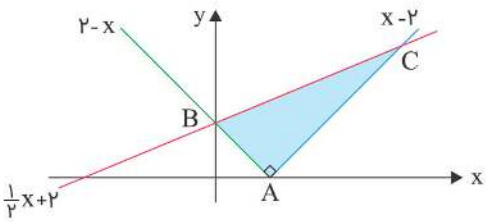
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-(-2))^2 + (15-5)^2}$$
$$= \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ گزینه ۴

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$
$$y_2 = \frac{1}{2}x + 2$$

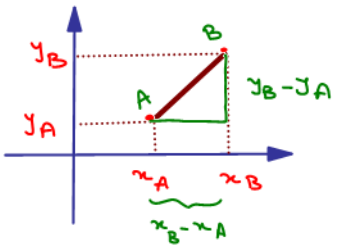
$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ -x+2 & ; x < 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = (2, 0) \\ x-2 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C = (8, 6) \\ 2-x = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (6-0)^2} = 6\sqrt{2}$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = 12$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

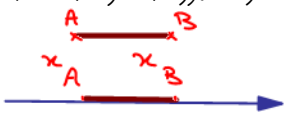


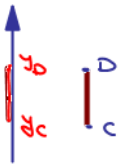
فاصله دو نقطه : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

BOX 6 : بخش دوم هندسه تحلیلی (صفحه ۵ تا ۱۰ کتاب درسی)

در این بسته، مسائلی چون فاصلهٔ دو نقطه، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط، قرینهٔ نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر، معادلهٔ عمودمنصف و فاصلهٔ نقطه از خط را مطرح و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.





الف) فاصلهٔ دو نقطه

۱) اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه: $AB=|x_B-x_A|$

۲) اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول باشند، آن‌گاه: $CD=|y_D-y_C|$

مثال: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ هم‌طول $A(5,-2)$ و $B(5,7)$ برابر است با: $AB=|\text{اختلاف بین عرض‌ها}|=|7-(-2)|=9$

۳) فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

تمرین: ۱) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $(3,2)$ و $(-1,0)$ را به دست آورید.

۲) اگر نقاط $A(-1,4)$ و $B(3,3)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

① $AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4(5)}=2\sqrt{5}$

فاصله AB همان طول ضلع مربع است.

$AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(3-4)^2}=\sqrt{17}$

محیط مربع = یک ضلع ضربدر ۴ $=4\sqrt{17}$

مساحت مربع = مربع یک ضلع = یک ضلع ضربدر خودش $=(\sqrt{17})(\sqrt{17})=17$

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ تا مبدأ مختصات برابر $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ است. به عنوان مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $(6,8)$ تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$ می‌باشد.

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

- اگر مختصات نقطه‌ای روی دایره و مرکز دایره داده شده باشد، فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

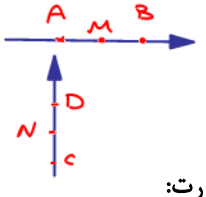
تمرین: دایره‌ای به مرکز $(3,-1)$ از نقطهٔ $(5,2)$ گذشته است. شعاع این دایره را به دست آورید. آیا نقطهٔ $(6,2)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

$OA=\sqrt{(x_O-x_A)^2+(y_O-y_A)^2}=\sqrt{(3-5)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}=R$

$OB=\sqrt{(x_O-x_B)^2+(y_O-y_B)^2}=\sqrt{(3-6)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}>R=\sqrt{13}$ ← B خارج دایره

ب) مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر بخواهیم مختصات وسط دو نقطه و یا یک پاره‌خط را وقتی که مختصات آن‌ها را در اختیار داریم، به دست بیاوریم، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

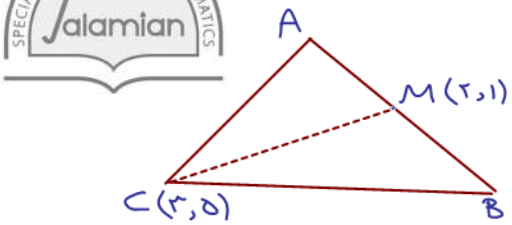


۱) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، آن‌گاه: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$

۲) اگر C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها و N وسط CD باشد، آن‌گاه: $y_N=\frac{y_C+y_D}{2}$

۳) فرض کنیم A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M=\left(\frac{\text{مجموع طول‌های A و B}}{2},\frac{\text{مجموع عرض‌های A و B}}{2}\right)=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$



$M\left(\frac{۵-۱}{۲}=۲,\ \frac{۳-۱=۲}{۲}=۱\right)$

تمرین: نقاط $A(۵,-۱)$، $B(-۱,۳)$ و $C(۳,۵)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

۱) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع AB را مشخص کنید. $M(۲,۱)$

۲) طول میانهٔ CM را به دست آورید.

۳) معادلهٔ میانهٔ CM را بنویسید.

(۲) $CM=\sqrt{(x_C-x_M)^۲+(y_C-y_M)^۲}=\sqrt{(۱)^۲+(۴)^۲}=\sqrt{۱۷}$

(۳) $C(۳,۵)$

$m_{CM}=\frac{y_M-y_C}{x_M-x_C}=\frac{۱-۵}{۲-۳}=\frac{-۴}{-۱}=۴$

$y-y_C=m(x-x_C)$

$y-۵=۴(x-۳)$

$y=۴x-۱۲+۵ \longrightarrow y=۴x-۷$

پ) قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر

اگر نقطهٔ A را به نقطهٔ M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم، آن‌گاه A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M است.



$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{۲}$ $\quad y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}$

$x_{A'}=۲x_M-x_A$ $\quad y_{A'}=۲y_M-y_A$

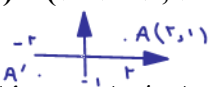
نکته: ۱) اگر A' قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ نسبت به نقطهٔ $M(x_M,y_M)$ باشد، آن‌گاه M وسط پاره‌خط AA' است و مختصات نقطهٔ A' از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$A'(۲x_M-x_A,۲y_M-y_A)$$

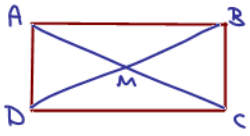
مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(۲,۴)$، نقطهٔ A' است که در آن:

$$A'(۲x_M-x_A,۲y_M-y_A)=(۲\times۲-۳,۲\times۴-(-۱))=(۱,۹)$$

۲) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $P'(-\alpha,-\beta)$ است.



یکی از مسائلی که در تمرینات کتاب مطرح شده است این است که مختصات سه رأس یک مستطیل داده شده است و می‌خواهیم مختصات رأس چهارم را به دست بیاوریم. برای این کار از نکتهٔ بعدی که برای متوازی‌الاضلاع گفته می‌شود، استفاده می‌کنیم.



نکته: اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

تمرین: اگر $A(۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ و $C(-۱,۵)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به دست آورید.

$\begin{cases} ۲+(-۱)=۳+x_D \\ ۱+۵=۴+y_D \end{cases}$ $\quad x_D=-۲$ $\quad y_D=۲$ $\quad D(-۲,۲)$

تذکر: مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین نکتهٔ قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

ت) عمودمنصف یک پاره‌خط

عمودمنصف: عمودمنصف پاره‌خط AB، ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط AB را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه و عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به دست می‌آوریم.

تمرین: دو نقطهٔ $A(۳,۶)$ و $B(۱,۲)$ مفروض‌اند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

$M\left(\frac{۱+۳}{۲}=۲,\ \frac{۲+۶}{۲}=۴\right)$

$M(۲,۴)$

$m_{AB}=\frac{۶-۲}{۳-۱}=۲$

$y-y_M=m(x-x_M)$

$y-۴=۲(x-۲)$ $\quad \boxed{y=۲x}$

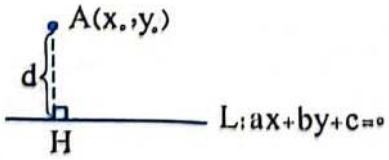
نکته: یکی از ویژگی‌های مهم عمودمنصف آن است که فاصلهٔ هر نقطه روی آن از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

یکی از فرمول‌های خیلی مهم که باید آن را حفظ کنیم، فاصلهٔ نقطه از خط است. از این فرمول علاوه بر به دست آوردن فاصلهٔ نقطه از خط، برای به دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی و طول ارتفاع در مثلث استفاده می‌کنیم.

ث) فاصلهٔ نقطه از خط

- اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد، فاصلهٔ A تا L برابر است با طول پاره‌خطی که از عمود A بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L؛ از فرمول زیر برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه از خط راست استفاده می‌کنیم:
- اگر مختصات نقطهٔ A به صورت (x_0, y_0) و معادلهٔ خط L به صورت $ax+by+c=0$ باشد، آن‌گاه:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



- برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱) همهٔ اجزای معادلهٔ خط در یک طرف تساوی باشند.

۲) در معادلهٔ خط به جای x، طول نقطه (x_0) و به جای y، عرض نقطه (y_0) را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

۳) ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

۴) نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصلهٔ بین نقطه و خط می‌باشد.

تمرین: ۱) فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,2)$ از خط به معادلهٔ $4x+3y+1=0$ را به دست آورید. *(مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)*

۲) خط $5x-12y+4=0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2,-1)$ مماس است. اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.

(۱) $d=\frac{|4(3)+3(2)+1|=|12+6+1|=19}{\sqrt{4^2+3^2}=5}=\frac{19}{5}$

شعاع R = فاصله مرکز دایره از خط مماس $d=\frac{|5(2)-12(-1)+4|=|10+12+4|=26|=26}{\sqrt{5^2+12^2}=13}=2$

نکته: ۱) فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۲) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $x=a$ برابر $d=|x_0-a|$ و از خط $y=b$ برابر $d=|y_0-b|$ است.

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,4)$ از خط $x=2$ برابر $d=|3-2|=1$ و از خط $y=-5$ برابر $d=|4-(-5)|=9$ می‌باشد.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی، یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آورید.

تمرین: فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $x+y-3=0$ و $x+y=5$ را به دست آورید.

نقطه دلخواه $x=0 \Rightarrow y=3$ $A(0,3)$ از خط $A(0,3)$ فاصله $x+y-5=0$ را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{|0+3-5|=|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

نکته: برای به دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی، ابتدا ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم و داریم:

$x+y-3=0 \rightarrow a=1 \quad b=1$

$x+y-5=0 \rightarrow a=1 \quad b=1$

حل مانند قبل $d=\frac{|-3-(-5)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

$$ax+by+c=0 \quad \xrightarrow[b=b']{a=a'} \quad d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$a'x+b'y+c'=0$$
دوخط موازی‌هستند.

پرسش‌های تشریحی:

۱- اگر $A(3,-1)$ و $B(-1,6)$ دو نقطه باشند، فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط AB به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ کتاب درسی صفحهٔ ۹)

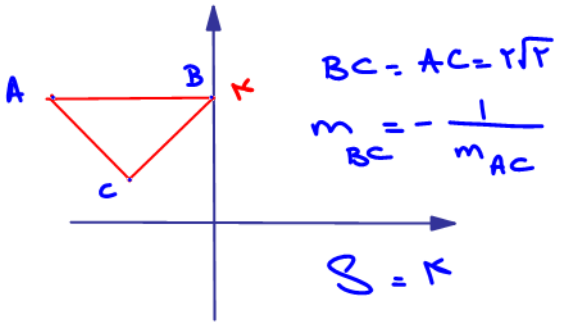
وسط $M(1,2)$ ، $OM=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

۲- نقاط $A(-4,4)$، $B(0,4)$ و $C(-2,2)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و تمرین ۳ صفحهٔ ۹)

آ) مثلث ABC را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

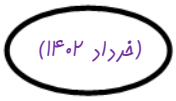
پ) مساحت مثلث را به دست آورید.



۳- اگر نقاط $A(2,4)$ و $B(5,8)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

$AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5=$ ضلع مربع ، $S=(5)^2=25$ ، محیط $=4(5)=20$

۴- اگر $A(2,4)$ و $B(4,-2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)



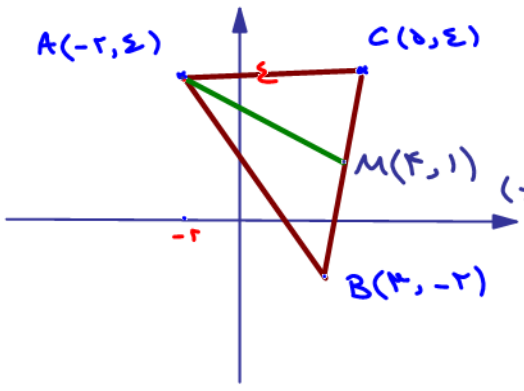
B,A وسط $\Rightarrow \begin{cases} x_O=\frac{4+2}{2}=3 \\ y_O=\frac{4-2}{2}=1 \end{cases}$ $O(3,1)$

۵- مثلث با رأس‌های $A(-2,4)$ و $B(3,-2)$ و $C(5,4)$ را در نظر بگیرید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید. $M(4,1)$

ب) طول میانهٔ AM را به دست آورید.

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را بنویسید.



ب) $AM=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9(5)}=3\sqrt{5}$

$m_{AM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$

$y-y_A=m(x-x_A)$

$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$

۶- با توجه به مختصات نقاط داده‌شده، به سوالات زیر پاسخ دهید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

آ) نقطهٔ $M(5,-1)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(3,2)$ و B است. مختصات نقطهٔ B را بیابید.

الف) $\begin{cases} 5=\frac{3+x_B}{2} \\ -1=\frac{2+y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow B(7,-4)$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(-3,4)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-1,2)$ به دست آورید. ← وسط AA'

ب) $\begin{cases} -1=\frac{-3+x_{A'}}{2} \\ 2=\frac{4+y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow A'(1,0)$

پ) قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ $(3,0)$ مشخص کنید. ← وسط BB'

پ) $\begin{cases} 3=\frac{7+x_{B'}}{2} \\ 0=\frac{-4+y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow B'(-1,4)$

نکته: قرینهٔ $(-3,5)$ نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

$(3,-5)$

نکته: قرینهٔ $M(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدا $M'(-\alpha,-\beta)$

۷- نقاط $A(-2,-1)$ ، $B(2,1)$ و $C(-3,1)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

آ) مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

ب) مساحت مستطیل را به دست آورید.

$AB=\sqrt{4^2+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{5^2+0}=5$

$S=(AB)(BC)=\sqrt{20}(5)=10\sqrt{5}$

$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+(-3)=2+x_D \\ -1+1=1+y_D \end{cases} \Rightarrow D(-7,-1)$

۸- دو نقطهٔ $A(3,-4)$ و $B(-1,0)$ مفروض‌اند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

AB وسط $M\left(\frac{3-1}{2}=1,\frac{0-4}{2}=-2\right)$

$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-4)}{-1-3}=\frac{4}{-4}=-1$

$y-y_M=m(x-x_M) \quad y+2=-1(x-1)$

$y=-x+1-2 \quad y=-x-1 \rightarrow y+x+1=0$

۹- نقاط $(2,0)$ و $(4,2)$ دو رأس مقابل یک مربع هتند. معادلهٔ قطرهای این مربع را بنویسید.

$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{2-0}{4-2}=\frac{2}{2}=1 \quad y-0=1(x-2) \quad y=x-2$

می دانیم در مربع هریک از دو قطر عمود منصف دیگری است لذا معادلهٔ عمود منصف AC را می نویسیم.

AC وسط $M\left(\frac{4+2}{2}=3,\frac{0+2}{2}=1\right)$

$m_{BD}=\frac{-1}{m_{AC}}=\frac{-1}{1}=-1 \quad y-y_M=m(x-x_M) : y-1=-1(x-3)$

۱۰- نقاط $A(3,1)$ ، $B(-1,3)$ ، $C(-4,-1)$ و $D(4,-1)$ مفروض‌اند. نقطه‌ای مشخص کنید که فاصلهٔ آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

کافی است عمود منصف AB ، CD را با هم قطع دهیم.

$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \rightarrow$ عکس و قرینه $m_{ME}=2$

$M'\left(\frac{3-1}{2}=1,\frac{3+1}{2}=2\right)$

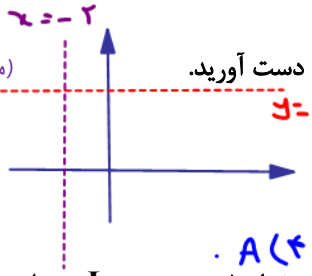
$y-y_{M'}=m_{M'E}(x-x_{M'})$

$y-2=2(x-1) : \begin{cases} y=2x \\ x=0 \end{cases}$

$y=0$ نقطهٔ $E(0,0)$ از ۴ نقطه به یک فاصله است

$x=0$ معادلهٔ عمود منصف CD است

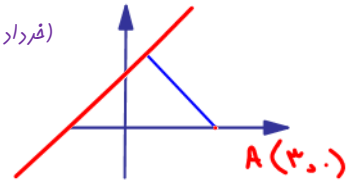
۱۱- فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,-۶)$ را از دو خط به معادلات $x=-۲$ و $y=۵$ به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی)



فاصله A از خط $x=-۲$: $|۴-(-۲)|=۶$

فاصله A از خط $y=۵$: $|-۶-۵|=۱۱$

۱۲- نقطهٔ $A(۳,۰)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=۵$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)



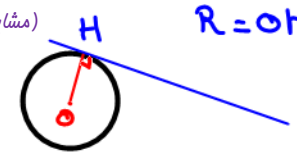
$y=x+۵$

فاصله A از خط برابر طول ضلع مربع است.

$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-x+y-۵|}{\sqrt{(-۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}$ $\quad S=(d)^۲=\frac{۶۴}{۲}=۳۲$

۱۳- اندازهٔ شعاع و مساحت دایره به مرکز $(-۱,۲)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $۲y+x=۵$ را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

فاصله O از خط برابر شعاع است.



$O(-۱,۲)$

$R=OH=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۱+۴-۵|}{\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

$S=\pi R^۲=\frac{۴\pi}{۵}$

۱۴- ابتدا نشان دهید دو خط داده‌شده با هم موازی‌اند و سپس فاصلهٔ بین آن‌ها را به دست آورید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

$۲x+۲y=۷$, $x=-y+۴$

$۲y=-۲x+۷$ $\quad y=-x+۴$

$y=-x+\frac{۷}{۲}$ $\quad m=-۱$

$m'=-۱=m$

شیب‌ها برابرند: خط‌ها موازی

نکته: فاصله ۲ خط موازی

$\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ ax+by+c'=۰ \end{cases}$

$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

$۲x+۲y-۷=۰$

$۲x+۲y-۸=۰$

$d=\frac{|-۷-(-۸)|=۱|}{\sqrt{۲^۲+۲^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۸}}\times\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۸}}{۸}$

۱۵- اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی ۱۱۰ کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب ۴۵° و ۳۷° و طول و عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب ۳۷° و ۳۱° باشد، فاصلهٔ بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟ (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

$A(۴۵^\circ,۳۷^\circ)$

$B(۳۷^\circ,۳۱^\circ)$

$AB=\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}=\sqrt{(۸\times۱۱۰)^۲+(۶\times۱۱۰)^۲}=\sqrt{۸^۲(۱۱۰)^۲+۶^۲(۱۱۰)^۲}=\sqrt{(۱۱۰)^۲(۸^۲+۶^۲)}$

$=۱۱۰\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۱۰(۱۰)=۱۱۰۰$ km

$(\Delta x=۴۵-۳۷=۸)\times۱۱۰=۸۸۰$ km $=۸\times۱۱۰$

$(\Delta y=۳۷-۳۱=۶)\times۱۱۰=۶۶۰$ km $=۶\times۱۱۰$

۱۶- اگر قرینهٔ نقطهٔ $(a+۱,b-۳)$ نسبت به نقطهٔ $(۳,۵)$، نقطهٔ $(b-۲,-a)$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

A, A', AA'

$x_{AA'}=۳=\frac{(b-۲)+(a+۱)}{۲}$

$y_{AA'}=۵=\frac{(-a)+(b-۳)}{۲}$

$\begin{cases} a+b-۱=۶ \\ -a+b-۳=۱۰ \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a+b=۷ \\ -a+b=۱۳ \end{cases}$

$۲b=۲۰$ $\quad b=۱۰$

$a+b=۷$

$a=-۳$

$ax+by=c$

$m=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

$m=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3}$ $\quad m'=-\frac{3}{4}$

۱۷- خطوط $3x+4y=1$ و $4x-3y=5$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(1,1)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل را به دست آورید.

در معادله ۲ خط داده شده صدق می‌کند لذا روی هیچکدام از این دو ضلع نیست

می‌بینیم که $m\cdot m'=-1$ پس ۲ خط داده شده عمودند.

فاصله $A(1,1)$ از هرکدام از خط‌ها برابر طول و عرض مستطیل است.

$d_1=\frac{|3\times 1+4\times 1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6}{5}$ $\quad d_2=\frac{|4\times 1-3\times 1-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}$ $\quad S=d_1 d_2=(\frac{6}{5})(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$

۱۸- مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$ ، $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است.

آ) معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب) طول میانهٔ AM را به دست آورید.

پ) معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید.

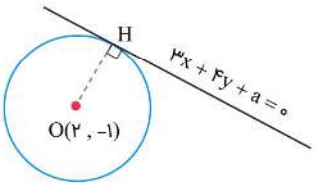
ت) نقطهٔ تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به دست آورید.

ث) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۷ اگر $A(۸ , \frac{۱}{۲})$، $B(۴ , ۰)$ و $C(۰ , -۳)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۸ اگر مساحت دایرهٔ شکل زیر ۲۵π باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۲۵
۲) ۲۳
۳) ۲۱
۴) ۱۹

۹ اگر $A(۲ , ۵)$، $B(۲ , ۳)$ و $C(-۱ , ۵)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) متساوی‌الساقین
۳) قائم‌الزاویه
۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

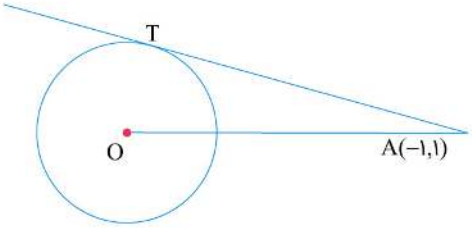
۱۰ خط d از نقطه $(-۱, ۲)$ عبور کرده و بر خط $\frac{y-۱}{۳} = \frac{x}{۲}$ عمود است، چه مساحتی خط d با محورهای مختصات می‌سازد؟

۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۱ دو خط $\frac{x}{۳} = \frac{۲y-۱}{۲}$: $d_۱$ و $۳y = x - \frac{۱}{۲}$: $d_۲$ بر دایره‌ای مماس هستند. محیط دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}\pi$
۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}\pi$
۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}\pi$
۴) $\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}\pi$

۱۲ خط $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ بر دایره به مرکز $O(-۳, ۳)$ مماس است. طول پاره‌خط AT کدام است؟ (T نقطه مماس خط بر دایره)



۱) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\frac{۱۴}{۵}$
۴) $\frac{۷}{۵}$

۱

$$ax + ۴y - ۱ = ۰$$

$$۲ = \frac{|a + ۸ - ۱|}{\sqrt{a^۲ + ۱۶}} \Rightarrow ۴a^۲ + ۶۴ = (a + ۷)^۲$$

$$۴a^۲ + ۶۴ - a^۲ - ۱۴a - ۴۹ = ۰$$

$$۳a^۲ - ۱۴a + ۱۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۹۶ - \overbrace{۴(۴۵)}^{۱۸۰} = ۱۶$$

$$a = \frac{۱۴ \pm ۴}{۶} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۸}{۶} = ۳ \\ \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

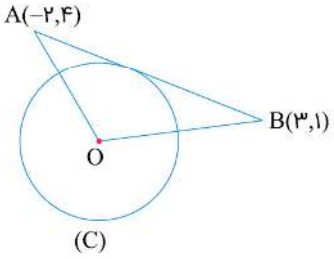
Homework

۱ اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱, ۲)$ از خط $ax + ۴y = ۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۲ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + ۲x = ۱۶$، $۲y - x = ۲$ و $y = ۰$ هستند، اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) ۵
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

۳ $O(-۱, -۱)$، مرکز دایره C می‌باشد که بر ضلع AB مماس است، مساحت دایره C کدام است؟

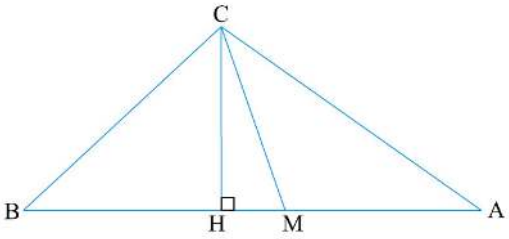


۱) $\frac{۱۴۲\pi}{۱۷}$
۲) $\frac{۱۲۸\pi}{۱۷}$
۳) $\frac{۲۴۲\pi}{۱۷}$
۴) $\frac{۲۲۸\pi}{۱۷}$

۴ معادله عمودمنصف پاره‌خط AB که در آن مختصات نقاط A و B به‌صورت $A(۱, \beta)$ و $B(\alpha, -۱)$ است، خط $۴y - ۲x - ۳ = ۰$ است. مقدار $\alpha \cdot \beta$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) -۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۰

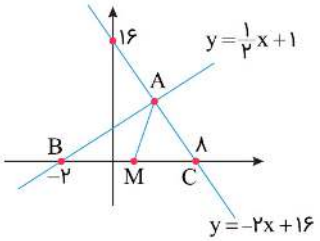
۵ سه نقطه $A(۰, ۳)$، $B(۳, ۰)$ و $C(۴, ۳)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر CH ارتفاع و CM میانه مثلث باشند، طول MH کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶ فاصلهٔ بین دو خط $x - ۵y = ۶$ و $۲x = ۱۰y + ۱$ را بیابید.

۲ گزینه ۲



$$y=۰: y+۲x=۱۶ \Rightarrow x=۸ \quad C(۸,۰)$$

$$y=۰: ۲y-x=۲ \Rightarrow x=-۲ \quad B(-۲,۰)$$

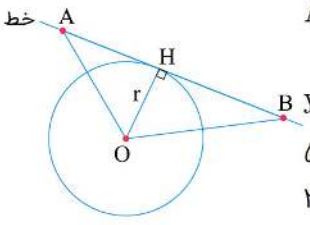
$$M: \text{وسط پاره‌خط BC} \begin{cases} x=\frac{۸+(-۲)}{۲}=۳ \\ y=\frac{۰+۰}{۲}=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-۲x+۱۶ \\ y=\frac{۱}{۲}x+۱ \end{cases} \Rightarrow y_۱=y_۲ \Rightarrow -۲x+۱۶=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow -\frac{۵}{۲}x=-۱۵$$

$$\Rightarrow x=۶, y=۴ \Rightarrow A(۶,۴)$$

$$AM=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=۵$$

۳ گزینه ۳



$$AB \text{ شیب خط}: m=\frac{۱-۴}{۳+۲}=\frac{-۳}{۵}$$

$$y-۱=\frac{-۳}{۵}(x-۳)$$

$$۵y-۵=-۳x+۹$$

$$۳x+۵y-۱۴=۰$$

$$r=OH=\frac{|-۳-۵-۱۴|}{\sqrt{۹+۲۵}}=\frac{۲۲}{\sqrt{۳۴}}$$

مساحت دایره:

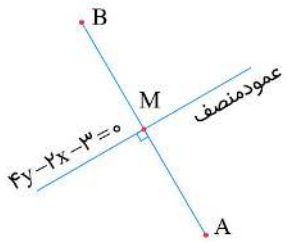
$$S=\pi r^۲=\frac{۲۴۲\pi}{۱۷}$$

۴ گزینه ۴

M وسط پاره‌خط AB $\begin{cases} x = \frac{۱+\alpha}{۲} \\ y = \frac{\beta - ۱}{۲} \end{cases}$

مختصات نقطه M در خط عمودمنصف صدق می‌کند:

$$۴(\frac{\beta-۱}{۲}) - ۲(\frac{۱+\alpha}{۲}) - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲\beta - ۲ - ۱ - \alpha - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲\beta - \alpha = ۶$$



شرط عمود بودن دو خط: $m \times m_{AB} = -۱$

$$AB \text{ خط} : m_{AB} = \frac{-۱-\beta}{\alpha - ۱}$$

$$\text{شیب عمودمنصف} : m = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲} \times (\frac{-۱-\beta}{\alpha-۱}) = -۱$$

$$۲\alpha - ۲ = ۱ + \beta \Rightarrow \beta - ۲\alpha = -۳$$

$$\begin{cases} ۲\beta - \alpha = ۶ \\ \beta - ۲\alpha = -۳ \end{cases} \Rightarrow \alpha = ۴, \beta = ۵ \Rightarrow \alpha \cdot \beta = ۲۰$$

۵ گزینه ۲

معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد:

$$\text{شیب} : m_{AB} = \frac{۰-۳}{۳-۰} = -۱ \Rightarrow y = -۱(x-۳) \Rightarrow y = -x+۳$$

معادله خطی که ارتفاع CH روی آن قرار دارد.

$$AB \perp CH : m_{CH} = \frac{-۱}{m_{AB}} = \frac{-۱}{-۱} = ۱ : y-۳ = ۱(x-۴) \Rightarrow y = x-۱$$

$$\begin{cases} y = -x+۳ \\ y = x-۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۲, y = ۱ \Rightarrow H(۲,۱)$$

وسط پاره‌خط AB:

$$M \begin{cases} x = \frac{۰+۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \\ y = \frac{۳+۰}{۲} = \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow MH = \sqrt{(۲-\frac{۳}{۲})^{۲} + (۱-\frac{۳}{۲})^{۲}} \Rightarrow MH = \sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶

$$x-۵y-۶=۰$$
$$۲x-۱۰y-۱=۰ \xrightarrow{\div ۲} x-۵y-\frac{۱}{۲}=۰$$

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} = \frac{|-۶-(-\frac{۱}{۲})|}{\sqrt{۱+۲۵}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲۶}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲۶}}$$

۷ گزینه ۲

روش اول:

$$\text{شیب ضلع BC}: m_{BC} = \frac{-۳-۰}{۰-۴} = \frac{۳}{۴}$$

معادلهٔ خط ضلع BC:

$$y - ۰ = \frac{۳}{۴}(x - ۴) \Rightarrow ۴y - ۳x + ۱۲ = ۰$$

فاصلهٔ رأس A از ضلع BC (ارتفاع AH):

$$AH = \frac{|۴(\frac{۱}{۲}) - ۳(۸) + ۱۲|}{\sqrt{(-۳)^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\text{طول ضلع}: BC = \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۰+۳)^۲} = ۵$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۲ \times ۵}{۲} = ۵$$

روش دوم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}|۸(۰+۳) + ۴(-۳ - \frac{۱}{۲}) + ۰(\frac{۱}{۲} - ۰)|$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}|۲۴ - ۱۴| = ۵$$

۸ گزینه ۲

$$S = \pi r^۲ \Rightarrow ۲۵\pi = \pi r^۲ \Rightarrow r = ۵$$

$$r = OH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$۵ = \frac{|۳(۲) + ۴(-۱) + a|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} \Rightarrow |۲ + a| = ۲۵$$

$$\begin{cases} ۲ + a = ۲۵ \Rightarrow a = ۲۳ \\ ۲ + a = -۲۵ \Rightarrow a = -۲۷ \end{cases}$$

۹ گزینه ۳

$$AB = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۳-۵)^۲} = ۲$$

$$AC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۵)^۲} = ۳$$

$$BC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow ۱۳ = ۹ + ۴$$ مثلث قائم‌الزاویه

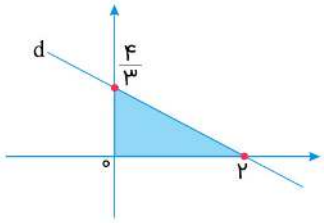
۱۰ گزینه ۴

$$\frac{y-۱}{۳} = \frac{x}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۱ \Rightarrow m_۱ = \frac{۳}{۲}$$ شیب خط

شرط عمود بودن : $m_۲ = \frac{-۱}{m_۱} \Rightarrow m_۲ = \frac{-۲}{۳}$

خط d : $y - ۲ = \frac{-۲}{۳}(x+۱) \Rightarrow y = \frac{-۲}{۳}x + \frac{۴}{۳}$

$\begin{cases} x = ۰ \\ y = \frac{۴}{۳} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۰ \end{cases}$



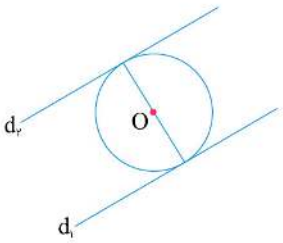
مساحت مثلث : $S = \frac{۲ \times \frac{۴}{۳}}{۲} = \frac{۴}{۳}$

۱۱ گزینه ۳

$$d_۱ : ۶y - ۳ = ۲x \Rightarrow ۲x - ۶y + ۳ = ۰ \Rightarrow x - ۳y + \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$d_۲ : ۳y = x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow x - ۳y - \frac{۱}{۲} = ۰$$

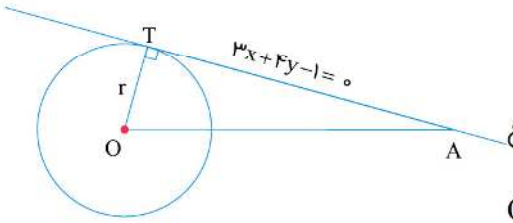
دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازیند، پس فاصله دو خط مذکور برابر قطر دایره است.



$$\text{قطر دایره} : D = \frac{|C_۱ - C_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}|}{\sqrt{۱^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$$

$$\text{محیط دایره} = \pi D = \frac{\sqrt{۱۰}}{۵}\pi$$

۱۲ گزینه ۳



$$\text{شعاع} : r = OT = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$O(x_۰ = -۳, y_۰ = ۳)$$

$$r = \frac{|۳(-۳) + ۴(۳) - ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۲}{۵}$$

$$OA = \sqrt{(-۱ + ۳)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$OA^۲ = r^۲ + AT^۲ \Rightarrow AT = \sqrt{۸ - \frac{۴}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۹۶}{۲۵}} = \frac{۱۴}{۵}$$

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی (ویژه حسابان فصل ۱ درس ۱)

روش گاوس

در دنباله حسابی با جمله اول a_1 و جمله آخر a_n داریم:

S: Sumation

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{cases} +$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

($a_1 + a_n$, $a_1 + a_n$)

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

تعداد / ۲ (آخری + اولی) =

از آن‌جا که در دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

پس می‌توان نوشت:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n})$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + dn - d) = \frac{d}{2}n^2 + \cdots$$

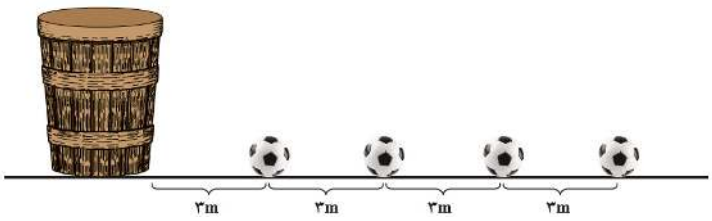
مثال: اگر مجموع جمله های یک دنباله حسابی از دستور $S_n = n(n+3)$ به دست آید. قدرنسبت دنباله حسابی کدام است؟

$S_n = 2n^2 + 3n$

$\frac{d}{2} = 1 \rightarrow d = 2(1) = 2$

می‌بینیم مجموع جملات دنباله حسابی برحسب n از درجه دوم است و دو برابر ضریب n^2 قدرنسبت دنباله حسابی است.

تمرین: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



نکته: در تمام دنباله‌ها داریم:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

مثال: اگر در یک دنباله جمع n جمله از دستور $S_n = 2n(n-2)$ به دست آید. ترم جمله عمومی را بیابید.

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n(n-2) - 2(n-1)((n-1)-2) = (2n^2 - 4n) - 2n^2 + 8n + 6 = 4n + 6$

$(n-3)$

$n^2 - 4n + 3$

$a_n = 4n - 6$

$a_1=6, 12, 18, \ldots \quad S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$

$d=6 \quad d=6$

پاسخ: دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $6=3+3$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی‌شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهد.

اگر n تعداد توپ‌های انداخته‌شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم: $S=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

$$918=\frac{n}{2}(12+(n-1)6) \Rightarrow 306=n(n+1) \Rightarrow 17\times 18=n(n+1) \Rightarrow n=17$$

تمرین: روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

پاسخ: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19+18+17+\cdots+2+1=\frac{19}{2}(1+19)=190$$

تذکر: این مسئله را با استفاده از ترکیبات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

$\binom{20}{2}=\frac{20(19)}{1(2)}=190$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

مجموع جملات دنباله هندسی

$a_n=a_1q^{n-1}$ جمله عمومی دنباله هندسی

در هر دنباله هندسی داریم:

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n$

$a_1 \quad a_1q \quad a_1q^2 \quad \cdots \quad a_1q^{n-} \rightarrow a_1=q^{n-1}$

$$-\begin{cases} S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1} \\ qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n \end{cases}$$ طرفین ضرب‌در q

$$S_n-S_nq=(a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1})-(a_1q+\cdots+a_1q^n)$$

$$S_n(1-q)=a_1-a_1q^n$$

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

تمرین: مجموعه ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

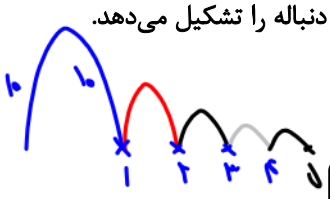
$\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\ldots \quad q=2 \quad q=2$

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{8}(1-2^{10})}{1-2}=\frac{\frac{1}{8}(1-1024)}{-1}=\frac{1}{8}(1024-1)=\frac{1023}{8}$

تمرین: توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۰ متری برسد. این توپ پس از پنج بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

پاسخ: ارتفاع توپ قبل از n اُمین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. داریم: $A_1=10 \ , \ A_2=\frac{10}{4} \ , \ A_3=\frac{10}{16},\ldots,A_n=\frac{10}{4^{n-1}}$

بنابراین مسافت طی‌شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین دنباله را تشکیل می‌دهد. $20,\frac{20}{4},\frac{20}{16},\ldots,\frac{20}{4^{n-1}}$



دنباله فوق یک دنباله هندسی با مجموع $S_n = ۲۰ \times \frac{۱-(\frac{۱}{۴})^n}{۱-\frac{۱}{۴}}$ داریم:

$$S_۵ = ۲۰ \times \frac{۱-(\frac{۱}{۴})^۵}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸۰}{۳}(۱-(\frac{۱}{۴})^۵) = \frac{۸۰}{۳}(۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}) \simeq ۲۶/۶۴ \text{ متر}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای:

۱- اگر $۲x+۳, x^۲, ۳x+۴$ تشکیل یک دنباله حسابی صعودی (افزایشی) بدهند، مجموع بیست جمله اول آن کدام است؟

۱) ۵۲۷/۵ ۲) ۵۸۷/۵ ۳) ۶۸۷/۵ ۴) ۶۲۷/۵

۲- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\}, \{۲,۳,۴\}, \{۵,۶,۷,۸,۹\}, \ldots$ ، مجموع اعداد واقع در دسته نهم کدام است؟

۱) ۱۲۴۱ ۲) ۱۲۴۷ ۳) ۱۲۵۱ ۴) ۱۲۷۳

۳- در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول، ۳ برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله پنجم ۱۴ باشد، جمله هفتم کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۴- در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله نهم و یازدهم برابر ۴۰ است، مجموع نوزده جمله اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۳۱۰ ۴) ۳۸۰

۵- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۶- مقدار x از معادله $x + \cdots + ۵۴ + ۱۸ + ۶ + ۲ = ۶۵۶۰$ کدام است؟

۱) ۴۳۷۴ ۲) ۶۵۶۱ ۳) ۳۴۷۴ ۴) ۵۶۶۱

۷- مربعی به طول ضلع ۲ cm مفروض است. اگر اوساط اضلاع مربع را به هم متصل کنیم و این را همچنان ادامه دهیم، مجموع مساحت‌های ۱۰ مربع اول به وجود آمده کدام است؟ (مربع به طول ضلع ۲، مربع اول در نظر گرفته شود.)

۱) $\frac{۵۱۱}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲۳}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۵۱۱}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۱۰۲۳}{۱۲۸}$

۸- توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. این توپ پس از x بار برخورد به زمین $\frac{۸۰}{۳}$ متر مسافت طی می‌کند، x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۹- در یک دنباله هندسی، مجموع هفت جمله اول، شانزده برابر مجموع هفت جمله دوم آن دنباله است. جمله سی‌وپنجم این دنباله چند برابر

جمله چهل‌ونهم آن است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۵۱۲ ۴) ۶۴

۱۰- تعداد جملات یک دنباله هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن چهار برابر جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ‌نامه:

۱- گزینهٔ «۴»

در هر دنباله حسابی داریم: $a+c=۲b$ ← دنباله حسابی

$۲x+۳, x^۲, ۳x+۴$ ← جمع الطرفین برابر دوبل الوسطی است

$$۲x^۲=(۲x+۳)+(۳x+۴) \Rightarrow ۲x^۲-۵x-۷=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ : ۱,۱,۱ \text{ غ.ق.ق} \\ x=\frac{۷}{۲} : ۱۰, \frac{۴۹}{۴}, \frac{۲۹}{۲} \Rightarrow d=\frac{۹}{۴} \end{cases}$$

دنباله نابت افزایشی نیست

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲(۱۰)+۱۹(\frac{۹}{۴}))=۱۰(\frac{۲۵۱}{۴})=۶۲۷/۵$$

۲- گزینهٔ «۱»

$\{۱\}, \{۲,۳,۴\}, \ldots, \{۶۵,۶۶,\ldots,۸۱\}$

دستهٔ نهم ... دستهٔ دوم دستهٔ اول

دسته نهم یک دنباله حسابی با جمله اول $a_۱=۶۵$ و $d=۱$ و جمله آخر ۸۱ است، در نتیجه:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۸۱=۶۵+(n-۱)(۱) \Rightarrow n=۱۷$$

تعداد جملات دنباله حسابی $n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱$

$n=\frac{۸۱-۶۵}{۱}+۱=۱۷$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۶۵+۸۱)=۱۲۴۱$$

۳- گزینهٔ «۱»

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲} \Rightarrow ۱۰(۲a_۱+۱۹d)=۳(۶)(۲a_۱+۱۱d)$$

$$۱۰a_۱+۹۵d=۱۸a_۱+۹۹d \Rightarrow ۸a_۱+۴d=۰ \Rightarrow ۲a_۱+d=۰$$

$$a_۵=a_۱+۴d=۱۴$$

$$\begin{cases} ۲a_۱+d=۰ \\ a_۱+۴d=۱۴ \end{cases} \Rightarrow a_۱=-۲, d=۴$$

$$a_۷=a_۱+۶d=-۲+۲۴=۲۲$$

۴- گزینهٔ «۴»

$$a_۹+a_{۱۱}=۴۰ \Rightarrow (a_۱+۸d)+(a_۱+۱۰d)=۴۰ \Rightarrow ۲a_۱+۱۸d=۴۰$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(۲a_۱+۱۸d)=\frac{۱۹}{۲}\times ۴۰=۳۸۰$$

۵- گزینهٔ «۲»

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow S_4=\frac{4}{2}(2a_1+3d)=15 \Rightarrow 4a_1+6d=15$$

$$S_9=(a_1+\cdots+a_4)+(a_5+\cdots+a_9)=15+30=45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1+8d)=45 \Rightarrow a_1+4d=5$$

$$\begin{cases}4a_1+6d=15\\ a_1+4d=5\end{cases} \Rightarrow a_1=3\ ,\ d=\frac{1}{2}$$

$$a_{11}=a_1+10d=3+5=8$$

۶- گزینهٔ «۱»

دنباله هندسی : $2,6,18,\ldots$ $(6^2=2\times 18)$

$$q=3$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow 6560=\frac{2(1-3^n)}{1-3} \Rightarrow 3^n-1=6560$$

$$3^n=6561 \Rightarrow 3^n=3^8 \Rightarrow n=8$$

جمله هشتم: است :

$$a_n=a_1q^{n-1} \Rightarrow a_8=2\times 3^7=4374$$

$$x=4374$$

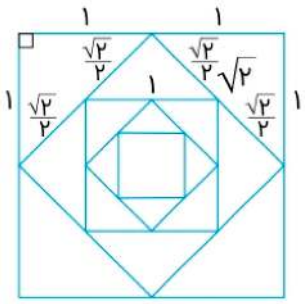
۷- گزینهٔ «۴»

قضیه : هرگاه اوساط (وسط های) اضلاع مربعی را به هم وصل کنیم مربع جدید دیگری ساخته می شود که مساحت آن نصف مساحت مربع اول است.

مساحت مربع اول: $A_1=4$

مساحت مربع دوم: $A_2=2$

مساحت مربع سوم: $A_3=1$



دنباله هندسی : $4,2,1,\ldots \Rightarrow q=\frac{1}{2}$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10}=\frac{4(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}=8(1-\frac{1}{1024}) \Rightarrow S_{10}=8(\frac{1023}{1024})=\frac{1023}{128}$$

۸- گزینهٔ «۳»

ارتفاع توپ قبل از x اُمین پرتاب: $h_1=9\ ,\ h_2=3\ ,\ h_3=1,\ldots$

و مسافت طی‌شده توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین: $l_1=18\ ,\ l_2=6\ ,\ l_3=2,\ldots$

$S_n = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ قدرنسبت : $q = \frac{1}{3}$

در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{80}{3} = \frac{18(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow 1-\frac{1}{3^n} = \frac{80}{81} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{81} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^4} \Rightarrow n = 4$$

۹- گزینهٔ «۲»

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

(مجموع هفت جمله دوم) ۱۶ = مجموع هفت جمله اول

$$\Rightarrow a_1 + \cdots + a_7 = 16(a_8 + \cdots + a_{14})$$

$$\frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = 16(\frac{a_8(1-q^7)}{1-q}) \Rightarrow a_1 = 16a_8 \rightsquigarrow a_1 = 16a_1q^7 \rightarrow \frac{1}{16} = q^7$$

$$a_1 = 16(a_1q^7) \Rightarrow q^7 = \frac{1}{16}$$

نکته: در دنباله هندسی داریم: $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$

$$\frac{a_{35}}{a_{49}} = q^{35-49} = q^{-14} = \frac{1}{q^{14}} = (\frac{1}{q^7})^2 = (\frac{1}{\frac{1}{16}})^2 = 16^2 = 256$$

$$\frac{a_1q^{34}}{a_1q^{48}} = q^{34-48} = q^{-14} = \frac{1}{q^{14}} = \frac{1}{(q^7)^2} = \frac{1}{(\frac{1}{16})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{16})^2} = 16^2 = (2^4)^2 = 2^8 = 256$$

۱۰- گزینهٔ «۱»

مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

قدرنسبت بین جملات فرد: $q' = q^2$

تعداد جملات فرد: $m = \frac{n}{2} : S_m = \frac{a_1(1-q'^m)}{1-q'} \Rightarrow S_m = \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}$

$$S_n = 4S_m$$

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 4\frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1-q^2}{1-q} = 4 \Rightarrow 1+q = 4 \Rightarrow q = 3$$

مزدوج $(1-q)(1+q)$ $\quad 1 = \frac{4}{1+q}$

Homework (1)

۱ اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۴, ۵, ۶\}, \ldots$. مجموع اعداد واقع در دستهٔ بیستم، کدام است؟

۱) ۴۱۲۰ ۲) ۴۰۲۰

۳) ۴۰۱۰ ۴) ۳۹۸۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۹ جملهٔ اول برابر ۹۰ و جملهٔ هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جملات متوالی، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۳ جمله‌های دوم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی، به ترتیب، $\frac{۱}{۲}$ و ۴ هستند. مجموع هشت جملهٔ اول دنباله، کدام است؟

۱) ۶۳/۵ ۲) ۶۳/۷۵

۳) ۶۴/۵ ۴) ۶۷/۷۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هربار برخورد به زمین اندازهٔ ۰/۸ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۷

۳) ۶۰ ۴) ۶۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ مجموع ۱۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی -۲۶ و نسبت جملهٔ پانزدهم به جملهٔ ششم دنباله ۶ است. جملهٔ یازدهم دنباله، کدام است؟

۱) $-۱۳/۶$ ۲) $-۱۴/۸$

۳) $-۱۵/۶$ ۴) $-۱۶/۸$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۴, ۵, ۶\}, \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}, \ldots$

آخرین عدد دستهٔ اول برابر با ۱، آخرین عدد دستهٔ دوم برابر با $۳ = ۲ + ۱$، آخرین عدد دستهٔ سوم برابر با $۶ = ۳ + ۲ + ۱$ و ... . به‌همین ترتیب آخرین عدد دستهٔ ۲۰اُم برابر با $\frac{۲۰ \times ۲۱}{۲} = ۲۱۰$ است.

همچنین در دستهٔ ۲۰اُم، بیست عدد وجود دارد، پس اولین عدد دستهٔ ۲۰اُم برابر با $۱۹۱ = ۱ + ۲۱۰ - ۲۰$ است. پس مجموع اعداد دستهٔ ۲۰اُم برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۱۹۱ + ۲۱۰) = ۱۰(۴۰۱) = ۴۰۱۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۲ گزینه ۱

نکته ۱: در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جمله با جملهٔ اول $a_۱$ و قدر نسبت (اختلاف مشترک) d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

نکته ۲: در دنبالهٔ حسابی جملهٔ nام دنباله از رابطهٔ $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ محاسبه می‌شود.

مجموع ۹ جملهٔ اول برابر با ۹۰ و جملهٔ هفتم برابر با ۱۳ است. تفاضل جملات متوالی یعنی همان قدر نسبت (اختلاف مشترک) دنباله را به دست می‌آوریم.

$$S_۹ = ۹۰ \Rightarrow ۹۰ = \frac{۹}{۲}(۲a_۱ + ۸d) \Rightarrow ۲a_۱ + ۸d = ۲۰ \Rightarrow a_۱ + ۴d = ۱۰ \quad (*)$$

$$a_۷ = ۱۳ \Rightarrow ۱۳ = a_۱ + ۶d \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \begin{matrix} a_۱ + ۴d = ۱۰ \\ a_۱ + ۶d = ۱۳ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۲d = ۳ \Rightarrow d = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۳ گزینه ۲

نکته ۱: در یک دنبالهٔ هندسی اگر جملهٔ اول دنباله a_1 و نسبت مشترک (قدر نسبت) دنباله r باشد، مجموع n جملهٔ اول دنباله از رابطهٔ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ محاسبه می‌شود.

نکته ۲: در دنبالهٔ هندسی جملهٔ a_n از رابطهٔ $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

ابتدا نسبت مشترک (قدر نسبت) دنبالهٔ هندسی یعنی r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = \frac{1}{2} \\ a_5 = a_1 r^4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r} = r^3 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow r = 2$$

با استفاده از جملهٔ دوم دنباله، a_1 را به دست می‌آوریم:

$$a_2 = a_1 r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 \times 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$$

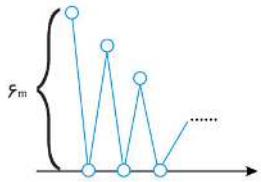
بنابراین S_8 برابر است با:

$$S_8 = \frac{\frac{1}{4}\left(1-(2)^8\right)}{1-2} = \frac{\frac{1}{4} \times (-255)}{-1} = \frac{255}{4} = 63/75$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ گزینه ۱

مسیری که توپ طی می‌کند به‌صورت زیر است:



$$S = ۶ + ۶ \times ۲ \times ۰/۸ + ۶ \times ۲ \times (۰/۸)^{۲} + \ldots + ۶ \times ۲ \times (۰/۸)^{۹۸} + ۶ \times ۲ \times (۰/۸)^{۹۹}$$
$$S = ۶ + ۱۲(۰/۸ + (۰/۸)^{۲} + \ldots + (۰/۸)^{۹۹})$$
$$S = ۶ + ۱۲ \times ۰/۸ \times \frac{۱ - (۰/۸)^{۹۹}}{۱ - ۰/۸}$$

دقت کنید که $(۰/۸)^{۹۹}$ بسیار کوچک است و می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم:

$$S = ۶ + ۱۲ \times ۴ = ۶ + ۴۸ = ۵۴$$

تذکر: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی از کتاب‌های ریاضی گروه تجربی حذف شده است، ولی این سوال در کنکور ۱۴۰۰ مطرح شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ گزینه ۱

$$S_{۱۰} = -۲۶ \Rightarrow \frac{۱۰}{۲}(۲a + ۹d) = -۲۶ \Rightarrow ۱۰a + ۴۵d = -۲۶$$
$$\frac{a_{۱۵}}{a_{۶}} = ۶ \Rightarrow \frac{a + ۱۴d}{a + ۵d} = ۶ \Rightarrow ۶a + ۳۰d = a + ۱۴d \Rightarrow ۵a + ۱۶d = ۰$$

$$-۲ \begin{cases} ۱۰a + ۴۵d = -۲۶ \\ ۵a + ۱۶d = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰a + ۴۵d = -۲۶ \\ -۱۰a - ۳۲d = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۱۳d = -۲۶ \Rightarrow d = -۲$$

$$۵a + ۱۶(-۲) = ۰ \Rightarrow ۵a = ۳۲ \Rightarrow a = ۶/۴$$
$$a_{۱۱} = a + ۱۰d = ۶/۴ + ۱۰(-۲) = -۱۳/۶$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

Homework (2)

۱ جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = ۳^{n-۱}$ است. چند جمله از این دنباله را باهم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۳۶۴ شود؟

۲ در یک دنبالهٔ هندسی مجموع شش جملهٔ اول $\frac{۵}{۴}$ برابر مجموع سه جملهٔ اول آن دنباله است. قدر نسبت را بیابید.

۳ در یک دنبالهٔ حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۱۰ و مجموع ۵ جمله بعدی برابر ۳۵ است، مجموع بیست جملهٔ اول دنباله را به‌دست آورید.

۴ در دنبالهٔ حسابی $-۱, ۲, ۵, \ldots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

۵ مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند، چقدر می‌شود؟

۶ حداقل چند جمله از دنباله هندسی $۱, ۴, ۱۶, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۷ طول ضلع مربعی یک متر است، ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم، پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ می‌شود؟

۸ به ازای یک مقدار x، اعداد x، $x-۸$، $x+۱۲$، به‌ترتیب سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. نسبت $\frac{S_۸}{S_۴}$ کدام است؟ (S_n مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۱) $\frac{۸۰}{۸۱}$
۲) $\frac{۸۲}{۸۱}$
۳) $\frac{۲۸}{۲۷}$
۴) $\frac{۲۶}{۲۷}$

۹ اگر $۲x+۳, x^۲, ۳x+۴$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی صعودی (افزایشی) بدهند، مجموع بیست جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۵۲۷/۵
۲) ۵۸۷/۵
۳) ۶۸۷/۵
۴) ۶۲۷/۵

۱۰ در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷/۵
۲) ۸
۳) ۸/۵
۴) ۹

۱۱ در یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت، مجموع هشت جملهٔ اول، $\frac{۱۷}{۱۶}$ برابر مجموع چهار جملهٔ اول آن دنباله است. نسبت جملهٔ هفتم به جملهٔ پنجم کدام است؟ (جملات دنباله همگی مثبت هستند.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۱۲ در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، حاصل‌ضرب سه جمله ابتدایی ۲۱۶ و جمله چهارم $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد، حاصل‌جمع ده جمله اول آن کدام است؟

۱) $\frac{۱۰۲۳}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۳۰۶۹}{۱۲۸}$

۳) $\frac{۱۰۲۳}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۳۰۶۹}{۲۵۶}$

۱۳ مقدار x از معادله $۲ + ۶ + ۱۸ + ۵۴ + \cdots + x = ۶۵۶۰$ کدام است؟

۱) ۴۳۷۴ ۲) ۶۵۶۱

۳) ۳۴۷۴ ۴) ۵۶۶۱

۱۴ مربعی به طول ضلع ۲cm مفروض است. اگر اوساط اضلاع مربع را به هم متصل کنیم و این را همچنان ادامه دهیم، مجموع مساحت‌های ۱۰ مربع اول به‌وجود آمده کدام است؟ (مربع به طول ضلع ۲، مربع اول در نظر گرفته شود.)

۱) $\frac{۵۱۱}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲۳}{۲۵۶}$

۳) $\frac{۵۱۱}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۱۰۲۳}{۱۲۸}$

۱۵ تعداد جملات یک دنباله هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن چهار برابر جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۶ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\}, \{۲, ۳, ۴\}, \cdots$، مجموع اعداد واقع در دسته نهم کدام است؟

۱) ۱۲۴۱ ۲) ۱۲۴۷

۳) ۱۲۵۱ ۴) ۱۲۷۳

۱۷ در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول، ۳ برابر مجموع دوازده جمله اول آن است، اگر جمله پنجم ۱۴ باشد، جمله هفتم کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۴

۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۱۸ در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله نهم و یازدهم برابر ۴۰ است، مجموع نوزده جمله اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۰

۳) ۳۱۰ ۴) ۳۸۰

۱۹ توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد، این توپ پس از x بار برخورد به زمین $\frac{۸۰}{۳}$ متر مسافت طی می‌کند، x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

۲۰ در یک دنباله هندسی، مجموع هفت جمله اول، شانزده برابر مجموع هفت جمله دوم آن دنباله است. جمله سی‌وپنجم این دنباله چند برابر جمله چهل‌ونهم آن است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶

۳) ۵۱۲ ۴) ۶۴

۲۱ در یک دنباله هندسی مجموع ده جمله اول $\frac{۲۱۱}{۲۴۳}$ برابر مجموع پنج جمله اول آن است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

پاسخ Homework (2)

۱

$۱, ۳, ۹, \ldots$

$q = ۳$

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$$

$$\frac{(۱)(۱ - ۳^n)}{۱ - ۳} = ۳۶۴ \Rightarrow ۳^n - ۱ = ۷۲۸ \Rightarrow ۳^n = ۷۲۹$$

$$۳^n = ۳^۶ \Rightarrow n = ۶$$

۲

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$$

$$\frac{S_۶}{S_۳} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{\frac{a_۱(۱ - q^۶)}{۱ - q}}{\frac{a_۱(۱ - q^۳)}{۱ - q}} = \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱ - q^۶}{۱ - q^۳} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{(۱ - q^۳)(۱ + q^۳)}{۱ - q^۳} = \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱ + q^۳ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow q^۳ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow q = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}$$

۳

$S_۵ = ۱۰ \Rightarrow a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۵ = ۱۰$

$(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۵) + (a_۶ + a_۷ + \cdots + a_{۱۰}) = ۱۰ + ۳۵$

$S_{۱۰} = ۴۵$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$

$$\begin{cases} S_۵ = ۱۰ : \frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴d) = ۱۰ \Rightarrow ۲a_۱ + ۴d = ۴ \\ S_{۱۰} = ۴۵ : \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) = ۴۵ \Rightarrow ۲a_۱ + ۹d = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۰ \\ d = ۱ \end{cases}$$

$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(۰) + ۱۹(۱)) = ۱۹۰$

۴

$S_n > ۱۲۵$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$

$\frac{n}{۲}(۲(-۱) + (n-۱)(۳)) > ۱۲۵$

$d = ۲ - (-۱) = ۳$

$\frac{n}{۲}(۳n - ۵) > ۱۲۵ \Rightarrow n(۳n - ۵) > ۲۵۰$

$۳n^۲ - ۵n - ۲۵۰ > ۰$

$\Rightarrow n > ۱۰ \xrightarrow{n \in N}$ حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع نمایید

۵

$۶, ۱۲, ۱۸, \ldots \qquad a_n = ۶n \qquad d = ۶$

$۱۰۰ \le a_n < ۱۰۰۰$

$۱۰۰ \le ۶n < ۱۰۰۰$

$\frac{۵۰}{۳} \le n < \frac{۵۰۰}{۳} \Rightarrow n = \{۱۷, ۱۸, \ldots, ۱۶۶\}$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۶ $= ۱۶۶ - ۱۷ + ۱ = ۱۵۰$

اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۶ $= \{۱۰۲, ۱۰۸, \ldots\}$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$

$\Rightarrow S_{۱۵۰} = \frac{۱۵۰}{۲}(۲(۱۰۲) + (۱۵۰ - ۱)(۶)) = ۸۲۳۵۰$

۶

$$\text{قدرنسبت } q = \frac{۴}{۱} = ۴$$

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow \frac{۱(۱ - ۴^n)}{۱ - ۴} > ۵۰۰ \Rightarrow \frac{۴^n - ۱}{۳} > ۵۰۰$$

$$۴^n - ۱ > ۱۵۰۰ \Rightarrow ۴^n > ۱۵۰۱ \Rightarrow n \geq ۶$$

حداقل ۶ جمله اول دنباله هندسی باید جمع شوند.

۷

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \cdots + (\frac{۱}{۲})^n \geq \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$q = \frac{۱}{۲}$$

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{۲^n})}{۱ - \frac{۱}{۲}} > \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲^n} > \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{۲^n} \leq \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۲^n \geq ۱۰۰ \Rightarrow n \geq ۷$$

پس از حداقل ۷ مرحله، ۹۹% سطح مربع رنگ می‌شود.

۸

گزینه ۲

$$۱۲ + x, x, ۸ - x \Rightarrow x^۲ = (۱۲ + x)(۸ - x) \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۸ \text{ غ‌ق‌ق} & ; ۴ , -۸ , ۱۶ \text{ دنباله غیرنزولی:} \\ x = ۶ & ; ۱۸ , ۶ , ۲ \text{ دنباله نزولی:} \end{cases}$$

$$۱۸, ۶, ۲ \Rightarrow q = \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{S_۸}{S_۴} = ۱ + q^۴ \Rightarrow \frac{S_۸}{S_۴} = ۱ + (\frac{۱}{۳})^۴ = \frac{۸۲}{۸۱}$$

۹ گزینه ۴

$۲x+۳, x^۲, ۳x+۴$

$۲x^۲ = (۲x+۳)+(۳x+۴) \Rightarrow ۲x^۲ - ۵x - ۷ = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱ : ۱, ۱, ۱ \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۷}{۲} : ۱۰, \frac{۴۹}{۴}, \frac{۲۹}{۲} \Rightarrow d = \frac{۹}{۴} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(۱۰) + ۱۹(\frac{۹}{۴})) = ۱۰(\frac{۲۵۱}{۴}) = ۶۲۷/۵$$

۱۰ گزینه ۲

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_۴ = \frac{۴}{۲}(۲a_۱ + ۳d) = ۱۵ \Rightarrow ۴a_۱ + ۶d = ۱۵$$

$$S_۹ = (a_۱ + \cdots + a_۴) + (a_۵ + \cdots + a_۹) = ۱۵ + ۳۰ = ۴۵$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۲}(۲a_۱ + ۸d) = ۴۵ \Rightarrow a_۱ + ۴d = ۵$$

$$\begin{cases} ۴a_۱ + ۶d = ۱۵ \\ a_۱ + ۴d = ۵ \end{cases} \Rightarrow a_۱ = ۳, d = \frac{۱}{۲}$$

$$a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d = ۳ + ۵ = ۸$$

۱۱ گزینه ۲

$$\frac{S_۸}{S_۴} = \frac{۱۷}{۱۶} \Rightarrow ۱ + q^۴ = \frac{۱۷}{۱۶} \Rightarrow q^۴ = \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{\text{جملات دنباله مثبت}} q = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{a_۷}{a_۵} = q^۲ = \frac{۱}{۴}$$

۱۲ گزینه ۲

$$\underbrace{\frac{a}{q}}_{\text{جملهٔ اول}}\ ,\ \underbrace{a}_{\text{جملهٔ دوم}}\ ,\ \underbrace{aq}_{\text{جملهٔ سوم}}\ ,\ \underbrace{\frac{۳}{۲}}_{\text{جملهٔ چهارم}}$$

$$(\frac{a}{q})(a)(a\cdot q)=۲۱۶\Rightarrow a^{۳}=۲۱۶\Rightarrow a=۶$$

$$\frac{a_{۴}}{a_{۲}}=q^{۲}\Rightarrow\frac{\frac{۳}{۲}}{۶}=q^{۲}\Rightarrow q^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\begin{cases}q=-\frac{۱}{۲} & \text{غ ق ق}\\ q=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۱۲(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲۴(۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}})$$

$$S_{۱۰}=۲۴(\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴})=\frac{۳۰۶۹}{۱۲۸}$$

۱۳ گزینه ۱

دنباله هندسی : $۲,۶,۱۸,\cdots$ $(۶^{۲}=۲\times۱۸)$

$$q=۳$$

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow ۶۵۶۰=\frac{۲(۱-۳^n)}{۱-۳}\Rightarrow ۳^n-۱=۶۵۶۰$$

$$۳^n=۶۵۶۱\Rightarrow ۳^n=۳^{۸}\Rightarrow n=۸$$

جمله هشتم:

$$a_n=a_۱q^{n-۱}\Rightarrow a_۸=۲\times۳^{۷}=۴۳۷۴$$

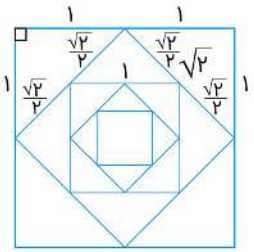
$$x=۴۳۷۴$$

۱۴ گزینه ۴

مساحت مربع اول: $A_۱ = ۴$

مساحت مربع دوم: $A_۲ = ۲$

مساحت مربع سوم: $A_۳ = ۱$



دنباله هندسی : $۴, ۲, ۱, \cdots \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}$

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \Rightarrow S_{۱۰} = \frac{۴(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۸(۱-\frac{۱}{۱۰۲۴})$$

$$S_{۱۰} = ۸(\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}) = \frac{۱۰۲۳}{۱۲۸}$$

۱۵ گزینه ۱

مجموع n جمله اول: $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$

قدرنسبت بین جملات فرد: $q' = q^۲$

تعداد جملات فرد:

$$m = \frac{n}{۲} : S_m = \frac{a_۱(۱-q'^m)}{۱-q'} \Rightarrow S_m = \frac{a_۱(۱-(q^۲)^{\frac{n}{۲}})}{۱-q^۲}$$

$$S_n = ۴S_m$$

$$\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} = ۴\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q^۲} \Rightarrow \frac{۱-q^۲}{۱-q} = ۴ \Rightarrow ۱+q = ۴ \Rightarrow q = ۳$$

۱۶ گزینه ۱

$\underbrace{\{۱\}}_{\text{دستهٔ اول}}, \underbrace{\{۲,۳,۴\}}_{\text{دستهٔ دوم}}, \cdots, \underbrace{\{۶۵,۶۶,\cdots,۸۱\}}_{\text{دستهٔ نهم}}$

دسته نهم یک دنباله حسابی با جمله اول $a_۱ = ۶۵$ و $d = ۱$ و جمله آخر ۸۱ است، درنتیجه:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۸۱ = ۶۵ + (n-۱)(۱) \Rightarrow n = ۱۷$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(۶۵ + ۸۱) = ۱۲۴۱$$

۱۷ گزینه ۱

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$S_{۲۰} = ۳S_{۱۲} \Rightarrow ۱۰(۲a_۱ + ۱۹d) = ۳(۶)(۲a_۱ + ۱۱d)$$

$$۱۰a_۱ + ۹۵d = ۱۸a_۱ + ۹۹d \Rightarrow ۸a_۱ + ۴d = ۰ \Rightarrow ۲a_۱ + d = ۰$$

$$a_۵ = a_۱ + ۴d = ۱۴$$

$$\begin{cases} ۲a_۱ + d = ۰ \\ a_۱ + ۴d = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow a_۱ = -۲, d = ۴$$

$$a_۷ = a_۱ + ۶d = -۲ + ۲۴ = ۲۲$$

۱۸ گزینه ۴

$$a_۹ + a_{۱۱} = ۴۰ \Rightarrow a_۱ + ۸d + a_۱ + ۱۰d = ۴۰ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۸d = ۴۰$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۹} = \frac{۱۹}{۲}(۲a_۱ + ۱۸d) = \frac{۱۹}{۲} \times ۴۰ = ۳۸۰$$

۱۹ گزینه ۳

ارتفاع توپ قبل از xاُمین پرتاب:

$$h_۱ = ۹, h_۲ = ۳, h_۳ = ۱, \cdots$$

و مسافت طی شده توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین:

$$l_۱ = ۱۸, l_۲ = ۶, l_۳ = ۲, \cdots$$

$$S_n = l_۱ + l_۲ + \cdots + l_n \qquad \text{قدرنسبت} : q = \frac{۱}{۳}$$

در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow \frac{۸۰}{۳} = \frac{۱۸(۱ - (\frac{۱}{۳})^n)}{۱ - \frac{۱}{۳}} \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۳^n} = \frac{۸۰}{۸۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳^n} = \frac{۱}{۸۱} \Rightarrow \frac{۱}{۳^n} = \frac{۱}{۳^۴} \Rightarrow n = ۴$$

۲۰ گزینه ۲

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$$

(مجموع هفت جمله دوم) ۱۶ = مجموع هفت جمله اول

$$\Rightarrow a_۱ + \cdots + a_۷ = ۱۶(a_۸ + \cdots + a_{۱۴})$$

$$\frac{a_۱(۱ - q^۷)}{۱ - q} = ۱۶(\frac{a_۸(۱ - q^۷)}{۱ - q}) \Rightarrow a_۱ = ۱۶a_۸$$

$$a_۱ = ۱۶(a_۱ q^۷) \Rightarrow q^۷ = \frac{۱}{۱۶}$$

نکته: در دنباله هندسی داریم: $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$

$$\frac{a_{۳۵}}{a_{۴۹}} = q^{۳۵-۴۹} = q^{-۱۴} = \frac{۱}{q^{۱۴}} = (\frac{۱}{q^۷})^۲ = (\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}})^۲ = ۱۶^۲ = ۲۵۶$$

۲۱ گزینه ۳

نکته: در دنباله هندسی داریم:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + q^n$$

$$\frac{S_{۱۰}}{S_۵} = ۱ + q^۵ \Rightarrow ۱ + q^۵ = \frac{۲۱۱}{۲۴۳} \Rightarrow q^۵ = -\frac{۳۲}{۲۴۳} \Rightarrow q = -\frac{۲}{۳}$$

درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

(ویژه حسابان فصل ۱ درس ۴ و کنکور هر دو رشته)

قدرمطلق عدد حقیقی x که با $|x|$ نمایش داده می‌شود، در اصل فاصله آن عدد بر روی محور طول‌ها تا مبدأ مختصات می‌باشد که همواره عددی مثبت است. به عنوان مثال $|۵|=۵$ و $|-۲|=۲$ است.

تابع $f(x)=|x|$ را تابع قدرمطلق می‌نامند که به فرم‌های زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}=x.\text{sgn}(x)=\max(x,-x)=\sqrt[۲n]{x^{۲n}}$$

نکته: تابع $\text{sgn}(x)$ (تابع علامت) به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

تمرین: به ازای هر $x\in[۲,+\infty)$ مقدار عبارت $\sqrt{x^۲-۴x+۴}-\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{(x-۲)^۲}-\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|x-۲|-|۲x+۱|\xrightarrow{x\geq ۲}=x-۲-(۲x+۱)=-x-۳$$

تمرین: حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$$

پاسخ:

$$\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}-\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^۲}+\sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^۲}=\underbrace{|\sqrt{۳}-۱|}_{\text{مثبت}}-\underbrace{|\sqrt{۳}+۱|}_{\text{مثبت}}+\underbrace{|\sqrt{۳}-۲|}_{\text{منفی}}=(\sqrt{۳}-۱)-(\sqrt{۳}+۱)+(۲-\sqrt{۳})=-\sqrt{۳}$$

تمرین: ضابطهٔ توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $f(x)=۲|x-۱|+۱$ ب) $f(x)=||x|-۱|$

پاسخ: الف)

$$f(x)=\begin{cases}۲(x-۱)+۱=۲x-۱ & x\geq ۱\\ ۲(-(x-۱))+۱=-۲x+۳ & x<۱\end{cases}$$

ب)

$$x\geq ۰\Rightarrow f(x)=|x-۱|=\begin{cases}-x+۱ & ۰\leq x<۱\\ x-۱ & x\geq ۱\end{cases}$$

$$x<۰\Rightarrow f(x)=|-x-۱|=\begin{cases}x+۱ & -۱\leq x<۰\\ -x-۱ & x<-۱\end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}-x-۱ & x<-۱\\ x+۱ & -۱\leq x<۰\\ -x+۱ & ۰\leq x<۱\\ x-۱ & x\geq ۱\end{cases}$$

خواص قدرمطلق

۱) $|x| \geq 0$

۲) $|-x| = |x|$

۳) $|xy| = |x||y| \ , \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$|x^n| = |x|^n \ (n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{n=2k} |x^{2k}| = |x|^{2k} = x^{2k}$

۵) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

۶) $|x| = a \begin{cases} \xrightarrow{a>0} x = \pm a \\ \xrightarrow{a<0} \text{غیرقابل‌قبول} \end{cases}$

تمرین: به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt{x^2-2x+1} = 1-x$ همواره برقرار است؟

۱) $-1 < x < 1$ ۲) $x \geq 1$ ۳) $x \leq 1$ ۴) $x \leq -1$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

از آن‌جا که از قدرمطلق قرینه بیرون آمده است، پس عبارت داخل قدرمطلق کوچک‌تر یا مساوی صفر بوده است:

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

نکته: فاصله دو نقطه a و b بر روی محور xها برابر است با: $|a-b|$

تمرین: اعدادی روی محور xها بیابید که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه به طول ۱ و -3 برابر ۵ باشد.

پاسخ: ابتدا با تعیین علامت خود را از شر قدرمطلق خلاص می‌کنیم

$$|x-1| + |x-(-3)| = 5 \Rightarrow |x-1| + |x+3| = 5$$

x	-3	1
$x-1$	$-$	$-$ 0 $+$
$x+3$	$-$ 0	$+$ $+$

$x \leq -3 : -x+1-x-3 = 5 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow x = \frac{-7}{2} = -3.5$ ✓

$-3 \leq x \leq 1 : -x+1+x+3 = 5 \Rightarrow 4 = 5$ غیرقابل‌قبول

$x \geq 1 : x-1+x+3 = 5 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$ ✓

● دقت کنید که جواب هر ضابطه، حتماً باید در بازه موردنظر باشد مثلاً $x = \frac{-7}{2}$ متعلق به بازه $x \leq -3$ است.

نکته: نامعادلات شامل قدرمطلق:

$|U| \leq a \xleftrightarrow{a>0} -a \leq U \leq a \Leftrightarrow U^2 \leq a^2$

$|U| \geq a \xleftrightarrow{a>0} U \geq a \cup U \leq -a \Leftrightarrow U^2 \geq a^2$

تمرین: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x^2-1| = 2$

ب) $(x-1)^2 - |x-1| - 2 \leq 0$ (فرض: $t = |x-1|$)

پ) $|x^3-8| \leq |x^2+2x+4|$

ت) $|x^2+3x+2| + |x-4| = 0$

ث) $|x-1| \leq |x+2|$

ج) $|x-1| - 4 \leq 3$

پاسخ:

الف) $|x| = a \xrightarrow{a>0} x = \pm a \Rightarrow x^2 - 1 = \pm 2$

$x^2 = 3 \Rightarrow |x| = \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ (۲ جواب)

$x^2 = -1$ غ.ق.ق

ب) $|x|^{2k} = |x^{2k}| = x^{2k} \ , \ |x| \leq a \xrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a \Rightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 2 \leq 0$

ادامه از صفحه قبل

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-1|-2\le 0 \\ |x-1|+1>0 \end{cases} \Rightarrow (|x-1|-2)(|x-1|+1)\le 0 \Rightarrow |x-1|-2\le 0 \Rightarrow |x-1|\le 2 \Rightarrow -2\le x-1\le 2 \Rightarrow -1\le x\le 3$$

همواره مثبت

پ) $|xy|=|x||y| \Rightarrow |x^3-8|=|(x-2)(x^2+2x+4)|\le |x^2+2x+4|$

از آن‌جا که عبارت x^2+2x+4 دارای $\Delta<0$ و $a>0$، پس همواره مثبت است و از قدرمطلق خارج می‌شود.

$$\Rightarrow |x-2|(x^2+2x+4)\le x^2+2x+4 \Rightarrow |x-2|\le 1 \Rightarrow -1\le x-2\le 1 \Rightarrow 1\le x\le 3$$

ت) جمع چند عبارت همواره مثبت زمانی صفر است که تک‌تک آن‌ها صفر باشند و دارای ریشه مشترک باشند.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-1,-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ریشه مشترک}} x=-2$$

ث) $|x-1|\le|x+2|$ برای حذف قدرمطلق می‌توان دو طرف رابطه را به توان ۲ رساند.

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-1)^2\le(x+2)^2 \Rightarrow x^2-2x+1\le x^2+4x+4 \Rightarrow -6x\le 3 \Rightarrow x\ge \frac{-1}{2}$$

ج) $||x-1|-4|\le 3 \Rightarrow -3\le |x-1|-4\le 3 \Rightarrow 1\le |x-1|\le 7$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1\le x-1\le 7 \Rightarrow 2\le x\le 8 \\ 1\le 1-x\le 7 \Rightarrow 0\le -x\le 6 \Rightarrow -6\le x\le 0 \end{cases}$$

تمرین: حدود a را طوری بیابید که معادله $|x-1|+|a-1|=2$ دارای جواب نباشد.

پاسخ:

$$|x-1|=2-|a-1| \xrightarrow{\text{عددمنفی}=|x|\text{دارای جواب نمی‌باشد}} 2-|a-1|<0 \Rightarrow |a-1|>2$$

$$\Rightarrow a-1>2 \cup a-1<-2 \Rightarrow a>3 \cup a<-1$$

نکته: نامساوی مثلث به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$|x+y|\le|x|+|y| \Rightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \Rightarrow |x+y|=|x|+|y| \\ xy<0 \Rightarrow |x+y|<|x|+|y| \end{cases}$$

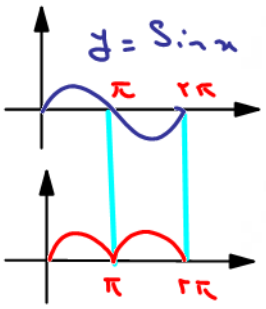
تمرین: معادله روبه‌رو را حل کنید.

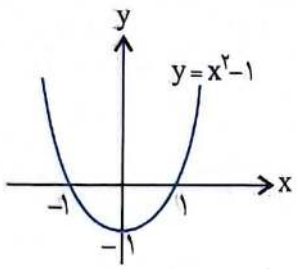
$$|x^2+2x-3|=|x^2-1|+|2x-2|$$

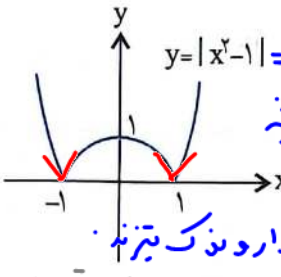
$$|a+b|=|a|+|b| \Rightarrow ab\ge 0 \Rightarrow (x^2-1)(2x-2)\ge 0 \Rightarrow 2(x-1)^2(x+1)\ge 0 \Rightarrow (x+1)\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$$

نمودارهای قدرمطلقی

برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ ابتدا $f(x)$ را رسم کرده، سپس بخشی از نمودار که زیر محور xهاست را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.





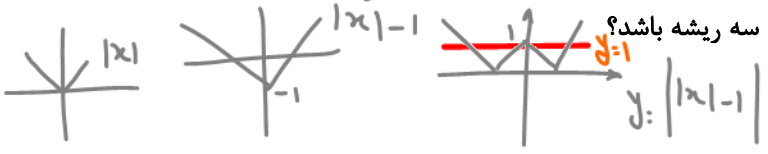


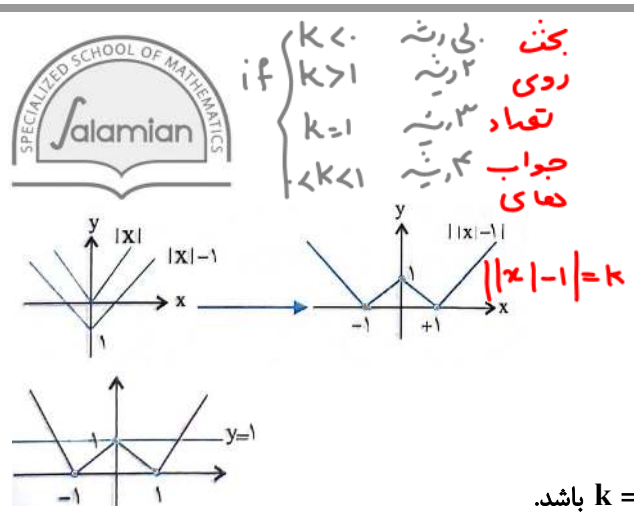
توابع قدرمطلقی دارای ناحیه داخل قدرمطلق توسط دارند و زاویه دارو نوک تیز.

درس: یکی از روش‌های حل معادله تبدیل معادله به تساوی ۲ تابع قابل رسم است. توابع ۲ طرف تساوی را رسم کرده و نقاط برخورد نمودارها را بدست می‌آوریم.

تمرین: مقدار k چه‌قدر باشد تا معادله $||x|-1|=k$ دارای سه ریشه باشد؟

پاسخ:

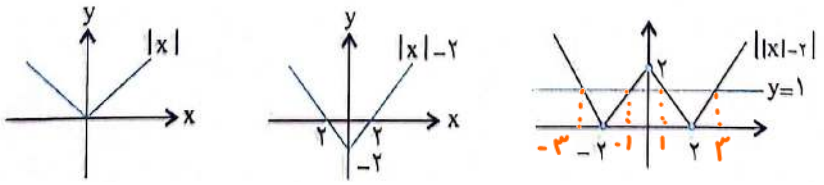




بنابراین برای این‌که خط افقی $y=k$ نمودار را در ۳ نقطه قطع کند باید $k=1$ باشد.

تمرین: ابتدا نمودار تابع $f(x)=||x|-2|$ را رسم کنید. سپس معادله $f(x)=1$ را به روش هندسی و جبری حل نمایید. *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

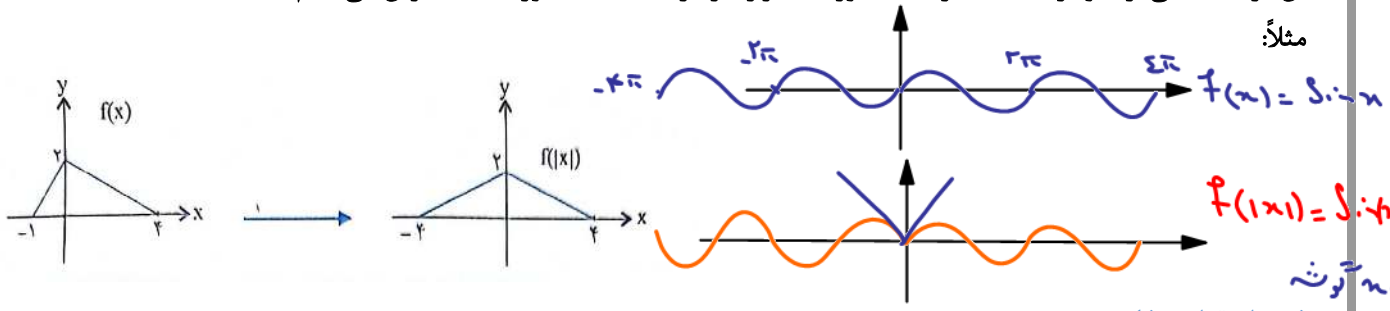


معادله دارای ۴ جواب است که به روش جبری جواب‌های معادله عبارت‌اند از:

$$||x|-2|=1 \begin{cases} |x|-2=1 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3 \\ |x|-2=-1 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

برای رسم نمودار تابع $f(|x|)$ ابتدا $f(x)$ را رسم کرده، سپس بخشی از نمودار که سمت چپ محور yها می‌باشد را حذف کرده و به جای آن قرینه بخشی از نمودار که سمت راست محور yها قرار دارد را نسبت به محور yها جایگزین می‌کنیم:

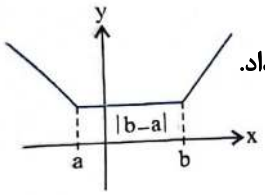
مثلاً:



نمودار توابع خاص

۱) تابع گلدان $y=|x-a|+|x-b|$

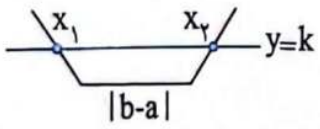
نمودار تابع به فرم روبه‌رو می‌باشد که دارای خصوصیات زیر است:



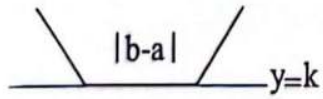
- کف گلدان $|b-a|$ است که برای تعیین آن کافی است ریشه یکی از قدرمطلق‌ها را به دلخواه در تابع قرار داد.
- دارای دو خط با شیب ۲ و -2 است.
- محور تقارن آن خط عمودی واقع در وسط ریشه‌ها به معادلهٔ $x=\frac{a+b}{2}$ است.
- برد تابع گلدانی $[|b-a|,+\infty)$ است.

نکته: بحث در تعداد جواب‌های معادلات شامل گلدان: $|x-a|+|x-b|=k$

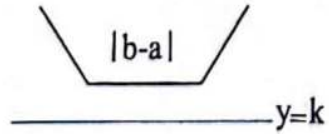
الف) اگر $k > |b-a|$ باشد، دارای دو جواب است:



ب) اگر $k = |b-a|$ باشد، معادله دارای بی‌شمار جواب $(a \le x \le b)$ است:



پ) اگر $k < |b-a|$ باشد معادله دارای جواب نیست:



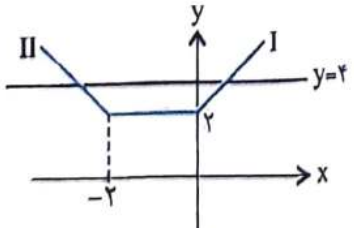
تمرین: حدود m را طوری بیابید که معادله $|x-2|+|x+1|=m-1$ دارای دو جواب باشد.

پاسخ:

$$|b-a|=|2-(-1)|=3 \Rightarrow m-1>3 \Rightarrow m>4$$

تمرین: جواب‌های معادله $|x+2|+|x|=4$ را تعیین کنید.

پاسخ: از آن‌جا که خط $y=4$ بالاتر از کف گلدان می‌باشد پس دارای دو جواب است که برای تعیین جواب‌ها کافی است معادله خطوط مورب گلدان را با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق تعیین کنیم.



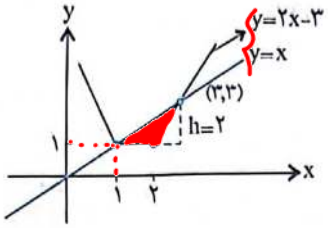
$$\text{I) } x>0 \Rightarrow y=x+2+x=2x+2 \Rightarrow 2x+2=4 \Rightarrow x=1$$

$$\text{II) } x<-2 \Rightarrow y=-x-2-x=-2x-2 \Rightarrow -2x-2=4 \Rightarrow x=-3$$

تمرین: مساحت محدود به منحنی نمودار تابع $f(x)=|x-2|+|x-1|$ و خط $y=x$ چه‌قدر است؟

پاسخ: ابتدا نمودار تابع گلدان را رسم کرده که برای تعیین مساحت محصور بین منحنی و خط $y=x$، به معادلهٔ شاخهٔ سمت راست گلدون احتیاج داریم. از آن‌جا که $x>2$ است، معادله خط مذکور به صورت $y=2x-3$ است؛ پس محل تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x=3, y=3 \Rightarrow$$

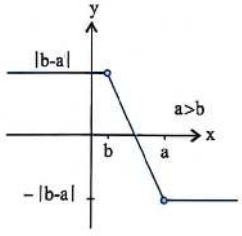


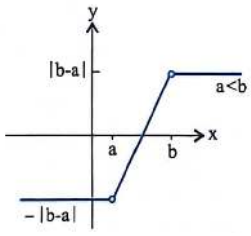
$$\Rightarrow S=\frac{2\times 1}{2}=1$$

ارتفاع — قاعده

۲) تابع سرسره: $y=|x-a|-|x-b|$

نمودار تابع به فرم زیر می‌باشد که دارای خصوصیات زیر است:

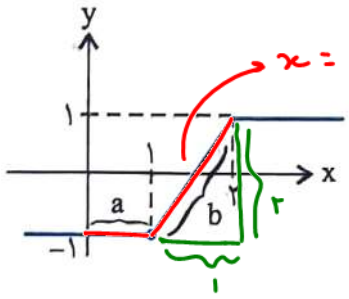




- نمودار این توابع متشکل از دو نیم خط و یک پاره‌خط با شیب $+2$ یا -2 است.
- برد تابع $0 \le x \le |b-a|$ است.
- مرکز تقارن، نقطه‌ای روی محور xها و به طول $\frac{a+b}{2}$ است.

تمرین: طول خط شکسته نمودار تابع $y=|x-1|-|x-2|$ در بازه $0 \le x \le 2$ چند است؟

پاسخ:

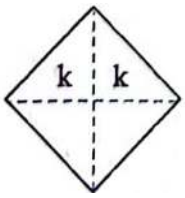


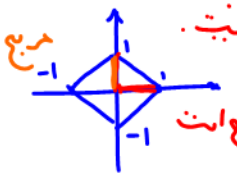
$a=۱$

فیثاغورس : $b^۲=۱^۲+۲^۲ \Rightarrow b=\sqrt{۵} \Rightarrow a+b=۱+\sqrt{۵}$

۳) تابع مربعی:

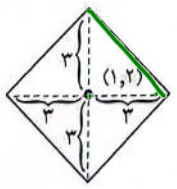
توابع به فرم $|x-a|+|y-b|=k$ در صفحه مختصات، محیط یک مربع به مرکز (a,b) و قطر $۲k$ و مساحت $۲k^۲$ است.

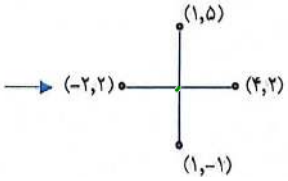




تمرین: مختصات دو سر اقطار نمودار تابع $|x-۱|+|y-۲|=۳$ را تعیین کنید.

پاسخ:





در توابع مربعی به فرم $|mx-a|+|m'y-b|=k$ اگر $m \neq m'$ باشد، نمودار به صورت لوزی به مرکز $(\frac{a}{m},\frac{b}{m'})$ تبدیل می‌شود.

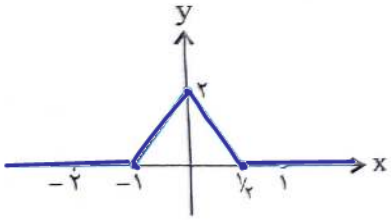
۴) تابع به صورت مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق درجه اول:

نمودار تابع $y=b_۱|x-a_۱|+b_۲|x-a_۲|+\cdots+b_n|x-a_n|$ متشکل از دو نیم‌خط و $(n-۱)$ پاره‌خط می‌باشد.

برای رسم شکل ابتدا مقدار تابع به ازای ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق را تعیین کرده و از به هم وصل‌کردن این نقاط، $(n-۱)$ پاره‌خط حاصل می‌شود و برای تعیین دو نیم‌خط ابتدا و انتهای شکل کافی است عددی به دلخواه بعد از آخرین ریشه و قبل از اولین ریشه در تابع جای‌گذاری شود.

تمرین: نمودار تابع $y=|x+۱|+|۲x-۱|-۳|x|$ را رسم کنید.

پاسخ:

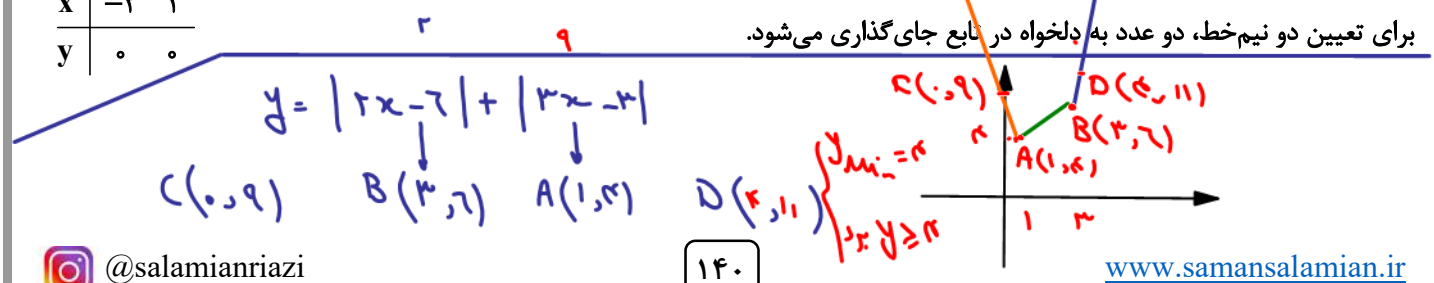


ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق

$$\begin{cases} x=-۱ \Rightarrow y=۰ \\ x=۰ \Rightarrow y=۲ \\ x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۰ \end{cases}$$

x	−۲	۱
y	۰	۰

برای تعیین دو نیم‌خط، دو عدد به دلخواه در تابع جای‌گذاری می‌شود.



Homework (1)

۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = ۵ - |x - ۱|$ و $y = |x|$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲ مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x + ۲| + |۲x - ۱| = ۳$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) ۴
۳) $\frac{۱۶}{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴ نمودار تابع $y = |\frac{۱}{۲}x| - ۲$ را ۴ واحد به‌طرف xهای منفی و یک واحد به‌طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-۳/۵$
۲) -۳
۳) $-۲/۵$
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ اگر رابطهٔ $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطهٔ تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیرصفر x و y و z چگونه اند؟

۱) مساوی هم
۲) هم علامت
۳) مثبت
۴) منفی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

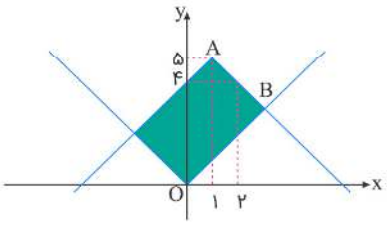
پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = ۵ - \lvert x - ۱ \rvert$	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = \lvert x \rvert$	۱	۰	۱



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - \lvert x - ۱ \rvert = \lvert x \rvert \Rightarrow \lvert x \rvert + \lvert x - ۱ \rvert = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x + x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۳ \\ -x - x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳, ۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(۳ - ۱)^۲ + (۳ - ۵)^۲} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|BO| = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$S = |AB| \times |BO| = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲ گزینه ۲

معادلهٔ $|x+۲|+|۲x-۱|=۳$ را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

x		-۲		$\frac{۱}{۲}$	
$۲x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
$x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$

$$(۱): x \le -۲ \Rightarrow -۲x+۱-x-۲=۳ \Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \notin (-\infty,-۲]$$

$$(۲): -۲ < x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x+۱+x+۲=۳ \Rightarrow x=۰ \in (-۲,\frac{۱}{۲}]$$

$$(۳): x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱+x+۲=۳ \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \in (\frac{۱}{۲},+\infty)$$

پس معادله دو جواب $\left\{۰,\frac{۲}{۳}\right\}$ دارد و مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

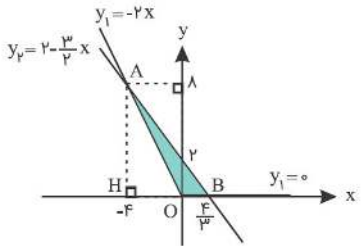
هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq ۰$ و $x < ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = ۰ & ; x \geq ۰ \\ -x - x = -۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطهٔ A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$۲ - \frac{۳}{۲}x = -۲x \Rightarrow -۲x + \frac{۳}{۲}x = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = ۲ \Rightarrow x = -۴$$
$$\xrightarrow{y=-۲x} y = ۸ \Rightarrow A(-۴, ۸)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\overset{\Delta}{ABO}$ برابر ۸ است و مساحتش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\overset{\Delta}{ABO}} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \frac{۴}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۴ گزینه ۲

اگر نمودار تابع $y = \left|\frac{۱}{۲}x\right| - ۲$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم، معادله به‌صورت $y = \left|\frac{۱}{۲}(x+۴)\right| - ۲$ تبدیل می‌شود و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم معادله به‌صورت $y = \left|\frac{۱}{۲}(x+۴)\right| - ۲ + ۱$ تبدیل می‌شود که برای محاسبهٔ محل تقاطع آن‌ها، دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y_۱ = \left|\frac{۱}{۲}x\right| - ۲ \\ y_۲ = \left|\frac{۱}{۲}(x+۴)\right| - ۱ \end{cases} \xrightarrow{y_۱ = y_۲} \frac{۱}{۲}|x| - ۲ = \frac{۱}{۲}|x+۴| - ۱ \xrightarrow{\times ۲} |x| - |x+۴| = ۲$$

$$x < -۴ \Rightarrow -x + x + ۴ = ۲ \Rightarrow ۴ = ۲ \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$-۴ \le x \le ۰ \Rightarrow -x - x - ۴ = ۲ \Rightarrow -۲x = ۶ \Rightarrow x = -۳$$

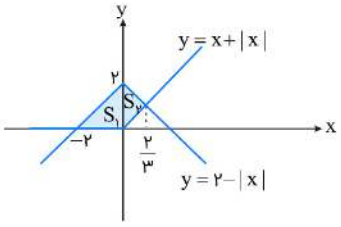
$$x > ۰ \Rightarrow x - x - ۴ = ۲ \Rightarrow -۴ = ۲ \quad \text{غ.ق.ق}$$

تذکر: به‌جای حل معادلهٔ $|x| - |x+۴| = ۲$ می‌توانیم گزینه‌ها را در این معادله امتحان کنیم که گزینهٔ "۲" یعنی $x = -۳$ در معادله صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵ گزینه ۳

$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ; x \ge ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases} \quad , \quad y = ۲ - |x| = \begin{cases} ۲ - x & ; x \ge ۰ \\ x + ۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$



$$۲ - x = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ گزینه ۲

طبق نامساوی مثلثی داریم: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $|a+b| \leq |a| + |b|$ و تساوی در صورتی برقرار است که $ab \geq 0$ باشد. یعنی باید a و b هر دو هم علامت باشند تا تساوی برقرار شود.

حال اگر این مطلب را به رابطهٔ $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ تعمیم دهیم و با توجه به این که x و y و z سه عدد غیر صفرند، باید x و y و z هم علامت باشند تا تساوی برقرار شود. (البته جواب سؤال را با عددگذاری و امتحان گزینه ها هم می‌توانستیم به دست آوریم.)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

Homework (2)

۱ نمودار تابع $f(x) = ||x| - ۲|$ را رسم کنید، سپس معادلهٔ $f(x) = ۱$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

دو معادله زیر را حل کنید.

۲ $\frac{۲ - x}{|x - ۳|} = ۱$

۳ $\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱} = ۲x + ۱$

۴ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $||x - ۱| - ۲| = ۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۵ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a \cdot b > ۰$، کدام گزینه همواره برقرار نیست؟

۱) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ۲) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

۳) $|a - b| = |a| - |b|$ ۴) $|a + b| = |a| + |b|$

۶ مجموعه جواب نامعادله $|۳x| > |۲x + ۱| + |۱ - x|$ کدام است؟

۱) $x < ۱$ ۲) $-\frac{۱}{۲} < x < ۱$

۳) $-\frac{۱}{۲} < x < ۰$ ۴) $x > -\frac{۱}{۲}$

۷ جواب نامعادله $|\frac{۲x - ۱}{x - ۳}| > ۱$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۲, \frac{۴}{۳}], x \neq ۳$ ۲) $\mathbb{R} - (-۲, \frac{۴}{۳}), x \neq ۳$

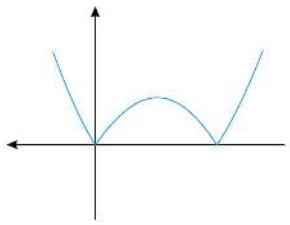
۳) $[-۲, ۳)$ ۴) $(-\infty, \frac{۴}{۳}]$

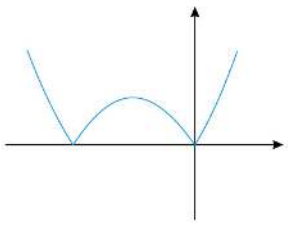
۸ در مجموعه جواب نامعادله $(x - ۴) \cdot |x + ۱| < ۳x - ۹$ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

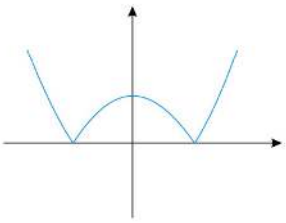
۱) ۲ ۲) ۳

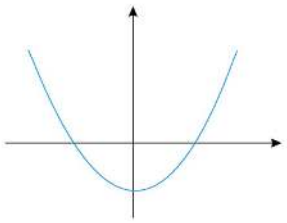
۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۹ نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x^۲ - ۲x| = ۲$ کدام است؟

۱) یک ریشه
۲) دو ریشه
۳) سه ریشه
۴) بدون ریشه

۱۱ مساحت بین نمودار $y = ۹ - |x|$ و محور xها کدام است؟

۱) ۸۱
۲) ۱۶۲
۳) $\frac{۸۱}{۲}$
۴) ۲۷

۱۲ مساحت بین نمودار $f(x) = |x - ۱| + |x + ۲|$ و خط $y = ۵$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۱۳ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $||x - ۲| - ۱| = ۳$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۴ در مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲ < |۲x - ۱| < ۵$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) بدون عدد صحیح

۱۵ مساحت محدود بین دو نمودار تابع $y = |x - ۱|$ و $y = ۲ - |x|$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

۱۶ نسبت حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $||x-۲|-۳|=۲$ به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{-۴۸}{۷}$ ۲) $\frac{-۶۳}{۸}$

۳) $\frac{۶۳}{۸}$ ۴) $\frac{۴۸}{۷}$

۱۷ به ازای هر $x<-۱$، حاصل $\sqrt{x^۲+۲x+۱}-\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲x-۱$

۳) -۳ ۴) $-۲x+۱$

۱۸ معادلهٔ $|۳x-۹|=۷-x$ را حل نمایید.

۱۹ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y=|x-۱|+۳x-۲$$

۲۰ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|۵x-۲|=|۳x-۱|+|۱-۲x|$$

۲۱ معادلهٔ $|x^۲-۱|=۳$ را به روش هندسی حل کنید.

۲۲ معادلات زیر را حل نمایید.

الف

$$|x|=x^۲-۲x$$

ب

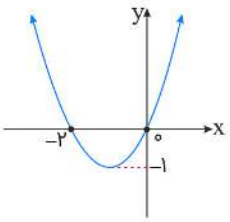
$$\sqrt{۳x+۱}+x=۳$$

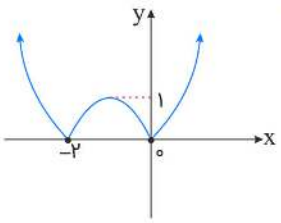
۲۳ به ازای چه مقداری از k معادلهٔ $|x-۲|-|x+۳|=k$ دارای بی‌شمار جواب است؟

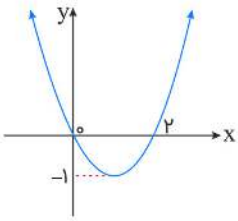
۱) ۵ ۲) -۵

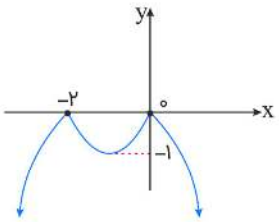
۳) ± ۵ ۴) هیچ‌کدام

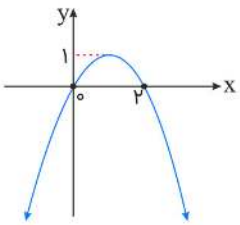
۲۴ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $-|f(x)|$ به کدام صورت است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۲۵ معادلهٔ $|x+1| = ||x| - 1|$ دارای چند ریشهٔ مثبت است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۲۶ معادلهٔ $|x - \frac{۳}{۲}| = x^۲ + ۳x + ۳$ دارای چند ریشه است؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) بی‌شمار

۲۷ حاصل عبارت $\sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}} + \sqrt{۴ + ۲\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

۲۸ مجموعه جواب نامعادله $|x| > x^۲ - ۲$ کدام است؟

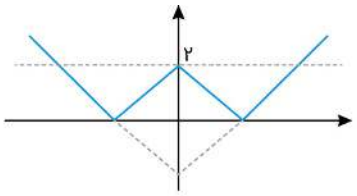
۱) $(-۱, ۱)$
۲) $(-۲, ۲)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(-۲, ۱)$

۲۹ به‌ازای اعداد حقیقی a و b، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $|a| + |b| \leq |a + b|$
۲) $|a| - |b| \leq |a - b|$
۳) $\sqrt{a^۲} = |a|$
۴) هیچ‌کدام

پاسخ Homework (2)

۱



$y = ۱ \Rightarrow$ چهار جواب دارد.

$$||x| - ۲| = ۱ \Rightarrow |x| - ۲ = \pm ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۱ \times ۱ = ۳ \Rightarrow x = \pm ۳ \\ ۱ \times ۱ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

۲

$$x > ۳ : \frac{۲ - x}{x - ۳} = ۱ \Rightarrow ۲ - x = x - ۳ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$x < ۳ : \frac{۲ - x}{۳ - x} = ۱ \Rightarrow ۲ - x = ۳ - x \Rightarrow ۲ = ۳ \quad \text{غ.ق.ق}$$

۳

$$|x - ۱| = ۲x + ۱$$

$$\begin{cases} x \geq ۱ : x - ۱ = ۲x + ۱ \Rightarrow x = -۲ \quad \text{غ.ق.ق} \\ x < ۱ : -x + ۱ = ۲x + ۱ \Rightarrow \boxed{x = ۰} \end{cases}$$

۴

گزینه ۲

$$\begin{cases} |x - ۱| - ۲ = ۱ \Rightarrow |x - ۱| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۴ \\ x - ۱ = -۳ \Rightarrow x = -۲ \end{cases} \\ |x - ۱| - ۲ = -۱ \Rightarrow |x - ۱| = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۲ \\ x - ۱ = -۱ \Rightarrow x = ۰ \end{cases} \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها $= ۴ + (-۲) + ۲ + ۰ = ۴$

۵

گزینه ۳

گزینه‌های "۱"، "۲" و "۴" برقرار و صحیح هستند، ولی گزینه "۳" مثال نقض دارد.

$$\begin{cases} a = ۲ \\ b = ۵ \end{cases} \xrightarrow{a \cdot b > ۰} |a - b| = |a| - |b| \Rightarrow |۲ - ۵| = |۲| - |۵| \Rightarrow ۳ \neq -۳$$

۶ گزینه ۲

روش اول: امتحان گزینه‌ها:

گزینه "۴"

$x = ۱ : ۰ + ۳ > ۳$ غ‌ق‌ق $\Rightarrow$ حذف

گزینه "۱"

$x = -۱ : ۲ + ۱ > ۳$ غ‌ق‌ق $\Rightarrow$ حذف

$x = ۰ : ۱ + ۱ > ۰$ ق‌ق گزینه ۳ حذف می‌شود

روش دوم: خواص قدرمطلق

$$|a - b| = |b - a| \Rightarrow |۱ - x| = |x - ۱|$$

$$\underbrace{|x - ۱|}_{a} + \underbrace{|۲x + ۱|}_{b} > \underbrace{|۳x|}_{a+b}$$

بنا به خاصیت:

$$|a| + |b| > |a + b| \Rightarrow a \cdot b < ۰$$

$$(x - ۱) \cdot (۲x + ۱) < ۰$$

x		$-\frac{۱}{۲}$		۱	
$(x-۱)(۲x+۱)$	+	۰	−	۰	+

ج

$(-\frac{۱}{۲}, ۱)$

۷ گزینه ۱

$$\frac{|۲x-۱|}{|x-۳|} > ۱ \xrightarrow{x\neq ۳} |۲x-۱| > |x-۳|$$

به توان ۲ برسانید:

$$(۲x-۱)^۲ > (x-۳)^۲ \quad (I)$$

$$۴x^۲ - ۴x + ۱ > x^۲ - ۶x + ۹$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۸ > ۰ \Rightarrow x < -۲ \cup x > \frac{۴}{۳} \quad (II)$$

x		-۲		$\frac{۴}{۳}$	
$۳x^۲+۲x-۸$	+	۰	−	۰	+
		ج			ج

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} (-\infty,-۲) \cup (\frac{۴}{۳},+\infty) - \{۳\} \text{ یا } \mathbb{R} - [-۲, \frac{۴}{۳}] \ , x\neq ۳$$

۸ گزینه ۲

چون منظور سؤال اعداد طبیعی نامعادله هستند، پس باید محدوده $x > ۰$ را در نظر بگیرید، درنتیجه عبارت داخل قدر مطلق مثبت خواهد شد و قدر مطلق برداشته می‌شود:

x		۱		۵	
$x^۲-۶x+۵$	+	۰	−	۰	+
			ج		

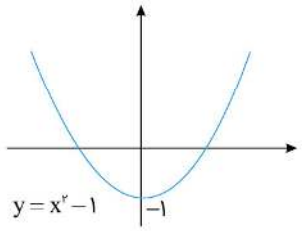
$$(x-۴)\cdot(x+۱) < ۳x-۹ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ < ۳x - ۹$$

$$x^۲ - ۶x + ۵ < ۰$$

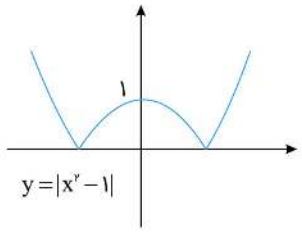
$$(۱,۵) \Rightarrow \text{اعداد طبیعی} = \{۲,۳,۴\}$$

۹ گزینه ۳

مرحلهٔ اول: نمودار x^2 را یک واحد در راستای قائم پایین بیاورید:

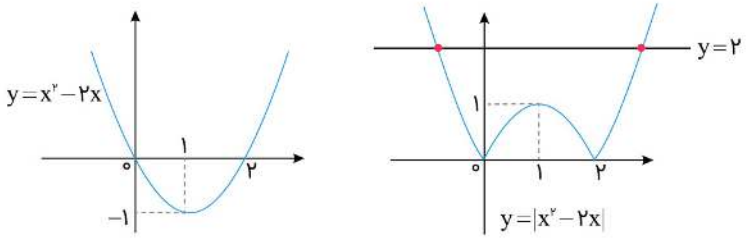


مرحلهٔ دوم: آن قطعه از منحنی که زیر محور xها است را به‌صورت قرینه نسبت به محور xها بالا بیاورید:



۱۰ گزینه ۲

روش هندسی:

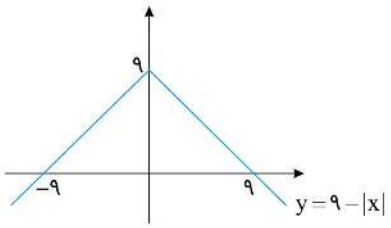


$|x^2-2x|=2 \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

۱۱ گزینه ۱

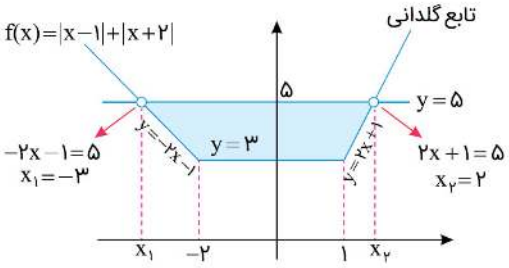
شکل حاصل یک مثلث است:

$$y = ۰ : ۹ - |x| = ۰ \Rightarrow |x| = ۹ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۹ \\ x_۲ = -۹ \end{cases}$$



$$S = \frac{۹(۱۸)}{۲} = ۸۱$$

۱۲ گزینه ۳



$$\text{مساحت ذوزنقه } S = \frac{\text{ارتفاع} \times (\text{مجموع دو قاعده})}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{(۵ + ۳)(۲)}{۲} = ۸$$

۱۳ گزینه ۲

$$||x - ۲| - ۱| = ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - ۲| - ۱ = ۳ \Rightarrow |x - ۲| = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۴ \Rightarrow x_۱ = ۶ \\ x - ۲ = -۴ \Rightarrow x_۲ = -۲ \end{cases} \\ |x - ۲| - ۱ = -۳ \Rightarrow |x - ۲| = -۲ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = ۶ + (-۲) = ۴$$

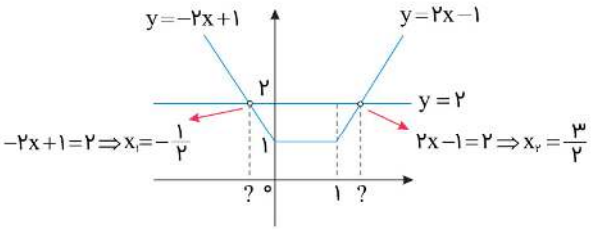
۱۴ گزینه ۱

$$۲ < |۲x - ۱| < ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲ < ۲x - ۱ < ۵ \Rightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۳ \\ \text{یا} \\ -۵ < ۲x - ۱ < -۲ \Rightarrow -۲ < x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-۲ , -\frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۳}{۲} , ۳)$$

اعداد صحیح در جواب نامعادله: $\{-۱ , ۲\}$

۱۵ گزینه ۱



$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow ۲ - |x| = |x - ۱|$$

$$\underbrace{|x - ۱| + |x|}_{\text{تابع گلدانی}} = \underbrace{۲}_{\text{تابع ثابت}}$$

$$\text{مساحت} : S = \frac{(۲ + ۱)(۱)}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۱۶ گزینه ۲

$$|x - ۲| - ۳ = ۲ \Rightarrow |x - ۲| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۵ \Rightarrow x_۱ = ۷ \\ x - ۲ = -۵ \Rightarrow x_۲ = -۳ \end{cases}$$

$$|x - ۲| - ۳ = -۲ \Rightarrow |x - ۲| = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x_۳ = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x_۴ = ۱ \end{cases}$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = ۷(-۳)(۳)(۱) = -۶۳$$

$$\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها} = ۷ + (-۳) + (۳) + ۱ = ۸$$

$$\text{نسبت} = \frac{-۶۳}{۸}$$

۱۷ گزینه ۳

$$A=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$$

$$A=|x+1|-|x-2| \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{x<-1} A=-(x+1)+(x-2)$$

$$A=-x-1+x-2=-3$$

۱۸

$$|3x-9|=7-x \xrightarrow{7-x\geq 0} \begin{cases} 3x-9=7-x \\ \text{یا} \\ 3x-9=-7+x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x=16\Rightarrow x=4 & \text{ق.ق} \\ 2x=2\Rightarrow x=1 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

۱۹

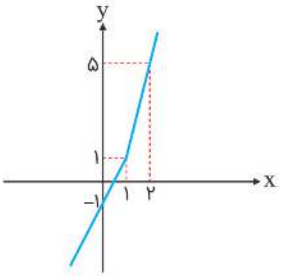
$$y=\underset{x=1}{|x-1|}+3x-2 \Rightarrow y=\begin{cases} x-1+3x-2 & ;1\leq x \\ -x+1+3x-2 & ;x<1 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} 4x-3 & ;1\leq x \\ 2x-1 & ;x<1 \end{cases}$$

x		1	
x−1	−	0	+

x	1	2
y	1	5

x	1	0
y	1	−1



۲۰ می‌دانیم اگر $|a+b|=|a|+|b|$ آنگاه $ab \geq 0$ و همچنین $|a|=|-a|$. پس:

$$|1-2x|=|2x-1| \Rightarrow |\underbrace{5x-2}_{a+b}|=|\underbrace{3x-1}_{a}|+|\underbrace{2x-1}_{b}|$$

$$\xrightarrow{ab\geq 0} (3x-1)(2x-1) \geq 0$$

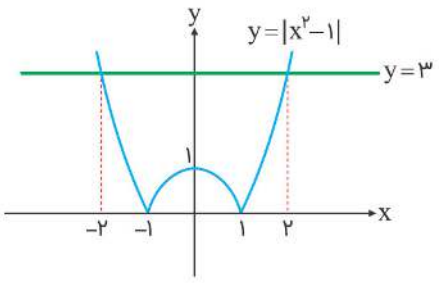
x		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
p	+	۰	−	۰	+

$$(-\infty, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$$

۲۱

$y=3$

$y=|x^2-1|$



$x=2 \quad , \quad x=-2$

ریشه‌های معادله

۲۲ الف

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x=x^2-2x \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ -x=x^2-2x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ غ ق ق} \\ x=1 \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

ب

$$\sqrt{3x+1} = 3 - x \overset{(1)}{\Rightarrow} 3x+1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 8 \end{cases}$$

$x = 8$ غیرقابل‌قبول است، زیرا (۱) را منفی می‌کند.

۲۳ گزینه ۳

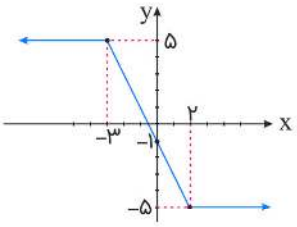
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

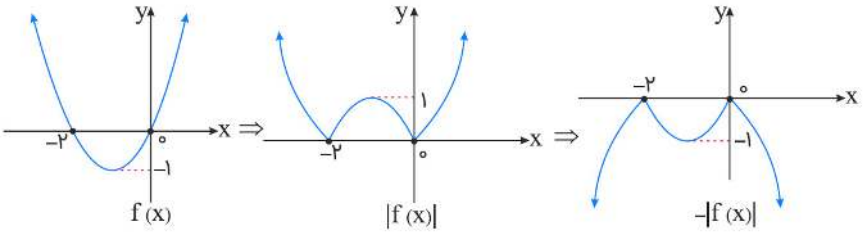
x		-3		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -3 \Rightarrow -x + 2 + x + 3 = 5 \\ -3 \le x \le 2 \Rightarrow -x + 2 - x - 3 = -2x - 1 \\ x > 2 \Rightarrow x - 2 - x - 3 = -5 \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، نمودارهای $y = k$ و $y = |x-2| - |x+3|$ به ازای $k = 5$ و $k = -5$ بی‌شمار نقطهٔ برخورد دارند.

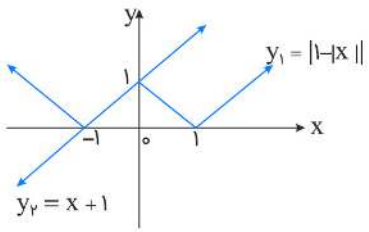


۲۴ گزینه ۳



۲۵ گزینه ۱

از روش هندسی کمک می‌گیریم. همان‌طور که دیده می‌شود، تمام بازهٔ $[-۱\ ,\ ۰]$ ریشه‌های این معادله $(y_۱ = y_۲)$می‌باشند که شامل هیچ عدد مثبتی نمی‌باشد.



۲۶ گزینه ۳

از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$x \geq \frac{۳}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۳ = x - \frac{۳}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۲x + \frac{۹}{۲} = ۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه ندارد}$$

$$x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۳ = -x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۴x + \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۲ - \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} < \frac{۳}{۲} \\ x_۲ = -۲ + \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} < \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

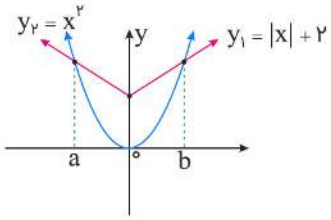
پس دو ریشه دارد.

۲۷ گزینه ۱

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}} &= \sqrt{(۲ - \sqrt{۳})^۲} = |۲ - \sqrt{۳}| = ۲ - \sqrt{۳} \\ \sqrt{۴ + ۲\sqrt{۳}} &= \sqrt{(\sqrt{۳} + ۱)^۲} = |\sqrt{۳} + ۱| = \sqrt{۳} + ۱ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲ - \sqrt{۳} + \sqrt{۳} + ۱ = ۳$$

۲۸ گزینه ۲

از روش هندسی استفاده می‌کنیم.



$$\underbrace{|x| + ۲}_{y_۱} > \underbrace{x^۲}_{y_۲}$$

باتوجه‌به نمودار، در بازه $(a\ ,\ b)$ داریم $y_۱ > y_۲$. حال محل برخورد دو نمودار، یعنی a و b را می‌یابیم:

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow |x| + ۲ = x^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \xrightarrow{x \geq ۰} x = ۲ \Rightarrow b = ۲ \\ x < ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \xrightarrow{x < ۰} x = -۲ \Rightarrow a = -۲ \end{cases}$$

پس مجموعه جواب این نامعادله $(-۲\ ,\ ۲)$ است.

۲۹ گزینه ۱

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

فصل دوم: هندسه

BOX 1: ترسیم‌های هندسی (صفحه ۲۶ تا ۳۰ کتاب درسی)

در بستهٔ اول، برخی از ترسیم‌های هندسی که به کمک خط‌کش و پرگار انجام می‌شود را بررسی می‌کنیم.

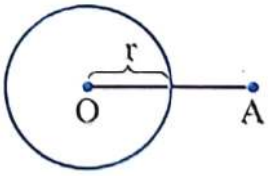
ترسیم‌های هندسی

از خط‌کش برای رسم خطی که از دو نقطهٔ معلوم می‌گذرد و هم‌چنین برای رسم پاره‌خط با طول معلوم استفاده می‌کنیم. از پرگار برای رسم دایره‌ای که مرکز و شعاع آن معلوم باشد، استفاده می‌نیم.

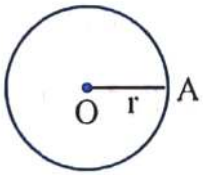
دایره

دایره به مرکز O و اندازهٔ شعاع r را با $C(O,r)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم هر نقطه که روی دایره قرار دارد به فاصلهٔ r از نقطهٔ O قرار دارد و هم‌چنین هر نقطه‌ای که فاصلهٔ آن از نقطهٔ O برابر r باشد، روی دایرهٔ $C(O,r)$ قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، دایرهٔ $C(O,۶)$، دایره‌ای به مرکز O و اندازهٔ شعاع $r=۶$ است. فاصلهٔ هر نقطه روی این دایره (روی محیط دایره) از نقطهٔ A برابر ۶ واحد است.

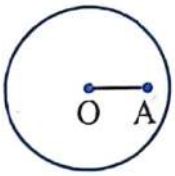
نکته: ۱) هر نقطه‌ای که درون دایره باشد، فاصلهٔ آن از نقطهٔ O، کم‌تر از r و هر نقطه‌ای که خارج از دایره باشد، فاصلهٔ آن از نقطهٔ O، بیشتر از r می‌باشد.



$A \Rightarrow OA > r$ خارج دایره واقع است.



$A \Rightarrow OA = r$ روی دایره قرار دارد.



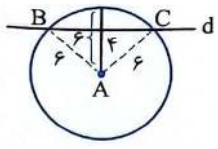
$A \Rightarrow OA < r$ درون دایره قرار دارد.

۲) برای پیداکردن نقطه (نقاط) به فاصلهٔ معلوم از نقطهٔ ثابت O، با استفاده از پرگار دایره‌ای به مرکز O و شعاع فاصلهٔ معلوم رسم می‌کنیم.

تمرین: خط d و نقطهٔ A خارج آن به فاصلهٔ ۴ متر از آن قرار دارد. نقاطی روی خط d مشخص کنید که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ A برابر ۶ متر باشد.

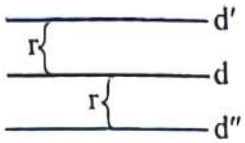
تمرین: خط d و نقطهٔ A خارج آن به فاصلهٔ ۴ متر از آن قرار دارد. نقاطی روی خط d مشخص کنید که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ A برابر ۶ متر باشد.

پاسخ: مجموعه‌ای از نقاط که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ A برابر ۶ متر باشد، تما منقاط روی دایره به مرکز A و اندازهٔ شعاع $r=۶$ متر است. به مرکز A و اندازهٔ شعاع ۶ متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی خط d و دایرهٔ رسم‌شده، جواب می‌باشد.



مطابق شکل، دو نقطهٔ B و C روی خط d، جواب می‌باشند.

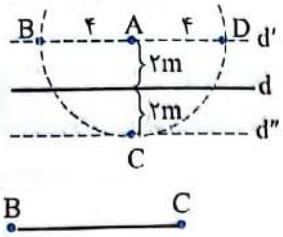
نکته: تمام نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ r از خط ثابت d می‌باشند، مجموعه نقاط روی دو خط d' و d'' که موازی خط d و به فاصلهٔ r از خط d هستند، می‌باشند:



تمرین: ۱) نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ متر از خط d قرار دارد. نقطه‌هایی به فاصلهٔ ۴ متری از نقطهٔ A و ۲ متری از خط d مشخص کنید.

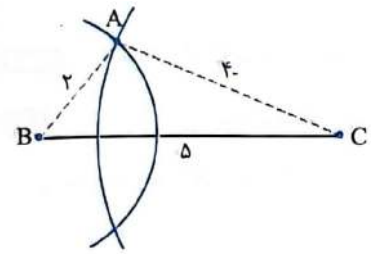
۲) مثلثی با طول اضلاع ۲، ۴ و ۵ واحد رسم کنید.

پاسخ: ۱) به مرکز A و شعاع ۴ متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. تمام نقاط روی این دایره به فاصلهٔ ۴ متر از نقطهٔ A می‌باشند. از طرفی تمام نقاط به فاصلهٔ ۲ متر از خط d، نقاط روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲ متر از آن می‌باشند. نقاط تلاقی دایره و این دو خط موازی (d' و d'')، جواب خواهند بود. بنابراین نقاط B، C و D، جواب مسئله می‌باشند.



۲) ابتدا پاره‌خط BC به طول ۵ واحد رسم می‌کنیم.

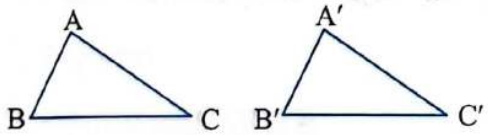
نقطه‌ای مانند A می‌خواهیم که فاصلهٔ آن تا نقطهٔ C برابر ۴ و فاصله تا نقطهٔ B برابر ۲ واحد باشد. به مرکز C و شعاع ۴ واحد و به مرکز B و شعاع ۲ واحد دایره‌هایی رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره جواب می‌باشد:



یادآوری از همنهشتی مثلث‌ها

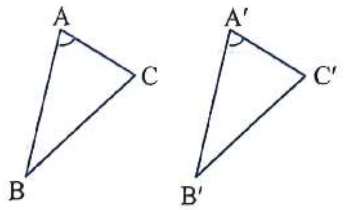
- دو مثلث در سه حالت همنهشت هستند:

حالت اول: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت هستند.



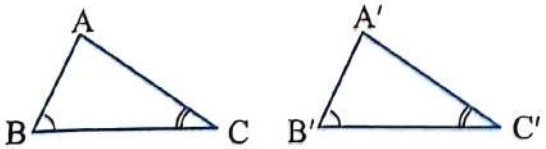
$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ض ض ض)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت دوم: اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از یک مثلث دیگر با هم برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.



$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A} \\ AC = A'C' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(ض زض)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت سوم: اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

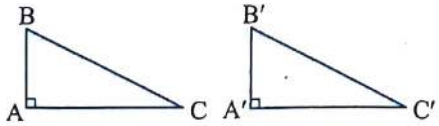


$$BC = B'C'$$
$$\left.\begin{matrix} \cancel{AB = A'B'} \\ \hat{B} = \hat{B'} \\ \hat{C} = \hat{C'} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(زض ز)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تذکر: در نوشتن اجزای متناظر دقت کنید که اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های برابر، با هم برابر هستند.

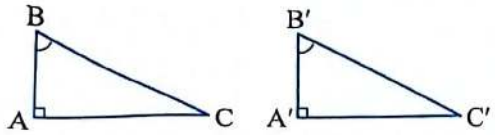
- دو مثلث قائم‌الزاویه به دو حالت زیر نیز همنهشت می‌باشند:

حالت اول:اگ روتر و یک ضلع قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه، با وتر و یک ضلع قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری برابر باشد، آن دو مثلث با هم همنهشت هستند.



$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(و ض)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت دوم: اگر وتر و یک زاویهٔ تند از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویهٔ تند از مثلث قائم‌الزاویهٔدیگر با هم برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

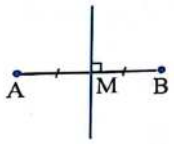


$$\left.\begin{matrix} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(و ز)} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

با تعریف عمودمنصف یک پاره‌فط آشنایی دارید. ابتدا تعریف عمودمنصف را می‌آوریم و سپس یک ویژگی مهم از عمودمنصف را به صورت یک قضیه می‌نویسیم.

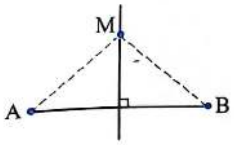
برخی خواص عمودمنصف

تعریف: عمودمنصف پاره‌خط AB، خطی است که از نقطهٔ M وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است.



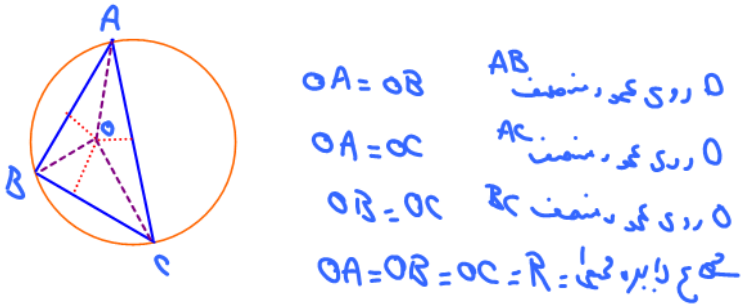
قضیه: هر نقطه‌ای که فاصلهٔ آن از دو نقطه به یک اندازه باشد، حتماً روی عمودمنصف پاره‌خط واصل این دو نقطه قرار دارد و برعکس.

مثال: در شکل مقابل، عمودمنصف پاره‌خط AB رسم شده است و نقطهٔ M روی این عمودمنصف قرار دارد. طبق ویژگی عمودمنصف $MA - MB$ است.



نکته: اگر سه عمودمنصف مثلث ABC را رسم کنیم، همدیگر را در یک نقطه مانند O قطع می‌کنند و اگر O را به A، B و C وصل کنیم، آن‌گاه $OA = OB = OC$ و دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA، از C و B می‌گذرد. این دایره را دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گوییم.

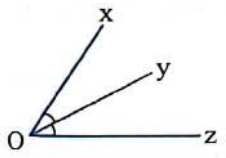
همانند عمودمنصف پاره‌فط، با تعریف نیمساز یک زاویه آشنایی دارید. بعد از بیان تعریف نیمساز یک زاویه، یک ویژگی مهم از آن را به عنوان یک قضیه می‌نویسیم.



برخی خواص نیمساز

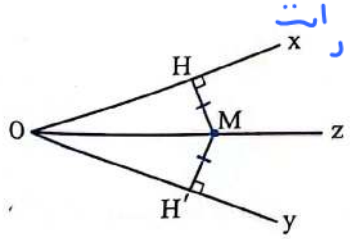
تعریف: نیمساز یک زاویه، خطی است که آن زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

در شکل روبه‌رو، اگر Oy نیمساز زاویهٔ xOz باشد، آن‌گاه داریم: $x\hat{O}y = y\hat{O}z$

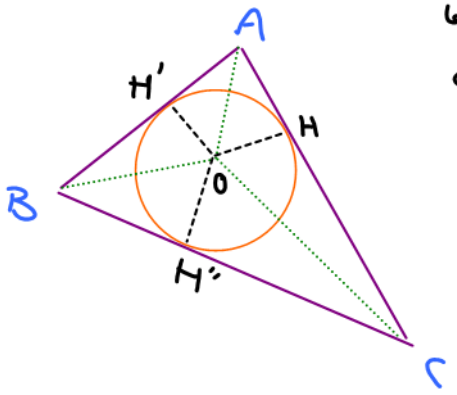


قضیه: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مثال: در شکل مقابل، نیمساز زاویهٔ xOy رسم شده است (Oz). اگر از نقطهٔ M روی نیمساز، دو عمود بر اضلاع زاویه رسم کنیم، آن‌گاه $MH = MH'$.



نکته: اگر سه نیمساز مثلث ABC را رسم کنیم، همدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند و اگر از O سه عمود بر سه ضلع رسم کنیم تا اضلاع را در H، H' و H'' قطع کنند، آن‌گاه $OH = OH' = OH''$ و دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH، بر سه ضلع مثلث مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گوییم.



پرسش‌های تشریحی:

● در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۱- از یک نقطه خارج یک خط، فقط یک خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد.

۲- بی‌شمار نقطه در صفحه وجود دارد که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است.

۳- نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت برابر مقداری ثابت است، روی دایره قرار دارد.

۴- نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از دو ضلع زاویه به یک اندازه است، روی نیمساز قرار دارند.

۵- مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌ها می‌باشد. (فرداد ۱۴۰۲)

۶- مرکز دایره‌ای که بر سه ضلع مثلث مماس است، نقطهٔ برخورد نیمسازها می‌باشد.

● درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های سه سوال زیر را مشخص کنید.

۷- از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، بی‌شمار خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد. ن

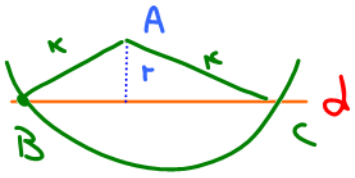
۸- نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت O، ۴ واحد باشد، درون دایرهٔ $C(O,5)$ قرار دارند. >

۹- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d قرار دارد. فقط یک نقطه روی خط d و به فاصلهٔ ۲ واحد از نقطهٔ A وجود دارد. >

۱۰- خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن و به فاصلهٔ ۲ از آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d و به فاصلهٔ ۴ از نقطهٔ A مشخص کنید. B, C

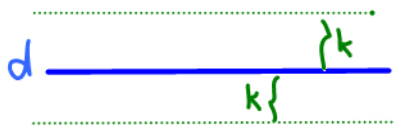
(مشابه فعالیت ۵ صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

به مرکز A و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در B و C قطع کند.



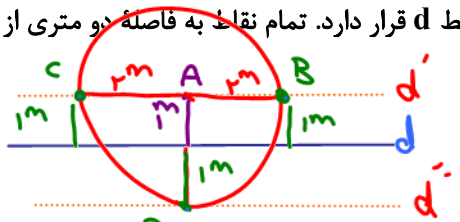
۱۱- تمام نقاطی که به فاصلهٔ k از خط داده‌شدهٔ d باشد را مشخص کنید.

بی‌شمار نقطه در دو خط موازی d به فاصله k از d قرار دارند.



۱۲- نقطهٔ A به فاصلهٔ یک متری از خط d قرار دارد. تمام نقاط به فاصلهٔ دو متری از نقطهٔ A و یک متری از خط d را مشخص کنید.

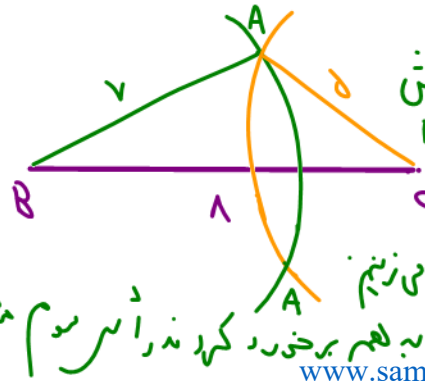
به فاصله یک متری از d دو خط موازی با دو طرف d رسم می‌کنیم. دایره به مرکز A و شعاع ۲ می‌کشیم.



۱۳- مراحل رسم مثلث با طول اضلاع ۵، ۷ و ۸ واحد را توضیح دهید. (مشابه فعالیت ۶ صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

هر جا این ۲ خط را قطع کرد جواب است و ۲ جواب دارد B و C و D

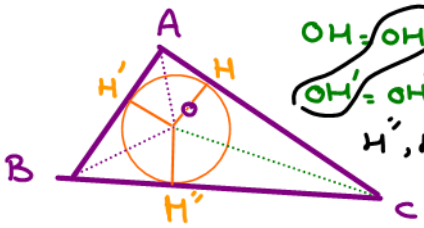
ابتدا ضلع بزرگتر یعنی ۸ = BC را رسم می‌کنیم. به مرکز B شعاع ۷ و به مرکز C شعاع ۵ کمان می‌زنیم. هر جا که این ۲ کمان به هم برخورد کرد را به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث بعنی A حاصل شود.



۱۴- مثلث دلخواه ABC را رسم کنید. نیمسازهای زاویه‌های A و B را رسم کنید تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. از نقطهٔ O سه عمود OH، OH′ و OH″ را بر سه ضلع مثلث رسم کنید. (تمرین ۳ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

آ) به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. نشان دهید این دایره از نقاط H′ و H″ نیز می‌گذرد.

ب) نشان دهید نیمساز زاویهٔ C نیز از نقطهٔ O می‌گذرد.



O روی نیمساز $\hat{A}$: $OH = OH'$

O روی نیمساز $\hat{B}$: $OH' = OH''$

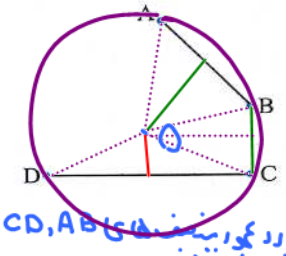
$\rightarrow OH = OH' = OH''$ فاصله O تا ۳ ضلع مثلث برابر است که همان شعاع دایره می‌باشد پس دایره از H، H′، H″ هم می‌گذرد. (ب)

O روی نیمساز $\hat{C}$ هست $\rightarrow OH'' = OH$

۱۵- در مثلث ABC، نیمساز دو زاویهٔ B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. دایره‌ای رسم کنید که بر سه ضلع مثلث مماس باشد. طریقهٔ رسم دایره را توضیح دهید. (شهریور ۱۴۰۲)

همان شکل سؤال قبل است. به مرکز O و شعاع OH (یا H′ یا H″ که از O به AC رسم شده) دایره می‌کشیم به هر ۳ ضلع مثلث از داخل مماس می‌شود و همان دایره می‌خواست.

۱۶- دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل روبه‌رو شده‌اند. (تمرین ۱ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)



O روی نیمساز A : $OH = OH'$

O روی نیمساز B : $OH' = OH''$

$\rightarrow OH = OH''$ O هم روی نیمساز C هست

O روی نیمساز هر ۳ زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هست لذا فاصله O از ۳ ضلع مثلث (۳ ضلع زاویه‌ها) برابر است و مرکز دایره می‌باشد.

آ) نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ C و D نیز به یک فاصله باشد. محل برخورد عمودمنصف‌های CD,AB نقطهٔ O حواب است

ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (آ) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی ABCD نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

O روی عمودمنصف AB : $OA = OB$

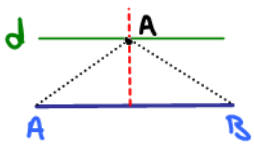
O روی عمودمنصف BC : $OB = OC$

O روی عمودمنصف CD : $OC = OD$

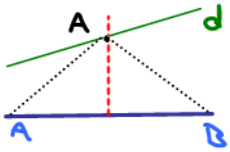
$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = R$ دایره G از ۴ رأس ABCD عبور می‌کند

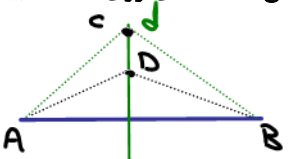
هست :

۱۷- دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. مسئله چند جواب دارد؟ (بحث کنید.)

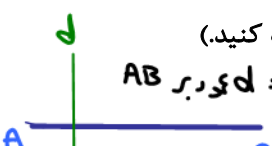


حالت اول: یک نقطه A جواب است





حالت دوم: d عمودمنصف AB است هیچ نقطه‌ای روی d جواب نیست (بی‌شمار نقطه)



حالت سوم: d روی AB عمود ولی عمودمنصف آن نیست جواب ندارد.



بی‌شمار شود: B,A رو می‌کشیم

۱۸- مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد.

عمودمنصف DE هر جا آن را قطع کرد O می‌نامیم به مرکز O و شعاع OE دایره می‌کشیم روی عمودمنصف DE در مربع قطرها بر هم عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند مثل عمودمنصف پاره‌خط DE

$OD = OE$ و شعاع O مرکز مربع می‌نامیم را رسم می‌کنیم محل برخورد را دایره می‌کشیم

$AO = OE = OB = OD$

Homework (1)

۱ فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

۱) تلاقی سه ارتفاع
۲) تلاقی سه میانه
۳) تلاقی سه نیمساز
۴) تلاقی سه عمودمنصف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $\hat{A} = ۸۰^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در نقاط M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. اگر $N\hat{B}C = ۵۴^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $M\hat{N}B$ چند درجه است؟

۱) ۴۸
۲) ۵۶
۳) ۶۶
۴) ۷۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ B در نقطهٔ M در خارج مثلث متقاطع‌اند. کدام گزینه درست است؟ (با تغییر)

۱) $\hat{A} > \hat{B}$
۲) $\hat{A} < \hat{B}$
۳) $\hat{B} > ۲\hat{C}$
۴) $\hat{B} < ۲\hat{C}$

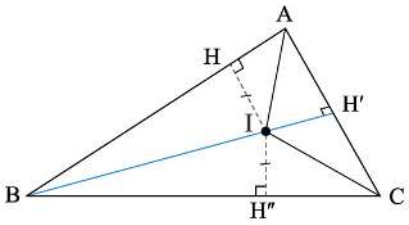
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

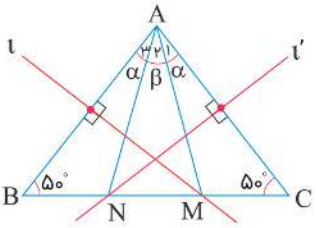
فرض کنیم نقطهٔ I محل همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است؛ پس I از هر دو ضلع مثلث به یک فاصله است. در نتیجه I از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$$\left.\begin{matrix} II = II' \\ II' = II'' \end{matrix}\right\} \Rightarrow IH = IH' = IH''$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲



طبق فرض، $AB = AC$، پس $\hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۵۰^\circ$، می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس $MA = MB$ و $NA = NC$. یعنی مثلث‌های MAB و NAC متساوی‌الساقین‌اند. درنتیجه:

$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۵۰^\circ \\ \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = ۵۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۳ = \alpha$$

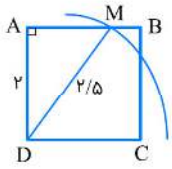
حال با فرض $\hat{A}_۲ = \beta$، داریم:

$$\begin{cases} ۲\alpha + \beta = ۸۰^\circ \\ \alpha + \beta = ۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \beta = ۲۰^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳ گزینه ۲

مربع $ABCD$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $۲/۵$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{DAM}$، فاصلهٔ نقطهٔ M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^۲ + ۲^۲ = (۲/۵)^۲ \Rightarrow AM^۲ + ۴ = ۶/۲۵ \Rightarrow AM^۲ = ۲/۲۵$$

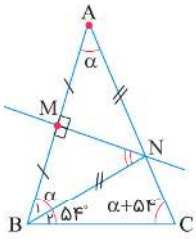
$$\Rightarrow AM = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵ \quad , \quad MB = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴ گزینه ۳

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط، به یک فاصله است.



پس $NA = NB$ و مثلث NAB متساوی‌الساقین است. درنتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{A} = \alpha$، از طرف دیگر، مثلث ABC هم متساوی‌الساقین است $(AC = AB)$، درنتیجه $\hat{C} = \hat{B} = \alpha + ۵۴^\circ$ و داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + (\alpha + ۵۴^\circ) + (\alpha + ۵۴^\circ) = ۱۸۰^\circ$$

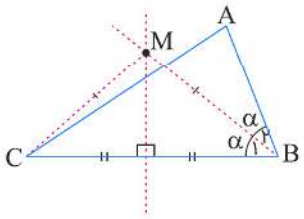
$$\Rightarrow ۳\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ$$

$$\overset{\Delta}{MNB} : \hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N}_۱ = ۹۰^\circ - \alpha = ۹۰^\circ - ۲۴^\circ = ۶۶^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ گزینه ۳

نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس مثلث MBC متساوی‌الساقین است و داریم:



$$M\hat{C}B = M\hat{B}C = \frac{۱}{۲}\hat{B} \xrightarrow{M\hat{C}B > A\hat{C}B} \frac{۱}{۲}\hat{B} > A\hat{C}B \Rightarrow \hat{B} > ۲A\hat{C}B$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

Homework (2)

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

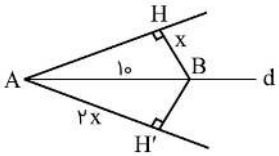
۱ فاصله هر نقطه داخل دایره از مرکز دایره ..... است.

۲ هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد از ..... است.

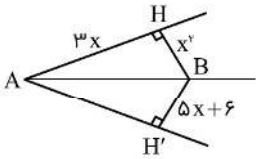
۳ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ..... است.

۴ مجموعهٔ نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله r باشد ..... نامیده می‌شود.

۵ در شکل مقابل نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد، محیط چهارضلعی $AHBH'$ کدام است؟



۶ نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد، طول AB کدام است؟



۷ شیوه ترسیم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج خط با رسم شکل توضیح دهید.

۸ شیوه ترسیم خط عمود بر یک پاره‌خط را از نقطه‌ای روی خط با رسم شکل توضیح دهید.

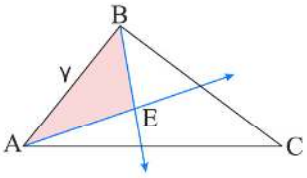
۹ شیوه ترسیم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.

۱۰ شیوه ترسیم عمود منصف یک پاره‌خط را با رسم شکل توضیح دهید.

۱۱ شیوهٔ ترسیم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.

۱۲ مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴، ۵ و ۷ باشد. (رسم با توضیح)

۱۳ در شکل زیر، E محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی زوایای A و B است. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۸ و محیط مثلث ABC، برابر ۲۵ باشد، مساحت قسمت سفیدرنگ کدام است؟



۱) ۶۴

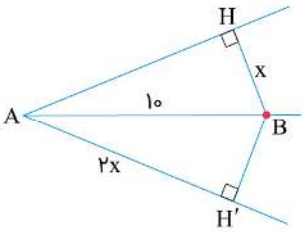
۲) ۳۶

۳) ۷۲

۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۱۴ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آن‌ها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۱۵ در شکل زیر، نقطهٔ B روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد. محیط چهار ضلعی $AHBH'$ کدام است؟



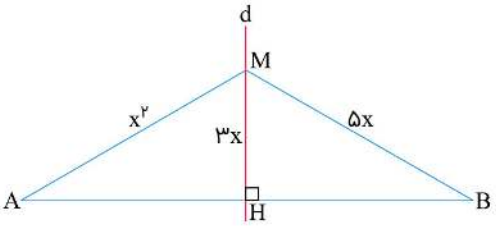
۱) $۱۲\sqrt{۵}$

۲) $۸\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۲۰}$

۴) $۳\sqrt{۲۰}$

۱۶ خط d، عمودمنصف AB می‌باشد. باتوجه‌به شکل، طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) ۲۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۵۵

۱۷ نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از خط L قرار دارد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر و از خط L به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۸ پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف AB می‌توان یافت که فاصلهٔ آن از نقاط A و B برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

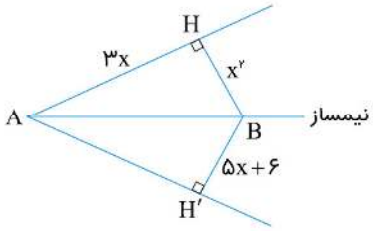
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) نقطه‌ای یافت نمی‌شود.

۱۹ نقطهٔ B روی نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ قرار دارد، طول AB کدام است؟



۱) ۳۶

۲) ۱۸

۳) $۱۸\sqrt{۵}$

۴) $۱۳\sqrt{۵}$

۲۰ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متری از خط d باشد، روش رسم مثلث متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده بر خط d منطبق باشد، توضیح دهید (شکل ترسیم شود).

۲۱ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵

۲) ۲۰

۳) ۲۵

۴) ۳۰

۲۲ مثلثی را داخل یک دایره طوری رسم کرده‌ایم که رئوس مثلث، روی محیط دایره قرار گیرند. مرکز این دایره چگونه مشخص می‌شود؟

۱) محل برخورد ارتفاع‌های مثلث است.

۲) محل برخورد نیمسازهای مثلث است.

۳) محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است.

۴) محل برخورد میانه‌های مثلث است.

۲۳ اگر $x - ۱۱$، $x - ۷$ و $۲x$ طول اضلاع یک مثلث باشند، برای x چند مقدار صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) هیچ‌مقدار

۲۴ نقطهٔ A خارج از خط d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن قرار دارد. چند مثلث متساوی‌الساقین به رأس A که قاعده‌اش روی خط d باشد، می‌توان رسم کرد که مساحتش برابر ۱۲ باشد؟

۱) سه

۲) دو

۳) یک

۴) صفر

۲۵ نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر از خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر و از خط L به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند؟

۱) صفر

۲) یک

۳) دو

۴) سه

پاسخ Homework (2)

۱ کمتر از شعاع است.

۲ دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۳ از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۴ دایره

۵ B روی نیمساز A می‌باشد پس $BH' = BH$، با توجه به همنهشتی دو مثلث AHB و AH'B بنا به حالت وتر و یک ضلع قائم داریم: $AH' = AH$، بنابراین:

$$AB^۲ = BH^۲ + AH^۲$$
$$\Rightarrow ۱۰^۲ = x^۲ + ۴x^۲$$
$$\Rightarrow ۵x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۲۰$$
$$\Rightarrow x = \pm ۲\sqrt{۵} \Rightarrow x = ۲\sqrt{۵}$$

در نتیجه محیط چهارضلعی برابر است با:

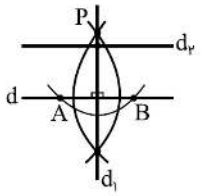
$$۴\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۶ B روی نیمساز A می‌باشد، پس $BH' = BH$:

$$x^۲ = ۵x + ۶ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ غ ق ق} \\ x = ۶ \text{ ق ق} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} BH = ۳۶ \\ AH = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow AB^۲ = BH^۲ + AH^۲$$
$$\Rightarrow AB^۲ = (۳۶)^۲ + (۱۸)^۲ \Rightarrow AB = ۱۸\sqrt{۵}$$

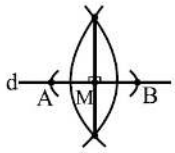
۷ خط d و نقطه P را در نظر بگیرید، ابتدا به مرکز P کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. حال دهانه پرگار را بیش از نصف پاره‌خط AB باز کرده و دو کمان به مرکز A و B می‌زنیم و عمود منصف AB را رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم. این عمود منصف از نقطه P می‌گذرد.

حال با استفاده از قانون رسم خطی عمود از نقطه‌ای روی آن خط، خط d_2 را رسم می‌کنیم که با خط d موازی است.



۸ خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

برای این کار ابتدا دهانه پرگار را کمی باز می‌کنیم و به مرکز M، ۲ کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. از آنجایی که $MA = MB$ پس می‌توانیم با رسم عمود منصف پاره خط AB خطی عمود بر خط d رسم کنیم.



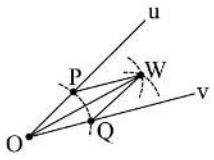
۹ زاویه uOv را در نظر بگیرید، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov در نقاطی مانند P و Q قطع کند. طول پاره‌خط‌های OP و OQ با هم برابرند.

حال دهانه پرگار را بیش از نصف طول PQ باز کنید و یکبار به مرکز P و یکبار به مرکز Q کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل هم‌دیگر را در نقطه W قطع کنند.

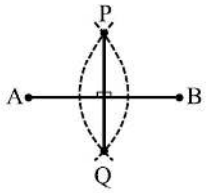
طول پاره‌خط‌های PW و QW باهم برابرند.

با رسم PW و QW و OW دو مثلث OPW و OQW ایجاد می‌شود که این دو مثلث بنا به حالت (ض ض ض) با هم همنهشت هستند.

بنابراین خط OW نیمساز زاویه uOv می‌باشد.

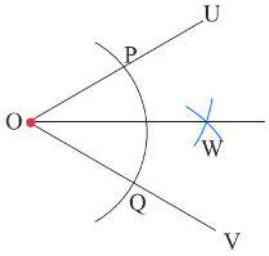


۱۰ دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یکبار به مرکز A و یکبار هم به مرکز B کمانی بزنید تا این دو کمان مطابق شکل همدیگر را در دو نقطه P و Q قطع کنند.

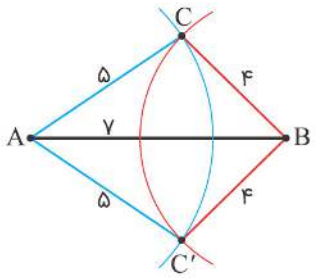


از وصل کردن دو نقطه P و Q عمود منصف رسم می‌شود.

۱۱ ۱- به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های زاویه را در P و Q قطع کند.
۲- دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید.
۳- دو کمان به مرکز P و Q بزنید.
۴- O را به W وصل کنید، نیمساز به دست می‌آید.

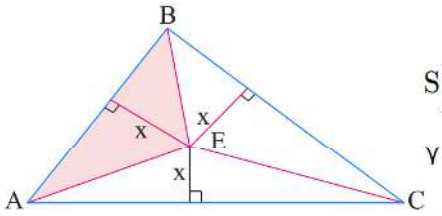


۱۲ ابتدا ضلع AB به طول ۷ واحد را رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۵ واحد یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۴ واحد هم کمانی دیگر رسم می‌کنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقاط C و C' قطع کنند. دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ABC'}$ جواب مسئله هستند.



۱۳ گزینه ۳

می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است، پس:



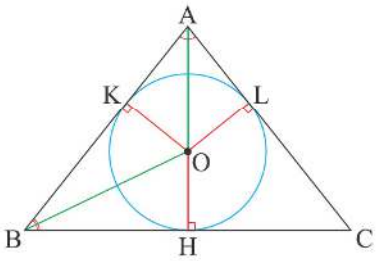
$$S_{\triangle ABE} = ۲۸ \Rightarrow \frac{۷ \times x}{۲} = ۲۸ \Rightarrow x = ۸ \quad (۱)$$

$$۷ + BC + AC = ۲۵ \Rightarrow BC + AC = ۱۸ \quad (۲)$$

$$S_{\text{سفید}} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACE} = \frac{BC \times x}{۲} + \frac{AC \times x}{۲} = \frac{x}{۲}(BC + AC)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} S_{\text{سفید}} = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$

۱۴ اضلاع مثلث بر این دایره مماس‌اند.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ نیمساز زاویهٔ } OA \Rightarrow OL = OK \\ \hat{B} \text{ نیمساز زاویهٔ } OB \Rightarrow OH = OK \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow OL = OH = OK$$

۱۵ گزینه ۱

$$BH = BH' = x$$

$$AB^۲ = BH'^۲ + AH'^۲$$

$$۱۰۰ = x^۲ + ۴x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۲۰ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۵}$$

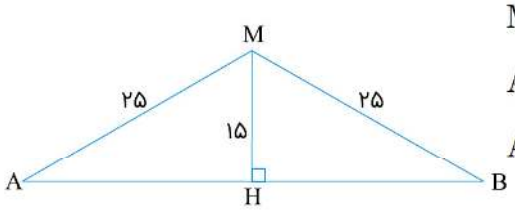
$$AH' = AH = ۲x = ۴\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط} = ۴\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۱۶ گزینه ۳

بنا به خاصیت عمودمنصف: $MA = MB$

$$x^۲ = ۵x \Rightarrow x^۲ - ۵x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ.ق.ق} \\ x = ۵ \end{cases}$$



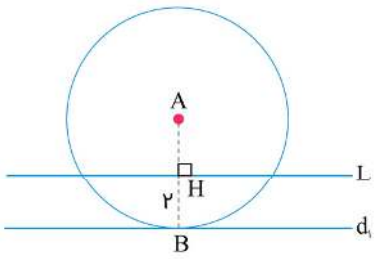
$$MA^۲ = MH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۶۲۵ = ۲۲۵ + AH^۲$$

$$AH^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow AH = ۲۰$$

$$AB = ۲AH = ۴۰$$

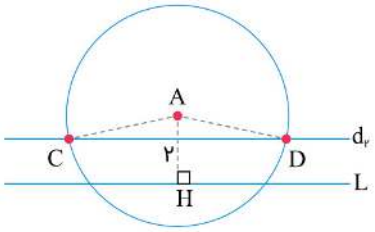
۱۷ گزینه ۴

A مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است. خط $d_۱$ مماس بر دایره و شرایط مسئله را دارا است، پس نقطهٔ B یکی از نقاط می‌باشد.



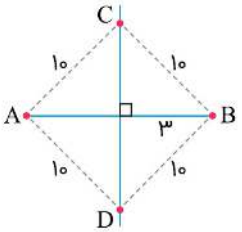
$$AH = ۳$$

خط $d_۲$ با خط L، $۲\ cm$ فاصله دارد و شرایط مسئله را دارا است و نقاط C و D دیگر نقاط موردنظر مسئله می‌باشد.



۱۸ گزینه ۲

باتوجه‌به تعریف عمودمنصف، ۲ نقطهٔ C و D را می‌توان یافت:



عمودمنصف

۱۹ گزینه ۳

B روی نیمساز است، پس داریم:

$$BH = BH'$$

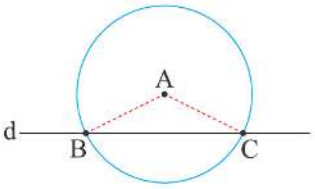
$$x^۲ = ۵x + ۶ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ غ ق ق} \\ x = ۶ \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$BH = x^۲ = ۶^۲ = ۳۶ \ , \ AH = ۳(۶) = ۱۸$$

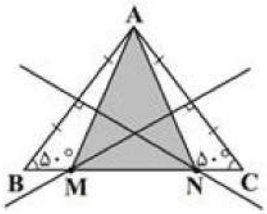
$$\overset{\Delta}{ABH} : AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow AB^۲ = (۳۶)^۲ + (۱۸)^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۱۸^۲ \times ۴ + ۱۸^۲ = ۱۸^۲(۴ + ۱) = ۱۸^۲ \times ۵ \Rightarrow AB = ۱۸\sqrt{۵}$$

۲۰ کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع بیش از ۶ سانتی‌متر رسم کنیم و نقاط برخورد این دایره با خط d را B و C بنامیم. در این صورت $\overset{\Delta}{ABC}$، جواب مسئله است.



۲۱ گزینه ۲



$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

از طرفی نقطه M روی عمودمنصف AC است، پس:

$$AM = MC \Rightarrow M\hat{A}C = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}C = ۸۰^\circ$$

به‌طور مشابه $A\hat{N}B = ۸۰^\circ$ و درنتیجه:

$$\overset{\Delta}{AMN} : M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۸۰^\circ) = ۲۰^\circ$$

۲۲ گزینه ۳

محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث، همان مرکز دایره است.

۲۳ گزینه ۴

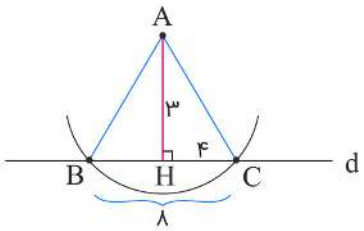
طول اضلاع باید مثبت باشند و همچنین در نامساوی مثلثی صدق کنند.

$$\begin{cases} ۱۱ - x > ۰ \Rightarrow x < ۱۱ \\ x - ۷ > ۰ \Rightarrow x > ۷ \\ ۲x > ۰ \Rightarrow x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۷ < x < ۱۱ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} ۱۱ - x + x - ۷ > ۲x \Rightarrow x < ۲ \\ ۱۱ - x + ۲x > x - ۷ \Rightarrow ۱۱ > -۷ \\ x - ۷ + ۲x > ۱۱ - x \Rightarrow x > \frac{۹}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

۲۴ گزینه ۳



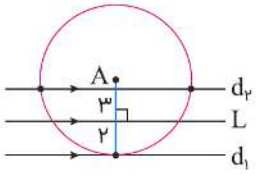
$$\left.\begin{matrix} AH = ۳ \\ S = ۱۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC = ۸ \Rightarrow CH = ۴$$

$$AC^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$$

به مرکز A و شعاع ۵ یک دایره رسم می‌کنیم. چون $۳ > ۵$ است، بنابراین دایرهٔ رسم‌شده خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع خواهد کرد. مثلث ABC، مثلث موردنظر است.

۲۵ گزینه ۴

دو خط $d_۱$ و $d_۲$ در فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط L قرار گرفته‌اند، بنابراین سه نقطه با شرایط موردنظر وجود دارد:



BOX 2: نسبت و تناسب ــ قضیهٔ تالس (صفحه ۳۱ تا ۳۵ کتاب درسی)

تعریف نسبت و تناسب و ویژگی‌های آن، هم‌چنین قضیهٔ پرکاربرد تالس و نتایج آن در این بسته آورده شده است.

الف) نسبت و تناسب

نسبت و تناسب: اگر a و b دو عدد حقیقی و $b \neq 0$ باشد، کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت و تساوی بین دو نسبت را تناسب می‌گوییم.

تذکر: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، a و d را طرفین و b و c را وسطین می‌گوییم.

$ad = bc$

خواص تناسب

تناسب دارای خواصی است که از آن‌ها می‌توان در حل مسائل استفاده کرد و هم‌چنین نتایج قضیهٔ تالس را اثبات کرد.

۱) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $ad=bc$، این عمل را طرفین‌وسطین کردن می‌گوییم.

تمرین: از معادلهٔ $\frac{2x+1}{5}=\frac{x-3}{4}$، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{2x+1}{5}=\frac{x-3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 4(2x+1)=5(x-3) \Rightarrow 8x+4=5x-15$$

$$\Rightarrow 8x-5x-15-4 \Rightarrow 3x=-19 \Rightarrow x=-\frac{19}{3}$$

۲) تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب: اگر b و d دو عدد حقیقی غیرصفر و $ad=bc$، آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

۳) معکوس‌کردن تناسب: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

۴) تعویض جای طرفین با وسطین: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ و $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

۵) ترکیب نسبت در صورت: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

۶) ترکیب نسبت در مخرج: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{2+4}{4}=\frac{1+2}{2}$

$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

توجه: در ترکیب نسبت در صورت، صورت کسر را با مخرج آن جمع می‌کنیم و در مخرج تغییری نمی‌دهیم. هم‌چنین در ترکیب نسبت در مخرج، مخرج کسر را با صورت کسر جمع می‌کنیم، بدون آن که تغییری در صورت کسر ایجاد کنیم.

تمرین: اگر $\frac{x}{4-x}=\frac{8}{7}$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{x}{4-x}=\frac{8}{7} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{x}{x+(4-x)}=\frac{8}{8+7} \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{8}{15} \Rightarrow x=\frac{32}{15}$$

۷) تفضیل نسبت در صورت: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

۸) تفضیل نسبت در مخرج: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ یا $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

تمرین: اگر $\frac{x}{x+4}=\frac{2y}{2y+5}$ باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست آورید.

$\frac{x}{x+4-x}=\frac{2y}{2y+5-2y}$

$5x=8y \quad \frac{x}{y}=\frac{8}{5}$

پاسخ: ابتدا از تفضیل نسبت در مخرج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۲y}{۲y+۵} \Rightarrow \frac{x}{(x+۴)-x}=\frac{۲y}{(۲y+۵)-۲y} \Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{۲y}{۵} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۸}{۵}$$

قرینه: روشن

بعد از تعریف نسبت و تناسب و بیان ویژگی‌های آن‌ها، به تعریف استدلال استقرایی، استنتاجی و قضیه تالس می‌پردازیم.

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گوییم. استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری از جزء به کل است.

مثال: از حرارت دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه، نتیجه می‌گیرند که طول میله‌های فلزی در اثر حرارت، زیاد می‌شود. نوع استدلال برای این نتیجه‌گیری، استدلال استقرایی است.

استدلال استنتاجی: به استدلالی که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی باشد که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی می‌گوییم.

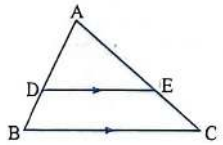
نکته: ۱) نمی‌توان به درست‌بودن نتیجه‌ای که از استدلال استقرایی به دست آمده باشد، مطمئن بود. اما وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

۲) استدلال استنتاجی نتیجه‌گیری از کل به جزء است.

قضیه: هر حکمی را که همیشه برقرار باشد، قضیه می‌گوییم. اما ما به برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند نیز قضیه می‌گوییم.

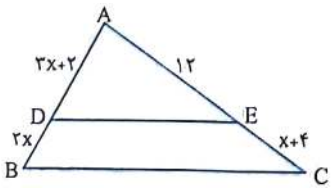
در این قسمت صورت قضیهٔ تالس آورده شده است. اثبات آن در تمرینات این بسته وجود دارد.

اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند، برابر است. به عبارت دیگر، در مثلث ABC شکل مقابل، داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$ (رابطهٔ جزء به جزء)

تمرین: در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ می‌باشد. طول پاره‌خط AB را به دست آورید.



پاسخ:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۳x+۲}{۲x}=\frac{۱۲}{x+۴} \Rightarrow (x+۴)(۳x+۲)=۲۴x$$

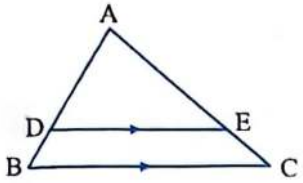
$$\Rightarrow ۳x^{۲}+۲x+۱۲x+۸=۲۴x \Rightarrow ۳x^{۲}-۱۰x+۸=۰ \;,\; \Delta=b^{۲}-۴ac=(-۱۰)^{۲}-۴(۳)(۸)=۱۰۰-۹۶=۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۱۰+۲}{۲(۳)}=۲ \Rightarrow AB=۵x+۲=۱۲ \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۱۰-۲}{۲(۳)}=\dfrac{۴}{۳} \Rightarrow AB=۵x+۲=\dfrac{۲۰}{۳}+۲=\dfrac{۲۶}{۳} \end{cases}$$

- از قضیهٔ تالس و خواص تناسب می‌توان تناسب‌های دیگری را نتیجه گرفت:

نتایج قضیهٔ تالس

نتیجه ۱: در مثلث ABC روبه‌رو، اگر $DE \parallel BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$، زیرا:



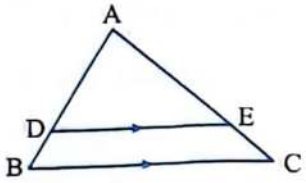
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

نتیجه ۲: در مثلث ABC شکل بالا، اگر $DE \parallel BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{CE}$، زیرا:

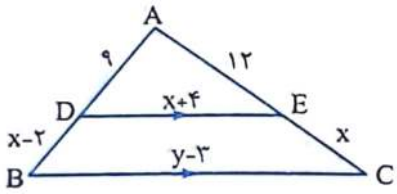
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{CE}$$

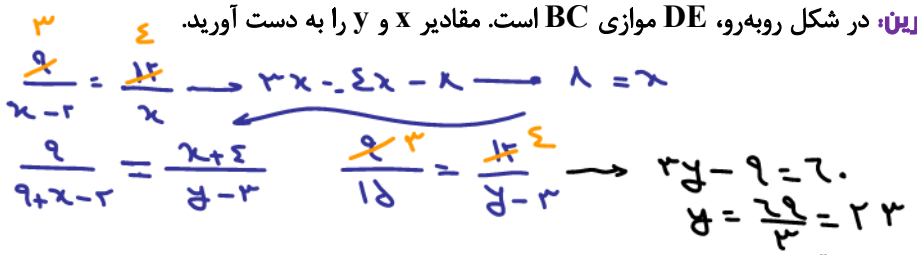
تعمیم قضیهٔ تالس: در مثلث ABC روبه‌رو، اگر $DE \parallel BC$، آن‌گاه:



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$ (رابطهٔ جزء به کل)

تمرین: در شکل روبه‌رو، DE موازی BC است. مقادیر x و y را به دست آورید. *(مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)*





پاسخ: برای آن که DE و BC در تناسب باشند، باید از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده کنیم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۹+(x-۲)}=\frac{۱۲}{۱۲+x}=\frac{x+۴}{y-۳} \Rightarrow \frac{۹}{x+۷}=\frac{۱۲}{۱۲+x}=\frac{x+۴}{y-۳}$$

ابتدا از تساوی $\frac{۹}{۷+x}=\frac{۱۲}{۱۲+x}$، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳}{\cancel{۹}}=\frac{۴}{\cancel{۱۲}} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۳(۱۲+x)=۴(۷+x) \Rightarrow ۳۶+۳x=۲۸+۴x \Rightarrow ۳۶-۲۸=۴x-۳x \Rightarrow x=۸$$

از تناسب $\frac{۱۲}{۱۲+x}=\frac{x+۴}{y-۳}$، مقدار y را با قراردادن عدد ۸ به جای x، به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۸}=\frac{۸+۴}{y-۳} \Rightarrow \frac{\cancel{۱۲}}{۲۰}=\frac{\cancel{۱۲}}{y-۳} \Rightarrow y-۳=۲۰ \Rightarrow y=۲۳$$

پرسش‌های تشریحی:

● در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- روش نتیجه‌گیری از جزء به کل، استدلال ..... می‌باشد.

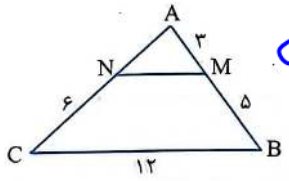
۲- اگر $\frac{a}{a+5}=\frac{b}{b+4}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{a}{b}$ برابر ..... می‌باشد. (شهریور ۱۴۰۲)

۳- استدلال بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال ..... می‌باشد.

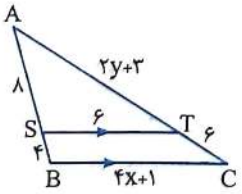
۴- نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)

$$\frac{2x+4}{2y+5}=\frac{x}{y}$$

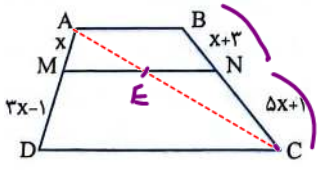
۵- در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های MN و AN را به دست آورید. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)



۶- در شکل زیر $ST \parallel BC$ است. مقدار x و y را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)



۷- در ذوزنقهٔ مقابل، اگر $MN \parallel AB$ باشد، مقدار x را به دست آورید.



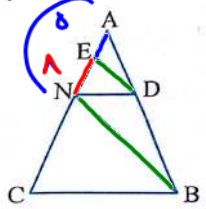
۸- اگر $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+5}{2}$ و $2x+y-z=12$ باشد، هر یک از مقادیر x، y و z را به دست آورید.

پاسخ: تناسب داده‌شده را مساوی t قرار می‌دهیم و سپس x، y و z را برحسب t می‌نویسیم و آن‌ها را در معادلهٔ $2x+y-z=12$ قرار می‌دهیم. معادلهٔ اخیر را برحسب t حل می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+5}{2}=t \Rightarrow \begin{cases}\frac{x+1}{2}=t\\ \frac{y-3}{4}=t\\ \frac{z+5}{2}=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+1=2t\\ y-3=4t\\ z+5=2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2t-1\\ y=4t+3\\ z=2t-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x+y-z=2(2t-1)+(4t+3)-(2t-5)=6t+6=12 \Rightarrow 6t=6 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases}x=2t-1=2-1=1\\ y=4t+3=4+3=7\\ z=2t-5=2-5=-3\end{cases}$$

۹- در شکل مقابل $DE \parallel BN$ ، $DN \parallel BC$ ، $AE=5$ و $EN=8$ ، اندازهٔ AC را به دست آورید.



$AN=13$

$\triangle ANB$: $ED \parallel NB$: تالس جزء به کل : $\frac{AE}{AN}=\frac{ED}{NB}=\frac{AD}{AB}$ ، $5+8=13$

$\triangle ABC$: $DN \parallel BC$: تالس جزء به کل : $\frac{AN}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DN}{BC}$

$\frac{AN}{AC}=\frac{5}{13}$

$AC=\frac{13(13)}{5}=\frac{169}{5}$

BOX 3: عکس قضیه ــ برهان خلف ــ عکس قضیهٔ تالس ــ قضیه‌های دوشرطی ــ مثال نقض

صفحه ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی

در این بسته، مفاهیمی چون عکس قضیه، قضیه‌های دوشرطی و مثال نقض داریم. هم‌چنین روشی برای اثبات برخی از قضیه‌ها وجود دارد که این روش، برهان خلف است. عکس قضیهٔ فیثاغورس و قضیهٔ تالس به کمک برهان خلف ثابت می‌شوند.



الف) عکس قضیه

تعریف: هر قضیه دارای قسمت شرطی و نتیجه است. قسمت شرطی را فرض قضیه و نتیجهٔ جمله را حکم قضیه می‌گوییم.

مثال: در قضیهٔ «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اضلاع روبه‌رو با هم برابرند.»، متوازی‌الاضلاع بودن چهارضلعی فرض قضیه و برابربودن اضلاع روبه‌رو، حکم این قضیه است.

عکس قضیه: اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود.

نکته: عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیهٔ «جمع دو عدد فرد، عددی زوج است.» به صورت زیر می‌باشد:

قضیه: اگر a و b دو عدد فرد باشند، آن‌گاه $a+b$ عددی زوج است.

عکس قضیه: اگر $a+b$ عددی زوج باشد، آن‌گاه a و b دو عدد فرد می‌باشند.

در این مثال، عکس قضیه نادرست است، برای مثال، $۶+۸=۱۴$ عددی زوج است، ولی هیچ‌یک از اعداد ۶ و ۸ فرد نمی‌باشند.

تذکر: معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم در عکس آن ثابت باشند.

- در استدلال استنتاجی، اثبات مستقیم از فرض به حکم داریم اما در اثبات به کمک برهان خلف، اثبات مستقیم نمی‌باشد.

ب) اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

- در استدلال استنتاجی، مستقیماً از درستی فرض، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم. نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسه به کار می‌رود، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در این روش، برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه با استفاده از استدلال استنتاجی به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.
- در زندگی روزانه نیز از اثبات غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، در یک تست چهارگزینه‌ای، اگر بتوانیم با دلیل پاسخ‌های نادرست را رد کنیم، آن‌گاه با اطمینان پاسخ درست را انتخاب می‌کنیم.

مراحل اثبات به روش برهان خلف:

مسئله: (فرض) $A \Rightarrow$ (حکم) B

$$\left.\begin{matrix} A \text{ درست} \\ \text{و} \\ B \text{ نادرست} \end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{استدلال، منطق و حقایق}]{\Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow} \begin{cases} (۱)\ A \text{ درست نیست.} \\ \text{یا} \\ (۲)\ \text{تناقض منطقی} \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق، به یکی از نتایج (۱) یا (۲) می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

تمرین: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید «اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n^۲$ عددی زوج باشد، آن‌گاه n نیز عددی زوج است.»

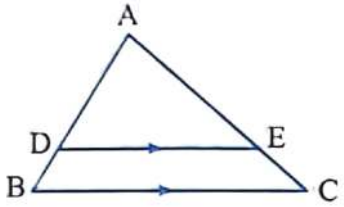
پاسخ: ابتدا n عددی زوج است. : حکم، $n^۲$ عددی زوج است.: فرض

فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد و n فرد باشد.

$$n = ۲k+۱ \Rightarrow n^۲ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲\underbrace{(۲k^۲ + ۲k)}_{k'} + ۱ = ۲k' + ۱$$

پس $n^۲$ یک عدد فرد می‌شود که با فرض مسئله در تناقض است. پس n باید عددی زوج باشد.

عکس قضیهٔ تالس: در شکل روبه‌رو، اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.



قضیهٔ دوشرطی: گاهی عکس یک قضیه درست است، در این صورت عکس قضیه، خود نیز یک قضیه است. در این حالت قضیه و عکس قضیه را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم. چنین قضیه‌ای را قضیهٔ دوشرطی می‌گوییم. قضیه‌های دوشرطی را با نماد $\Leftrightarrow$ (بخوانید: اگر و تنها اگر) بیان می‌کنیم.

تمرین: عکس قضیهٔ زیر را بنویسید و سپس آن را به صورت یک قضیهٔ دوشرطی بنویسید.

قضیه: در مثلث ABC، اگر $AB = AC$ باشد، آن‌گاه $\hat{B} = \hat{C}$

پاسخ: عکس قضیه: در مثلث ABC، اگر $\hat{B} = \hat{C}$، آن‌گاه $AB = AC$

قضیهٔ دوشرطی: در مثلث ABC، $AB = AC$ است اگر و تنها اگر $\hat{B} = \hat{C}$

مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی لزوماً همواره درست نیست، مثال نقض می‌گوییم.

پرسش‌های تشریحی:

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- عکس قضیهٔ تالس به کمک ..... اثبات می‌شود.

۲- برای اثبات ..... حکم کلی «همهٔ اعداد اول، فرد هستند»، از ..... استفاده می‌کنیم.

۳- برای نوشتن عکس قضیه باید جای حکم و فرض را ..... .

۴- در هر مثلث هر پاره‌خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند، ..... ضلع سوم است. (خرداد ۱۴۰۲)

● کدام‌یک از عبارت‌های چهار سوال زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

۵- عکس یک قضیه همواره درست است.

۶- در استدلال استقرایی از کل به جز می‌رسیم. (شهریور ۱۴۰۲)

۷- از نماد $\Leftrightarrow$ برای قضیه‌های دوشرطی استفاده می‌کنیم.

۸- مثال نقض نوعی استدلال است که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری کلی همواره برقرار نمی‌باشد.

۹- عکس هر یک از قضیه‌های زیر را بنویسید. (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)

آ) در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

ب) در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای رسم‌شده بر دو ساق با هم برابرند.

پ) اگر در مثلثی دو ارتفاع نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر، کوچک‌تر است از ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر.

ت) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

ث) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

۱۰- برای رد حدس‌های کلی زیر، مثال نقض ارائه کنید. (مشابه تمرین ۹ صفحه ۴۱ کتاب درسی)

آ) ارتفاع‌های هر مثلث داخل مثلث واقع است.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

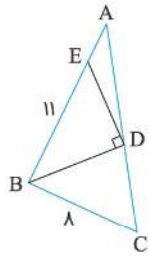
پ) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آن‌گاه هر دو زاویه قائمه هستند.

ت) در هر مثلث، میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

ث) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد n^2+n+41 عددی اول است. (خرداد ۱۴۰۲)

Homework (1)

۱ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



۱) ۶/۶

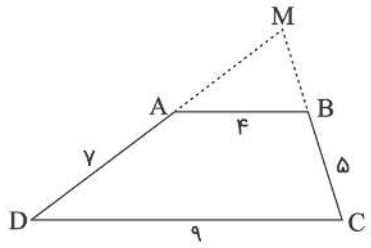
۲) ۵/۴

۳) ۳/۶

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) ۱۳/۲

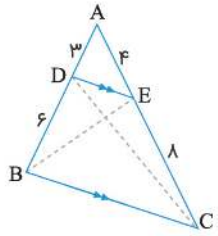
۲) ۱۳/۶

۳) ۱۴/۴

۴) ۱۴/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳ در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

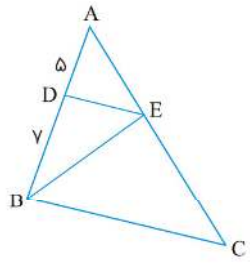
۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴ در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟



۱) ۱/۵

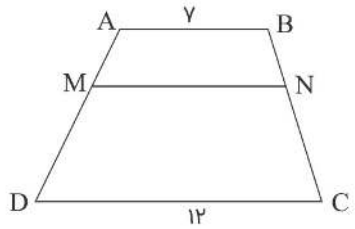
۲) ۱/۷

۳) ۲/۱

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN، کدام است؟



۱) ۸

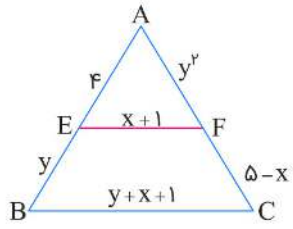
۲) ۸/۷۵

۳) ۹

۴) ۹/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - ۲x$ کدام است؟



۱) -۴

۲) -۳

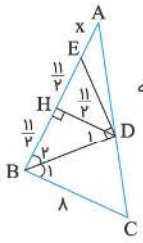
۳) ۲

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۱



عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH||BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B} = ۹۰^\circ$ و درنتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = ۴۵^\circ$ خواهد بود، پس DH ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و درنتیجه $DH = BH = EH = \frac{۱۱}{۲}$

اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

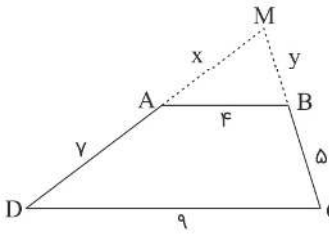
$$\frac{\frac{۱۱}{۲}}{۸} = \frac{x + \frac{۱۱}{۲}}{x + ۱۱} \Rightarrow \frac{۱۱}{۸} = \frac{۲x + ۱۱}{x + ۱۱} \Rightarrow ۱۱x + ۱۲۱ = ۱۶x + ۸۸$$

$$\Rightarrow ۵x = ۳۳ \Rightarrow x = ۶/۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{AMB} \sim \overset{\Delta}{MDC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۷} = \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۸ \Rightarrow ۵x = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵} \\ \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۰ \Rightarrow ۵y = ۲۰ \Rightarrow y = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{AMB} = x + y + ۴ = \frac{۲۸}{۵} + ۴ + ۴ = ۸ + \frac{۲۸}{۵} = \frac{۴۰ + ۲۸}{۵} = \frac{۶۸}{۵} = ۱۳/۶$$

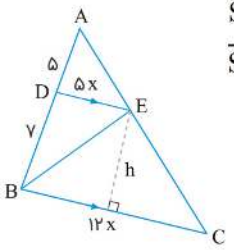
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳ گزینه ۴

قاعدهٔ هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴ گزینه ۴

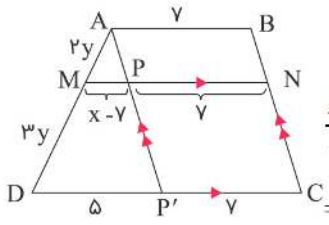


$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{BDE}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \not{h} \times BC}{\frac{۱}{۲} \times \not{h} \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۲x}{۵x} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

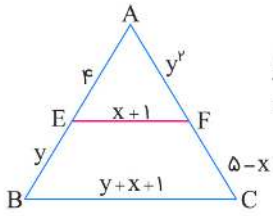
$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y+۳y}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow x=۹=MN$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ گزینه ۱

چون $EF \parallel BC$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{x+۱}{y+x+۱}=\frac{۴}{y+۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x+۱}{y}=\frac{۴}{y}\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳ \quad (*)$$

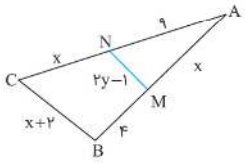
$$\text{تالس}: \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(*)}\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}\Rightarrow y^۳=۸\Rightarrow y=۲\Rightarrow y-۲x=۲-۶=-۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Homework (2)

در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.

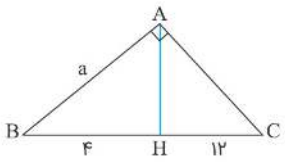
۱



(MN||BC)

x=?
y=?

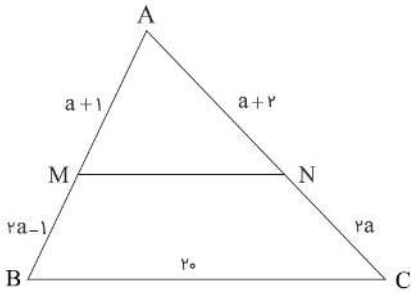
۲



a=?
AH=?

۳ شیوهٔ ترسیم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.

۴ در شکل زیر، محیط چهارضلعی $MNCB$ کدام است؟(MN موازی BC است.) ($BC = ۲۰$)



۱) ۳۲

۲) ۳۵

۳) ۳۷

۴) ۳۹

۵ کدام گزینه درست است؟

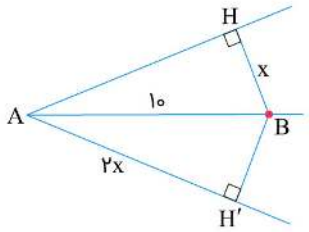
۱) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) اگر شعاع دایره یک عدد گنگ باشد، در این صورت محیط آن نیز عددی گنگ است.

۳) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند.

۴) فاصلهٔ هر نقطه از روی نیمساز تا اضلاع زاویه باهم برابر است.

۶ در شکل زیر، نقطهٔ B روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد. محیط چهار ضلعی $AHBH'$ کدام است؟



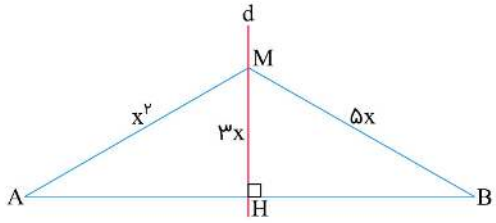
۱) $۱۲\sqrt{۵}$

۲) $۸\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۲۰}$

۴) $۳\sqrt{۲۰}$

۷ خط d، عمودمنصف AB می‌باشد. باتوجه‌به شکل، طول پاره‌خط AB کدام است؟



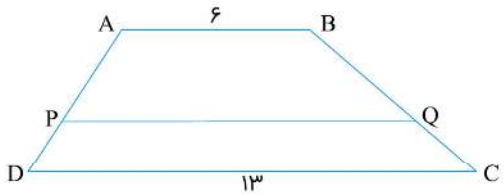
۱) ۲۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۵۵

۸ در ذوزنقهٔ زیر، PQ موازی AB و $\frac{AP}{PD} = ۲$ می‌باشد. طول PQ کدام است؟



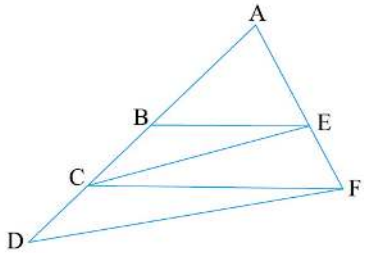
۱) $\frac{۳۲}{۳}$

۲) $\frac{۳۱}{۳}$

۳) $\frac{۲۹}{۳}$

۴) $\frac{۳۵}{۳}$

۹ در شکل زیر، $BE||CF$ و $CE||DF$. اگر $AB = ۸$ و $BC = ۵$، آنگاه اندازهٔ CD کدام است؟



۱) $\frac{۵۵}{۸}$

۲) ۸

۳) $\frac{۶۵}{۸}$

۴) ۷

۱۰ اگر $\frac{۲a+۴}{۵b+۲} = \frac{۲a+۶}{۵b+۳}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) ۵

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) ۳

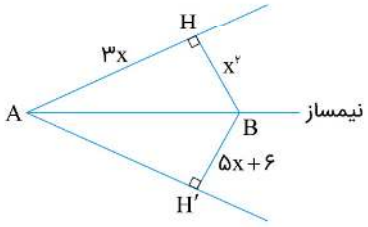
۱۱ نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از خط L قرار دارد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر و از خط L به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۲ پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف AB می‌توان یافت که فاصلهٔ آن از نقاط A و B برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

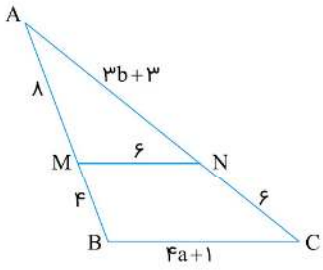
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) نقطه‌ای یافت نمی‌شود.

۱۳ نقطهٔ B روی نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ قرار دارد، طول AB کدام است؟



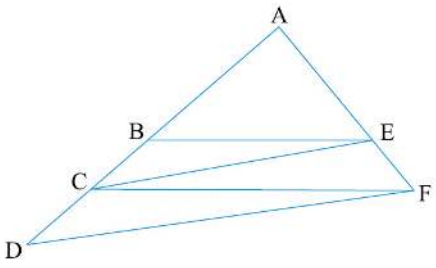
۱) ۳۶
۲) ۱۸
۳) $۱۸\sqrt{۵}$
۴) $۱۳\sqrt{۵}$

۱۴ در شکل زیر، $MN||BC$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۷
۲) ۳
۳) ۹
۴) ۵

۱۵ در شکل زیر، $BE||CF$ و $CE||DF$. اگر $AB=۵$ و $BC=۳$، آنگاه اندازهٔ CD کدام است؟



۱) ۴/۵
۲) ۴/۸
۳) ۵/۴
۴) ۵/۶

۱۶ در کدام‌یک از قضایای زیر، عکس قضیه درست نیست؟

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، دو ارتفاع مثلث با هم برابرند.

۲) قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند.

۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه زاویه با هم برابرند.

۴) قطرهای مستطیل با هم برابرند.

۱۷ اگر $\frac{a-b}{2a+b}=\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{3a-b}{a-2b}$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{7}$

۲) ۲

۳) $\frac{15}{7}$

۴) $\frac{16}{11}$

پاسخ Homework (2)

۱

$$MN||BC \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=۶$$

$$MN||BC \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow y=\frac{۲۹}{۱۰}$$

۲

$$h^۲=BH\times CH=۱۲\times ۴=۴۸ \Rightarrow h=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

$$a^۲=BH\times BC=۴\times ۱۶=۶۴ \Rightarrow a=۸$$

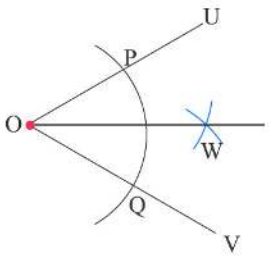
۳

۱- به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های زاویه را در P و Q قطع کند.

۲- دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید.

۳- دو کمان به مرکز P و Q بزنید.

۴- O را به W وصل کنید، نیمساز به دست می‌آید.



۴

گزینه ۳

بنا به قضیهٔ تالس داریم (MN موازی BC):

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$\underbrace{\frac{a+۱}{۳a}=\frac{a+۲}{۳a+۲}}_{\downarrow}=\frac{x}{۲۰}$$

$$۳a^۲+۳a+۲a+۲=۳a^۲+۶a \Rightarrow a=۲ \Rightarrow \frac{a+۱}{۳a}=\frac{x}{۲۰} \Rightarrow \frac{۳}{۶}=\frac{x}{۲۰} \Rightarrow x=۱۰$$

محیط $MNCB$: $۱۰+۴+۲۰+۳=۳۷$

۵ گزینه ۴

برای گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" مثال نقض وجود دارد.

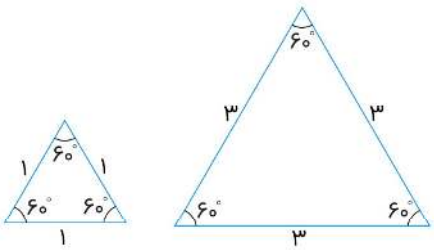
گزینهٔ "۱":

$$\text{اعداد گویا} \in ۰ \times \sqrt{۲} = ۰$$

گزینهٔ "۲":

$$\text{محیط}\, P = ۲\pi r \xrightarrow{r=\frac{۱}{\pi}} P = ۲\pi \times \frac{۱}{\pi} = ۲ \in \text{اعداد گویا}$$

گزینهٔ "۳":



۶ گزینه ۱

$$BH = BH' = x$$

$$AB^{۲} = BH'^{۲} + AH'^{۲}$$

$$۱۰۰ = x^{۲} + ۴x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۲۰ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۵}$$

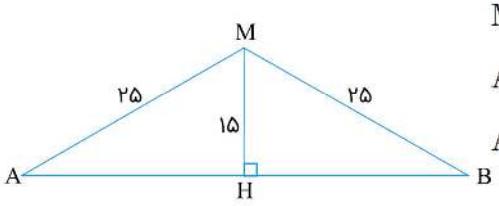
$$AH' = AH = ۲x = ۴\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط} = ۴\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۷ گزینه ۳

بنا به خاصیت عمودمنصف: $MA = MB$

$$x^۲ = ۵x \Rightarrow x^۲ - ۵x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ x = ۵ \end{cases}$$



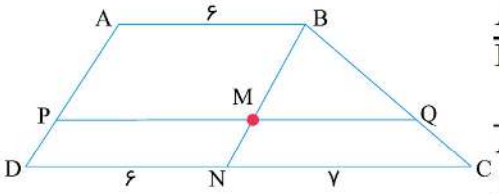
$$MA^۲ = MH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۶۲۵ = ۲۲۵ + AH^۲$$

$$AH^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow AH = ۲۰$$

$$AB = ۲AH = ۴۰$$

۸ گزینه ۱

از B موازی AD رسم نمایید:



$$\frac{AP}{PD} = ۲$$

$$\frac{AP}{AP + PD} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{BM}{BN} = \frac{MQ}{NC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MQ = \frac{۱۴}{۳}$$

$$PQ = MQ + MP = ۶ + \frac{۱۴}{۳} = \frac{۳۲}{۳}$$

۹ گزینه ۳

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AFC} : BE||CF : \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \\ \overset{\Delta}{ADF} : EC||FD : \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۵} = \frac{۱۳}{CD} \Rightarrow CD = \frac{۶۵}{۸}$$

۱۰ گزینه ۲

$$(۲a + ۶)(۵b + ۲) = (۲a + ۴)(۵b + ۳)$$

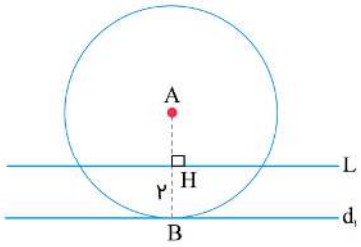
$$\Rightarrow ۱۰ab + ۴a + ۳۰b + ۱۲ = ۱۰ab + ۶a + ۲۰b + ۱۲$$

$$\Rightarrow -۲a = -۱۰b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۲} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۵$$

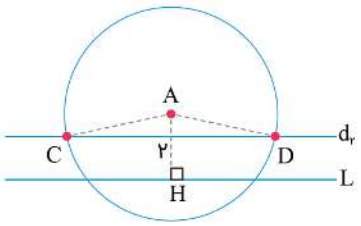
۱۱ گزینه ۴

A مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است. خط d_1 مماس بر دایره و شرایط مسئله را دارا است، پس نقطهٔ B یکی از نقاط می‌باشد.



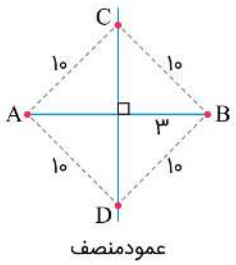
$$AH = ۳$$

خط d_2 با خط L، $2\ cm$ فاصله دارد و شرایط مسئله را دارا است و نقاط C و D دیگر نقاط موردنظر مسئله می‌باشد.



۱۲ گزینه ۲

باتوجه‌به تعریف عمودمنصف، ۲ نقطهٔ C و D را می‌توان یافت:



عمودمنصف

۱۳ گزینه ۳

B روی نیمساز است، پس داریم:

$$BH = BH'$$

$$x^۲ = ۵x + ۶ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ غ ق ق} \\ x = ۶ \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$BH = x^۲ = ۶^۲ = ۳۶\ ,\ AH = ۳(۶) = ۱۸$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow AB^۲ = (۳۶)^۲ + (۱۸)^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۱۸^۲ \times ۴ + ۱۸^۲ = ۱۸^۲(۴ + ۱) = ۱۸^۲ \times ۵ \Rightarrow AB = ۱۸\sqrt{۵}$$

۱۴ گزینه ۴

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$\frac{۸}{۱۲}=\frac{۳b+۳}{۳b+۹}=\frac{۶}{۴a+۱}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۳b+۳}{۳b+۹}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{b+۱}{b+۳}=\frac{۲}{۳}\\ \Rightarrow ۳b+۳=۲b+۶\Rightarrow b=۳\\ \frac{۶}{۴a+۱}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۶}{۴a+۱}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۸a+۲=۱۸\Rightarrow a=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۲+۳=۵$$

۱۵ گزینه ۲

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\left.\begin{matrix}BE||CF\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF}\\ CE||DF\Rightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{AE}{EF}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}$$

$$\frac{۵}{۳}=\frac{۸}{CD}\Rightarrow CD=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

۱۶ گزینه ۴

چون اگر یک چهارضلعی قطرهایش برابر باشند، الزاماً آن چهارضلعی مستطیل نیست، مثال نقض: ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین که قطرهایش با هم برابر هستند.

۱۷ گزینه ۱

$$\frac{a-b}{۲a+b}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳(a-b)=۲(۲a+b)\Rightarrow ۳a-۳b=۴a+۲b\Rightarrow a=-۵b$$

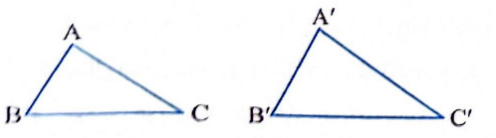
$$\frac{۳a-b}{a-۲b}=\frac{۳(-۵b)-b}{-۵b-۲b}=\frac{-۱۶b}{-۷b}=\frac{۱۶}{۷}$$

BOX 4: تشابه مثلث‌ها (صفحه ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

با تعریف تشابه در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید. در این بسته، تعریف و حالت‌های تشابه دو مثلث گفته می‌شود و در ادامه برخی از کاربردهای آن نیز بیان می‌شود.

تشابه مثلث‌ها

با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند، هرگاه زوایای متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد:



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \ , \ \hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

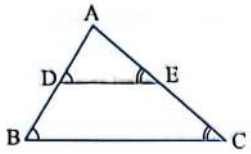
نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گوییم.

نکته: ۱) هر دو شکل همنهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر یک است.

۲) در نوشتن نسبت اضلاع دو مثلث متشابه از تساوی زاویه‌های نظیر استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها:

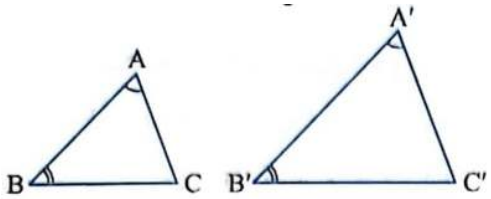
اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

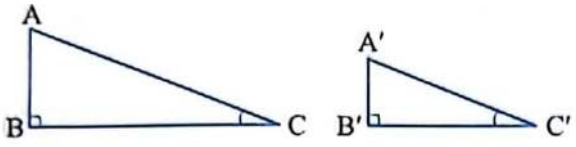
- دو مثلث به سه حالت زیر متشابه می‌باشند:

قضیه: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



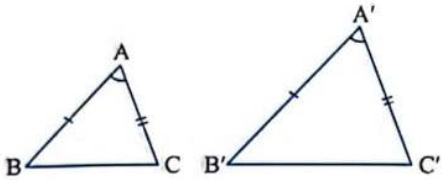
$$\hat{A}=\hat{A}' \ , \ \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت خاص: اگر یک زاویهٔ تند از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ تند از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشند، آن‌گاه این دو مثلث با هم متشابه‌اند.



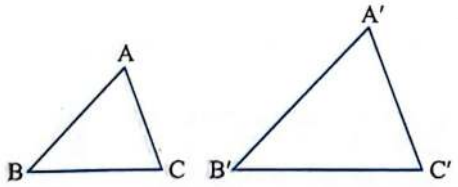
$$\hat{C}=\hat{C}' \xrightarrow{\hat{B}=\hat{B}'=90^\circ} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

قضیه: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\ ,\ \hat{A}=\hat{A}'\ \Rightarrow\ \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

قضیه: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



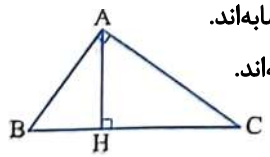
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\ \Rightarrow\ \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

حالت خاص: اگر دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر رسم شود، آن‌گاه سه مثلث قائم‌الزاویه در شکل وجود خواهد داشت که دو به دو با هم متشابه‌اند. از تشابه آن‌ها روابطی به دست می‌آید.

نکته: با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A}=۹۰^\circ)$، داریم:



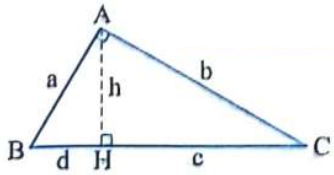
۱) مثلث‌های ABH و AHC با هم متشابه‌اند و هم‌چنین این دو مثلث با مثلث اصلی، یعنی مثلث ABC متشابه‌اند.
یعنی اگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، آن‌گاه سه مثلث قائم‌الزاویه، دو به دو با هم متشابه‌اند.

۲) $AH^۲=BH.CH$ یعنی ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعهٔ ایجادشده روی وتر است.

۳) $AB^۲=BH.BC$ و $AC^۲=CH.BC$ که در آن BH و CH به ترتیب تصویر قائم اضلاع AB و AC روی وتر BC هستند.

۴) از رابطهٔ $AH.BC=AB.AC$ می‌توان برای به دست آوردن طول ارتفاع وارد بر وتر استفاده کرد.

تمرین: با توجه به شکل روبه‌رو، در هر قسمت، مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۴۵ کتاب درسی)



۱) $a=?\ ,\ h=?\ ,\ c=۱۲\ ,\ d=۴$

۲) $b=?\ ,\ c=?\ ,\ d=\frac{۳}{۲}\ ,\ h=۳$

پاسخ: ۱) ابتدا از فرمول $AH^۲=BH.CH$، مقدار h را به دست می‌آوریم.

$$h^۲=c.d=۱۲\times۴=۴۸\ \Rightarrow\ h=\sqrt{۴۸}=\sqrt{۳\times۱۶}=۴\sqrt{۳}$$

از فرمول $AB^۲=BH.BC$، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$a^۲=d(d+c)=۴(۴+۱۲)=۶۴\ \Rightarrow\ a=۸$$

۲) از فرمول $h^۲=d.c$، مقدار c را به دست می‌آوریم:

$$h=۳\ ,\ d=\frac{۳}{۲}\ \Rightarrow\ ۹=\frac{۳}{۲}\times c\ \Rightarrow\ ۳c=۱۸\ \Rightarrow\ c=۶$$

از فرمول $AC^۲=CH.CB$، مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$b^۲=c(c+d)=۶\times(۶+\frac{۳}{۲})=\overset{۳}{\cancel{۶}}\times\frac{۱۵}{\cancel{۲}}=۴۵\ \Rightarrow\ b=\sqrt{۴۵}=\sqrt{۹\times۵}=۳\sqrt{۵}$$

در نکتهٔ بعدی رابطهٔ بین نسبت ارتفاع‌های متناظر، مساحت و محیط دو مثلث متشابه با نسبت تشابه گفته می‌شود.

نکته: اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه و نسبت تشابه آن‌ها k باشد، در این صورت:

آ) نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر k است.

ب) نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر k^2 است.

پ) نسبت محیط‌های دو مثلث متناظر برابر k است.

تمرین: مثلث ABC با طول اضلاع ۴، ۵ و ۷ با مثلث $A'B'C'$ با محیط ۲۴ متشابه است. طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ و همچنین نسبت مساحت‌های دو مثلث را به دست آورید.

پاسخ: محیط مثلث ABC برابر $AB+AC+BC=۴+۵+۷=۱۶$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}=\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{A'B'}=\frac{۵}{A'C'}=\frac{۷}{B'C'}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} A'B'=\frac{۳\times ۴}{۲}=۶ \\ A'C'=\frac{۳\times ۵}{۲}=۷/۵ \\ B'C'=\frac{۳\times ۷}{۲}=۱۰/۵ \end{cases}$$

همچنین نسبت مساحت‌ها برابر $k^2=(\frac{۲}{۳})^2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=(\frac{۲}{۳})^2=\frac{۴}{۹}$$

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازها و همچنین نسبت میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است.

پرسش‌های تشریحی:

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- طول اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه ۴ و ۶ است. نسبت تشابه این دو مثلث ..... است.

۲- نسبت تشابه دو مثلث متشابه $\frac{۳}{۵}$ است. نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر ..... است.

۳- هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر ..... باشند و زاویهٔ بین آن‌ها ..... باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۴- دو خط موازی دارای ..... برابر هستند.

● کدام‌یک از عبارت‌های سه سوال زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

۵- اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، چهار مثلث متشابه با مثلث اولیه به وجود می‌آید.

۶- اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و یک زاویهٔ برابر نیز داشته باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

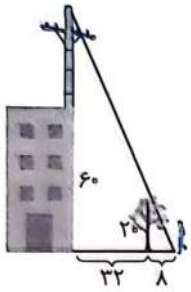
۷- در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است.

۸- اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{۴}{۲۵}$ باشد، نسبت نیمسازهای آن برابر ..... است. (فرداد ۱۴۰۲)

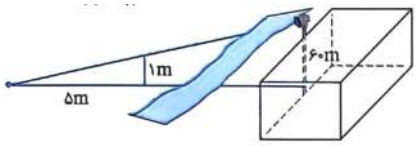
۱) $\frac{۱۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵۰}$

۹- مطابق شکل، یک دکل مخابراتی بالای ساختمانی به ارتفاع ۶۰ متر قرار دارد. اگر فاصلهٔ شخص تا درخت ۸ متر و فاصلهٔ بین درخت و

ساختمان ۳۲ متر و ارتفاع درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع دکل را به دست آورید. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۴۶ کتاب درسی)



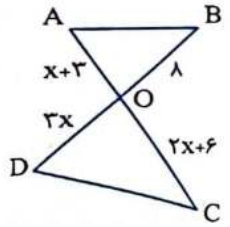
۱۰- بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چه‌قدر است؟ (تمرین ۴ صفحهٔ ۴۶ کتاب درسی)



۱۱- در شکل مقابل AB و CD موازی نمی‌باشند و دو مثلث متشابه‌اند.

آ) نسبت مساحت‌های دو مثلث را به دست آورید.

ب) اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۱۲ واحد مربع باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر را به دست آورید.

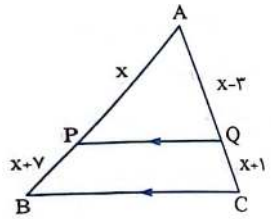


۱۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به رأس قائمهٔ A، اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد و $AH = ۴cm$ و $BH = ۲cm$، آن‌گاه اندازهٔ HC و BA را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۳- در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. (خرداد ۱۴۰۲)

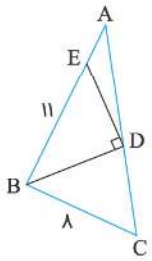
آ) مقدار x را بیابید.

ب) مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟



Homework (1)

۱ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



۱) ۶/۶

۲) ۵/۴

۳) ۳/۶

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

۱) تلاقی سه ارتفاع

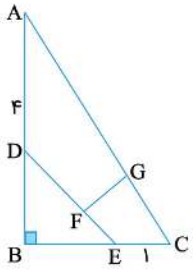
۲) تلاقی سه میانه

۳) تلاقی سه نیمساز

۴) تلاقی سه عمودمنصف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ در شکل زیر، اگر $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = ۴$ باشد، اندازهٔ FG کدام است؟



۱) ۱

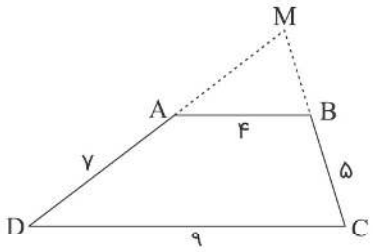
۲) ۱/۲۵

۳) ۱/۵

۴) ۱/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

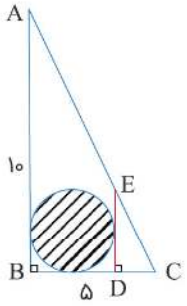
۴ اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) ۱۳/۲
۲) ۱۳/۶
۳) ۱۴/۴
۴) ۱۴/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

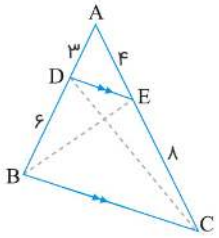
۵ اگر اندازهٔ اضلاع قائمهٔ مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیهٔ هاشورخورده، کدام است؟ (طول پاره‌خط DE برابر با قطر دایره است) (با تغییر)



۱) $\frac{۲۵}{۹}\pi$
۲) $\frac{۱۶}{۹}\pi$
۳) $\frac{۹}{۴}\pi$
۴) $\frac{۵}{۴}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

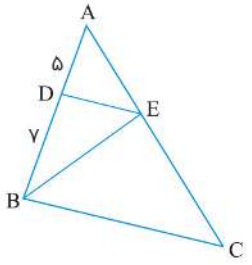
۶ در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

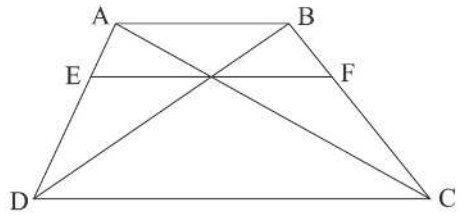
۷ در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟



۱) ۱/۵
۲) ۱/۷
۳) ۲/۱
۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF، کدام است؟



۱) $\frac{۴۵}{۷}$

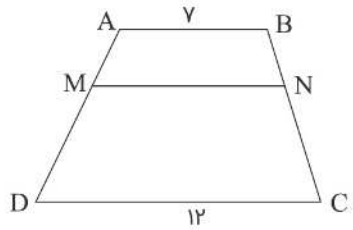
۲) $\frac{۴۵}{۶}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ در ذوزنقهٔ ABCD، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN، کدام است؟



۱) ۸

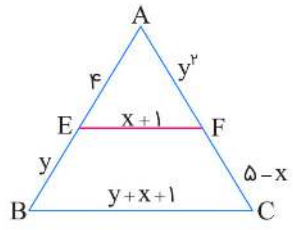
۲) ۸/۷۵

۳) ۹

۴) ۹/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - ۲x$ کدام است؟



۱) -۴

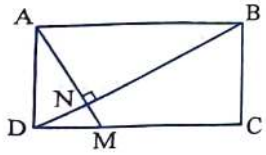
۲) -۳

۳) ۲

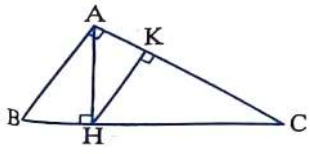
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ در مستطیل ABCD، داریم $AB = ۲AD$. از A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم تا این قطر را در N و ضلع DC را در M قطع کند. ثابت کنید $AB = ۴DM$

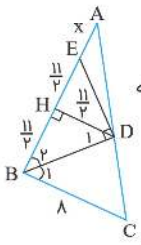


۱۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع وارد بر وتر، یعنی AH را رسم کرده و از نقطهٔ H عمودی بر ضلع AC رسم می‌کنیم و پای عمود را K می‌نامیم. ثابت کنید $AH^۲ = AB.HK$.



پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۱



عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH||BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B}=۹۰^\circ$ و درنتیجه $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=۴۵^\circ$ خواهد بود، پس DH ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و درنتیجه $DH=BH=EH=\frac{۱۱}{۲}$

اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۱۱}{۲}}{۸}=\frac{x+\frac{۱۱}{۲}}{x+۱۱}\Rightarrow\frac{۱۱}{۸}=\frac{۲x+۱۱}{x+۱۱}\Rightarrow ۱۱x+۱۲۱=۱۶x+۸۸$$

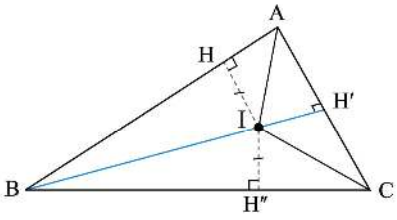
$$\Rightarrow ۵x=۳۳\Rightarrow x=۶/۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

فرض کنیم نقطهٔ I محل همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است؛ پس I از هر دو ضلع مثلث به یک فاصله است. در نتیجه I از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

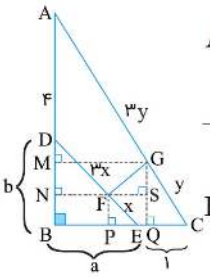
$$\left.\begin{matrix}IH=IH'\\IH'=IH''\end{matrix}\right\}\Rightarrow IH=IH'=IH''$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۲

روش اول: فرض کنیم $BE=a$ و $BD=b$. از G و F بر AB و AC عمود می‌کنیم. حال داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: GQ||AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{GQ}{AB}=\frac{y}{۴y}=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{AB=b+۴} GQ=\frac{۱}{۴}(b+۴) \quad (I)$$

$$\overset{\Delta}{EBD}: FP||DB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FP}{DB}=\frac{x}{۴x}=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{BD=b} FP=\frac{۱}{۴}b \Rightarrow SQ=\frac{۱}{۴}b \quad (II)$$

$$GS=GQ-SQ \xrightarrow{(I),(II)} GS=\frac{۱}{۴}(b+۴)-\frac{۱}{۴}b=۱ \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: MG||BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MG}{BC}=\frac{۳y}{۴y}=\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{BC=a+۱} MG=\frac{۳}{۴}(a+۱) \Rightarrow NS=\frac{۳}{۴}(a+۱) \quad (III)$$

$$\overset{\Delta}{DBE}: NF||BE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NF}{BE}=\frac{۳x}{۴x}=\frac{۳}{۴}$$

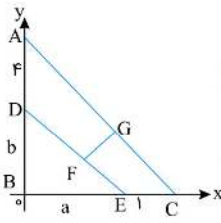
$$\xrightarrow{BE=a} NF=\frac{۳}{۴}a \quad (IV)$$

$$FS=NS-NF \xrightarrow{(III),(IV)} FS=\frac{۳}{۴}(a+۱)-\frac{۳}{۴}a=\frac{۳}{۴} \quad (**)$$

$$\overset{\Delta}{FSG}: \text{فیثاغورس} \Rightarrow FG=\sqrt{GS^۲+FS^۲}$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} FG=\sqrt{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

روش دوم: چون BC و BA بر هم عمودند، آن‌ها را محورهای مختصات فرض می‌کنیم. حال اگر $BE=a$ و $BD=b$، آن‌گاه:



$$\overrightarrow{DF}=\frac{۳}{۴}\overrightarrow{DE} \Rightarrow F-D=\frac{۳}{۴}(E-D)$$

$$\Rightarrow F=\frac{۳}{۴}E+\frac{۱}{۴}D=\frac{۳}{۴}(a,۰)+\frac{۱}{۴}(۰,b)=(\frac{۳}{۴}a,\frac{۱}{۴}b) \quad (*)$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{۳}{۴}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G-A=\frac{۳}{۴}(C-A) \Rightarrow G=\frac{۳}{۴}C+\frac{۱}{۴}A$$

$$=\frac{۳}{۴}(a+۱,۰)+\frac{۱}{۴}(۰,b+۴)=(\frac{۳}{۴}a+\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴}b+۱) \quad (**)$$

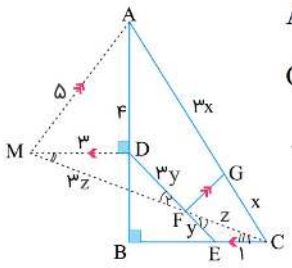
$$(*),(**) \Rightarrow |FG|=\sqrt{(\frac{۳}{۴})^۲+(۱)^۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

تذکر: در هر دو روش می‌توانستیم طول BE و BD را عددی دلخواه و مثبت (مثلاً ۴) فرض کنیم تا محاسبات، ساده شوند.

روش سوم: طبق فرض، $CG=x$، $AG=۳x$ ، $EF=y$ و $DF=۳y$. از D خطی بر AB عمود می‌کنیم تا امتداد CF را در M قطع کند. پس $DM||EC$ و داریم:

$$(\hat{C}_1 = \hat{M}_1)\ ,\ (\hat{F}_1 = \hat{F}_2) \Rightarrow C\overset{\Delta}{F}E \sim M\overset{\Delta}{F}D \Rightarrow \frac{CF}{FM} = \frac{CE}{MD} = \frac{FE}{DF}$$

$$\frac{CF}{FM} = \frac{1}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow CF = z\ ,\ FM = 3z\ ,\ MD = 3$$



$$A\overset{\Delta}{D}M \text{ : فیثاغورس} \Rightarrow AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

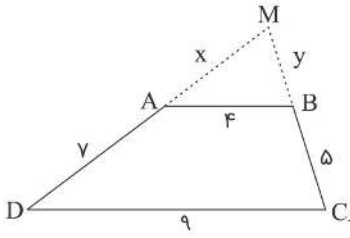
$$C\overset{\Delta}{A}M : \frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FM} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} FG||MA$$

$$\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FG}{MA} = \frac{CG}{CA} \Rightarrow \frac{FG}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow FG = \frac{5}{4} = 1/25$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$C\overset{\Delta}{A}MB \sim M\overset{\Delta}{D}C \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

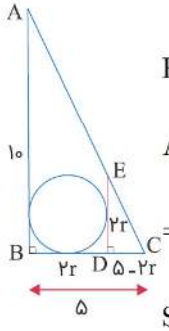
حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } A\overset{\Delta}{M}B = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13/6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵ گزینه ۱

طول شعاع دایره را r می‌نامیم. پس $DE = ۲r$ و داریم:



$$BD = ۲r \xrightarrow{BC=۵} DC = ۵ - ۲r$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : DE||BA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DE}{BA} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{۲r}{۱۰} = \frac{۵-۲r}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{۵} = \frac{۵-۲r}{۵} \Rightarrow r = ۵ - ۲r \Rightarrow ۳r = ۵ \Rightarrow r = \frac{۵}{۳}$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi\left(\frac{۵}{۳}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۹}\pi$$

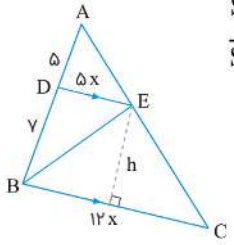
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۴

قاعدهٔ هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

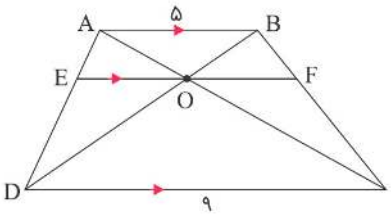
۷ گزینه ۴



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{BDE}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times h \times BC}{\frac{۱}{۲} \times h \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۲x}{۵x} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC} : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{EO}{DC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow \dfrac{EO}{۹} = \dfrac{AE}{AD} \\ \overset{\Delta}{DAB} : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{EO}{AB} = \dfrac{DE}{AD} \Rightarrow \dfrac{EO}{۵} = \dfrac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{۹} + \frac{EO}{۵} = \frac{\overbrace{AE + DE}^{AD}}{AD} = ۱ \xrightarrow{\times ۴۵} ۵EO + ۹EO = ۴۵$$

$$\Rightarrow ۱۴EO = ۴۵ \Rightarrow EO = \frac{۴۵}{۱۴}$$

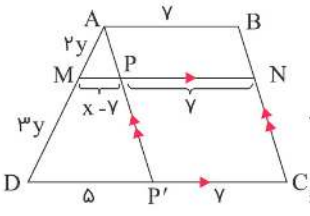
به روش مشابه $\Rightarrow OF = \dfrac{۴۵}{۱۴} \Rightarrow EF = \dfrac{۴۵}{۱۴} + \dfrac{۴۵}{۱۴} = \dfrac{۴۵}{۷}$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \dfrac{۲}{\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{DC}}$. ($EF$ واسطهٔ توافقی طول قاعده‌ها است)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

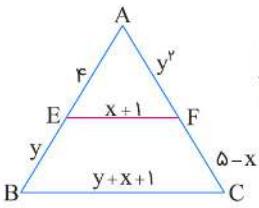
$$\frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y + ۳y} = \frac{x - ۷}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{x - ۷}{۵} \Rightarrow x = ۹ = MN$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۱

چون $EF \parallel BC$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

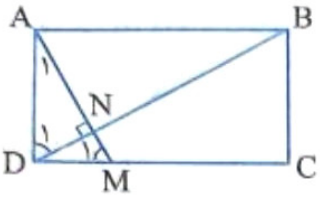


$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x + ۱}{y + x + ۱} = \frac{۴}{y + ۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x + ۱}{y} = \frac{۴}{y} \Rightarrow x + ۱ = ۴ \Rightarrow x = ۳ \quad (*)$$

$$\text{تالس} : \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{(*)} \frac{۴}{y} = \frac{y^۲}{۲} \Rightarrow y^۳ = ۸ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow y - ۲x = ۲ - ۶ = -۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ با استفاده از قضیهٔ مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی مثلث داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ADN}: \hat{D}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ \\ \overset{\Delta}{ADM}: \hat{M}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1$$

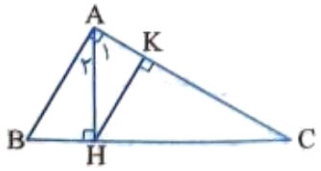
در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM و BAD یک زاویهٔ حادهٔ برابر دارند، پس:

$$\overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{BAD}$$

در نتیجه:

$$\frac{AD}{DM} = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{\frac{1}{2}AB}{DM} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AB} \Rightarrow \frac{AB}{DM} = 4 \Rightarrow AB = 4DM$$

۱۲ با استفاده از قضیهٔ مجموع زاویه‌های داخلی مثلث داریم:



$$\hat{A}_2 + \hat{B} = 90^\circ$$

هم‌چنین:

$$B\hat{A}C = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 90^\circ$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}$$

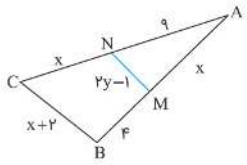
ضمناً طبق فرض داریم $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$. بنابراین دو مثلث ABH و HAK به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند؛ در نتیجه:

$$\frac{AH}{HK} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow AH^2 = AB.HK$$

Homework (2)

در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.

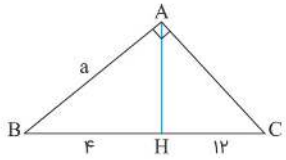
۱



(MN||BC)

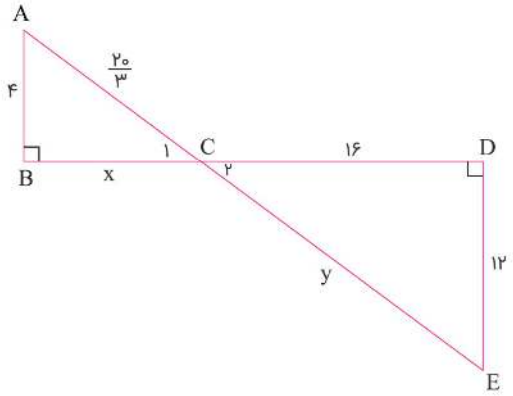
x=?
y=?

۲



a=?
AH=?

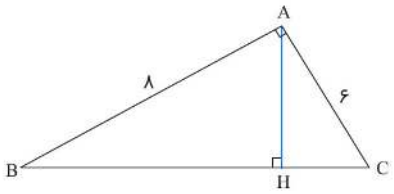
۳ باتوجه‌به شکل، به سؤالات پاسخ دهید.



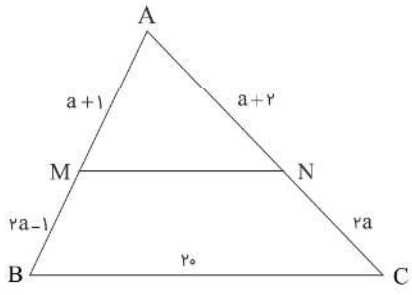
الف ثابت کنید دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{CDE}$ متشابه هستند.

ب مقادیر x و y را مشخص کنید.

۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول AH و BH را به دست آورید.



۵ در شکل زیر، محیط چهارضلعی $MNCB$ کدام است؟(MN موازی BC است.) $(BC = ۲۰)$



۱) ۳۲

۲) ۳۵

۳) ۳۷

۴) ۳۹

۶ کدام گزینه درست است؟

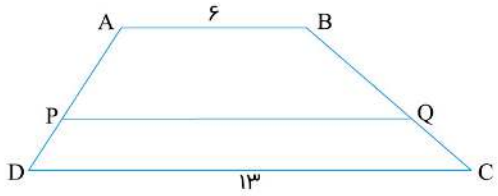
۱) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) اگر شعاع دایره یک عدد گنگ باشد، در این صورت محیط آن نیز عددی گنگ است.

۳) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند.

۴) فاصلهٔ هر نقطه از روی نیمساز تا اضلاع زاویه باهم برابر است.

۷ در ذوزنقهٔ زیر، PQ موازی AB و $\frac{AP}{PD} = ۲$ می‌باشد. طول PQ کدام است؟



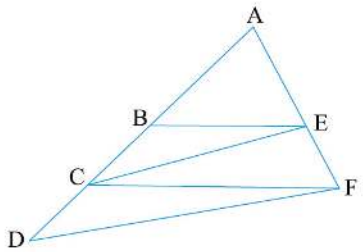
۱) $\frac{۳۲}{۳}$

۲) $\frac{۳۱}{۳}$

۳) $\frac{۲۹}{۳}$

۴) $\frac{۳۵}{۳}$

۸ در شکل زیر، $BE||CF$ و $CE||DF$. اگر $AB = ۸$ و $BC = ۵$، آنگاه اندازهٔ CD کدام است؟



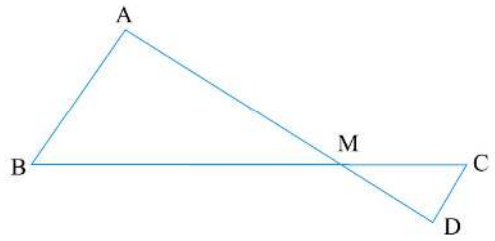
۱) $\frac{۵۵}{۸}$

۲) ۸

۳) $\frac{۶۵}{۸}$

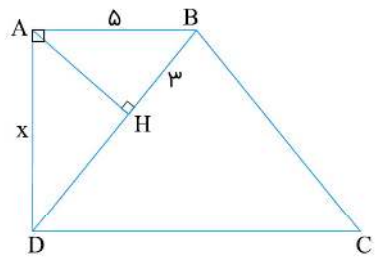
۴) ۷

۹ در شکل زیر، $AB||CD$ و $\frac{AM}{MD}=\frac{۷}{۳}$، نسبت مساحت‌های دو مثلث از آن شکل کدام است؟



۱) $\frac{۴۹}{۲۵}$
۲) $\frac{۴۹}{۹}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۷}{۵}$

۱۰ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر $(ABCD)$، مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{۱۷}{۳}$
۲) $\frac{۲۰}{۳}$
۳) $\frac{۲۵}{۳}$
۴) $\frac{۱۶}{۳}$

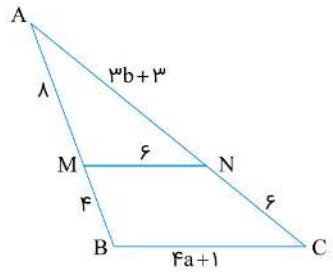
۱۱ فرض کنید در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۴}{۹}$ و نسبت ارتفاع‌ها $\frac{۲m+۳}{m+۷}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۵}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۲ اگر $\frac{۲a+۴}{۵b+۲}=\frac{۲a+۶}{۵b+۳}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

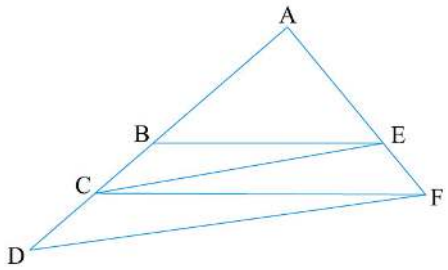
۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) ۵
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۳

۱۳ در شکل زیر، $MN||BC$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۷
۲) ۳
۳) ۹
۴) ۵

۱۴ در شکل زیر، $BE||CF$ و $CE||DF$. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$، آنگاه اندازهٔ CD کدام است؟



۱) $۴/۵$

۲) $۴/۸$

۳) $۵/۴$

۴) $۵/۶$

۱۵ در کدام‌یک از قضایای زیر، عکس قضیه درست نیست؟

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، دو ارتفاع مثلث با هم برابرند.

۲) قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند.

۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه زاویه با هم برابرند.

۴) قطرهای مستطیل با هم برابرند.

۱۶ اگر $\frac{a-b}{۲a+b} = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل $\frac{۳a-b}{a-۲b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۷}$

۲) ۲

۳) $\frac{۱۵}{۷}$

۴) $\frac{۱۶}{۱۱}$

پاسخ Homework (2)

۱

$$MN||BC \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=۶$$

$$MN||BC \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow y=\frac{۲۹}{۱۰}$$

۲

$$h^۲=BH\times CH=۱۲\times ۴=۴۸ \Rightarrow h=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

$$a^۲=BH\times BC=۴\times ۱۶=۶۴ \Rightarrow a=۸$$

۳ الف

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ \\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲ \text{ دو زاویه متقابل به رأس}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنا به حالت تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{CDE}$$

ب نسبت تشابه:

$$\frac{CE}{AC}=\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{BC}$$

$$\frac{y}{\frac{۲۰}{۳}}=\frac{۱۲}{۴}=\frac{۱۶}{x} \Rightarrow \begin{cases}\frac{y}{\frac{۲۰}{۳}}=\frac{۱۲}{۴} \Rightarrow y=۲۰ \\ \frac{۱۶}{x}=\frac{۱۲}{۴} \Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}\end{cases}$$

۴

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow BC^۲=۶۴+۳۶=۱۰۰ \Rightarrow BC=۱۰$$

$AB^۲=BH\times BC$ رابطهٔ طولی

$$۶۴=BH\times ۱۰ \Rightarrow BH=۶/۴$$

$$CH=۱۰-۶/۴=۳/۶$$

$AH^۲=BH\times CH$ رابطهٔ طولی

$$AH^۲=۶/۴\times ۳/۶ \Rightarrow AH=۴/۸$$

۵ گزینه ۳

بنا به قضیهٔ تالس داریم (MN موازی BC):

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$\underbrace{\frac{a+۱}{۳a}=\frac{a+۲}{۳a+۲}}_{\downarrow}=\frac{x}{۲۰}$$

$$۳a^۲+۳a+۲a+۲=۳a^۲+۶a \Rightarrow a=۲ \Rightarrow \frac{a+۱}{۳a}=\frac{x}{۲۰} \Rightarrow \frac{۳}{۶}=\frac{x}{۲۰} \Rightarrow x=۱۰$$

محیط $MNCB$: $۱۰+۴+۲۰+۳=۳۷$

۶ گزینه ۴

برای گزینه‌های "۱"، "۲" و "۳" مثال نقض وجود دارد.

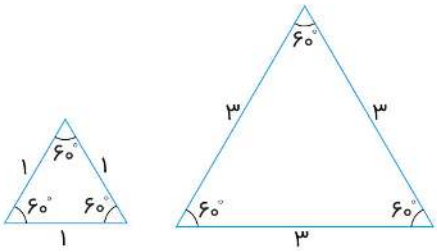
گزینهٔ "۱":

$۰\times\sqrt{۲}=۰\in$ اعداد گویا

گزینهٔ "۲":

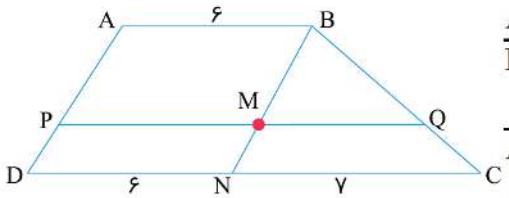
محیط $P=۲\pi r \xrightarrow{r=\frac{۱}{\pi}} P=۲\pi\times\frac{۱}{\pi}=۲\in$ اعداد گویا

گزینهٔ "۳":



۷ گزینه ۱

از B موازی AD رسم نمایید:



$$\frac{AP}{PD}=۲$$

$$\frac{AP}{AP+PD}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{AP}{AD}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AP}{AD}=\frac{BM}{BN}=\frac{MQ}{NC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow MQ=\frac{۱۴}{۳}$$

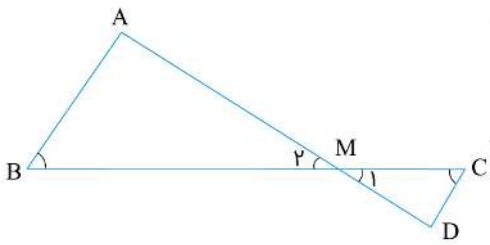
$$PQ=MQ+MP=۶+\frac{۱۴}{۳}=\frac{۳۲}{۳}$$

۸ گزینه ۳

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{AFC}:BE||CF:\frac{AE}{EF}=\frac{AB}{BC}\\ \overset{\Delta}{ADF}:EC||FD:\frac{AE}{EF}=\frac{AC}{CD}\end{cases}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}$$

$$\Rightarrow\frac{۸}{۵}=\frac{۱۳}{CD}\Rightarrow CD=\frac{۶۵}{۸}$$

۹ گزینه ۲



$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{C}\\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\end{cases}$$ دو زاویهٔ متقابل به رأس $\xrightarrow[\text{زاویه برابر}]{\text{به حالت دو}}\overset{\Delta}{MCD}\sim\overset{\Delta}{ABM}$

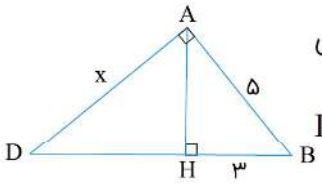
$$\frac{AB}{CD}=\frac{AM}{MD}=\frac{BM}{CM}=k$$

نسبت تشابه: $k=\frac{۷}{۳}$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMB}}}{S_{\overset{\Delta}{MCD}}}=k^۲=\frac{۴۹}{۹}$$

۱۰ گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABD}$ داریم:



رابطهٔ طولی $AB^۲ = BH \times BD \Rightarrow ۲۵ = ۳BD \Rightarrow BD = \frac{۲۵}{۳}$

$DH = BD - BH \Rightarrow DH = \frac{۲۵}{۳} - ۳ \Rightarrow DH = \frac{۱۶}{۳}$

رابطهٔ طولی $AD^۲ = DH \times BD \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۶}{۳} \times \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۳}$

۱۱ گزینه ۳

نسبت تشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{S}{S'} = \frac{۴}{۹} = k^۲ \Rightarrow k = \frac{۲}{۳}$

نسبت ارتفاع‌ها $\frac{h}{h'} = k = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۲m+۳}{m+۷} \Rightarrow ۲m+۱۴ = ۶m+۹$

$\Rightarrow -۴m = -۵ \Rightarrow m = \frac{۵}{۴}$

۱۲ گزینه ۲

$(۲a+۶)(۵b+۲) = (۲a+۴)(۵b+۳)$

$\Rightarrow ۱۰ab + ۴a + ۳۰b + ۱۲ = ۱۰ab + ۶a + ۲۰b + ۱۲$

$\Rightarrow -۲a = -۱۰b$

$\frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۲} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۵$

۱۳ گزینه ۴

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{۸}{۱۲} = \frac{۳b+۳}{۳b+۹} = \frac{۶}{۴a+۱} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳b+۳}{۳b+۹} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{b+۱}{b+۳} = \frac{۲}{۳} \\ \Rightarrow ۳b+۳ = ۲b+۶ \Rightarrow b = ۳ \\ \frac{۶}{۴a+۱} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۶}{۴a+۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۸a+۲ = ۱۸ \Rightarrow a = ۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow a + b = ۲ + ۳ = ۵$

۱۴ گزینه ۲

بنابه قضیه تالس داریم:

$$\left.\begin{matrix} BE||CF \Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE}{EF} \\ CE||DF \Rightarrow \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{AE}{EF} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}$$

$$\frac{۵}{۳}=\frac{۸}{CD} \Rightarrow CD=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

۱۵ گزینه ۴

چون اگر یک چهارضلعی قطرهایش برابر باشند، الزاماً آن چهارضلعی مستطیل نیست، مثال نقض: ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین که قطرهایش با هم برابر هستند.

۱۶ گزینه ۱

$$\frac{a-b}{۲a+b}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳(a-b)=۲(۲a+b) \Rightarrow ۳a-۳b=۴a+۲b \Rightarrow a=-۵b$$

$$\frac{۳a-b}{a-۲b}=\frac{۳(-۵b)-b}{-۵b-۲b}=\frac{-۱۶b}{-۷b}=\frac{۱۶}{۷}$$

تابع (فصل سوم ریاضی ۲ و فصل دوم حسابان ۱)

BOX 1: تابع و یادآوری

صفحه ۴۸ کتاب درسی

تابع

تابع: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، در این صورت تابع f از A به B، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B نسبت داده شود. توابع را معمولاً با حروف f، g، h و ... نمایش می‌دهند.

نمایش‌های مختلف یک رابطه و شرط تابع‌بودن آن‌ها

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، در این صورت یک رابطه از A به B و یا یک رابطه روی A را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد و یا توصیف نمود:

۱) توصیف رابطه: به کمک یک یا چند جمله، رابطهٔ بین دو مجموعه را توصیف می‌کنیم. رابطهٔ بین دو مجموعه، در واقع همان وابستگی بین اعضای دو مجموعه می‌باشد.

- شرط آن‌که یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تابع باشد آن است که این رابطه، به هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت دهد.

۲) مجموعهٔ زوج‌های مرتب: یک رابطه را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داد.

- شرط آن‌که این رابطه تابع باشد، آن است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند. به عبارتی می‌توان گفت اگر در یک رابطه دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، برای آن‌که آن رابطه تابع باشد لازم است که مؤلفه‌های دوم این دو زوج مرتب نیز یکسان باشند.

۳) نمودار پیکانی (نمودار وِن): در این نمایش، اعضای مجموعه‌های A و B را داخل شکل‌های هندسی مثل بیضی یا دایره یا ... قرار داده و به کمک پیکان‌هایی آن‌ها را به هم مربوط می‌کنیم.

- شرط آن‌که یک نمودار پیکانی تابع باشد آن است که از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان به اعضای مجموعهٔ B رسم شود.

۴) جدول: در این نمایش، یک جدول دوسطری رسم کرده و مولفه‌های اول رابطه را در سطر اول جدول و مولفه‌های دوم رابطه را در سطر دوم جدول و درست زیر مولفهٔ اول نظیر آن قرار می‌دهیم.

- شرط آن‌که یک رابطهٔ جدولی تابع باشد، آن است که هیچ عضوی در سطر اول جدول به بیش از یک عضو در سطر دوم آن نسبت داده نشود.

۵) نمودار مختصاتی: در این نمایش، دستگاه مختصات را رسم کرده و نمودار رابطه را رسم می‌کنیم. در صورتی که رابطه به صورت زوج‌های مرتب باشد، آن را به صورت نقاطی در صفحهٔ دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم.

- شرط آن‌که نمودار یک رابطه بیانگر یک تابع باشد، آن است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین: به ازای چه مقدار m، مجموعهٔ $R=\{(-۱,۴),(۲,۶),(-۱,m^۲-۵),(m-۱,۷)\}$، نمایش یک تابع است؟

پاسخ: در مجموعهٔ R دو زوج مرتب با مولفهٔ اول یکسان -۱ وجود دارد. برای آن‌که این مجموعه نمایش یک تابع باشد، باید مولفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند. در واقع باید داشته باشیم:

$$m^۲-۵=۴ \Rightarrow m^۲=۹ \Rightarrow m=\pm ۳$$

اگر $m=۳$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ R به صورت $R=\{(-۱,۴),(۲,۶),(۲,۷)\}$ درمی‌آید که به خاطر وجود دو زوج مرتب متمایز $(۲,۶)$ و $(۲,۷)$ با مولفهٔ اول یکسان، تابع نمی‌باشد.

اگر $m=-3$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ R به صورت $R=\{(-1,4),(2,6),(-4,7)\}$ درمی‌آید که نمایش یک تابع است.

دامنه و برد تابع

دامنه و برد: اگر تابعی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داده شده باشد، آن‌گاه به مجموعهٔ تمام مولفه‌های اول یک تابع، دامنهٔ آن تابع و به مجموعهٔ مولفه‌های دوم آن، برد آن تابع گفته می‌شود. دامنه و برد تابع f را به ترتیب با نماد D_f و R_f نمایش می‌دهند.

قرارداد: ممکن است در برخی از توابع بخواهیم بخش خاصی از آن را مطالعه کنیم، در این صورت تنها به قسمتی از دامنهٔ آن که مورد نیاز است اشاره می‌کنیم اما اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد و دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین دامنهٔ ممکن را برای آن در نظر می‌گیریم.

مقدار تابع: اگر f یک تابع و $(x,y)\in f$، آن‌گاه y را مقدار تابع f در نقطهٔ x می‌گوییم و به صورت $y=f(x)$ نمایش می‌دهیم.

نمایش جبری یا ضابطه: به رابطه یا قانون بین اعضای دامنه و برد تابع f که به صورت عبارت ریاضی بیان می‌شود، ضابطه یا نمایش جبری تابع f می‌گوییم. تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B با ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت $\begin{cases} f:A\to B \\ x\to f(x) \end{cases}$ نمایش می‌دهیم. در این نمایش، مجموعهٔ A همواره برابر دامنهٔ تابع f است. بنابراین در این نمایش، تابع f قاعده یا قانونی است که به هر عضو مجموعهٔ A (دامنهٔ تابع) مانند x، یک و تنها یک عضو از مجموعهٔ B (برد تابع) مانند y را نظیر می‌کند. عضو منحصر به فرد y را معمولاً با $f(x)$ نمایش می‌دهیم.

تمرین: نمایش جبری تابع زیر را بنویسید. «به هر عدد حقیقی، مربع آن عدد نسبت داده شود.»

پاسخ: فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد، در این صورت x را باید به x^2 نسبت دهیم. بنابراین نمایش جبری این تابع به صورت $y=x^2$ یا $f(x)=x^2$ می‌باشد.

مقدار تابع در یک نقطه از روی ضابطه

فرض کنید $a\in D_f$ باشد، در این صورت به $y=f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه‌ای به طول a می‌گوییم. برای یافتن مقدار تابع f در یک نقطه، وقتی ضابطهٔ تابع را در اختیار داریم، کافی است آن نقطه را در ضابطهٔ تابع به جای متغیر آن قرار دهیم و مقدار تابع را به دست آوریم.

تمرین: اگر $f(x)=2x-\sqrt{x+3}$ باشد، به ازای چه مقداری از x، مقدار تابع برابر -5 می‌باشد؟

پاسخ: باید x را طوری به دست آوریم که $f(x)=-5$ شود:

$$f(x)=-5 \Rightarrow 2x-\sqrt{x+3}=-5$$

حدود x: $\underbrace{2x+5\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{5}{2}}_{(1)}$, $\underbrace{x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3}_{(2)} \xrightarrow{(1)\cap(2)} x\geq -\frac{5}{2}$

$$2x-\sqrt{x+3}=-5 \Rightarrow 2x+5=\sqrt{x+3}$$

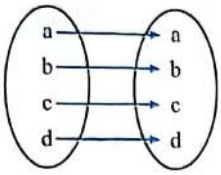
$$2x+5=\sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (2x+5)^2=x+3 \Rightarrow 4x^2+20x+25=x+3 \Rightarrow 4x^2+19x+22=0$$

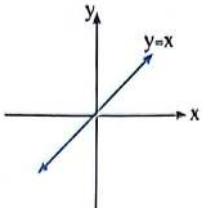
$$\Rightarrow (x+2)(4x+11)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 4x+11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{11}{4}<-\frac{5}{2} \text{ (غیرقابل‌قبول)} \end{cases}$$

تابع خطی: هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌گوییم. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن یک خط راست می‌باشد.

تابع همانی: تابع f را همانی می‌گوییم، هرگاه هر عضو دامنهٔ f دقیقاً به همان عضو در برد تابع نظیر شود. ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است. اگر دامنهٔ تابع همانی برابر $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم و در صورتی که دامنه برابر $\mathbb{R}$ نباشد، نمودار این تابع بخشی از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم می‌باشد.

مثال: هر یک از توابع مقابل، یک تابع همانی می‌باشند:





$$f=\{(1,1),(-2,-2),(\sqrt{3},\sqrt{3})\}$$

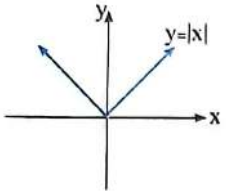
تابع ثابت: تابع f را ثابت می‌گوییم، هرگاه برد آن تنها شامل یک عضو باشد. ضابطهٔ تابع ثابت به صورت $f(x)=k$، $(k\in\mathbb{R})$ است. نمودار تابع ثابت، خطی موازی محور xها و یا بخشی از آن است.

تذکر: توابع ثابت و همانی، حالت‌های خاصی از تابع خطی $f(x)=ax+b$ هستند. (اگر $b=0$ و $a=1$ ، تابع همانی و اگر $a=0$، تابع ثابت است.)

تابع چندجمله‌ای: توابعی را که ضابطهٔ آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ که در آن a_0، a_1، ... و a_n اعداد حقیقی و $n\in\mathbb{W}$، تابع چندجمله‌ای می‌گوییم.

همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، اگر دامنهٔ توابع چند جمله‌ای داده نشده باشد، دامنهٔ این توابع برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود.

تابع قدرمطلق: به تابع f که به هر مقدار در دامنهٔ خود، قدرمطلق آن را در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق می‌گوییم. ضابطهٔ تابع قدرمطلق به صورت $y=f(x)=|x|$ می‌باشد. در صورتی که دامنهٔ تابع قدرمطلق برابر $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن به صورت روبه‌رو است:



تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای): تابع f را چندضابطه‌ای یا قطعه‌ای می‌گوییم، هرگاه دامنهٔ آن شامل دو یا چند بخش باشد و روی هر بخش دامنه، ضابطهٔ متفاوتی تعریف شود. به عبارت دیگر تابع f با ضابطهٔ مقابل را یک تابع چندضابطه‌ای می‌گوییم:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\in D_1\\ f_2(x) & x\in D_2\\ \vdots & \vdots\\ f_n(x) & x\in D_n\end{cases}$$

که در آن اشتراک دوبه‌دوی D_1، D_2، ... و D_n، تهی می‌باشد.

تذکر: تابع قدرمطلق را به صورت تابع دوضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.

پرسش‌های تشریحی:

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱- یک رابطه، زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن ..... .

۲- یک نمودار، زمانی بیانگر تابع است که هر خط ..... آن نمودار را ..... .

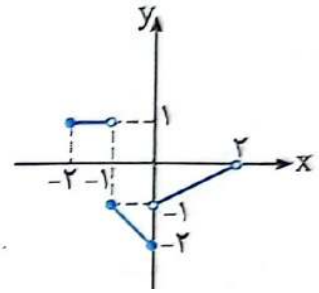
۳- به مجموعهٔ مولفه‌های اول یک تابع ..... و به مجموعهٔ مولفه‌های دوم آن ..... می‌گویند.

۴- a و b را طوری تعیین کنید که رابطهٔ داده‌شده یک تابع باشد.

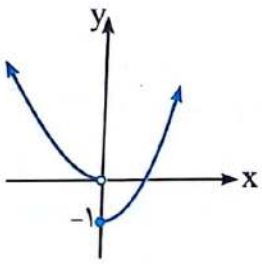
$$R = \{(۱, a+b), (۲, ۵), (۱, ۳), (۲, a-b)\}$$

۵- دامنه و برد هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ)



ب)

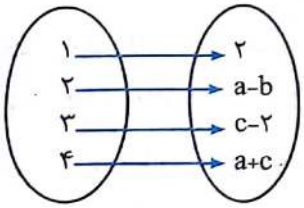


۶- در تابع خطی f داریم $f(۱) = ۵$ و $f(-۲) = -۴$. ضابطهٔ این تابع را تعیین کنید.

۷- نمودار تابع چندجمله‌ای از درجهٔ دوم f، محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۲ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f(-۱) = ۲$ باشد، $f(۲)$ را به دست آورید.

۸- اگر تابع $f = \{(a+b, ۱), (۲, a+c), (b+c, ۳)\}$ همانی باشد، مقادیر a، b و c را تعیین کنید.

۹- مقادیر a، b و c را طوری تعیین کنید که نمودار پیکانی شکل مقابل مربوط به یک تابع ثابت باشد.



۱۰- دامنه و برد تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}۲-۵x & -۲<x\le ۰\\ \frac{۱}{۳}x+۱ & ۰<x\le ۳\\ x^{۲}-۴ & x>۳\end{cases}$$

۱۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ) $f(x)=\begin{cases}۲x-۳ & x\ge ۱\\ ۳-x & x<۱\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲x & x\ge ۰\\ ۲ & -۱<x<۰\\ ۱-x^{۲} & x<-۱\end{cases}$

BOX 2: انواع تابع (توابع گویا و دامنه آن) ـ تساوی دو تابع (صفحه ۴۸ تا ۵۱ کتاب درسی)

در این بسته تعریف تابع گویا، نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$، دامنهٔ تابع گویا و هم‌چنین تعریف تساوی دو تابع بررسی می‌شود.

الف) توابع گویا

تعریف: به هر تابعی که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت به طوری که $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $q(x)\neq 0$ (یعنی $q(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد)، تابع گویا می‌گویند.

مثال: هر یک از توابع روبه‌رو یک تابع گویا می‌باشد: $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$ ، $g(x)=\frac{x}{2x^5+1}$

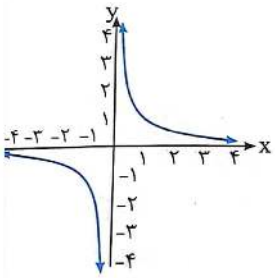
اما تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{2+x}$، تابع گویا نمی‌باشد، زیرا $\sqrt{x}$ چندجمله‌ای نیست.

نکته: هر تابع چندجمله‌ای را می‌توان یک تابع گویا در نظر گرفت. توجه کنید مخرج تمام این توابع را می‌توان یک‌جمله‌ای $q(x)=1$ در نظر گرفت.

مثال: توابع $f(x)=4$ و $g(x)=\sqrt{2}x$ نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ به صورت مقابل است:



ویژگی‌های تابع $y=\frac{1}{x}$ از روی نمودار

با توجه به نمودار $y=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $D_y=\mathbb{R}-\{0\}$، می‌توان گفت:

۱) نمودار تابع محور yها را قطع نمی‌کند، پس به جای x نمی‌توان عدد صفر قرار داد و در نتیجه $x=0$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.

تذکر: نمودار $y=\frac{1}{x}$ به اندازهٔ دلخواه به محور yها (خط $x=0$) نزدیک می‌شود، اما محور yها را قطع نمی‌کند.

۲) نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند، پس معادلهٔ $y=0$ جواب ندارد و در نتیجه $y=0$ در برد تابع $y=\frac{1}{x}$ قرار نمی‌گیرد، پس $R_y=\mathbb{R}-\{0\}$

تذکر: نمودار $y=\frac{1}{x}$ به اندازهٔ دلخواه به محور xها (خط $y=0$) نزدیک می‌شود، اما محور xها را قطع نمی‌کند.

۳) برد تابع $R_y=\mathbb{R}-\{0\}$ است (فقط به ازای $y=0$، مقداری برای x وجود ندارد).

یادآوری از رسم نمودار یک تابع به کمک انتقال (جابه‌جایی)

تغییرات نمودار در راستای محور yها:

فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k>0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور yها (به بالا) انتقال دهیم.

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)-k$ ، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور yها (به پایین) انتقال دهیم.

تغییرات نمودار در راستای محور xها:

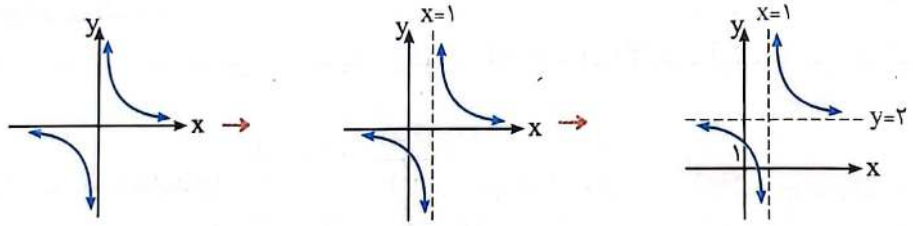
فرض کنید نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k>0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور xها (به سمت راست) منتقل کنیم.

۲) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور xها (به سمت چپ) منتقل کنیم.

تمرین: نمودار تابع $y=\frac{1}{x-1}+2$ را به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: با انتقال نمودار $y=\frac{1}{x}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت راست، نمودار $y=\frac{1}{x-1}$ و با انتقال نمودار $y=\frac{1}{x-1}$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا، نمودار $y=\frac{1}{x-1}+2$ به دست می‌آید. در انتقال اول، خط $x=0$ به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و در انتقال دوم، خط $y=0$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال پیدا می‌کند:



$y=\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y=\frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $y=\frac{1}{x-1}+2$

دامنهٔ توابع گویا

اگر مخرج یک کسر برابر صفر باشد، آن‌گاه آن کسر تعریف نشده است و به ازای بقیهٔ مقادیر، مقدار کسر تعریف می‌شود. به عنوان مثال، تابع $y=\frac{1}{x-1}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده است، زیرا عبارت $\frac{1}{x-1}$ به ازای $x=1$ به صورت کسر بی‌معنی $\frac{1}{0}$ درمی‌آید. بنابراین:

نکته: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای و $y=f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ تابع کسری گویا باشد، آن‌گاه دامنهٔ f، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های $q(x)$ (مخرج کسر) است، یعنی: $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,q(x)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{x\,|\,q(x)=0\}$

پس برای به دست آوردن دامنهٔ توابع کسری گویا، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را (در صورت وجود) از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم.

تمرین: دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4x}$ را به دست آورید.

پاسخ: f یک تابع کسری گویا است، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

در این قسمت می‌خواهیم دو تابع مساوی را تعریف کنیم. تعیین دامنهٔ دو تابع اولین مرحله در بررسی تساوی دو تابع است. دقت کنید که دامنهٔ تابع را قبل از ساده‌کردن تابع به دست آورید.

ب) تساوی دو تابع

دو تابع f و g را با ضابطه‌های $f(x)=1$ و $g(x)=\frac{x}{x}$ در نظر بگیرید. در تابع g اگر بدون در نظرگرفتن دامنه، x را در صورت و مخرج کسر ساده کنیم، ضابطهٔ تابع g به صورت $g(x)=1$ درمی‌آید که همان ضابطهٔ تابع f می‌باشد. اما این دو تابع با هم برابر نمی‌باشند. زیرا در تابع f، مقدار $f(0)$ برابر یک است ولی در تابع g، برای $x=0$ مقداری وجود ندارد.

تعریف: دو تابع f و gرا برابر نامیم هرگاه:

۱) دامنهٔ تابع f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

۲) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

به عبارت دیگر در صورت رسم دو تابع، باید نمودار آن‌ها کاملاً روی هم قرار گیرد.

تمرین: آیا دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$ با هم برابرند؟ چرا؟

پاسخ: ابتدا دامنهٔ هر یک از دو تابع را به دست می‌آوریم:

f تابع یک‌جمله‌ای از درجهٔ یک است، پس: $D_f=\mathbb{R}$

g یک تابع گویا است، داریم: $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ غیرممکن $\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$

دامنهٔ توابع f و g با هم برابرند و در نتیجه شرط اول برقرار است. تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=f(x)$$

شرط دوم تساوی دو تابع برقرار است، بنابراین دو تابع f و g با هم برابرند.

نکته: دو تابع مساوی ظاهری متفاوت دارند، اما با ساده‌کردن یکی می‌توان به ضابطهٔ تابع دیگر رسید.

- تساوی دو تابع را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

اگر دامنهٔ دو تابع f و g با هم برابر و به ازای هر x متعلق به دامنهٔ یکسان دو تابع، $f(x)=g(x)$ باشد، آن‌گاه دو تابع با هم مساوی هستند.

تمرین: به ازای چه مقداری از a، دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\frac{16x^2-1}{4x+1} & x\neq-\frac{1}{4}\\ 8x+a & x=-\frac{1}{4}\end{cases}$ و $g(x)=4x-1$ با هم مساوی هستند؟

پاسخ: دامنهٔ هر دو تابع، $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) است، پس شرط اول تساوی دو تابع برقرار است. چون f تابعی دوضابطه‌ای است، تساوی $f(x)=g(x)$ را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) $x\neq-\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{16x^2-1}{4x+1}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{4x+1}=4x-1=g(x)$ ✓

۲) $x=-\frac{1}{4} \Rightarrow f(-\frac{1}{4})=g(-\frac{1}{4}) \Rightarrow 8(-\frac{1}{4})+a=4(-\frac{1}{4})-1 \Rightarrow -2+a=-2 \Rightarrow a=0$

پرسش‌های تشریحی:

● درستی یا نادرستی سوالات زیر را مشخص کنید.

۱- تابع $f(x)=\sqrt{۵x}$ یک تابع گویا است.

۲- دو تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند.

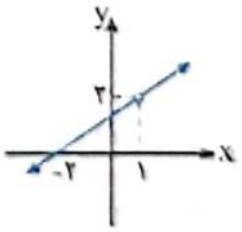
۳- برد تابع $y=\frac{۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-۲}{x^۲-۲x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$ است.

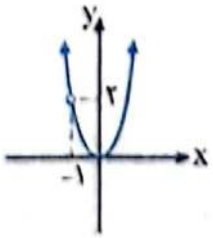
۵- دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند. (خرداد ۱۴۰۲)

۶- در هر یک از قسمت‌های زیر،نمودار یک تابع گویا داده شده است. ضابطهٔ آن را بنویسید.

آ)



ب)



۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۴x-۱}{x^۲+ax+b}$ ، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۵\}$ می‌باشد. a و b را به دست آورید.

۸- در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید دو تابع داده‌شده با هم برابر هستند یا خیر. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی)

آ) $f(x)=\frac{x-۱}{x-۱}$ ، $g(x)=۱$

ب) $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$ ، $g(x)=x-۲$ (شهریور ۱۴۰۲)

پ) $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ ، $g(x)=\frac{x}{|x|}$

ت) $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ، $g(x)=\frac{x+۱}{x^۲+۲x+۱}$

۹- حدود m را چنان مشخص کنید که دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۳}{x^۲+mx+m}$ برابر $\mathbb{R}$ شود.

۱۰- به کمک انتقال، نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y=\frac{x-۱}{x-۲}$$

۱۱- در هر یک از قسمت‌های زیر، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که دو تابع داده‌شده با هم برابر باشند.

آ) $$g(x)=x+۲\ ,\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ax-۱ & x=b\end{cases}$$

ب) $$g(x)=۳x+b\ ,\ f(x)=\begin{cases}\frac{۹x^۲-۱}{۳x+۱} & x\neq -\frac{۱}{۳}\\ a & x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۱ به‌ازای چند مقدار طبیعی از دامنهٔ تابع $y = -\frac{۱}{۳ - x}$، نمودار این تابع بالای $y = -۴$ و پایین $y = ۰$ قرار دارد؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ کدام دو تابع زیر باهم برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^۲}{x^۲} \\ g(x) = ۱ \end{cases}$
۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲} \\ g(x) = x \end{cases}$
۳) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^۲ + ۳}{x^۲ + ۳} \\ g(x) = ۱ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-۲)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-۲} \end{cases}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۳ دامنهٔ تابع گویای $f(x) = \frac{(m-۲)\sqrt[۳]{x} + x + ۲}{mx^۲ + x - ۳}$ به‌صورت $\mathbb{R} - \{a , b\}$ می‌باشد، حاصل $۲a + b$ کدام است؟ $(a < b)$

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) -۲
۴) -۳

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۴ چند جفت از توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^۲ + ۲}{x^۲ + ۲} \\ g(x) = \frac{۲x^۲ + ۳}{۲x^۲ + ۳} \end{cases}$
ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-۲)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-۲} \end{cases}$
پ) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲} \\ g(x) = \sqrt[۳]{x^۳} \end{cases}$

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۵ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\frac{۱}{x+۱} - ۲}{\frac{۳x + ۵}{x^۲ - ۴}}$ به‌صورت $D_f = \mathbb{R} - A$ باشد، مجموعهٔ A چند عضوی است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{۳\}$$

$$-۴ < -\frac{۱}{۳-x} < ۰ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۳-x} < ۴$$

$$x = ۱ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲} < ۴$$

$$x = ۲ \Rightarrow ۰ < ۱ < ۴$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > ۳$ عبارت $\frac{۱}{۳-x}$ منفی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱":

$$D_g = \mathbb{R}\ ,\ D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

گزینهٔ "۲":

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \quad , \quad \begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases}$$

ولی شرط دوم را ندارد.

مثال نقض: به ازای $x = -۲$:

$$\begin{cases} f(-۲) = ۲ \\ g(-۲) = -۲ \end{cases} \Rightarrow f(-۲) \neq g(-۲)$$

گزینهٔ "۳":

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۳}{x^۲ + ۳} = ۱$$

$$f(x) = g(x) = ۱$$

پس دو تابع مساوی‌اند.

گزینهٔ "۴":

$$D_g = [۲ , +\infty)$$

$$x(x-۲) \geq ۰ \Rightarrow D_f = (-\infty , ۰] \cup [۲ , +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۳ گزینه ۳

برای آنکه $f(x)$ تابعی گویا شود، باید $\sqrt[۳]{x}$ از تابع حذف شود، پس $m-۲=۰ \Rightarrow m=۲$، درنتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{x+۲}{۲x^۲ + x - ۳}$$

$$۲x^۲ + x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-\frac{۳}{۲} , ۱\}$$

$$۲a + b = ۲(-\frac{۳}{۲}) + ۱ = -۲$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۴ گزینه ۳

الف) $D_f = D_g = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۱ \\ g(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$

دو تابع مساوی هستند.

ب) $D_f = (-\infty , ۰] \cup [۲ , +\infty) \neq D_g = [۲ , +\infty)$

پس دو تابع مساوی نیستند.

پ) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

پس دو تابع مساوی نیستند.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۵ گزینه ۱

اعضای مجموعهٔ A ریشه‌های مخرج می‌باشند، بنابراین:

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

$$۳x+۵=۰ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases}$$

$$A=\{-\frac{۵}{۳}\,,\,-۲\,,\,-۱\,,\,۲\}$$

مجموعهٔ A، ۴ عضو دارد.

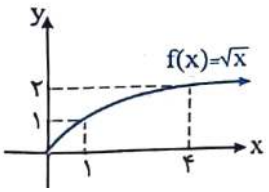
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

BOX 3: توابع رادیکالی و جزء صحیح (صفحه ۵۲ تا ۵۶ کتاب درسی)

الف) توابع رادیکالی

اگر d میانگین عمق یک دریا برحسب کیلومتر باشد، آن‌گاه تندی جابه‌جایی یک سونامی برحسب کیلومتر بر ساعت از رابطهٔ $S = ۴۵۶\sqrt{d}$ به دست می‌آید. به دلیل نقش کاربردی رادیکال، توابع رادیکالی تعریف می‌شود.

● ساده‌ترین تابع رادیکالی، تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}$ است. این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی نامنفی تعریف شده است. در واقع دامنهٔ این تابع برابر $D_y = [۰, +\infty)$ است. نمودار این تابع به صورت مقابل است:



x	۰	۱	۴	⋯
y	۰	۱	۲	⋯

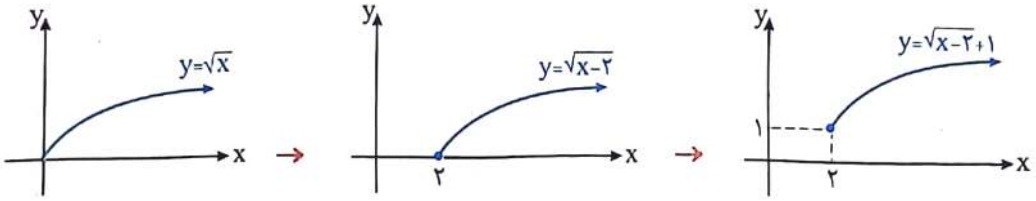
برد این تابع (مقادیر y) مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی است، پس برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازهٔ $R_y = [۰, +\infty)$ می‌باشد.

به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$، میشه نمودار توابع جدیدی را رسم کرد و هم‌چنین دامنه و برد این توابع را از روی نمودار به دست آورد.

تمرین: به کمک انتقال، نمودار تابع $y = ۱ + \sqrt{x-۲}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

(مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۵۳ کتاب درسی)

پاسخ: اگر نمودار $y = \sqrt{x}$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y = \sqrt{x-۲}$ و با انتقال نمودار $y = \sqrt{x-۲}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا، نمودار $y = \sqrt{x-۲} + ۱$ به دست می‌آید:



با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع بازهٔ $[۲, +\infty)$ و برد تابع، بازهٔ $[۱, +\infty)$ می‌باشد.

در رادیکال با فرجهٔ زوج، عدد زیر رادیکال منفی نمی‌تواند باشد اما در رادیکال با فرجهٔ فرد، عدد زیر رادیکال می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. همین مطلب برای دامنهٔ رادیکال است.

دامنهٔ توابع رادیکالی

● در عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ زوج، عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی شود. بنابراین برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt[۲k]{P(x)}$ که در آن $P(x)$ یک عبارت گویا می‌باشد، نامعادلهٔ $P(x) \geq ۰$ را حل می‌کنیم. حدود x دامنهٔ تابع f خواهد بود، یعنی:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \geq ۰\}$$

● در عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ فرد، عبارت زیر رادیکال می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. بنابراین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، با دامنهٔ عبارت زیر رادیکال برابر است. به عبارت دیگر در تعیین دامنهٔ تابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، رادیکال را در نظر نمی‌گیریم و فقط دامنهٔ تابع زیر رادیکال را به دست می‌آوریم. پس دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt[۲k+۱]{P(x)}$ برابر است با: $D_f = D_P$

تمرین: دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{-x+۴}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x-۲}{۴-x}}$ را به دست آورید.

پاسخ: در زیر رادیکال با فرجهٔ ۲، عدد منفی قرار نمی‌گیرد. بنابراین عبارت $-x+4$ باید مثبت یا صفر باشد، بنابراین:

$$-x+4\geq 0 \Rightarrow -x\geq -4 \xrightarrow{\div(-1)} x\leq 4 \Rightarrow D_f=(-\infty,4]$$

مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-2}{4-x}\geq 0$، دامنهٔ‌تابع g می‌باشد. برای حل نامعادله، عبارت $P=\frac{x-2}{4-x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \ , \ 4-x=0 \Rightarrow x=4$$
$$P\geq 0 \Rightarrow 2\leq x<4 \Rightarrow D_g=[2,4)$$

x		۲		۴	
x-۲	-	۰	+		+
۴-x	+		+	۰	-
P	-	۰	+	تعریف نشده	-

ب) تابع جزء صحیح

تابع پله‌ای: به تابعی که دامنهٔ آن را بتوان به صورت تعدادی بازهٔ جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها تنها یک عدد در بُرد نسبت داد، تابع پله‌ای می‌گویند.

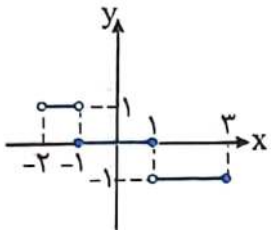
مثال: هر یک از توابع روبه‌رو، یک تابع پله‌ای می‌باشند:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x\geq 0\\ 5 & x<0\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}5 & -3\leq x<0\\ 2 & 0\leq x<4\\ -1 & 4\leq x\leq 6\end{cases}$$

نکته: برای رسم نمودار یک تابع پله‌ای، باید تابع ثابت $y=k$ را با توجه به دامنهٔ آن رسم کنیم.

تمرین: نمودار تابع پله‌ای $f(x)=\begin{cases}-1 & 1<x\leq 3\\ 0 & -1\leq x\leq 1\\ 1 & -2<x<-1\end{cases}$ را رسم کنید.

پاسخ: با رسم خطهای $y=-1$ در بازهٔ $(1,3]$، $y=0$ در بازهٔ $[-1,1]$ و $y=1$ در بازهٔ $(-2,-1)$، نمودار تابع پله‌ای f رسم می‌شود:



- مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است.

جزء صحیح: فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱) اگر x یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $[x]$ برابر x است: $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$

۲) اگر x یک عدد غیرصحیح باشد، آن‌گاه جزء صحیح x برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x می‌باشد.

تمرین: حاصل هر یک از جزء صحیح‌های زیر را به دست آورید.

۱) $[-\frac{4}{3}]$ ۲) $[\pi]$ ۳) $[-301/2]$

پاسخ: در هر قسمت باید با توجه به محور xها دو عدد صحیح متوالی پیدا کنیم که عدد موجود در براکت، بین آن‌ها قرار داشته باشد:

۱) $-\frac{۴}{۳}=-۱/\overline{۳} \Rightarrow -۲<-\frac{۴}{۳}<-۱ \Rightarrow [-\frac{۴}{۳}]=-۲$

۲) $\pi \simeq ۳/۱۴ \Rightarrow ۳<\pi<۴ \Rightarrow [\pi]=۳$

۳) $-۳۰۲<-۳۰۱/۲<-۳۰۱ \Rightarrow [-۳۰۱/۲]=-۳۰۲$

نکته: آ) x یک عدد حقیقی غیرصحیح باشد، برای به دست آوردن مقدار $[x]$، ابتدا مشخص می‌کنیم که x بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، سپس عدد صحیح کوچک‌تر را به عنوان $[x]$ در نظر می‌گیریم. تعریف جزء صحیح با علائم ریاضی به صورت زیر است:

۱) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$

۲) $x \notin \mathbb{Z}$, $\underbrace{n<x<n+۱}_{\text{دوعدد صحیح متوالی}} \Rightarrow [x]=n$

ب) از دو قسمت نکتهٔ بالا می‌توان گفت: $[x]=n \Leftrightarrow n \le x < n+۱ \ , \ n \in \mathbb{Z}$

برای حل معادلات به صورت $[u]=n$ که در آن $n \in \mathbb{Z}$ است، برای حذف جزء صحیح از نامعادلهٔ $n \le u < n+۱$ استفاده می‌کنیم.

تمرین: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $[\frac{x-۱}{۲}]=۱$ ۲) $[\frac{x}{۳}+۱]=-۲$

پاسخ: ۱) $[\frac{x-۱}{۲}]=۱ \xrightarrow{n=۱} ۱ \le \frac{x-۱}{۲}<۱+۱ \xrightarrow{\times ۲} ۲ \le x-۱<۴ \xrightarrow{+۱} ۳ \le x<۵$

۲) $[\frac{x}{۳}+۱]=-۲ \xrightarrow{n=-۲} -۲ \le \frac{x}{۳}+۱<-۲+۱ \xrightarrow{-۱} -۳ \le \frac{x}{۳}<-۲ \xrightarrow{\times ۳} -۹ \le x<-۶$

نکته: اگر x یک عدد حقیقی و $n \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه: $[x \pm n]=[x] \pm n$

تابع جزء صحیح: تابع $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح می‌گوییم. در واقع تابع جزء صحیح، تابعی است که به هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با آن را نسبت می‌دهد. در حالت کلی دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ می‌باشد.

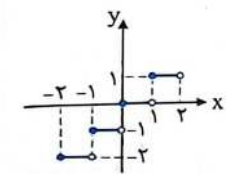
با توجه به توضیحات داده‌شده، داریم: $n \in \mathbb{Z} \ , \ n \le x < n+۱ \Leftrightarrow [x]=n \Leftrightarrow f(x)=[x]=n$

تمرین: نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم کنید. *(مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)*

پاسخ: ابتدا با توجه به تعریف جزء صحیح، f را به صورت یک تابع پله‌ای می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -۲ \le x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲ \\ -۱ \le x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱ \\ ۰ \le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=۰ \\ ۱ \le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow f(x)=۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۱ & ۱ \le x<۲ \\ ۰ & ۰ \le x<۱ \\ -۱ & -۱ \le x<۰ \\ -۲ & -۲ \le x<-۱ \end{cases}$$

با رسم خطهای $y=-۲$ در بازهٔ $[-۲,-۱)$، $y=-۱$ در بازهٔ $[-۱,۰)$، $y=۰$ در بازهٔ $[۰,۱)$ و $y=۱$ در بازهٔ $[۱,۲)$، نمودار تابع $f(x)=[x]$ در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم می‌شود:



پرسش‌های تشریحی:

● درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$ یک تابع پله‌ای است.

۲- اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[a+n]=[a]+n$ (خرداد ۱۴۰۲)

۳- برد تابع $f(x)=[x]$، مجموعهٔ اعداد صحیح است.

۴- دامنهٔ تابع $y=-2+\sqrt{x-1}$، بازهٔ $[-2,+\infty)$ است.

● در سه سوال زیر، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۵- برد تابع $y=1+\sqrt{x+2}$ ، بازهٔ ..... است.

۶- دامنهٔ تابع $f(x)=[x]$ ، ..... است.

۷- اگر $2\leq x<3$ باشد، آن‌گاه مقدار $[x]$ برابر ..... است.

۸- نمودار تابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد را به دست آورید.

$y=2-\sqrt{x+1}$ (خرداد ۱۴۰۲)

۹- هر یک از معادلات زیر را حل کنید. (مشابه فعالیت ۱ صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

آ) $[x]=3$ ب) $[\frac{x+1}{2}]=-1$ پ) $[2x-1]=5$ ت) $2[x]+5=0$

۱۰- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\sqrt{x+b}$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار این تابع از نقطهٔ $(-2,1)$ بگذرد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۱- دامنهٔ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ) $h(x)=\sqrt{-x^2+5x}$ ب) $m(x)=\sqrt{2-\frac{x+1}{x-2}}$

Homework

۱ نمودار تابع $f(x) = ۲ + \sqrt{x - ۲}$ را رسم کنید و دامنه آن را بیابید.

۲ نمودار تابع $F(x) = [x]$ را در بازهٔ $[-۱ , ۲]$ رسم کنید.

۳ نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ را در بازهٔ $(-۱ , ۲]$ رسم کنید.

۴ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -۵ \\ (\frac{m}{۲} + ۲)x - ۱ \end{cases}$ یک تابع پلکانی (پله‌ای) باشد، آنگاه مقدار m کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۵

۳) -۱ ۴) -۲

۵ اگر $[\frac{x}{۲}] = -۲$ باشد، آنگاه حاصل $[-\frac{۱}{۲}x - ۱]$ کدام است؟

۱) صفر یا ۱ ۲) -۲ یا -۱

۳) ۱ ۴) صفر

۶ دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x - ۱}}{[x] - ۴}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [۴ , ۵)$ ۲) $[۱ , +\infty) - \{۴\}$

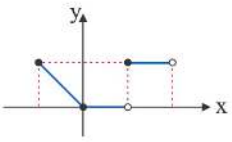
۳) $[۱ , ۴] \cup [۶ , +\infty)$ ۴) $[۱ , ۴) \cup [۵ , +\infty)$

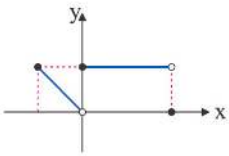
۷ حاصل $A = \frac{[-۲/۷] + [\frac{۱}{۴}] - [\sqrt{۸}]}{[۹] - [-۵/۳] + [۵/۸]}$ کدام است؟

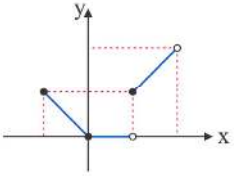
۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۱۰}$

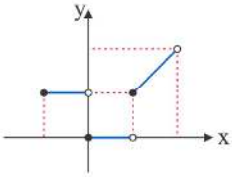
۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸ نمودار $f(x) = x.[x]$ در بازهٔ $[-۱ , ۲)$ کدام است؟

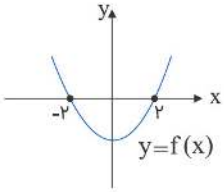
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹ اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{(x+۲).f(x)}$ کدام است؟



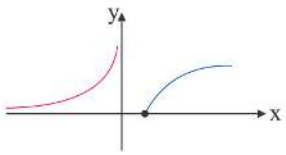
۱) $[۲ , +\infty) \cup \{-۲\}$

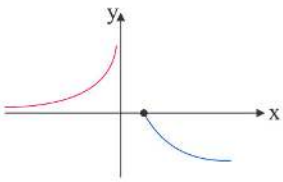
۲) $\mathbb{R} - (-۱ , ۱)$

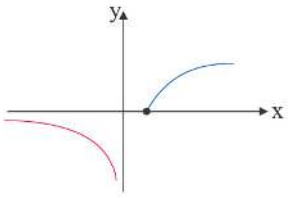
۳) $[-۲ , +\infty)$

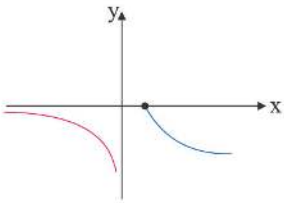
۴) $(-\infty , -۲] \cup \{۲\}$

۱۰ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & ; x < ۰ \\ -\sqrt{x-۱} & ; x \geq ۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۱ نمودار $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۳ واحد به‌سمت راست و سپس ۲ واحد در راستای عمودی به بالا ببرید، اشتراک دامنه و بُرد تابع تبدیل‌یافته کدام است؟

۱) $[۰ , +\infty)$

۲) $[۲ , +\infty)$

۳) $[۳ , +\infty)$

۴) $[۱ , +\infty)$

۱۲ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{۲ - x^۲}}$ بازهٔ $[a , b]$ می‌باشد. حاصل $a + \sqrt{۲}b$ کدام است؟

۱) -۱

۲) ۳

۳) -۳

۴) ۱

۱۳ معادلهٔ $[x+۴]+[x-۷]=۹$ دارای مجموعه جواب $[a\ ,\ b)$ می‌باشد. حداکثر مقدار $b+a$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴

۳) ۱۵ ۴) ۱۲

۱۴ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[۲x-۹]+[۲x+۳]=۰$ به‌صورت $[a\ ,\ b)$ می‌باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

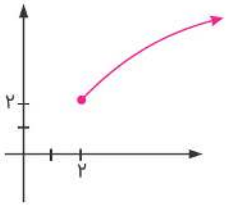
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۵ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $[x^۲-x]=-۲$ ب) $[\frac{x-۱}{x+۱}]=۱$

پاسخ Homework

۱



$D_f=[۲,+\infty)$

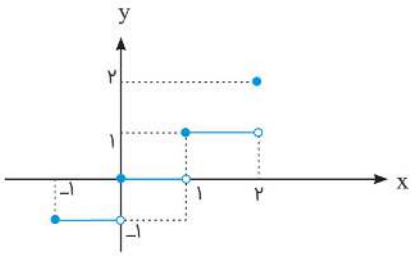
۲

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱$

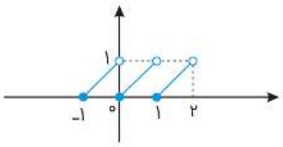
$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰$

$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱$

$x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲$



۳



$$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ : y = x + ۱ \Rightarrow \begin{vmatrix} -۱ \\ ۰ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix} \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ : y = x \Rightarrow \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix} \\ ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ : y = x - ۱ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix} \end{cases}$$

۴

گزینه ۱

به تابعی چندضابطه‌ای که همهٔ ضابطه‌هایش، عدد ثابت باشد، تابع پلکانی می‌گویند. ضابطهٔ اول که یک عدد ثابت است، برای ثابت بودن ضابطهٔ دوم نیز باید ضریب x صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{m}{۲} + ۲ = ۰ \Rightarrow \frac{m}{۲} = -۲ \Rightarrow m = -۴$$

۵

گزینه ۱

$$[\frac{x}{۲}] = -۲ \Rightarrow -۲ \le \frac{x}{۲} < -۱ \xrightarrow{\times ۲} -۴ \le x < -۲$$

برای به دست آوردن جزءصحیح $[-\frac{۱}{۲}x - ۱]$ داریم:

$$-۴ \le x < -۲ \xrightarrow[\text{چون نامساوی در یک عدد منفی ضرب می‌شود جهت نامساوی عوض می‌شود}]{\times(-\frac{۱}{۲})} ۱ < -\frac{۱}{۲}x \le ۲$$

$$\xrightarrow{+(-۱)} ۱ - ۱ < -\frac{۱}{۲}x - ۱ \le ۲ - ۱$$

$$\Rightarrow ۰ < -\frac{۱}{۲}x - ۱ \le ۱ \Rightarrow [-\frac{۱}{۲}x - ۱] = ۰ \text{ یا } ۱$$

به‌عبارت‌دیگر بین ۱ و صفر، جزءصحیح عبارت صفر می‌شود، چون در ۱ مساوی دارد، خود ۱ نیز شامل می‌شود.

۶

گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} x - ۱ \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۱ \\ [x] - ۴ = ۰ \Rightarrow [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \le x < ۵ \end{array}\right\} \text{ ریشه‌های مخرج } \Rightarrow D_f = [۱ , ۴) \cup [۵ , +\infty)$$

۷ گزینه ۱

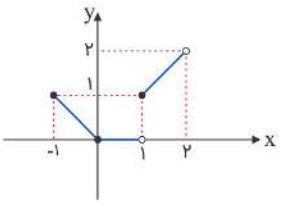
تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند که با $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند.

$$\begin{cases} -۳ \le -۲/۷ < -۲ \Rightarrow [-۲/۷] = -۳ \\ ۰ \le \frac{۱}{۴} < ۱ \Rightarrow [\frac{۱}{۴}] = ۰ \\ ۲ \le \sqrt{۸} < ۳ \Rightarrow [\sqrt{۸}] = ۲ \\ -۱ \le -۰/۳ < ۰ \Rightarrow [-۰/۳] = -۱ \\ ۰ \le ۰/۸ < ۱ \Rightarrow [۰/۸] = ۰ \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-۳ + ۰ - ۲}{۹ - (-۱) + ۰} = \frac{-۵}{۱۰} = -\frac{۱}{۲}$$

۸ گزینه ۳

$$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ : f(x) = -x \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ : f(x) = ۰ \\ ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ : f(x) = x \end{cases}$$

$(-۱,۱), (۰,۰), (۱,۱), (۲,۲)$



۹ گزینه ۱

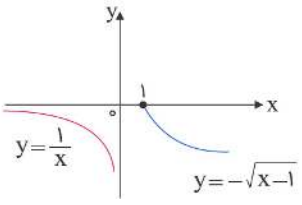
$(x+۲).f(x) \ge ۰$

$D_g = [۲ , +\infty) \cup \{-۲\}$

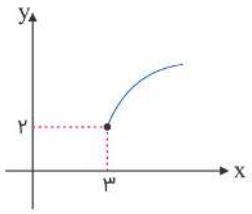
x	$-\infty$	-۲		۲	$+\infty$
$x+۲$	$-$	۰	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$(x+۲)f(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

۱۰ گزینه ۴

بنا به ضابطهٔ تابع $f(x)$، گزینهٔ "۴" صحیح است.



۱۱ گزینه ۳



۳ واحد به راست: $f(x-۳)=\sqrt{x-۳}$

۲ واحد به بالا ببرید: $y=\sqrt{x-۳}+۲$

دامنه: $D_f=[۳\ ,\ +\infty)$

بُرد: $R_f=[۲\ ,\ +\infty)$

$$D_f\cap R_f=[۳\ ,\ +\infty)$$

۱۲ گزینه ۲

$$\sqrt{۲-x^۲}:\ ۲-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۲\Rightarrow |x|\leq\sqrt{۲}$$

رابطهٔ (I): $-\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}$

$$x-\sqrt{۲-x^۲}\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۲-x^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲\geq ۲\Rightarrow x^۲\geq ۱\Rightarrow |x|\geq ۱$$

رابطهٔ (II): $x\geq ۱$، زیرا نباید $x<۰$ باشد.

$$(I)\cap(II)\Rightarrow D=[۱\ ,\ \sqrt{۲}]$$

$$a+\sqrt{۲}b=۱+\sqrt{۲}(\sqrt{۲})=۳$$

۱۳ گزینه ۱

$$[x]+۴+[x]-۷=۹\Rightarrow ۲[x]-۳=۹$$
$$\Rightarrow ۲[x]=۱۲\Rightarrow [x]=۶$$
$$\Rightarrow ۶\leq x<۷\Rightarrow x\in[۶\ ,\ ۷)$$

$$b+a=۷+۶=۱۳$$

۱۴ گزینه ۱

$$[۲x]+۳+[۲x]-۹=۰$$

$$۲[۲x]=۶\Rightarrow[۲x]=۳\Rightarrow ۳\le ۲x<۴$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\le x<۲\Rightarrow x\in[\frac{۳}{۲},۲)$$

$$b-a=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵ آ)

$$[x^۲-x]=-۲\Rightarrow -۲\le x^۲-x<-۱\Rightarrow \begin{cases} x^۲-x<-۱ \\ x^۲-x\ge -۲ \end{cases}$$

نامعادلهٔ $x^۲-x<-۱$ به ازای هیچ مقداری از x جواب ندارد. زیرا: $x^۲-x<-۱\Rightarrow x^۲-x+۱<۰$

معادلهٔ $x^۲-x+۱=۰$ ، ریشهٔ حقیقی ندارد و ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، پس عبارت $x^۲-x+۱$ همواره مثبت است. نامعادلهٔ $x^۲-x\ge -۲$ را نیز باید حل کنیم. ولی چون مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^۲-x<-۱$، تهی است، بنابراین معادلهٔ $[x^۲-x]=-۲$ جواب ندارد.

ب) $[\frac{x-۱}{x+۱}]=۱\Rightarrow ۱\le\frac{x-۱}{x+۱}<۱+۱\Rightarrow ۱\le\frac{x-۱}{x+۱}<۲$

با حل نامعادله‌های $\frac{x-۱}{x+۱}\ge ۱$ و $\frac{x-۱}{x+۱}<۲$، مجموعه جواب معادلهٔ $[\frac{x-۱}{x+۱}]=۱$ به دست می‌آید:

$$\frac{x-۱}{x+۱}\ge ۱\Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱}-۱\ge ۰\Rightarrow \frac{x-۱-(x+۱)}{x+۱}=\frac{-۲}{x+۱}\ge ۰$$

چون -۲ عددی منفی است، باید $x+۱$ نیز عددی منفی باشد تا کسر $\frac{-۲}{x+۱}$ عددی مثبت شود: $x+۱<۰\Rightarrow x<-۱$ (۱)

$$\frac{x-۱}{x+۱}<۲\Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱}-۲<۰\Rightarrow \frac{(x-۱)-۲(x+۱)}{x+۱}=\frac{-x-۳}{x+۱}<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<-۳ \text{ یا } x>-۱ \quad (۲)$$

$$(۱)\bigcap(۲)\Rightarrow x<-۳\Rightarrow x\in(-\infty,-۳)$$

BOX 4: وارون یک تابع ــ تابع یک‌به‌یک (صفحه ۵۷ تا ۶۴ کتاب درسی)

در این بسته وارون یک تابع، تابع یک‌به‌یک و مسائل مربوط به آن‌ها گفته می‌شود.

الف) وارون یک تابع

تعریف: اگر در تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است، جای مولفه‌ها را عوض کنیم، مجموعهٔ جدیدی از زوج‌های مرتب به دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

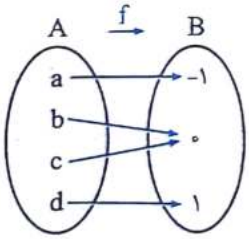
تمرین: وارون تابع $f=\{(2,-1),(1,4),(3,-1),(5,0)\}$ را به دست آورید.

پاسخ: با جابه‌جایی مولفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب داده‌شده، وارون تابع به دست می‌آید: $f^{-1}=\{(-1,2),(4,1),(-1,3),(0,5)\}$

تذکر: وارون یک تابع ممکن است تابع نباشد.

نکته: وارون تابع f، خود یک تابع است، اگر در زوج‌های مرتب تابع f، هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مولفهٔ دوم یکسانی نداشته باشند.

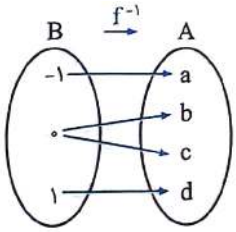
تمرین: نمایش پیکانی تابع f به صورت مقابل است:



۱) نمایش پیکانی f^{-1} را مشخص کنید.

۲) آیا f^{-1} تابع است؟ چرا؟

پاسخ: ۱) نمایش پیکانی f^{-1}، از B به A و با تغیی رجهت پیکان‌ها می‌باشد.



۲) خیر، زیرا از $0\in B$، دو پیکان خارج شده است.

رابطهٔ بین دامنه و برد f و f^{-1}

با توجه به تعریف f و f^{-1}، اعضای دامنهٔ f، به جای اعضای برد f^{-1} و اعضای برد f، به جای اعضای دامنهٔ f^{-1} قرار می‌گیرند. بنابراین:

نکته: اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، آن‌گاه:

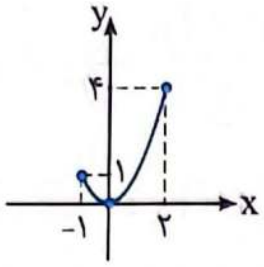
۱) برد تابع f^{-1} = دامنهٔ تابع f $(D_f=R_{f^{-1}})$

۲) دامنهٔ تابع f^{-1} = برد تابع f $(R_f=D_{f^{-1}})$

تمرین: اگر f تابعی با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ و $x\in[0,2]$ باشد، دامنهٔ f^{-1} را مشخص کنید.

پاسخ: با رسم نمودار f روی بازهٔ $[0,2]$، برد تابع f را به دست می‌آوریم. نمودار f یک سهمی قائم رو به بالا با رأس $(0,0)$ است:

x	-۱	۰	۲
y	۱	۰	۴



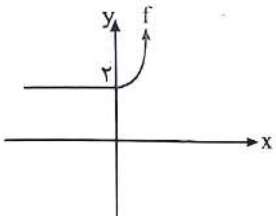
با تصویرسازی نمودار f روی محور yها، برد تابع f به دست می‌آید:

$$R_f = [0,4] \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0,4]$$

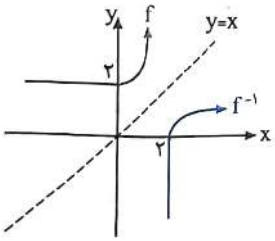
نکته: ۱) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به خط $y=x$، نقطهٔ $A'(b,a)$ است.

۲) نمودار یک تابع و نمودار وارون آن تابع نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، برای رسم وارون آن تابع کافی است که قرینهٔ آن را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.

تمرین: نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار وارون آن را رسم کنید.



پاسخ: با رسم خط $y=x$ و قرینه‌کردن نمودار f نسبت به خط $y=x$، نمودار f^{-1} به دست می‌آید:



نکته: اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ و برعکس. به عبارت دیگر اگر نمودار f از نقطهٔ (a,b) بگذرد، آن‌گاه نمودار f^{-1} از نقطهٔ (b,a) می‌گذرد.

تمرین: اگر $f(x)=3-\sqrt{2x+5}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0)$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر $f^{-1}(0)=b$ باشد، آن‌گاه $f(b)=0$ است. بنابراین داریم:

$$f(x)=3-\sqrt{2x+5} \Rightarrow f(b)=3-\sqrt{2b+5}=0 \Rightarrow 3=\sqrt{2b+5} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} 9=2b+5 \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2$$

- وارون هر تابعی، لزوماً تابع نیست. با تعریف تابع یک‌به‌یک، توابعی مشخص می‌شوند که وارون آن‌ها نیز تابع می‌شود.

ب) تابع یک‌به‌یک

تعریف: اگر در تابع f هر دو عضو متمایز در دامنهٔ تابع به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند، به تابع f، تابع یک‌به‌یک می‌گویند.

مثال: تابع $f=\{(-1,2),(2,5),(4,-2)\}$ تابعی یک‌به‌یک است، زیرا هر دو عدد متمایز از دامنه به دو عدد متمایز از برد نظیر شده است.

اما تابع $g=\{(2,1),(0,1),(5,3)\}$ تابع یک‌به‌یک نیست، زیرا درد دو زوج مرتب $(2,1)$ و $(0,1)$، مولفه‌های دوم با هم برابرند.

نکته: اگر یک تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده باشد، هنگامی تابع یک‌به‌یک است که مولفه‌های دوم آن دوبه‌دو متمایز باشند و اگر دو زوج مرتب دارای مولفه‌های دوم یکسان باشند، باید مولفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشند.

تمرین: اگر تابع $f=\{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$ یک‌به‌یک باشد، a را به دست آورید.

پاسخ: در تابع یک‌به‌یک اگر دو زوج مرتب با مولفه‌های دوم برابر داشته باشیم، آن‌گاه مولفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابرند. بنابراین:

$$(-1,3)\in f \ , \ (m,3)\in f \xrightarrow{f \text{ یک‌به‌یک است.}} m=-1 \Rightarrow f=\{(-2,2),(-1,3),(-2,a)\}$$

از طرفی f تابع است، بنابراین اگر دو زوج مرتب با مولفه‌های اول مساوی داشته باشیم، آن‌گاه مولفه‌ای دوم باید با هم برابر باشند.

$(-۲,a)\in f \ , \ (-۲,۲)\in f \xrightarrow{\text{f تابع است.}} a=۲$

نکته: ۱) هیچ تابع ثابتی که دامنهٔ آن بیش از یک عضو داشته باشد، تابع یک‌به‌یک نیست.

مثال: تابع ثابت $f=\{(-۱,۴),(۲,۴)\}$ تابعی غیریک‌به‌یک است.

۲) اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ نیز یک تابع است.

تمرین: وارون کدام‌یک از توابع زیر، خود نیز تابع می‌باشد؟

۱) $f=\{(۱,-۱),(۲,۳),(۴,۵)\}$

۲) $g=\{(۳,۲),(۴,-۱),(۵,۰),(۶,۲)\}$

پاسخ: هر تابعی که یک‌به‌یک باشد، وارون آن نیز تابع است. f یک تابع یک‌به‌یک است (مولفه‌های دوم زوج‌مرتب‌ها، متمایزند)، پس $f^{-۱}$ نیز یک تابع است. اما g تابع یک‌به‌یک نیست (دو زوج‌مرتب متمایز $(۳,۲)$ و $(۶,۲)$ با مولفه‌های دوم یکسان در g وجود دارد)، پس $g^{-۱}$ تابع نمی‌باشد.

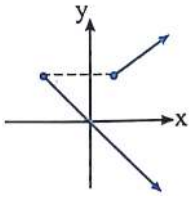
نکته: یک تابع اگر به صورت نمودار پیکانی نمایش داده شده باشد، هنگامی تابع یک‌به‌یک است که به هر عضو از برد فقط یک پیکان وارد شود.

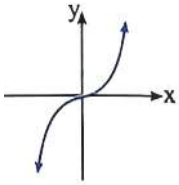
تشخیص تابع یک‌به‌یک از روی نمودار:

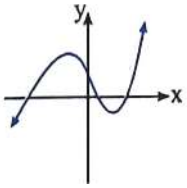
نکته: اگر تابعی با نودار نمایش داده شده باشد، آن‌گاه برای تشخیص یک‌به‌یک بودن آن از آزمون زیر که به آزمون خط افقی مشهور است، استفاده می‌کنیم:

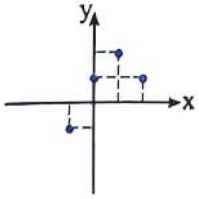
آزمون خط افقی: اگر هر خط موازی محور xها، نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک است.

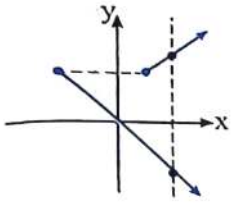
تمرین: کدام‌یک از نمودارهای داده‌شده، یک تابع یک‌به‌یک را مشخص می‌کند؟

۱) 

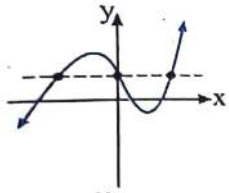
۲) 

۳) 

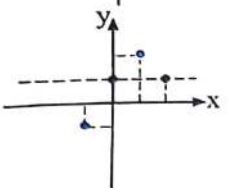
۴) 



پاسخ: ۱) نمودار داده‌شده، نمودار تابع نیست، زیرا خط مشخص‌شده که موازی محور yها است، نمودار را در دو نقطه قطع کرده است.



۲) هر خط به موازات محور xها، نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس این نمودار، نمودار یک تابع یک‌به‌یک است.

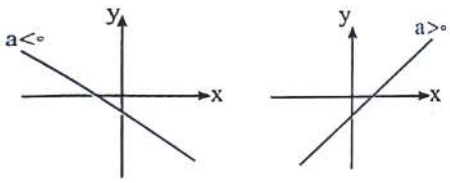


۳) خط رسم‌شده در شکل مقابل، نمودار را در سه نقطه قطع کرده است، پس این نمودار، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۴) خط رسم‌شده در شکل مقابل، نمودار را در دو نقطه قطع کرده است، پس این نمودار، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

نکته: در تابع خطی $f(x)=ax+b$:

۱) اگر $a\neq 0$ باشد، آن‌گاه با توجه به نمودار، f تابعی یک‌به‌یک است:



(هر خط به موازات محور xها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.)

۲) اگر $a=0$ ، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ ، مقدار تابع برابر عدد ثابت b است. پس در این حالت f تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

به دست‌آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک

ابتدا از نماد y به جای $f(x)$ استفاده می‌کنیم. سپس x را برحسب y حساب می‌کنیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از نماد $f^{-1}(x)$ استفاده می‌کنیم.

نکته: در تعیین ضابطهٔ f^{-1}، باید برد تابع f را به دست آوریم (برد تابع f با دامنهٔ تابع f^{-1} برابر است).

تمرین: ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=5x+3$ را به دست آورید.

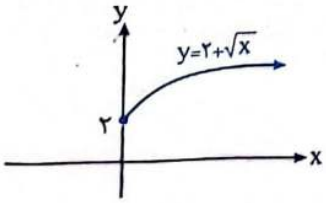
پاسخ: دامنه و برد تابع خطی f برابر $\mathbb{R}$ است. به جای $f(x)$، y قرار می‌دهیم: $y=5x+3$

x را برحسب y می‌نویسیم: $y=5x+3 \Rightarrow 5x=y-3 \Rightarrow x=\frac{1}{5}(y-3)$

به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x قرار می‌دهیم: $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}(x-3)\ ,\ x\in\mathbb{R}$

تمرین: ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۲+\sqrt{x}$ را تعیین کنید.

پاسخ: دامنهٔ f بازهٔ $[۰,+\infty)$ و برد تابع f بازهٔ $[۲,+\infty)$ است:

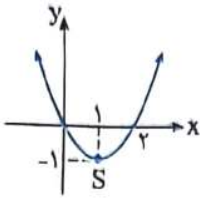


برای به دست آوردن وارون تابع f، داریم:

$$y=۲+\sqrt{x} \Rightarrow y-۲=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (y-۲)^۲=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲ \ , \ x\geq ۲$$

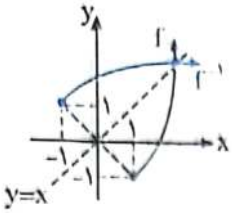
محدودکردن دامنه و ساختن یک تابع یک‌به‌یک

نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=x^۲-۲x$ به صورت مقابل است:



خطی مانند $y=۱$ (هر خط به صورت $y=k$ ، $k>-۱$)، نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. پس f تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد. اما می‌توان با محدودکردن دامنهٔ تابع، تابعی یک‌به‌یک از آن ساخت که وارون آن، یک تابع باشد. مثلاً می‌توان دامنهٔ آن را $[۱,+\infty)$ در نظر گرفت تا تابع f روی این بازه، تابعی یک‌به‌یک شود. می‌خواهیم در بازهٔ $[۱,+\infty)$، نمودار $f^{-۱}$ را رسم و ضابطهٔ آن را مشخص کنیم.

با قرینه‌کردن نمودار f نسبت به خط $y=x$، نمودار $f^{-۱}$ به دست می‌آید:



برد تابع f، مجموعهٔ $[-۱,+\infty)$ می باشد، پس دامنهٔ $f^{-۱}$، $[-۱,+\infty)$ است.

برای تعیین ضابطهٔ $f^{-۱}$، عبارت $x^۲-۲x$ را به صورت مربع کامل یک دوجمله‌ای می‌نویسیم:

$$y=x^۲-۲x=(x^۲-۲x+۱)-۱=(x-۱)^۲-۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=y+۱ \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y+۱}$$

چون $x\in D_f=[۱,+\infty)$، پس داریم:

$$x\geq ۱ \Rightarrow x-۱\geq ۰ \Rightarrow x-۱=+\sqrt{y+۱} \Rightarrow x=۱+\sqrt{y+۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x+۱} \ , \ x\geq -۱$$

نکته: با توجه به نمودار سهمی، هیچ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲، روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نمی‌باشد.



خط $x=-\frac{b}{۲a}$، محور تقارن سهمی است. اگر نمودار f را در یکی از بازه‌های $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$ یا $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، آن‌گاه f تابعی یک‌به‌یک می‌باشد.

پرسش‌های تشریحی:

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- نمودار f و f^{-1} نسبت به خط ..... قرینه یکدیگرند.

۲- تابع $f=\{(1,2),(2,5),(3,4)\}$، تابع یک‌به‌یک .....

۳- اگر هر خط موازی محور ..... نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک هست.

۴- اگر $(2,5)\in f$ ، آن‌گاه $\in f^{-1}$.....

۵- هر تابع درجهٔ ۲، تابع یک‌به‌یک ..... (شهریور ۱۴۰۲)

۶- برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است، قرینهٔ نمودار آن را نسبت به ..... رسم کنیم. (خرداد ۱۴۰۲)

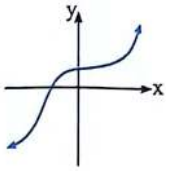
● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

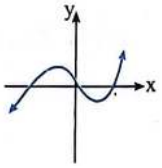
۷- هر تابع درجه دوم یک‌به‌یک هست. (شهریور ۱۴۰۲)

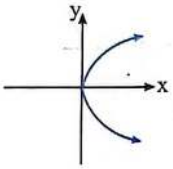
۸- هر تابع خطی غیرثابت، یک‌به‌یک است. (خرداد ۱۴۰۲)

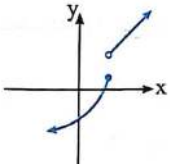
۹- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=3x-2$ را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

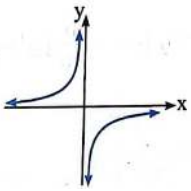
۱۰- کدام‌یک از نمودارهای داده‌شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص می‌کند؟

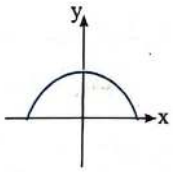
آ)


ب)


پ)


ت)


ث)


ج)


۱۱- اگر $f(x)=3x+5$ باشد، مقدار $f^{-1}(8)$ را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۲- نمودار تابعی با دامنهٔ $[-1,1]$ و برد $[1,4]$ را رسم کنید به طوری که: (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

آ) یک‌به‌یک باشد.

ب) یک‌به‌یک نباشد.

۱۳- اگر $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\,,\,x^{۲}+۲|y|<۵\}$ باشد، با حذف حداقل چند عضو از آن، R تابعی یک‌به‌یک می‌شود؟

(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

۱۴- با رسم نمودار هر یک از توابع زیر، مشخص کنید کدام‌یک از توابع زیر، تابعی یک‌به‌یک است؟ در توابع غیریک‌به‌یک، دامنه‌ای مشخص کنید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک شود.

آ) $y=۲x+۱$

ب) $f(x)=x^{۲}-۲x$

پ) $y=۲+\sqrt{x+۱}$

ت) $f(x)=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۰\\ x^{۲} & x<۰\end{cases}$

ث) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۱ & x\geq ۰\\ x+\frac{۱}{۲} & x<۰\end{cases}$

ج) $f(x)=|x-۱|+۱$

چ) $f(x)=[x]$

ح) $f(x)=\begin{cases}۱ & x\geq ۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$

۱۵- قرینهٔ نقطهٔ $(۳,۴)$ را نسبت به خط $y=x$ مشخص کنید.

۱۶- اگر قرینهٔ نقطهٔ $(a-۱,b+۳)$ نسبت به خط $y=x$، نقطهٔ $(a-۱,۲b+۵)$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۷- قرینهٔ نقطهٔ $(a+۱,۲a)$ نسبت به خط $y=x$ روی خط $x+۲y=۸$ قرار دارد. مقدار a را به دست آورید.

۱۸- ضابطهٔ وارون هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ) $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$

ب) $f(x)=x^{۲}+۱\ ,\ x\geq ۰$

پ) $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\geq ۱\\ x^{۲} & x<۰\end{cases}$

Homework

۱ وارون تابع $y = x^۳ - x + ۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(-۱, -۲)$ ۲) $(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲})$

۳) $(۱, ۲)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱۱}{۸})$

۲ وارون تابع $y = -۳x^۳ + ۲x - ۱۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(۹, -۲)$ ۲) $(۲, -۳۱)$

۳) $(-۱, ۱۰)$ ۴) $(-۱۲, -۱)$

۳ باتوجه‌به نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳$، تابع $f(x)$ در کدام بازه یک‌به‌یک است؟

۱) $[۰ , +\infty)$ ۲) $[۲ , +\infty)$

۳) $(-\infty , ۳]$ ۴) $[۱ , ۳]$

۴ ضابطه وارون تابع $g(x) = \frac{۲x - ۳}{۵}$ را به‌دست آورید.

۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف نشان دهید تابع $f(x) = \frac{-۷x + ۳}{۵}$ وارون‌پذیر است.

ب ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)$ را به دست آورید.

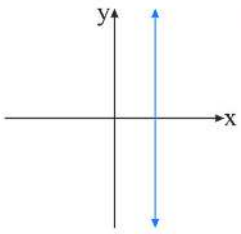
۶ نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x$ مفروض است. با محدود کردن دامنهٔ این تابع، تابع $f(x)$ را یک‌به‌یک نمایید.

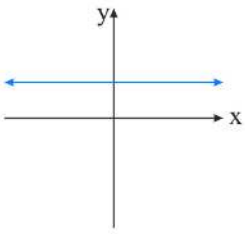
۷ اگر $f(x) = x + \sqrt{x + ۱}$، حاصل $f^{-۱}(۵) + f^{-۱}(۱۱)$ کدام است؟

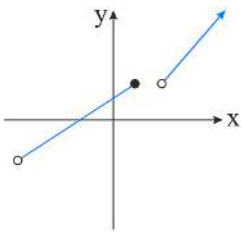
۱) ۸ ۲) ۱۱

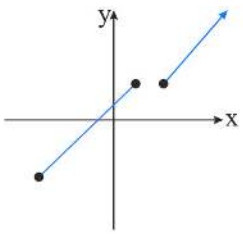
۳) ۵ ۴) ۱۲

۸ کدام‌یک از نمودارهای زیر، یک تابع یک‌به‌یک را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹ اگر $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & ;x\geq 1 \\ x+k & ;x<1 \end{cases}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، حدود k کدام است؟

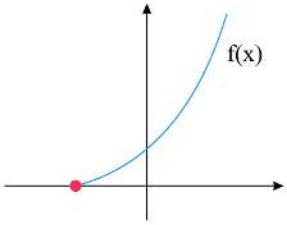
۱) $k\leq 4$

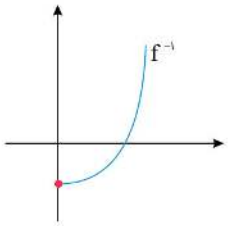
۲) $k\geq 4$

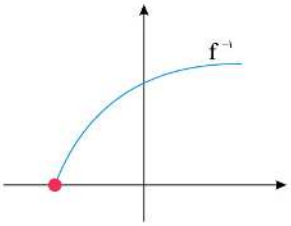
۳) $k\leq 2$

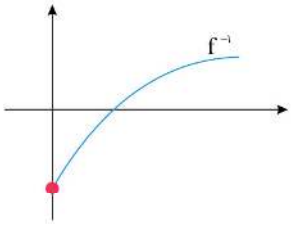
۴) $k\geq 2$

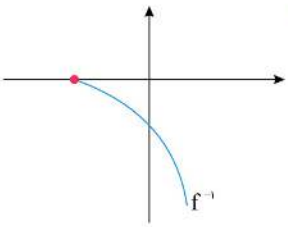
۱۰ اگر نمودار $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، کدام گزینه نمودار تابع $f^{-1}(x)$ است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۱ اگر $f = \{(۱ , ۲) , (۳ , -۲) , (۴ , ۱) , (۲ , -۱)\}$ و $g = \{(۲ , ۳) , (۱ , ۱) , (۳ , ۲)\}$، حاصل $g^{-1}(۲) + f^{-1}(۱) + f^{-1}(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۷
۳) ۱۰
۴) ۹

۱۲ اگر رابطهٔ $\{(۳, ۲), (a, ۵), (۳, a^۲ - a), (b, ۲), (-۱, ۴)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

۱) $(-۱, ۱)$
۲) $(-۱, ۳)$
۳) $(۲, ۱)$
۴) $(۲, ۳)$

۱۳ قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y - ۲x = ۴$ را نسبت به خط $y = x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۴ تابع f به‌صورت زیر مفروض است:

$$f(x) = (x-۱)^۲ + ۲ \quad ; x \leq ۱$$

الف به کمک رسم نشان دهید تابع f برای $x \leq ۱$ وارون‌پذیر است.

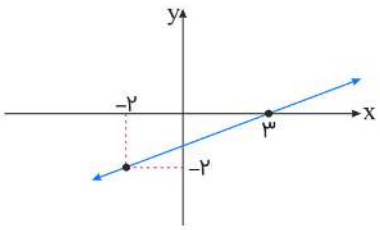
ب ضابطهٔ وارون تابع برای $x \leq ۱$ را بیابید.

۱۵ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \frac{-۳x+۴}{-۲}$ را به دست آورید.

۱۶ اگر $f = \{(۲, ۱), (-۳, ۲), (-۱, -۱), (۰, -۳)\}$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x+۱}$ باشد، حاصل $f(g^{-۱}(۲))$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۱

۱۷ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = f^{-۱}(x)$ باشد، در این صورت $f(۲)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

۱۸ اگر رابطهٔ $f = \{(۳, ۲), (a, ۵), (۳, a^۲ - a), (b, ۲), (-۱, ۴)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۳

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

$(a, b) \in f(x) \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}(x)$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y = x^{۳} - x + ۱$ صدق دهیم.

گزینهٔ ۱ : $(-۲)^{۳} - (-۲) + ۱ \neq -۱$ ×

گزینهٔ ۲ : $(\frac{۱}{۲})^{۳} - (\frac{۱}{۲}) + ۱ = \frac{۵}{۸}$ ✓

گزینهٔ ۳ : $۲^{۳} - ۲ + ۱ \neq ۱$ ×

گزینهٔ ۴ : $(-\frac{۱۱}{۸})^{۳} - (-\frac{۱۱}{۸}) + ۱ \neq -\frac{۱}{۲}$ ×

۲ گزینه ۱

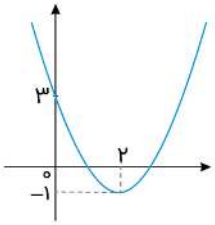
اگر $(-۲, ۹)$ روی وارون تابع باشد، $(-۲, ۹)$ روی خود تابع قرار دارد:

$-۳(-۲)^{۳} + ۲(-۲) - ۱۱ = ۲۴ - ۴ - ۱۱ = ۹$

۳ گزینه ۲

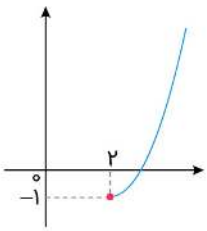
$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۴ - ۱ = (x - ۲)^۲ - ۱$$

نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



تابع در بازه‌ای یک‌به‌یک است که اگر خطوطی موازی محور xها رسم نمایید، منحنی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

گزینهٔ "۲": $x \in [۲ , +\infty)$



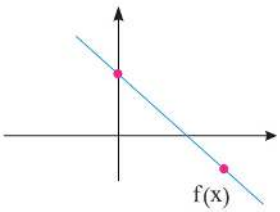
۴

$$y = \frac{۲x - ۳}{۵} \Rightarrow ۵y = ۲x - ۳ \Rightarrow ۲x = ۵y + ۳$$

$$x = \frac{۵y + ۳}{۲} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{۵x + ۳}{۲}$$

۵ **الف** اگر خطوطی موازی محور xها رسم نمایید، نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس f یک‌به‌یک و درنتیجه وارون‌پذیر است.

ب

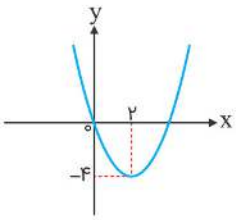


$$y = \frac{-۷x + ۳}{۵} \Rightarrow ۵y = -۷x + ۳ \Rightarrow ۷x = -۵y + ۳$$
$$x = \frac{-۵y + ۳}{۷} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{-۵x + ۳}{۷}$$

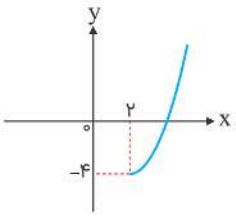
۶

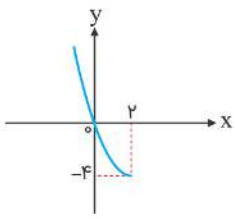
$$f(x) = x^{۲} - ۴x + ۴ - ۴ \Rightarrow f(x) = (x - ۲)^{۲} - ۴$$

$$D_f = \mathbb{R}$$



$$\begin{cases} x \in [۲, +\infty) \\ \text{یا} \\ x \in (-\infty, ۲] \end{cases}$$





اگر خطوط کمکی موازی محور xها رسم شود، منحنی تابع یک‌به‌یک را در یک نقطه قطع می‌کند.

۷ گزینه ۲

$$f^{-1}(۵) : x + \sqrt{x+۱} = ۵ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow f^{-1}(۵) = ۳$$

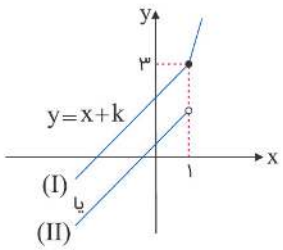
$$f^{-1}(۱۱) : x + \sqrt{x+۱} = ۱۱ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow f^{-1}(۱۱) = ۸$$

$$f^{-1}(۵) + f^{-1}(۱۱) = ۳ + ۸ = ۱۱$$

۸ گزینه ۳

در تابع یک‌به‌یک هر خط موازی محور xها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. تنها گزینهٔ "۳" این ویژگی را دارد.
تذکر: گزینهٔ "۱" تابع نیست، بنابراین یک‌به‌یک بودن آن را بررسی نمی‌کنیم.

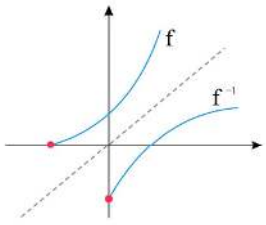
۹ گزینه ۳



$$x = ۱ : y = x + k \leq ۳ \Rightarrow ۱ + k \leq ۳ \Rightarrow k \leq ۲$$

۱۰ گزینه ۳

چون نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگر هستند، پس داریم:



۱۱ گزینه ۴

$$f^{-1} = \{(۲ , ۱) , (-۲ , ۳) , (۱ , ۴) , (-۱ , ۲)\}$$

$$g^{-1} = \{(۳ , ۲) , (۱ , ۱) , (۲ , ۳)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(-۱) = ۲ \\ f^{-1}(۱) = ۴ \\ g^{-1}(۲) = ۳ \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(-۱) + f^{-1}(۱) + g^{-1}(۲) = ۲ + ۴ + ۳ = ۹$$

۱۲ گزینه ۴

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب‌ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آن‌ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع‌بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتب‌ها نباید مؤلفهٔ اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود.

در رابطهٔ داده شده دو زوج مرتب $(۳,۲)$ و $(۳,a^۲-a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهلهٔ اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=-۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a=-۱ \Rightarrow (-۱,۵)\in f \ , \ (-۱,۴)\in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a=۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳,۲)\in f \ , \ (b,۲)\in f \xrightarrow{\text{تابع f یک به یک است}} b=۳$$

پس دوتایی (a,b) به صورت $(۲,۳)$ درمی آید.

۱۳ گزینه ۱

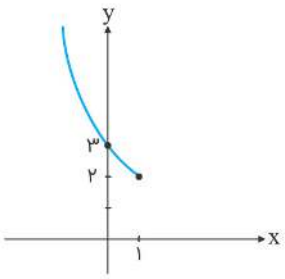
اگر خط $۳y-۲x=۴$ را به‌صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینهٔ خط $۳y-۲x=۴$ نسبت به خط $y=x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$۳y-۴=۲x \Rightarrow x=\frac{۳y-۴}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۴}{۲}=\frac{۳}{۲}x-۲ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=-۲$$

۱۴ الف

$$f(x)=(x-۱)^۲+۲ \qquad (۱,۲),(۰,۳)$$



چون خطوط موازی محور طول‌ها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

ب

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 = y \Rightarrow (x-1)^2 = y - 2$$
$$\Rightarrow \underbrace{x-1}_{\text{منفی}} = -\sqrt{y-2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y-2}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض}} y = 1 - \sqrt{x-2} = f^{-1}(x)$$

۱۵ توابع خطی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هستند.

$$y = \frac{-3x+4}{-2}$$
$$-2y = -3x + 4 \Rightarrow 3x = 2y + 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

۱۶ گزینه ۳

$$g^{-1}(2) = a \Rightarrow g(a) = 2 \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = 2 \Rightarrow a - 1 = 2a + 2 \Rightarrow a = -3$$
$$f(g^{-1}(2)) = f(-3) = 2$$

۱۷ گزینه ۲

دقت کنید که چون تابع f^{-1} خطی است، پس تابع f هم خطی خواهد بود.

$$(3, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 3) \in f$$
$$(-2, -2) \in f^{-1} \Rightarrow (-2, -2) \in f$$
$$f: y - 3 = \frac{-2-3}{-2-0}(x-0) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + 3 \Rightarrow f(2) = 8$$

۱۸ گزینه ۲

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = ۲ \end{cases}$$

$$a = -۱ : f = \{(۳ , ۲), (-۱ , ۵), (b , ۲), (-۱ , ۴)\}$$

رابطه تابع نیست. (غیرقابل‌قبول)

$$a = ۲ : f = \{(۳ , ۲), (۲ , ۵), (b , ۲), (-۱ , ۴)\}$$

رابطه تابع است. (قابل‌قبول)

$$\Rightarrow b = ۳$$

رابطه تابع یک‌به‌یک است (قابل‌قبول).

BOX 5: اعمال روی توابع (صفحه ۶۵ تا ۷۰ کتاب درسی)

در بسته‌های قبل با توابع گویا، رادیکالی، خطی و ... آشنا شده‌ایم. در این بسته می‌خواهیم، جمع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم آن‌ها را تعریف کنیم.

اعمال روی توابع

در توابع حقیقی مقدار تابع برای هر مقدار از دامنه، عددی حقیقی است. بنابراین همان‌گونه که در اعداد حقیقی، چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعریف می‌شود، برای توابع نیز می‌توان مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تعریف کرد.

تعریف: دو تابع حقیقی f و g با دامنه‌های D_f و D_g را در نظر می‌گیریم. در این صورت:

آ) مجموع دو تابع f و g را با نماد $f+g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ x\in D_f\cap D_g=D_{f+g}$$

در واقع دامنهٔ $f+g$ برابر $D=D_f\cap D_g$ است و مقدار $f+g$ در $x\in D$ برابر است با مجموع مقادیر $f(x)$ و $g(x)$.

ب) تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f-g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ,\ x\in D_f\cap D_g=D_{f-g}$$

پ) حاصل‌ضرب دو تابع را با نماد $f.g$ نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم:

$$(f.g)(x)=f(x)\times g(x)\ ,\ x\in D_f\cap D_g=D_{f.g}$$

بنابراین دامنهٔ $f.g$ برابر است با اشتراک دامنهٔ توابع f و g و اگر $x\in D_{f.g}$، آن‌گاه مقدار $f.g$ در x برابر است با حاصل‌ضرب $f(x)$ در $g(x)$.

ت) تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ x\in D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}=D_{\frac{f}{g}}$$

در واقع دامنهٔ $\frac{f}{g}$ برابر است با حذف ریشه‌های معادلهٔ $g(x)=0$ از دامنهٔ مشترک دو تابع f و g

به طور خلاصه اعمال جبری روی توابع در جدول زیر تعریف شده است:

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

تمرین: اگر $f(x)=x+2$ و $g(x)=x-1$ باشد، آن‌گاه دامنه و ضابطهٔ هر یک از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پاسخ: دامنهٔ توابع خطی f و g برابر $\mathbb{R}$ است.

۱) دامنهٔ تابع $f+g$ برابر $D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$ است و ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x+2)+(x-1)=2x+1$$

۲) دامنهٔ تابع $f-g$ هم برابر $\mathbb{R}$ است و ضابطهٔ آن به صورت مقابل است:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x+2)-(x-1)=2+1=3$$

۳) دامنهٔ تابع $f.g$ برابر $\mathbb{R}$ است و ضابطهٔ آن به صورت مقابل است: $(f.g)(x)=f(x)g(x)=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

۴) با حذف ریشهٔ معادلهٔ $g(x)=0$ از $\mathbb{R}$، دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ به دست می‌آید: $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{1\}$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+2}{x-1}$$

تمرین: اگر $f=\{(-1,2),(3,4),(5,0),(6,1)\}$ و $g=\{(-1,4),(3,2),(2,4),(6,0)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را با زوج مرتب بنویسید.

پاسخ: دامنهٔ تابع f، مجموعهٔ $\{-1,3,5,6\}$ و دامنهٔ تابع g، مجموعهٔ $\{-1,2,3,6\}$ می‌باشد. داریم: $D_{f+g}=D_f \cap D_g=\{-1,3,6\}$

باید مقادیر $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ را فقط به ازای $x=-1$ ، $x=3$ و $x=6$ به دست بیاوریم:

$$\left.\begin{array}{l}(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=2+4=6 \Rightarrow (-1,6)\in f+g \\ (f+g)(3)=f(3)+g(3)=4+2=6 \Rightarrow (3,6)\in f+g \\ (f+g)(6)=f(6)+g(6)=1+0=1 \Rightarrow (6,1)\in f+g\end{array}\right\} \Rightarrow f+g=\{(-1,6),(3,6),(6,1)\}$$

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g=\{-1,3,6\}$$

$$(f-g)(-1)=f(-1)-g(-1)=2-4=-2 \ , \ (f-g)(3)=f(3)-g(3)=4-2=2 \ , \ (f-g)(6)-g(6)=1-0=1$$

$$\Rightarrow f-g=\{(-1,-2),(3,2),(6,1)\}$$

$$D_{f.g}=D_f \Rightarrow D_g=\{-1,3,6\}$$

$$(f.g)(-1)=f(-1)g(-1)=2\times 4=8 \ , \ (f.g)(3)=f(3)g(3)=4\times 2=8 \ , \ (f.g)(6)=f(6)g(6)=1\times 0=0$$

$$\Rightarrow f.g=\{(-1,8),(3,8),(6,0)\}$$

چون $g(6)=0$ است، بنابراین مقدار تابع $\frac{f}{g}$ را فقط به ازای $x=-1$ و $x=3$ به دست می‌آوریم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}=\{-1,3,6\}-\{6\}=\{-1,3\}$$

$$(\frac{f}{g})(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \ , \ (\frac{f}{g})(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow \frac{f}{g}=\{(-1,\frac{1}{2}),(3,2)\}$$

ضرب عدد در تابع

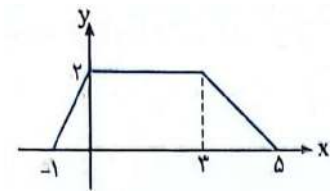
حاصل‌ضرب تابع با ضابطهٔ $f(x)$ در تابعی که برای هر نقطه، مقدارش عدد ثابت k است را با $kf(x)$ نشان می‌دهیم. $kf(x)$ تابعی است که دامنهٔ آن همان دامنهٔ تابع f و مقادیر آن از ضرب عدد k در مقادیر تابع f به دست می‌آید.

به عنوان مثال، اگر تابع f به صورت $f=\{(3,-1),(2,4),(5,2)\}$ باشد، آن‌گاه با ضرب عدد ۲ در مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب f، تابع $2f$ به دست می‌آید: $2f=\{(3,-2),(2,8),(5,4)\}$

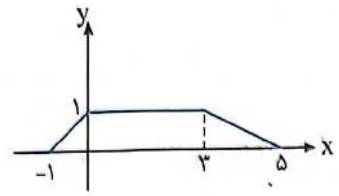
رسم نمودار $kf(x)$ از روی $f(x)$

دامنهٔ تابع $kf(x)$ با دامنهٔ $f(x)$ یکسان است و عرض نقاط تابع $kf(x)$، k برابر عرض نقاط $f(x)$ می‌باشد، پس برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ را k برابر کنیم.

تمرین: نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ را رسم کنید.

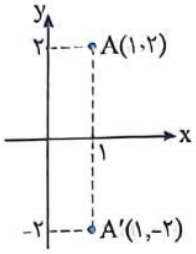


پاسخ: با تقسیم عرض نقاط واقع بر نمودار بر عدد ۲، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ به دست می‌آید:



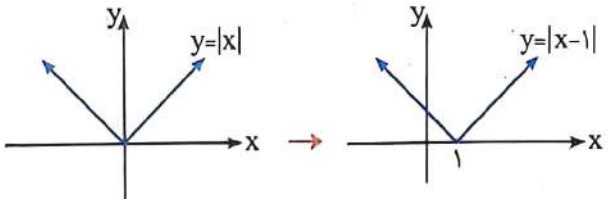
نکته: ۱) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به محور xها، نقطهٔ $A'(a,-b)$ است. به عنوان مثال، در شکل مقابل، قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$، نقطهٔ $A'(۱,-۲)$ می‌باشد. پس برای قرینه‌کردن نقطه نسبت به محور x، کافی است عرض نقطه را قرینه کنیم.

۲) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-f(x)$، کافی است قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

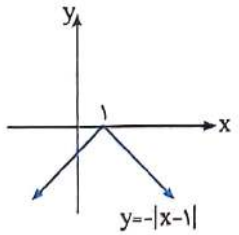


تمرین: نمودار $y=-|x-۱|+۲$ را رسم کنید.

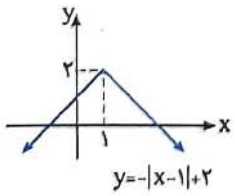
پاسخ: با انتقال نمودار $y=|x|$ به اندازهٔ یک واحد به سمت راست، نمودار $y=|x-۱|$ به دست می‌آید:



نمودار $y=|x-۱|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|x-۱|$ به دست آید:



نمودار $y=-|x-۱|$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-|x-۱|+۲$ رسم شود:



پرسش‌های تشریحی:

۱- اگر $f=\{(-۱,۱),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۲,-۱),(۵,۳),(۴,۲),(-۱,۶)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

آ) $\frac{g^۲-f}{۲f+g}$ ب) $f-g^{-۱}$

۲- دامنه و ضابطهٔ هر یک از توابع $f+g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $f-g$ را مشخص کنید.

$$f(x)=\frac{۱}{x} \quad , \quad g(x)=\frac{۲}{x-۱}$$

۳- اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۴$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

۴- توابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\frac{۲}{x-۳}$ داده شده‌اند. (شهریور ۹۵)

آ) دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

پ) حاصل عبارت $(-۱)(۳f-۲g)$ را به دست آورید.

۵- اگر قرینهٔ نقطهٔ $(۲a+۱,۳-b)$ نسبت به محور xها، نقطهٔ $(-b+۲,a+۴)$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۶- با توجه به نمودار $f(x)=|x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶۹ کتاب درسی)

آ) $g(x)=-|x|$ ب) $h(x)=-|x+۱|$ پ) $m(x)=۲|x-۱|$

۷- با توجه به نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶۹ کتاب درسی)

آ) $g(x)=۱-\sqrt{x}$ ب) $k(x)=۳\sqrt{x}$ پ) $h(x)=۱-۲\sqrt{x}$ ت) $t(x)=-۲\sqrt{x}$

۸- توابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\geq ۱ \\ ۲x+۱ & x<۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳x+۲ & x\geq ۱ \\ -x+۶ & x<۱ \end{cases}$ مفروض‌اند. ضابطهٔ توابع $f+g$ و $f-g$ را تعیین کنید.

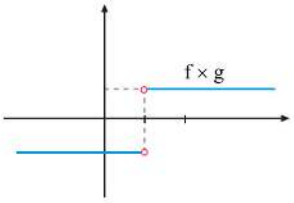
Homework

۱ دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

۱) -۶ ۲) -۴

۳) ۴ ۴) ۶

۲ اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و نمودار تابع $(f\times g)(x)$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه تابع $g(x)$ کدام است؟



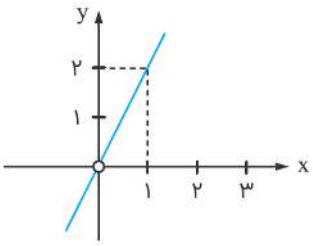
۱) $\frac{۱}{|x+۱|}$

۲) $\frac{۱}{|x-۱|}$

۳) $|x+۱|$

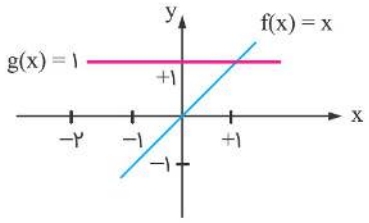
۴) $|x-۱|$

۳ اگر $f(x)=x^۲$، و تابع $\frac{f}{g}(x)$ به‌صورت نمودار زیر باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را بیابید.



۴ اگر $f(x)=[x]$ با دامنهٔ $۱\le x\le ۰$، و $g(x)=|x|$ با دامنهٔ $۲\le x\le ۱$ باشد، نمودار و ضابطهٔ $f(x)+g(x)$ را بیابید.

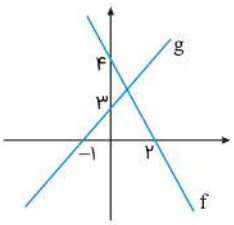
۵ به کمک نمودارهای رسم‌شدهٔ توابع f و g، نمودار کلی تابع $f+g$ را رسم کنید.



۶ اگر $f:\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$

و $g:\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۷ نمودار $f(x)$ و $g(x)$ مطابق شکل زیر است. ضابطهٔ $y = \frac{(f \times g)(x)}{(2f - g)(x)}$ کدام است؟



۱) $y = \frac{-x^2 + x + 2}{-7x + 5}$

۲) $y = \frac{-6x^2 - 6x + 12}{-7x + 5}$

۳) $y = \frac{-6x^2 + 6x + 12}{-7x + 5}$

۴) $y = \frac{-x^2 + x - 2}{7x - 5}$

۸ اگر $f = \{(7,1),(6,2),(3,0)\}$, $g = \{(7,4),(3,3),(1,2)\}$ دو تابع باشند توابع $f - g$, $f \times g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

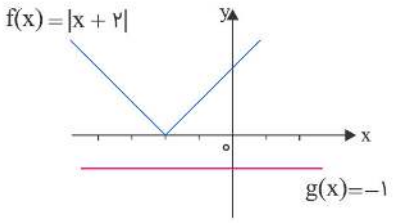
۹ اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ باشد دامنه و ضابطهٔ $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.

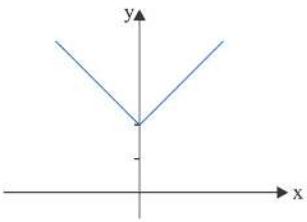
۱۰ اگر $f(x) = \sqrt{x - 3}$ و $g(x) = x^2 + 1$ مفروض باشند، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

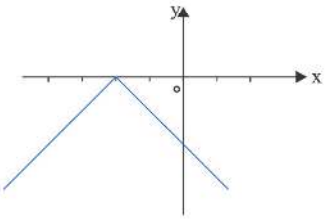
الف حاصل $(f + g)(4)$ و $(f \times g)(5)$ را به دست آورید.

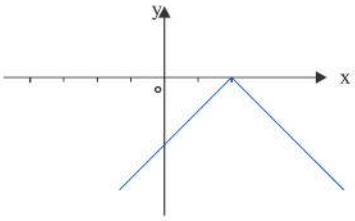
ب ضابطهٔ تابع $y = (f - g)(x)$ را بنویسید.

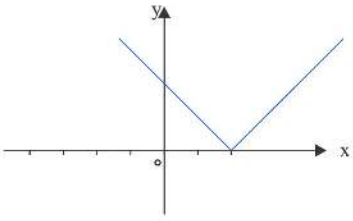
۱۱ اگر نمودار تابع f و g به‌صورت زیر باشد، در این صورت نمودار تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲ اگر $f = \{(۲ , ۱) , (-۳ , ۲) , (-۱ , -۱) , (۰ , -۳)\}$ و $g(x) = \sqrt{x+۱}$ برد تابع $۲f + g^۲$ کدام است؟

۱) $\{-۲ , ۵ , ۳\}$
۲) $\{-۲ , -۵ , ۵\}$
۳) $\{۳ , -۵ , ۵\}$
۴) $\{۲ , -۳ , ۳\}$

۱۳ اگر $f(x) = |x-۲|$ و $g(x) = \sqrt{ax+۶}$ و دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ برابر $(-\infty, ۴)$ باشد، آنگاه $(\frac{f}{g})(\frac{۴}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $-\frac{۱}{۳}$

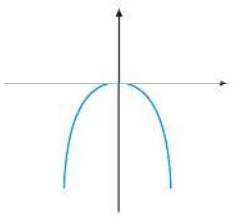
۱۴ اگر $f = \{(-۳ , ۲) , (۰ , ۲) , (m-n , ۵)\}$ و $g = \{(۰ , m+n) , (-۲ , ۱) , (۳ , ۲)\}$
$f \times g = \{(۰ , -۸) , (-۲ , ۵)\}$ باشد، آنگاه $\frac{m}{n}$ کدام است؟

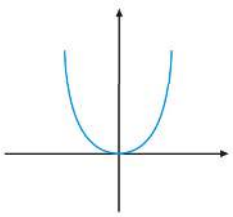
۱) صفر
۲) ۵
۳) ۴-
۴) ۳

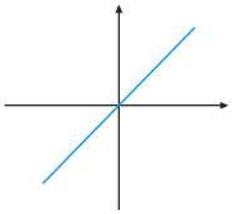
۱۵ اگر $f = \{(-۱ , ۰) , (۲ , ۱) , (-۲ , ۱)\}$ و $g = \{(۲ , -۳) , (-۱ , ۲)\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{g-f}{f}$ کدام است؟

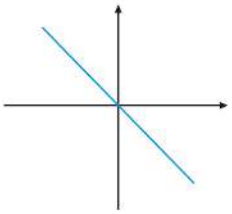
۱) $\{(-۱ , ۲) , (۲ , -۴)\}$
۲) $\{(۲ , -۴)\}$
۳) $\{(-۱ , ۰) , (۲ , -۳)\}$
۴) $\{(-۱ , ۲)\}$

۱۶ اگر تابع f یک تابع همانی باشد، آنگاه نمودار $f^۲$ کدام است؟

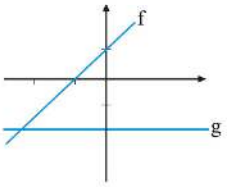
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۷ باتوجه‌به نمودار زیر، عرض از مبدأ نمودار $f + g$ کدام است؟



۱) -۱
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۲

۱۸ اگر $f(x) = -۲[x]$ و $g(x) = -۳$ باشد، آنگاه حاصل $(f+g)(-۲/۷)$ کدام است؟

۱) $۱/۳$
۲) ۳
۳) $۳/۳$
۴) ۱

۱۹ اگر $f = \{(-۱, ۲), (۲, -۳), (۰, -۱)\}$ و $g = \{(۰, ۴), (-۴, ۲), (۲, -۱)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $f \times g$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{۲, -۶\}$
۲) $\{۶, -۲\}$
۳) $\{۳, -۴\}$
۴) $\{۴, -۳\}$

۲۰ اگر $f(x) = x^۲ - ۳x - ۴$ و $(\frac{f}{g})(x) = x + ۱$ باشد، آنگاه تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $x - ۴$
۲) $x + ۴$
۳) $\frac{۱}{x-۴}$
۴) $\frac{۱}{x+۴}$

۲۱ اگر $f=\{(-۶,۳),(-۱,-۴)\}$ و $g=\{(-۱,۰),(۱,۶),(-۶,a)\}$ و $(f+g)(-۶)=-۲$ باشد، آنگاه a کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) -۵

۲۲ اگر $f(x)=[x-۲]$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۳/۲}$، آنگاه حاصل $(f\times g)(۴/۸)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۲۴

۲۳ اگر $f(x)=x^۲+۲x-۳$ و $g(x)=x^۲-۱$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}(x)$ و دامنهٔ آن کدام است؟

۱) $\frac{f}{g}(x)=\frac{x+۳}{x+۱}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$ ۲) $\frac{f}{g}(x)=\frac{x-۳}{x-۱}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۱\}$

۳) $\frac{f}{g}(x)=\frac{x+۳}{x-۱}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۱\}$ ۴) $\frac{f}{g}(x)=\frac{x-۳}{x+۱}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\{۱,-۱\}$

۲۴ اگر $f=\{(-۱,۳),(۲,-۴)\}$ و $g=\{(-۱,۵),(-۳,۰)\}$، آنگاه تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $\{(-۱,-۲),(-۱,۴)\}$ ۲) $\{(-۱,-۲)\}$

۳) $\{(-۱,۲)\}$ ۴) $\{(-۱,-۹),(-۴,۳)\}$

۲۵ اگر $f=\{(۲,۵),(۱,-۳),(-۴,۲)\}$ و $g=\{(۲,-۳),(-۴,-۵),(۳,-۲)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $\frac{f+۲g}{f-g}$ کدام است؟

۱) $\{\frac{-۸}{۷},\frac{-۱}{۸}\}$ ۲) $\{\frac{-۸}{۷},\frac{۱}{۸}\}$

۳) $\{\frac{۵}{۷},\frac{۷}{۲}\}$ ۴) $\{\frac{-۳}{۷},\frac{-۲}{۵}\}$

۲۶ اگر $f=\{(-۳,۲),(-۱,۷),(۲,-۵),(۸,۳)\}$ و $g(x)=x+\sqrt{۲x}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $y=(f\times g)(x)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۸

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۷ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲-x}$ دارای چند عدد صحیح است؟

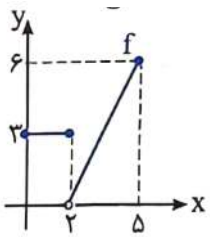
۱) ۳ ۲) ۴

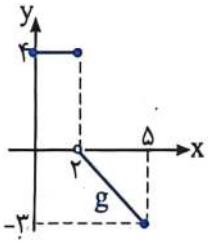
۳) ۵ ۴) ۶

۲۸ اگر $f=\{(-۱,۳),(۲,۵),(-۵,۲)\}$ و $g=\{(۲,-۳),(-۵,۴),(۱,۳)\}$ مفروض باشند، برد تابع $۲f-g$ کدام است؟

۱) $\{۰,۱۳\}$
۲) $\{-۲,۱۳\}$
۳) $\{۰,-۵\}$
۴) $\{-۲,۴\}$

۲۹ مطابق شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g داده شده است. ضابطهٔ توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را مشخص کنید و سپس نمودار هر یک را رسم کنید.





پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

$$\begin{cases} f(x) = b - ۳ax \xrightarrow{\text{ثابت } f} ۳a = ۰ \Rightarrow a = ۰ \\ g(x) = c - (۳b - ۳)x \xrightarrow{\text{ثابت } g} ۳b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ \quad , \quad g(x) = c$$

$$f + g = ۵ \Rightarrow ۱ + c = ۵ \Rightarrow c = ۴$$

$$bc = ۱ \times ۴ = ۴$$

۲ گزینه ۴

از نمودار $f \times g$ نتیجه می‌گیریم:

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} ۱ & ; x > ۱ \\ -۱ & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\begin{cases} (f \times g)(x) = ۱ \xrightarrow{x>۱} ۱ = \dfrac{۱}{x-۱} \times g(x) \xrightarrow{x>۱} g(x) = x - ۱ \\ (f \times g)(x) = -۱ \xrightarrow{x<۱} -۱ = \dfrac{۱}{x-۱} \times g(x) \xrightarrow{x<۱} g(x) = -(x-۱) \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x - ۱|$$

۳

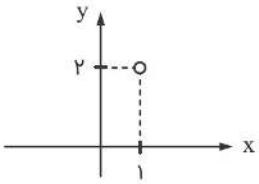
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^۲}{g(x)} = ۲x \Rightarrow x^۲ = ۲xg(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\cancel{x^۲}}{\cancel{۲x}} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{۲}$$

۴

$$D_{(f+g)} = D_f \cap D_g = (۰ \le x \le ۱) \cap (۱ \le x \le ۲) = \{۱\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = [x] + |x| = [۱] + |۱| = ۲$$

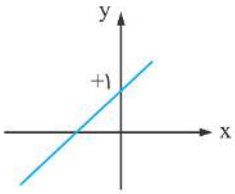


۵

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + ۱$$

x	y
۰	۱
۱	۲

$$D_{(f+g)} = \mathbb{R}$$



۶

$$(f+g)(x) = \{(-۴\,,\ ۶)\ (۰\,,\ ۲)\ (۳\,,\ -۵)\}$$

$$(f-g)(x) = \{(-۴, ۲۰)(۰, ۸)(۳, -۵)\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \{(-۴\,,\ -\frac{۱۳}{۷})\ (۰\,,\ -\frac{۵}{۳})\}$$

۷

گزینه ۳

$$f(x) : m = \frac{۰-۴}{۲-۰} = -۲ \Rightarrow y - ۰ = -۲(x-۲) \Rightarrow f(x) = -۲x + ۴$$

$$g(x) : m = \frac{۰-۳}{-۱-۰} = ۳ \Rightarrow y - ۰ = ۳(x+۱) \Rightarrow g(x) = ۳x + ۳$$

$$y = \frac{(-۲x+۴)(۳x+۳)}{۲(-۲x+۴) - (۳x+۳)} = \frac{-۶x^۲ - ۶x + ۱۲x + ۱۲}{-۴x + ۸ - ۳x - ۳}$$

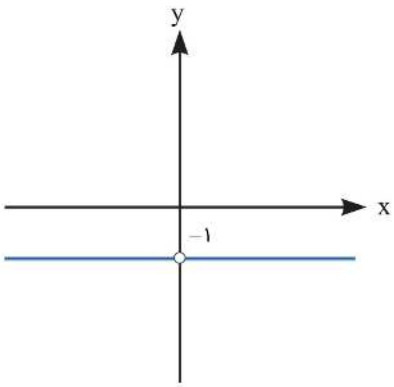
$$\Rightarrow y = \frac{-۶x^۲ + ۶x + ۱۲}{-۷x + ۵}$$

۸

$$f - g = \{(۷), -۳), (۳, -۳)\}$$

$$f \times g = \{(۷, ۴), (۳, ۰)\}$$

۹



$$\frac{f}{g}(x)=\frac{|x|}{-|x|}=\begin{cases}-۱ & ;x>۰\\ -۱ & ;x<۰\end{cases}$$
$$D=R-\{۰\}$$

۱۰ الف

$$(f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=\sqrt{۴-۳}+(۴^۲+۱)=۱۸$$
$$(f\times g)(۵)=f(۵)\times g(۵)=\sqrt{۵-۳}\times(۵^۲+۱)=۲۶\sqrt{۲}$$

ب

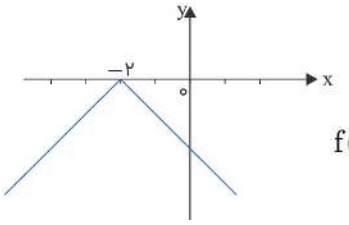
$$y=(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-۳}-(x^۲+۱)$$

۱۱ گزینه ۲

$$\begin{cases}f(x)=|x+۲|\\ g(x)=-۱\end{cases}\Rightarrow\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{|x+۲|}{-۱}=-|x+۲|$$

$$\frac{f}{g}(x)=\begin{cases}-(x+۲) & ;x\geq -۲\\ -(-(x+۲)) & ;x<-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{f}{g}(x)=\begin{cases}-x-۲ & ;x\geq -۲\\ x+۲ & ;x<-۲\end{cases}$$



* یادآوری: تابع قدر مطلق:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & ;x\geq ۰\\ -x & ;x<۰\end{cases}$$

۱۲ گزینه ۲

$$D_f = \{۲, -۳, -۱, ۰\}$$
$$x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \Rightarrow D_g = [-۱, +\infty) \Rightarrow D_{۲f+g^۲} = D_f \cap D_g = \{-۱, ۰, ۲\}$$

$$۲f(-۱) + g^۲(-۱) = -۲ + ۰ = -۲ \qquad ۲f(۲) + g^۲(۲) = ۲(۱) + ۳ = ۵$$
$$۲f + g^۲ = \left\{(-۱, \overset{\uparrow}{-۲}), (۰, \underset{\downarrow}{-۵}), (۲, \overset{\uparrow}{۵})\right\}$$
$$۲f(۰) + g^۲(۰) = -۶ + ۱ = -۵$$

۱۳ گزینه ۳

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}$$

چون دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ برابر $(-\infty, ۴)$ می‌باشد، بنابراین تابع $g(x)$ به ازای $x = ۴$ صفر می‌شود:

$$g(۴) = ۰ \Rightarrow \sqrt{a(۴) + ۶} = ۰ \Rightarrow ۴a + ۶ = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow g(x) = \sqrt{-\frac{۳}{۲}x + ۶}$$

$$(\frac{f}{g})(\frac{۴}{۳}) = \frac{f(\frac{۴}{۳})}{g(\frac{۴}{۳})}$$

$$f(\frac{۴}{۳}) = |\frac{۴}{۳} - ۲| = \frac{۲}{۳}, \; g(\frac{۴}{۳}) = \sqrt{-\frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} + ۶} = ۲$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})(\frac{۴}{۳}) = \frac{\frac{۲}{۳}}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴ گزینه ۴

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \; ; \; D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = \{۰, -۲\}$$
$$D_f = \{-۳, ۰, m - n\}, \; D_g = \{۰, -۲, ۳\} \Rightarrow m - n = -۲$$

همچنین داریم:

$$(f \times g)(۰) = f(۰) \times g(۰) = -۸ \Rightarrow ۲ \times (m + n) = -۸$$

$$\Rightarrow m + n = -۴$$

$$\begin{cases} m - n = -۲ \\ m + n = -۴ \end{cases} \Rightarrow m = -۳, \; n = -۱ \Rightarrow \frac{m}{n} = ۳$$

۱۵ گزینه ۲

$(g-f)(x)=g(x)-f(x)\ ,\ D_{g-f}=D_g\cap D_f$

$D_f=\{-۱\ ,\ ۲\ ,\ -۲\}\ ,\ D_g=\{۲\ ,\ -۱\}\Rightarrow D_{g-f}=\{-۱\ ,\ ۲\}$

$(-۱\ ,\ ۰)\ ,\ (-۱\ ,\ ۲)\Rightarrow (g-f)(-۱)=۲-۰=۲$

$(۲\ ,\ ۱)\ ,\ (۲\ ,\ -۳)\Rightarrow (g-f)(۲)=-۳-۱=-۴$

$\Rightarrow g-f=\{(-۱\ ,\ ۲)\ ,\ (۲\ ,\ -۴)\}$

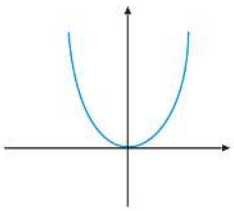
$D_{\frac{g-f}{f}}=D_{(g-f)}\cap D_f-\{x|f(x)=۰\}$

$=\{-۱\ ,\ ۲\}\cap\{-۱\ ,\ ۲\ ,\ -۲\}-\{-۱\}=\{۲\}$

$(\frac{g-f}{f})(۲)=\frac{(g-f)(۲)}{f(۲)}=\frac{-۴}{۱}=-۴\Rightarrow \frac{g-f}{f}=\{(۲\ ,\ -۴)\}$

۱۶ گزینه ۲

تابع همانی : $f(x)=x\Rightarrow f^۲=f\times f=x\times x=x^۲$



۱۷ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودارها، ضابطه‌های نمودارهای f و g عبارت‌اند از:
نمودار f، نمودار $f(x) = x$ می‌باشد که ۱ واحد به بالا انتقال یافته است.

$$f(x) = x + ۱$$

$g(x)$ نیز یک تابع ثابت با مقدار -۲ می‌باشد.

$$g(x) = -۲$$
$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + ۱ + (-۲) = x - ۱$$

درنتیجه یک تابع خطی با عرض از مبدأ ۱- است.
نکته: ضابطهٔ تابع f را به‌صورت زیر نیز می‌توان به دست آورد، چون خط محورها را در دو نقطهٔ $(۰, ۱)$ و $(-۱, ۰)$ قطع می‌کند:

$$m = \frac{۱ - ۰}{۰ - (-۱)} = ۱$$
$$y - ۱ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y = x + ۱$$

نکته: معادلهٔ یک تابع خطی به‌صورت $y = mx + h$ می‌باشد که h عرض از مبدأ خط می‌باشد.

۱۸ گزینه ۲

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f+g)(-۲/۷) = f(-۲/۷) + g(-۲/۷)$$
$$\Rightarrow f(-۲/۷) = -۲[-۲/۷] = -۲(-۳) = ۶ \ , \ -۳ \leq -۲/۷ < -۲$$
$$\Rightarrow [-۲/۷] = -۳ g(-۲/۷) = -۳$$
$$\Rightarrow (f+g)(-۲/۷) = ۶ + (-۳) = ۳$$

$g(x) = -۳$ تابعی ثابت است هر مقداری بدهیم، فقط مقدار ثابت -۳ را می‌دهد.

۱۹ گزینه ۳

ابتدا دامنه‌های f و g را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{\text{همهٔ مؤلفه‌های اول } f\} = \{-۱, ۲, ۰\}$$
$$D_g = \{\text{همهٔ مؤلفه‌های اول } g\} = \{۰, -۴, ۲\}$$
$$\Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g \Rightarrow D_{f \times g} = \{۲, ۰\}$$

حالا باید مقدار $f \times g$ را به ازای $x = ۲$ و $x = ۰$ به دست آوریم:

$$x = ۰ \Rightarrow (f \times g)(۰) = \underbrace{f(۰)}_{-۱} \times \underbrace{g(۰)}_{۴} = (-۱)(۴) = -۴$$
$$x = ۲ \Rightarrow (f \times g)(۲) = \underbrace{f(۲)}_{-۳} \times \underbrace{g(۲)}_{-۱} = (-۳)(-۱) = ۳$$

۲۰ گزینه ۱

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow x+1=\frac{x^2-3x-4}{g(x)}$$
$$\Rightarrow g(x)=\frac{x^2-3x-4}{x+1}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)}=x-4$$

۲۱ گزینه ۴

$$\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(f+g)(-6)=f(-6)+g(-6)=-2\\g:(-6,a)\Rightarrow g(-6)=a\\f:(-6,3)\Rightarrow f(-6)=3\end{cases}$$
$$\Rightarrow a+3=-2\Rightarrow a=-2-3=-5$$
$$\Rightarrow a=-5$$

۲۲ گزینه ۳

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=[x-2]\times\frac{1}{x+3/2}$$
$$\Rightarrow (f\times g)(x)=\frac{[x-2]}{x+3/2}\Rightarrow (f\times g)(4/8)=\frac{[4/8-2]}{4/8+3/2}=\frac{[2/8]}{8}$$
$$\Rightarrow (f\times g)(4/8)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

۲۳ گزینه ۱

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+3}{x+1}$$
$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}\ ,\ g(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$$
$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{1,-1\}=\mathbb{R}-\{1,-1\}$$

۲۴ گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ $f-g$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_f=\{-۱,۲\}$$
$$D_g=\{-۱,-۳\} \qquad D_f\cap D_g=\{-۱\} \qquad D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{-۱\}$$
$$f:(-۱,۳)\Rightarrow f(-۱)=۳$$
$$g:(-۱,۵)\Rightarrow g(-۱)=۵ \Rightarrow (f-g)(-۱)=f(-۱)-g(-۱)=۳-۵=-۲$$
$$\Rightarrow f-g=\{(-۱,-۲)\}$$

۲۵ گزینه ۱

$$D_f\cap D_g=\{۲,-۴\}$$
$$\frac{f(۲)+۲g(۲)}{f(۲)-g(۲)}=\frac{۵+۲(-۳)}{۵-(-۳)}=\frac{-۱}{۸}$$
$$\frac{f(-۴)+۲g(-۴)}{f(-۴)-g(-۴)}=\frac{۲+۲(-۵)}{۲-(-۵)}=\frac{-۸}{۷}$$
$$\Rightarrow \frac{f+۲g}{f-g}=\{(۲,-\frac{۱}{۸}),(-۴,-\frac{۸}{۷})\}$$

۲۶ گزینه ۴

$$D_f=\{-۳,-۱,۲,۸\}$$
$$g(x)=x+\sqrt{۲x}\Rightarrow ۲x\geq ۰\Rightarrow x\geq ۰$$
$$D_g=[۰,+\infty)$$
$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\{۲,۸\}$$

$$(f\times g)(۲)=f(۲)\times g(۲)=(-۵)\times(۲+\sqrt{۴})=-۲۰$$
$$(f\times g)(۸)=f(۸)\times g(۸)=(۳)\times(۸+\sqrt{۱۶})=۳۶$$
$$f\times g=\{(۲,-۲۰),(۸,۳۶)\}$$

$$\text{مجموع بردها}=-۲۰+۳۶=۱۶$$

۲۷ گزینه ۲

می‌دانیم:

$$y=(f+g)(x)\Rightarrow D=D_f\cap D_g$$

$$x+۱\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱ \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱\leq x\leq ۲\Rightarrow D=[-۱,۲]$$
$$۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲$$

۲۸ گزینه ۱

$$D_{۲f-g} = \{۲, -۵\}$$
$$۲f(-۵) - g(-۵) = ۲(۲) - ۴ = ۰$$
$$۲f - g = \{(۲, ۱۳), (-۵, ۰)\}$$
$$۲f(۲) - g(۲) = ۲(۵) - (-۳) = ۱۳$$

۲۹ ضابطهٔ هر یک از توابع f و g را به دست می‌آوریم.

ضابطهٔ تابع f: اگر $۲ \le x \le ۰$ ، آن‌گاه f تابع ثابت $f(x) = ۳$ است. در محدودهٔ $۵ \le x < ۲$ ، f یک تابع خطی گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(۵,۶)$ می‌باشد:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(۲) = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \\ f(۵) = ۶ \Rightarrow ۵a + b = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - b = ۰ \\ ۵a + b = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$$

$$\xrightarrow{۲a+b=۰} ۴ + b = ۰ \Rightarrow b = -۴ \Rightarrow f(x) = ۲x - ۴$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۳ & ۰ \le x \le ۲ \\ ۲x - ۴ & ۲ < x \le ۵ \end{cases}$$

ضابطهٔ تابع g:

$$۰ \le x \le ۲ \Rightarrow g(x) = ۴$$

در محدودهٔ $۵ \le x < ۲$ ، تابع خطی g از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(۵,-۳)$ عبور کرده است:

$$g(x) = ax + b \ , \ g(۲) = ۰ \ , \ g(۵) = -۳$$
$$\begin{cases} g(۲) = ۲a + b = ۰ \\ g(۵) = ۵a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - b = ۰ \\ ۵a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۳a = -۳ \Rightarrow a = -۱$$
$$\xrightarrow{۲a+b=۰} -۲ + b = ۰ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow g(x) = -x + ۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع g به صورت زیر می‌باشد:

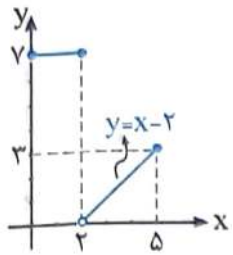
$$g(x) = \begin{cases} ۴ & ۰ \le x \le ۲ \\ -x + ۲ & ۲ < x \le ۵ \end{cases}$$

دامنهٔ هر دو تابع f و g و در نتیجه اشتراک آن‌ها بازهٔ $[۰,۵]$ می‌باشد.

ضابطهٔ $f + g$:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} ۳ + ۴ & ۰ \le x \le ۲ \\ (۲x - ۴) + (-x + ۲) & ۲ < x \le ۵ \end{cases} = \begin{cases} ۷ & ۰ \le x \le ۲ \\ x - ۲ & ۲ < x \le ۵ \end{cases}$$

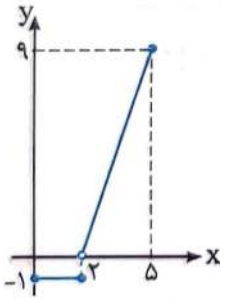
نمودار $f + g$:



ضابطهٔ $f - g$:

$$(f-g)(x)=\begin{cases}۳-۴ & ۰\le x\le ۲\\ (۲x-۴)-(-x+۲) & ۲<x\le ۵\end{cases}=\begin{cases}-۱ & ۰\le x\le ۲\\ ۳x-۶ & ۲<x\le ۵\end{cases}$$

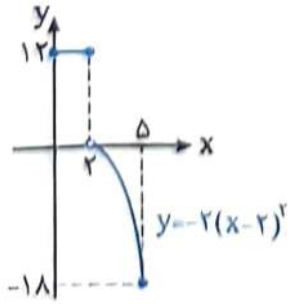
نمودار $f-g$:



ضابطهٔ $f.g$:

$$(f.g)(x)=\begin{cases}۳\times ۴ & ۰\le x\le ۲\\ \underbrace{(۲x-۴)}_{۲(x-۲)}\underbrace{(-x+۲)}_{-(x-۲)} & ۲<x\le ۵\end{cases}=\begin{cases}۱۲ & ۰\le x\le ۲\\ -۲(x-۲)^{۲} & ۲<x\le ۵\end{cases}$$

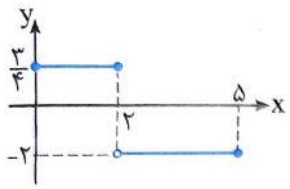
نمودار $f.g$: نمودار تابع $f.g$ شامل خط $y=۱۲$ در بازهٔ $[۰,۲]$ و سهمی $y=-۲(x-۲)^{۲}$ در بازهٔ $(۲,۵]$ می‌باشد:



ضابطهٔ $\frac{f}{g}$:

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۴} & ۰\le x\le ۲\\ \frac{۲x-۴}{-x+۲} & ۲<x\le ۵\end{cases}=\begin{cases}\frac{۳}{۴} & ۰\le x\le ۲\\ \frac{۲\cancel{(x-۲)}}{-\cancel{(x-۲)}} & ۲<x\le ۵\end{cases}=\begin{cases}\frac{۳}{۴} & ۰\le x\le ۲\\ -۲ & ۲<x\le ۵\end{cases}$$

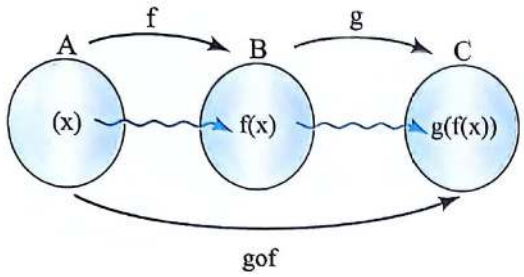
نمودار $\frac{f}{g}$: نمودار $\frac{f}{g}$ شامل دو خط $y=\frac{۳}{۴}$ در بازهٔ $[۰,۲]$ و $y=-۲$ در بازهٔ $(۲,۵]$ می‌شود.



BOX 6: ترکیب توابع

(ویژه حسابان ۱ و ریاضی ۳ تجربی) بچه‌های تجربی از این قسمت در امتحان نهایی سوال ندارند.

اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم.



به عبارت دیگر اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ آن‌گاه: $gof: A \to C$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به طور مشابه ترکیب f با g را می‌توان به صورت مقابل تعریف کرد:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ و $g(x) = \sqrt{4-x^2}$، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را محاسبه کنید. *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$D_f: x^2+5 \geq 0 \to \mathbb{R}$$

$$D_g: 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2,2] \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = [-2,2]$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{4-x^2}) = \sqrt{4-x^2+5} = \sqrt{9-x^2}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2,2]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \sqrt{x^2+5} \leq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2+5 \leq 4}_{\text{جواب ندارد} \Leftarrow x^2 \leq -1}\} = \{\varnothing\} \Rightarrow \text{پس تابع } gof \text{ وجود ندارد}$$

تمرین: اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

ورودی $\to \boxed{2x-2} \to \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \to$ خروجی

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$A \to \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \to \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A = 4$$

$$\text{ورودی} \Rightarrow \boxed{2x-2} \Rightarrow A = 4 \Rightarrow 2x-2 = 4 \Rightarrow x = 3$$

تمرین: اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(-۱,۳)\}$ و $g=\{(۳,۱),(۲,-۱)\}$ باشد، مطلوب است محاسبه توابع fog و gof.

پاسخ: در دامنه fog، ابتدا $x\in D_g$ می‌باشد. پس:

$$x\in D_g \Rightarrow x\in\{۳,۲\}$$

$$\begin{cases} x=۳ \Rightarrow g(۳)=۱ \Rightarrow f(g(۳))=f(۱)=۲ \Rightarrow f(g(۳))=۲ \Rightarrow (۳,۲) \\ x=۲ \Rightarrow g(۲)=-۱ \Rightarrow f(g(۲))=f(-۱)=۳ \Rightarrow f(g(۲))=۳ \Rightarrow (۲,۳) \end{cases}$$

$$(fog)(x)=\{(۳,۲)(۲,۳)\}$$

در مورد gof، ابتدا $x\in D_f$ می‌باشد. در نتیجه:

$$x\in D_f \Rightarrow x\in\{۱,۳,-۱\}$$

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow f(۱)=۲ \Rightarrow g(f(۱))=g(۲)=-۱ \Rightarrow g(f(۱))=-۱ \Rightarrow (۱,-۱) \\ x=۳ \Rightarrow f(۳)=۴ \Rightarrow g(f(۳))=g(۴)=\text{وجود ندارد} \\ x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۳ \Rightarrow g(f(-۱))=g(۳)=۱ \Rightarrow (-۱,۱) \end{cases}$$

$$(gof)(x)=\{(۱,-۱),(-۱,۱)\}$$

تمرین: توابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند، اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۴,۳)$ ۳) $(۴,۵)$ ۴) $(۵,۴)$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} f(g(۴))=۲ \xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴)=۳ \Rightarrow a=۴ \\ g(f(۴))=۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵)=۱ \Rightarrow b=۵ \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(۴,۵)$$

تمرین: اگر $D_f=[-۲,۲]$ باشد، آن‌گاه دامنه $f(۲[x])$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۲)$ ۳) $[-۱,۱)$ ۴) $[-۲,۲)$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$۲[x]\in[-۲,۲] \Rightarrow -۲\le ۲[x]\le ۲ \Rightarrow -۱\le [x]\le ۱ \Rightarrow -۱\le x<۲$$

تمرین: اگر $f(x)=x^۲+۴x$ و $(fog)(x)=۳x+۱$، تابع $g(x)$ را بیابید. (فرض $g(x)>۰$)

پاسخ: fog یعنی در تابع f به جای x (متغیر)، $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(g(x))=g^۲(x)+۴g(x)=۳x+۱ \xrightarrow{\text{به طرفین ۴ اضافه می‌کنیم}} g^۲(x)+۴g(x)+۴=۳x+۵$$

$$(g(x)+۲)^۲=۳x+۵ \xrightarrow{g>۰} g(x)+۲=\sqrt{۳x+۵} \Rightarrow g(x)=\sqrt{۳x+۵}-۲$$

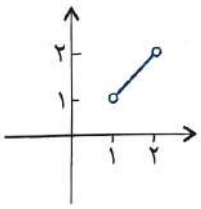
نکته: در حالت کلی روابط مقابل برقرار است:

$$\begin{cases} f^{-۱}(f(x))=x & x\in D_f \\ f(f^{-۱}(x))=x & x\in D_{f^{-۱}} \end{cases}$$

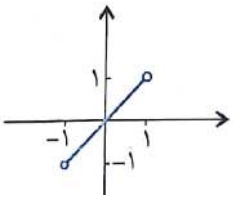
به عبارتی وقتی $f^{-۱}of(x)=fof^{-۱}(x)$ برقرار است که $D_f=D_{f^{-۱}}$ یا $D_f=R_f$

تمرین: اگر f با دامنه $(-۱,۱]$ و برد $(۱,۲)$ مفروض باشد، نمودار تابع $fof^{-۱}(x)$ و $f^{-۱}of(x)$ را رسم کنید.

پاسخ:



$y = fof^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ $\quad x \in D_{f^{-1}}$ یا $R_f \Rightarrow 1 < x < 2$



$y = f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ $\quad x \in D_f \Rightarrow -1 \le x < 1$

$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

نکته: برای تابع وارون‌پذیر f و g داریم:

تمرین: اگر $f(5) = 2$ و $g(4) = 5$ باشد، مطلوب است حاصل $(fog)^{-1}$ در $x = 2$.

پاسخ:

$f(5) = 2 \Rightarrow (5,2) \in f \Rightarrow (2,5) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(2) = 5$

$g(4) = 5 \Rightarrow (4,5) \in g \Rightarrow (5,4) \in g^{-1} \Rightarrow g^{-1}(5) = 4$

$(fog)^{-1}(2) = g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(5) = 4$

Homework (1)

اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد:

۱ دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۲ ضابطه تابع fog را بنویسید.

۳ اگر $f(x-2)=x^2+4x$ ضابطه $f(2x+1)$ را حساب کنید.

اگر $f(x)=\sqrt{4-2x}$ و $g(x)=x^2+2x-1$ باشد،

۴ دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۵ مقدار $(\frac{f}{g})(0)-(gof)(2)$ تعیین کنید.

۶ برای دو تابع $f(x)=\frac{1}{x-3}$ و $g(x)=\frac{4}{x}$ تابع fog و دامنه آن‌را به‌دست آورید.

۷ اگر $f(x)=x-2$ و $(gof)(x)=x^2-x$، ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x)=x^2+4x+2$ ۲) $g(x)=x^2+3x$

۳) $g(x)=x^2+4x$ ۴) $g(x)=x^2+3x+2$

۸ اگر $f=\{(11,7),(-2,4),(3,-5),(2,-5)\}$ و $g=\{(2,11),(4,-2),(6,3),(3,2)\}$ تابع fog را محاسبه کنید.

۹ برای دو تابع $f(x)=\frac{1}{x-3}$ و $g(x)=\frac{4}{x}$ بدون تشکیل ضابطه $fog(x)$ و با استفاده از تعریف دامنه $fog(x)$ را بیابید.

۱۰ اگر $f(x)=\log_x(x+2)$ و $g(x)=\frac{x}{x-2}$ مفروض باشند، دامنهٔ تابع $y=gof(x)$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)-\{1,3\}$ ۲) $(1,+\infty)$

۳) $(0,+\infty)-\{1,2\}$ ۴) $(0,+\infty)-\{2\}$

۱۱ اگر $fog(x) = (x-۱)^۲ + ۲$ و $f(x) = x^۲ + ۲$، حاصل $(f+g)(۲)$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۹

۱۲ اگر $f(x) = \sqrt{x+۲}$ و $g(x) = \sqrt{۳-x}$ مفروض باشند، دامنهٔ تابع $y = gof(x)$ چند عدد صحیح دارد؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۱۳ تابع $f = \{(۲,۱), (۳,۲), (۴,۵), (۱,۷)\}$ و $g = \{(۱,۲), (۳,۱), (a,۳), (b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲) \in fog$ و $gof \in (۴,۱)$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(۳,۴)$
۲) $(۴,۳)$
۳) $(۴,۵)$
۴) $(۵,۴)$

۱

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow D_{fog} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

۲

$$f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 1}$$

۳

$$f(\underbrace{x-2}_{t}) = x^2 + 4x$$

$$x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow f(t) = (t+2)^2 + 4(t+2)$$
$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 4t + 4 + 4t + 8$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 8t + 12$$
$$\xrightarrow{t=2x+1} f(2x+1) = (2x+1)^2 + 8(2x+1) + 12$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 1 + 16x + 8 + 12$$
$$\Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 20x + 21$$

۴

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 2] | \sqrt{4 - 2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$$

۵

$$(gof)(2) - (\frac{f}{g})(0) = -1 - (-2) = 1$$

۶

$$fog(x) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{4 - 3x}{x}} = \frac{x}{4 - 3x}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g \in D_f\} = \{x \in R - \{0\} | \frac{4}{x} \in R - \{3\}\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = R - \{0, \frac{4}{3}\}$$

$$\frac{4}{x} \neq 3 \quad , \quad x \neq \frac{4}{3}$$

۷ گزینه ۴

$$f(x)=t \Rightarrow x-۲=t \Rightarrow x=t+۲$$
$$g(f(x))=x^۲-x \Rightarrow g(t)=(t+۲)^۲-(t+۲)$$
$$g(t)=t^۲+۴t+۴-t-۲=t^۲+۳t+۲$$
$$g(x)=x^۲+۳x+۲$$

۸

$$x=۲: y=fog(۲)=f(۱۱)=۷$$
$$x=۴: y=fog(۴)=f(-۲)=۴$$
$$x=۶: y=fog(۶)=-۵$$
$$x=۳: y=fog(۳)=-۵$$
$$fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$

۹

$$D_f=\mathbb{R}-\{۳\} \qquad D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$
$$\text{تعریف } D_{fog}=\begin{cases} x\in D_g \Rightarrow x\neq ۰ & \text{(۱) رابطه} \\ g(x)\in D_f \Rightarrow \frac{۴}{x}\neq ۳ \Rightarrow x\neq \frac{۴}{۳} & \text{(۲) رابطه} \end{cases}$$
$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}-\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$$

۱۰ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{r} D_f: x+۲>۰ \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=(۰,+\infty)-\{۱\}$$
$$D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$$
$$D_{gof}=\begin{cases} x\in D_f \Rightarrow x\in(۰,+\infty)-\{۱\} & \text{(I)} \\ f(x)\in D_g \Rightarrow \log_x(x+۲)\in\mathbb{R}-\{۲\} \end{cases}$$
$$\log_x(x+۲)\neq ۲ \Rightarrow x+۲\neq x^۲$$
$$x^۲-x-۲\neq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\neq -۱ \\ x\neq ۲ \end{cases} \qquad \text{(II)}$$
$$\text{(I)}\cap\text{(II)} \Rightarrow D_{gof}=(۰,+\infty)-\{۱,۲\}$$

۱۱ گزینه ۱

$$fog(x) = g^{۲} + ۲$$
$$g^{۲} + ۲ = (x-۱)^{۲} + ۲ \Rightarrow g^{۲} = (x-۱)^{۲} \Rightarrow g(x) = |x-۱|$$
$$(f+g)(۲) = f(۲) + g(۲) = ۲^{۲} + ۲ + |۲-۱| = ۷$$

۱۲ گزینه ۲

$$x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_f = [-۲, +\infty)$$
$$۳ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۳]$$
$$D_{gof} = \begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in [-۲, +\infty) & (I) \\ f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{x+۲} \in (-\infty, ۳] \end{cases}$$
$$\sqrt{x+۲} \leq ۳ \Rightarrow x + ۲ \leq ۹ \Rightarrow x \leq ۷ \qquad (II)$$
$$(I) \cap (II) \Rightarrow [-۲, ۷] = D_{gof}$$

اعداد صحیح دامنه : $\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots, ۷\}$

۱۳ گزینه ۳

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴, ۲) \in fog$ و $(۴, ۱) \in gof$ است. $(۴, ۲) \in fog$ است، یعنی $f(g(۴)) = ۲$ و $(۴, ۱) \in gof$ است. یعنی $g(f(۴)) = ۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴)) = ۲$ و $g(f(۴)) = ۱$:

$$f(g(۴)) = ۲ \xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a,۳)\in g} a = ۴$$
$$g(f(۴)) = ۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b,۱)\in g} b = ۵$$

پس دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(۴, ۵)$ درمی‌آید.

Homework (2)

۱ اگر $f=\{(\frac{۱}{۹},-۱),(\frac{۱}{۳},۱),(-\frac{۱}{۴},۳),(\frac{۱}{۴},-۳)\}$ و $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام $fog^{-۱}(a)=-۳$ است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $f(x)=x^۲-[x]$ و $f(af(\sqrt{۵}))=۲$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴

۳) -۶ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=f([x-f(x)])$ باشد، $fog(-\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲

۳) -۴ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

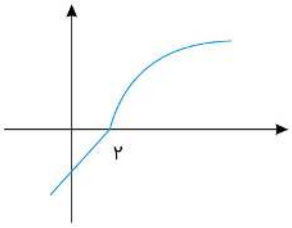
۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$، $x\geq ۱$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۹ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر $f(x) = \left|\frac{۱}{۲}x - ۱\right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+۲))) = ۰$ چند ریشه دارد؟



۱) ۱

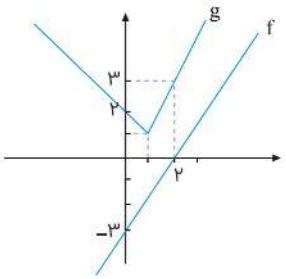
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ باتوجه‌به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gog(۰) \times gof^{-۱}(-۲)$ کدام است؟



۱) ۶

۲) ۴

۳) -۴

۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{۲}x}{۳x - \sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹ اگر $gof(x) = ۵x^{۲} + ۱۱$ و $f(x) = ۲x$ باشد، کمترین مقدار $g(x - ۷)$ چقدر است؟

۱) ۳

۲) ۷

۳) ۹

۴) ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

$$(fog^{-۱})(a) = -۳ \Rightarrow f(g^{-۱}(a)) = -۳ \Rightarrow g^{-۱}(a) = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a = g(\frac{۱}{۴}) = -\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

ابتدا $f(\sqrt{۵})$ را حساب می‌کنیم.

$$f(\sqrt{۵}) = ۵ - [\sqrt{۵}] = ۵ - ۲ = ۳$$

حال از رابطه جایگذاری شده a را به‌دست می‌آوریم.

$$f(۳a) = ۲ \Rightarrow ۹a^{۲} - [۳a] = ۲$$

مسلماً حل معادله بالا با جایگذاری گزینه‌ها راحت‌تر است که اگر گزینه ۲ انتخاب شود.

$$a = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹ \times \frac{۱}{۹} - [۳ \times \frac{-۱}{۳}] = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

$$gof(-\frac{۵}{۳}) = g(f(\frac{-۵}{۳})) = ?$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = ۲[-\frac{۵}{۳}] - (-\frac{۵}{۳}) = ۲(-۲) + \frac{۵}{۳} = -۴ + \frac{۵}{۳} = -\frac{۷}{۳}$$

$$f(-\frac{۷}{۳}) = ۲[-\frac{۷}{۳}] - (-\frac{۷}{۳}) = -۶ + \frac{۷}{۳} = -\frac{۱۱}{۳}$$

$$g(f(-\frac{۵}{۳})) = g(-\frac{۷}{۳}) = f([-\frac{۷}{۳} + f(-\frac{۷}{۳})]) = f([-\frac{۷}{۳} - \frac{۱۱}{۳}])$$

$$= f(-۶) = ۲[-۶] + ۶ = -۱۲ + ۶ = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۴

$$fog(-\frac{۱}{۳}) = f(g(-\frac{۱}{۳}))$$

$$g(-\frac{۱}{۳}) = f([-\frac{۱}{۳} - f(-\frac{۱}{۳})]) = f([-\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳}]) = f([\frac{۳}{۳}]) = f(۱) = ۲$$

$$f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۳} + (-۱) = -\frac{۴}{۳}$$

$$f(g(-\frac{۱}{۳})) = f(۲) = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

$$f(x) = y = (\sqrt{x} - ۱)^۲ \Rightarrow |\sqrt{x} - ۱| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq ۱} \sqrt{x} - ۱ = \sqrt{y}$$

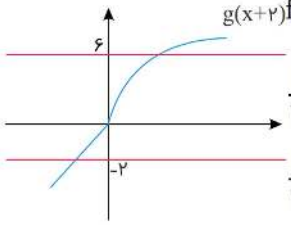
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + ۱ \Rightarrow x = (\sqrt{y} + ۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(x) = f^{-۱}(x) = (\sqrt{x} + ۱)^۲$$

$$(gog)(۱) = g(g(۱)) = g(۴) = ۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲



$$g(x+۲)f(g(x+۲)) = ۲ \Rightarrow |\frac{۱}{۲}g(x+۲) - ۱| = ۲$$

$$\frac{۱}{۲}g(x+۲) - ۱ = ۲ \Rightarrow g(x+۲) = ۶$$

$$\frac{۱}{۲}g(x+۲) - ۱ = -۲ \Rightarrow g(x+۲) = -۲$$

دو ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۲

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳$$
$$gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$، ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(۰) = -۳ \\ f(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{۰ - (-۳)}{۲ - ۰} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-۱}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) \quad (*)$$

حال به بررسی ضابطهٔ g برای $x \leq ۱$ می‌پردازیم:

$$g(۰) = ۲, g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱ - ۲}{۱ - ۰} = -۱$$

$$y - ۱ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲; x \leq ۱$$

$$\Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$

$$gof^{-۱}(-۲) \times gog(۰) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$\text{fofof}(\sqrt{۲}) = \text{f}(\text{f}(\text{f}(\sqrt{۲})))$$

$$\text{f}(\sqrt{۲}) = \frac{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{f}(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \frac{(\sqrt{۲})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}{۳(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

$$\text{f}(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \text{fofof}(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$\text{gof}(x) = \text{g}(\text{f}(x)) = \text{g}(۲x) = ۵x^{۲} + ۱۱$$

$$\Rightarrow \text{g}(x) = ۵(\frac{x}{۲})^{۲} + ۱۱ = \frac{۵}{۴}x^{۲} + ۱۱$$

$$\Rightarrow \text{g}(x - ۷) = \frac{۵}{۴}(x - ۷)^{۲} + ۱۱ \Rightarrow \text{g}(x - ۷) \text{ حداقل} = ۱۱$$

راه‌حل دوم: برای رسیدن از ضابطهٔ $\text{g}(۲x)$ به $\text{g}(x - ۷)$، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار $\text{g}(x - ۷)$ برابر با کمترین مقدار $\text{g}(۲x) = ۵x^{۲} + ۱۱$ است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

فصل چهارم: مثلثات

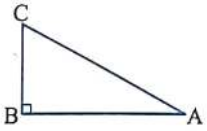
BOX 1: یادآوری و واحدهای اندازه‌گیری زاویه (صفحه ۷۲ تا ۷۶ کتاب درسی)

با تعریف نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین آن‌ها و دایره مثلثاتی در سال گذشته آشنا شده‌اید. این تعاریف و ... به صورت یادآوری گفته می‌شود و سپس واحدهای اندازه‌گیری زاویه تعریف می‌شوند.

الف) یادآوری از مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=۹۰^\circ)$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}}=\frac{BC}{AC} \qquad \cos A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{AC}$$

$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}=\frac{BC}{AB} \qquad \cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}=\frac{AB}{BC}$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر θ یک زاویهٔ دلخواه باشد، آن‌گاه:

۱) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ، $\cos\theta\neq ۰$

۲) $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ، $\sin\theta\neq ۰$

۳) $\tan\theta=\frac{۱}{\cot\theta}$ یا $\tan\theta.\cot\theta=۱$

۴) $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \Rightarrow \begin{cases}\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\\ \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta}\\ \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\end{cases}$

۵) $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

۶) $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$

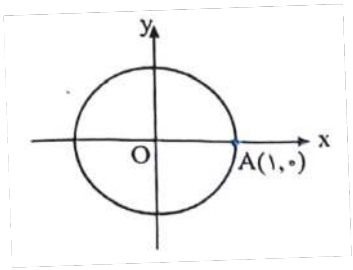
تمرین: اگر $\cos x=\frac{۴}{۵}$ و $\cot x<۰$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی x را به دست آورید.

پاسخ: اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ چهارم باشد، آن‌گاه $\cos x$ عددی مثبت و $\cot x$ عددی منفی است، هم‌چنین در ناحیهٔ چهارم، $\sin x$ عددی منفی است، بنابراین:

$$\sin x=-\sqrt{۱-\cos^۲ x}=-\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=-\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=-\frac{۳}{۵} \Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=-\frac{۳}{۴},\ \cot x=\frac{۱}{\tan x}=-\frac{۴}{۳}$$

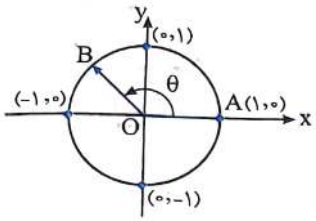
دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای به مرکز $O(0,0)$ و شعاع یک واحد که نقطهٔ $A(1,0)$ مبدأ حرکت آن است را دایرهٔ مثلثاتی می‌گوییم. جهت مثبت در دایرهٔ مثلثاتی خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت است.



ب) واحدهای اندازه‌گیری زاویه

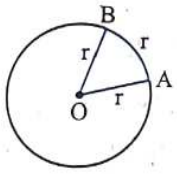
درجه: اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها ۱ درجه است. یک درجه را به صورت 1° نمایش می‌دهیم.



واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه وجود دارد که رادیان نام دارد.

رادیان

دایره‌ای به شعاع r و مرکز O در نظر بگیرید. دو نقطهٔ A و B را روی این دایره طوری مشخص کنید که طول $\overset{\frown}{AB}$ برابر اندازهٔ شعاع دایره، یعنی r شود.



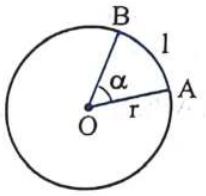
اگر A و B را به مرکز دایره (نقطهٔ O) وصل کنیم، آن‌گاه زاویهٔ AOB را یک رادیان می‌گوییم.

اگر زاویهٔ AOB را به کمک نقاله اندازه‌گیری کنیم، اندازهٔ این زاویه برحسب درجه، تقریباً برابر 57° می‌باشد. بنابراین:

$$\hat{AOB} = \text{۱ رادیان} \simeq 57^\circ$$

رادیان: ۱ رادیان برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی در یک دایره به شعاع r که طول کمان روبه‌روی آن برابر با r است.

اندازهٔ یک زاویهٔ مرکزی برحسب رادیان: نسبت طول کمان روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ شعاع دایره، اندازهٔ آن زاویه برحسب رادیان می‌باشد.



اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\alpha = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{l}{r} \Rightarrow l = \alpha r$$

تذکر: در فرمول $\alpha = \frac{l}{r}$، l و r هم‌واحد هستند.

تمرین: در دایره‌ای به شعاع ۵ متر، توسط زاویهٔ α کمانی به طول ۲ متر ایجاد می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ α را برحسب رادیان و درجه به دست آورید.

پاسخ: طبق فرض، $r = ۵$ و $l = ۲$ می‌باشد، داریم: $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$

چون هر رادیان تقریباً ۵۷° است، پس اندازهٔ α برحسب درجه تقریباً برابر $۰/۴ \times ۵۷^\circ = ۲۲/۸^\circ$ می‌باشد.

تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر

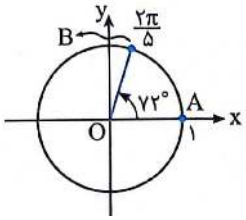
اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویهٔ α برحسب رادیان باشد، آن‌گاه: $\boxed{R = \frac{\pi}{۱۸۰} D}$, $\boxed{D = \frac{۱۸۰ R}{\pi}}$

از روابط اخیر برای تبدیل درجه به رادیان و برعکس استفاده می‌کنیم.

تمرین: زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۵}$ را برحسب درجه و زاویهٔ -۱۲۰° را برحسب رادیان بنویسید و روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

پاسخ: با قراردادن $\frac{۲\pi}{۵}$ به جای R در رابطهٔ $D = \frac{۱۸۰R}{\pi}$، اندازهٔ زاویه برحسب درجه به دست می‌آید:

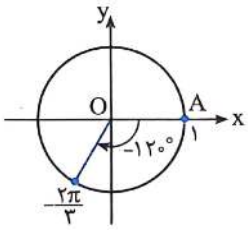
$$D = \frac{۱۸۰ \times \frac{۲\pi}{۵}}{\pi} = ۷۲^\circ$$



اگر اندازهٔ زاویهٔ AOB برابر ۷۲° باشد، آن‌گاه طول کمان AB برابر $\frac{۲\pi}{۵}$ است.

با قراردادن -۱۲۰ به جای D در رابطهٔ $R = \frac{\pi}{۱۸۰} D$، اندازهٔ زاویه برحسب رادیان به دست می‌آید:

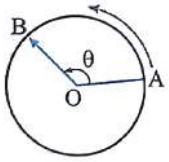
$$R = \frac{\pi}{۱۸۰} \times (-۱۲۰) = -\frac{۲\pi}{۳}$$



(علامت منفی نشان‌دهندهٔ آن است که جهت حرکت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.)

نکته: ۱) برای تبدیل راحت‌تر رادیان به درجه، می‌توان با قراردادن ۱۸۰° به جای π این کار را انجام داد. به عنوان مثال، اگر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب رادیان، $-\frac{\pi}{۶}$ باشد، اندازهٔ این زاویه برحسب درجه برابر $-\frac{۱۸۰^\circ}{۶} = -۳۰^\circ$ می‌باشد.

۲) اگر متحرکی از نقطهٔ A روی دایرهٔ مثلثاتی در جهت مثبت حرکت کند و به مکان B برسد، مسافت طی‌شده توسط متحرک، اندازهٔ زاویهٔ دوران پاره‌خط OA حول O برحسب رادیان می‌باشد.



تذکر: اگر حرکت در جهت منفی باشد، همین مسافت طی‌شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.

اندازهٔ زوایا با استفاده از رابطهٔ $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$ به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.

تمرین: حاصل عبارت $3\cot\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{3\pi}{2}$ را به دست آورید.

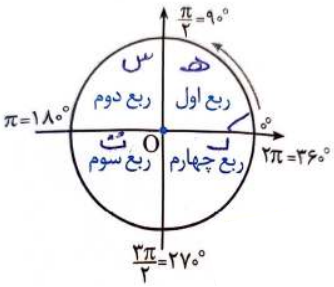
پاسخ:

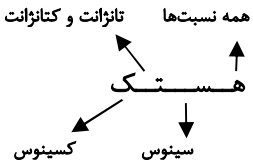
$$\cot\frac{\pi}{4}=1\ ,\ \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\ ,\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت}=3(1)-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)^2=3-\frac{3}{2}+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

علامت مثبت نسبت‌ها در نواحی چهارگانه:







تمرین: علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مشخص کنید.

۱) $\sin(\frac{5\pi}{9})$ ۲) $\cos(\frac{10\pi}{9})$

پاسخ: باید ناحیه‌ای را که انتهای کمان در آن قرار می‌گیرد، مشخص کنیم و سپس با استفاده از جدول، علامت نسبت مثلثاتی را تعیین کنیم:

۱) $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{9}<\pi \xrightarrow{\text{در ناحیهٔ دوم، سینوس عددی مثبت است.}} \sin(\frac{5\pi}{9})>0$

۲) $\pi<\frac{10\pi}{9}<\frac{3\pi}{2} \xrightarrow{\text{در ناحیهٔ سوم، سینوس عددی منفی است.}} \cos(\frac{10\pi}{9})<0$

پرسش‌های تشریحی:

● کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۸۶ کتاب درسی)

۱- دایرهٔ به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع یک واحد را دایرهٔ مثلثاتی می‌گوییم.

۲- $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان برابر -۷۲° است.

۳- اگر $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$ ، آن‌گاه $\tan\alpha < ۰$ است.

۴- در یک مثلث، اندازهٔ دو زاویه $\frac{۵\pi}{۱۸}$ و ۸۰° می‌باشد. این مثلث متساوی‌آلساقین است.

۵- در دایره‌ای به شعاع ۳ متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۹ متر برابر ۲ رادیان است.

۶- انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

● در چهار سوال زیر در جاها یخالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۷- اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم‌دایره برابر است با ..... درجه یا ..... رادیان.

۸- یک رادیان تقریباً برابر ..... درجه است.

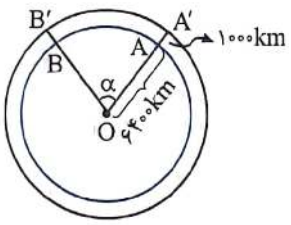
۹- $\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان برابر ..... درجه است.

۱۰- طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۱۰ درجه در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با ..... است. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۱- اگر $\sin x = \frac{۵}{۱۳}$ و $\tan x < ۰$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی x را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۷۸ کتاب درسی)

۱۲- یک ماهوارهٔ مخابراتی را در نظر بگیرید که در فاصلهٔ ۱۰۰۰ کیلومتری سطح کرهٔ زمین به دور آن در حال حرکت است. اگر این ماهواره در دو نقطهٔ A و B روی سطح زمین که با مرکز زمین زاویهٔ α می‌سازند رصد شود، مسافتی را در مدار خود از A' به B' به طول ۸۰۰۰ کیلومتر طی می‌کند. اگر شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، مقدار تقریبی α را بر حسب درجه به دست آورید.

(مشابه فعالیت صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی)

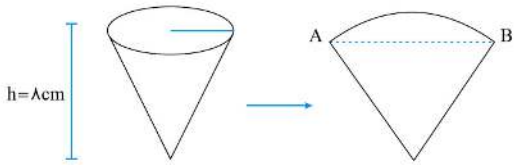


۱۳- علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مشخص کنید.

آ) $\sin(-\frac{۷\pi}{۵})$ ب) $\cot(-\frac{\pi}{۳})$ پ) $\cot(\frac{۱۳\pi}{۱۱})$

Homework

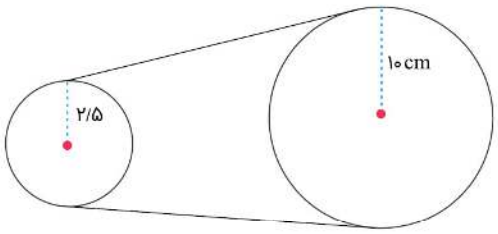
۱ مخروطی به شکل زیر را از کنار آن باز کرده‌ایم. اگر شعاع قاعده مخروط ۶ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازه پاره‌خط AB به‌صورت $y = a \sin b$ است. a و b را بیابید.



به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۲ در دایره‌ای به قطر $8\,cm$ طول کمان روبرو به زاویه 135° را بیابید.

۳ در شکل زیر یک سمت دو قرقره به شعاع‌های $10\,cm$ و $2/5\,cm$ را به هم متصل کرده است. اگر قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{2}$ رادیان دوران کند، قرقره کوچک‌تر چند رادیان دوران می‌کند؟



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۴ مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$، $\frac{11\pi}{12}$ است.

۵ زاویه 135° درجه برابر $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است.

۶ انتهای کمان ۲ رادیان در ناحیه سوم مثلثاتی است.

۷

$\cos 3 > \cos 1$

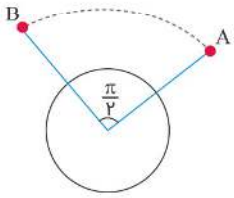
۸ دور پیست دایره‌ای به شعاع ۱ کیلومتر، دوچرخه‌سوار 72° می‌چرخد، چه مسافتی طی می‌شود؟

۹ اگر $\alpha = 12$ رادیان باشد، انتهای کمان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، تفاضل دو زاویه حاده $\frac{\pi}{3}$ است. زاویه کوچک‌تر چند درجه است؟

۱۱ اگر ماهواره‌ای در ارتفاع ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین باشد و $\frac{\pi}{2}$ رادیان در فضا جابه‌جا شود آنگاه مسافت پیموده شده توسط ماهواره چقدر است؟

$(\text{Re}_{\text{زمین}} = 6400\ \text{km})$



۱۲ اگر مجموع دو زاویه ۷۲ و تفاضل دو زاویه $\frac{\pi}{9}$ رادیان باشد. هر زاویه را برحسب رادیان به دست آورید.

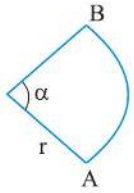
۱۳ در مثلثی که زاویه $\hat{A} = 60^\circ$ و $B = \frac{\pi}{4}$ می‌باشد، زاویه $\hat{C}$ چند رادیان است؟

۱۴ در یک تراکتور شعاع چرخ جلو ۶۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ عقب ۸۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ جلو $\frac{\pi}{8}$ رادیان بچرخد، میزان چرخش چرخ عقب را به‌دست آورید.

۱۵ در مدت ۵۲ دقیقه، عقربه ساعت‌شمار چند رادیان را طی می‌کند؟

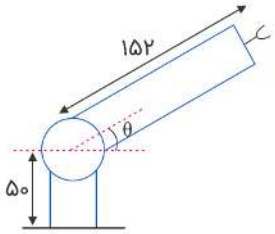
۱۶ اندازه زاویه $\frac{\pi}{20}$ رادیان را به درجه و ۷۲ درجه را به رادیان تبدیل کنید.

۱۷ در قطاع زیر اگر $\alpha = 45^\circ$ و شعاع $r = 20$ باشد، طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ را به دست آورید.



۱۸ زاویهٔ 315° را به رادیان تبدیل نمایید.

۱۹ در شکل زیر، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات تا سطح زمین ۱۲۶ سانتی‌متر می‌باشد، مقدار θ برحسب رادیان کدام است؟ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$



۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{\pi}{4}$

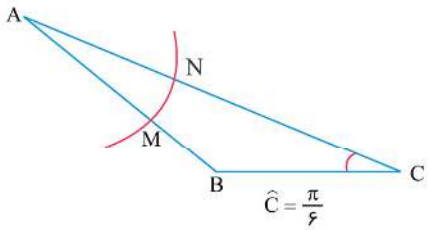
۴) $\frac{\pi}{12}$

۲۰ انتهای کمان ۱۲ رادیان در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

۲۱ در مثلث ABC به رأس A و به شعاع ۵ سانتی‌متر کمانی می‌زنیم، طول کمان MN برابر $\frac{5\pi}{4}$ است. زاویهٔ B در مثلث چند درجه است؟



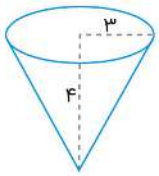
۱) 105°

۲) 125°

۳) 75°

۴) 95°

۲۲ اگر مخروط شکل زیر را گسترده نماییم، زاویهٔ قطاع حاصل کدام است؟



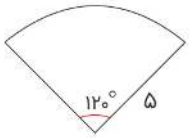
۱) $0/8\pi$

۲) $1/2\pi$

۳) $1/5\pi$

۴) $1/8\pi$

۲۳ اگر زاویهٔ کمان شکل زیر 120° باشد، طول کمان چقدر است؟



۱) $\frac{10\pi}{3}$

۲) $\frac{20\pi}{3}$

۳) $\frac{13\pi}{3}$

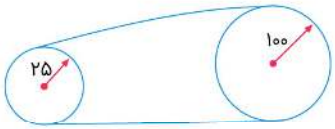
۴) $\frac{5\pi}{3}$

۲۴ زاویهٔ ۱۰ رادیان در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

۲۵ در شکل زیر، یک تسمه دو قرقره به شعاع $100\,cm$ و $25\,cm$ را به هم وصل کرده است. اگر قرقرهٔ بزرگ‌تر 270° بچرخد، قرقرهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



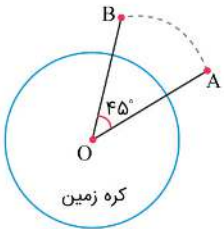
۱) 12π

۲) 10π

۳) 6π

۴) 5π

۲۶ ماهواره‌ای در یک مسیر دایره‌ای در فاصلهٔ ۶۰۰ کیلومتری سطح زمین در حال حرکت است. باتوجه‌به شکل زیر، مسافت پیموده‌شدهٔ ماهواره وقتی از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد چقدر است؟ ($R_e = 6400\,km$ شعاع زمین)



۱) 3500π

۲) 3150π

۳) 2750π

۴) 1750π

۲۷ انتهای کمان ۹ رادیان در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم

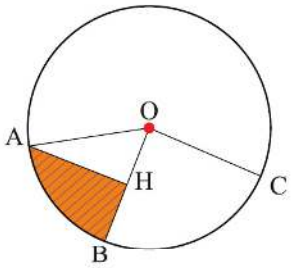
۳) سوم ۴) چهارم

۲۸ شعاع چرخ کوچک یک تراکتور ۶۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ بزرگ آن ۹۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ بزرگ ۱۲ متر را طی کرده باشد، چرخ کوچک چه زاویه‌ای را برحسب رادیان طی می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰

۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۲۹ مطابق شکل زیر، دایره به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث OAH بزرگ‌تر است؟



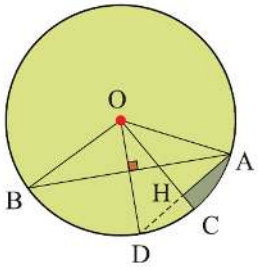
۱) $\frac{۲\pi - ۱}{۳}$

۲) $\frac{۲\pi - ۳}{۶}$

۳) $\frac{\pi - ۱}{۶}$

۴) $\frac{\pi - ۳}{۳}$

۳۰ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π، $A\widehat{O}B = ۱۲۰^\circ$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

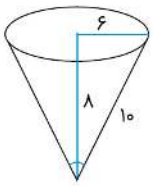
۲) $\sqrt{۲} - \frac{\pi}{۶}$

۳) $\pi - \sqrt{۳}$

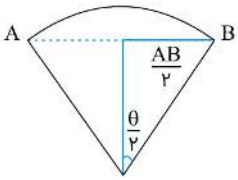
۴) $\pi - \sqrt{۲}$

پاسخ Homework

۱



$$\text{محیط} = ۲\pi r = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi$$
$$r\theta = L \Rightarrow ۱۰\theta = ۱۲\pi \Rightarrow \theta = \frac{۶\pi}{۵}$$



$$\sin\frac{۳\pi}{۵} = \frac{\frac{AB}{۲}}{۱۰} \Rightarrow AB = ۲۰\sin\frac{۳\pi}{۵}$$
$$\Rightarrow a = ۲۰, \quad b = \frac{۳\pi}{۵}$$

۲

$$۲r = ۸ \Rightarrow r = ۴ \text{ شعاع دایره} \qquad ۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}$$
$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow L = r\theta$$
$$L = ۴ \times \frac{۳\pi}{۴} = ۳\pi$$

۳

$$L_۱ = L_۲ \Rightarrow r_۱\theta_۱ = r_۲\theta_۲$$
$$\theta_۱ \times ۲/۵ = \frac{\pi}{۲} \times ۱۰$$
$$\theta_۱ \times \frac{۵}{۲} = \frac{\pi}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow \theta_۱ = ۲\pi$$

۴ درست

$$\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۱۱\pi}{۱۲}=\frac{۱۲\pi}{۱۲}=\pi$$

۵ درست

$$۱۳۵\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۳\pi}{۴}\mathrm{R}$$

۶ نادرست - ۲ رادیان مقداری کمتر از π دارد و در ناحیه دوم قرار دارد.

۷ نادرست - زاویه ۳ رادیان در ناحیه سوم قرار دارد و $\cos$ آن منفی است.

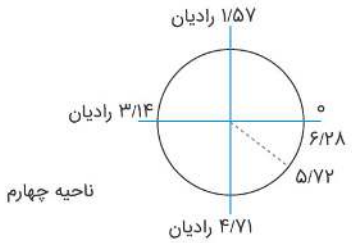
۸

$$\mathrm{L}=\mathrm{r}\theta\Rightarrow\mathrm{L}=\frac{\theta\times\pi\times\mathrm{r}}{۱۸۰}=\frac{۷۲\times۳/۱۴}{۱۸۰}=۱/۲۵۶$$

۹

$$\begin{array}{r|l} ۱۲ & \frac{۶/۲۸}{۱} \\ \frac{۶/۲۸}{۵/۷۲} & \end{array}$$

دور کامل دایره: $۲\pi=۶/۲۸$ رادیان



۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه:

$$\widehat{\mathrm{A}}=۹^\circ$$

$$\widehat{\mathrm{B}}-\widehat{\mathrm{C}}=\frac{\pi}{۳}=۶۰^\circ\Rightarrow\widehat{\mathrm{B}}=\widehat{\mathrm{C}}+۶۰$$

$$\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\mathrm{C}}=۱۸۰$$
$$\Rightarrow ۹۰+\widehat{\mathrm{C}}+۶۰+\widehat{\mathrm{C}}=۱۸۰$$
$$\Rightarrow ۲\widehat{\mathrm{C}}=۳۰\Rightarrow\widehat{\mathrm{C}}=۱۵$$

۱۱

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\ell=\mathrm{r}\cdot\alpha\Rightarrow\ell=(۶۴۰۰+۱۶۰۰)\times\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\ell=۴۰۰۰\pi$$

۱۲

$$۷۲^\circ : \frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۷۲}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۵} \text{ رادیان}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۲\pi}{۵} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{۹} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{۲۳\pi}{۹۰}, \beta = \frac{۱۳\pi}{۹۰}$$

۱۳

$$\hat{A} = ۶۰^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۶۰}{۱۸۰} = \frac{A}{\pi} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{۳}$$

مجموع زوایای داخلی مثلث $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$

$$\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{C} = \pi - \frac{۷\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۱۲}$$

۱۴ مسافت‌های طی شده برابر است با:

$$\ell = r_۱\theta = ۶۰ \times \frac{\pi}{۸} = \frac{۱۵\pi}{۲}$$

$$\ell_۱ = \ell_۲ \Rightarrow \alpha = \frac{\ell_۲}{r_۲} = \frac{\frac{۱۵\pi}{۲}}{۸۰} = \frac{۳\pi}{۳۲} R$$

۱۵ در هر ساعت عقربه ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ از ۳۶۰° را طی می‌کند، پس هر ساعت عقربه ساعت‌شمار ۳۰ درجه حرکت می‌کند پس:

$$۳۰^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶}$$

حال باید ببینیم که ۵۲ دقیقه چه کسری از ساعت است پس:

$$\frac{۵۲'}{۶۰'} \times \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۳}{۱۵} \times \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۳\pi}{۹۰}$$

۱۶

$$\frac{\pi}{۲۰} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۹^\circ$$

$$۷۲ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۵}$$

۱۷

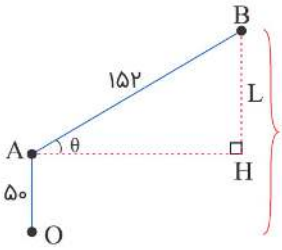
$$\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{۴۵}{۱۸۰} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴} \text{ رادیان}$$

$$l = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow l = r \cdot \alpha \Rightarrow l = ۲۰ \times \frac{\pi}{۴} = ۵\pi$$

۱۸

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۳۱۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳۱۵\pi}{۱۸۰} = \frac{۷\pi}{۴}$$

۱۹ گزینه ۲



$$h\sin\theta = \frac{L}{۱۵۲} \Rightarrow L = ۱۵۲\sin\theta$$

$$h = ۵۰ + L = ۵۰ + ۱۵۲\sin\theta$$

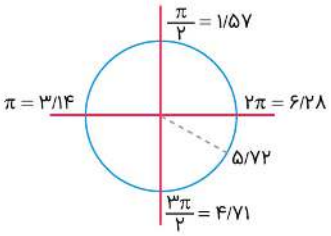
$$۱۲۶ = ۵۰ + ۱۵۲\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۷۶}{۱۵۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$$

۲۰ گزینه ۴

یک دور دایره $۶/۲۸ = ۲\pi$ رادیان است، پس:

$$\begin{array}{r|l} ۱۲ & \frac{۶/۲۸}{۱} \\ \vdots & \\ \hline ۵/۷۲ & \end{array}$$

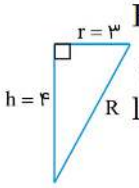
$$۱۲ \text{ رادیان} = \underbrace{۶/۲۸}_{\text{یک دور دایره}} + \underbrace{۵/۷۲}_{\text{ناحیهٔ چهارم}}$$



۲۱ گزینه ۱

$$\overset{\frown}{MN} = l = r.\alpha$$
$$\frac{5\pi}{4} = 5 \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$
$$\hat{C} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 105^\circ$$

۲۲ گزینه ۲

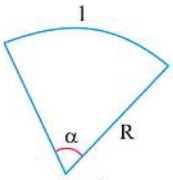


$R^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow R = 5$

طول کمان $l = 2\pi r = 2\pi(3) = 6\pi$

$l = R.\alpha$

$6\pi = 5\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{6\pi}{5} = 1/2\pi$ رادیان

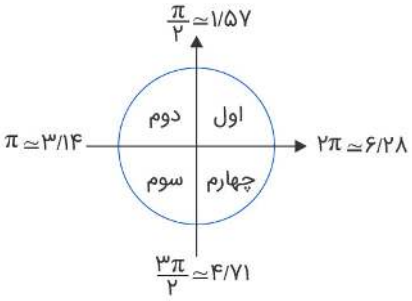


شکل قطاع حاصل از گسترده شدن مخروط

۲۳ گزینه ۱

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$
$$l = r \cdot \theta = 5\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$$

۲۴ گزینه ۳



$$\begin{array}{r|l} ۱۰ & \frac{۶/۲۸}{۱} \\ \hline \vdots & \end{array}$$

۳/۷۲ رادیان

$$\pi = ۳/۱۴ < ۳/۷۲ < \frac{۳\pi}{۲} = ۴/۷۱ \Rightarrow \text{ناحیهٔ سوم}$$

۲۵ گزینه ۳

$$\text{رادیان } \theta_۱ = ۲۷۰^\circ \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\theta_۱}{\pi} \Rightarrow \frac{۲۷۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{\theta_۱}{\pi} \Rightarrow \theta_۱ = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$l_۱ = l_۲$$

$$r_۱\theta_۱ = r_۲\theta_۲$$

$$۱۰۰ \times \frac{۳\pi}{۲} = ۲۵\theta_۱ \Rightarrow \theta_۱ = ۶\pi$$

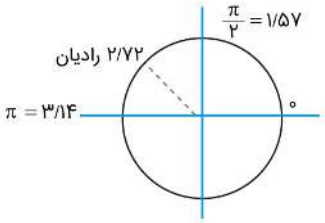
۲۶ گزینه ۴

$$\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴} \text{ رادیان}$$

$$\overset{\frown}{AB} = l = r.\alpha \Rightarrow l = (۶۴۰۰ + ۶۰۰)\frac{\pi}{۴} \Rightarrow l = ۱۷۵۰\pi \,km$$

۲۷ گزینه ۲

یک دور دایره $۶/۲۸ \simeq ۲\pi$ رادیان است، پس:



$$\begin{array}{r|l} ۹ & ۶/۲۸ \\ \hline \vdots & \\ \hline ۲/۷۲ & \end{array}$$

۲۸ گزینه ۲

مسافت طی‌شدهٔ چرخ بزرگ = مسافت طی‌شدهٔ چرخ کوچک

$l = ۱۲۰۰ \Rightarrow r_۱.\alpha = ۱۲۰۰ \Rightarrow ۶۰\alpha = ۱۲۰۰ \Rightarrow \alpha = ۲۰$ رادیان

۲۹ گزینه ۴

$$P = ۲\pi r \Rightarrow ۲\pi r = ۲\pi \Rightarrow r = ۱$$

$$OH = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{A}H = ۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = \frac{۱}{۶}(۲\pi) = \frac{\pi}{۳}$$

$$(\cancel{AH} + \cancel{BH} + \overset{\frown}{AB}) - (OA + \cancel{AH} + \cancel{OH}) = \frac{\pi}{۳} - ۱ = \frac{\pi - ۳}{۳}$$

۳۰ گزینه ۱

مساحت دایره $= \pi r^۲ = \pi \Rightarrow r = ۱$

$|OA| = |OB| = ۱\ ,\ |AH| = \frac{۱}{۲}$

ارتفاع OH در AOD : $|OH| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$A\widehat{O}D = ۶۰^\circ \Rightarrow A\widehat{O}C = ۳۰^\circ \Rightarrow |\overset{\frown}{AC}| = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$

$|HC| = ۱ - |OH| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

محیط مثلث AOH $= |OH| + |HA| + |OA| = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۲}$

محیط قسمت رنگی : $|HC| + |AH| + |\overset{\frown}{AC}| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۶}$

محیط‌ها را از هم کم می‌کنیم : $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

BOX 2: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی (صفحه ۷۷ تا ۸۷ کتاب درسی)

از سال گذشته مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای حادهٔ 30°، 45° و 60° را می‌دانیم. در این BOX می‌خواهیم مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که از مجموع یا تفاضل این زوایا با زوایای مرزی 0°، 90°، 180°، 270° و 360° به دست می‌آید را به دست بیاوریم.

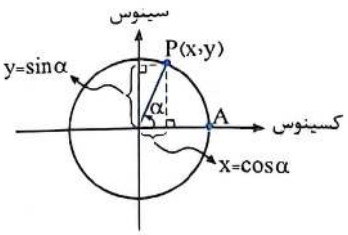
روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

محور سینوس و کسینوس

- در دایرهٔ مثلثاتی، به ازای هر مقدار حقیقی زاویهٔ α، نقطهٔ $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ دوران‌یافتهٔ نقطهٔ $A(1,0)$ تحت دوران به اندازهٔ α حول مبدأ می‌باشد. بنابراین اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن‌گاه:

$$(x,y)=(\cos\alpha,\sin\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$$

پس طول هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی با مقدار کسینوس زاویهٔ موردنظر و عرض آ» نقطه نیز با مقدار سینوس همان زاویه برابر است. بنابراین محور xها، محور کسینوس‌ها و محور yها، محور سینوس‌ها می‌باشد.

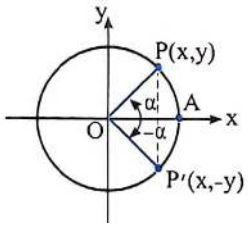


نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

اگر α یک زاویهٔ دلخواه باشد، قرینهٔ آن $-\alpha$ است. به عنوان مثال، قرینهٔ زاویهٔ 60° برابر -60° است.

نکته: قرینهٔ نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور xها، نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است. پس برای قرینه‌کردن نقطه نسبت به محور xها، فقط عرض آن را قرینه می‌کنیم. به عنوان مثال، قرینهٔ نقطه به مختصات $(-3,4)$ نسبت به محور xها، نقطهٔ $(3,4)$ می‌باشد.

اگر $\overline{OA}$ را به اندازهٔ α در جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، تا بر نقطهٔ P' روی دایره منطبق شود، طبق قرارداد زاویهٔ AOP' برابر $-\alpha$ می‌شود.



برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\alpha$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \ , \ \cos(-\alpha=\cos\alpha \ , \ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha \ , \ \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

با دقت در روابط بالا، فقط در نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی حذف می‌شود و در بقیهٔ نسبت‌های مثلثاتی، علامت منفی به پشت نسبت مثلثاتی می‌رود.

تمرین: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{3}$ رادیان را به دست آورید.

پاسخ: $\frac{\pi}{3}$ رادیانب رابر 60° است. برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی $-\frac{\pi}{3}$ رادیان داریم:

$$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \cos(-\frac{\pi}{3}) \overset{\text{منفی حذف می‌شود}}{=\!=} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

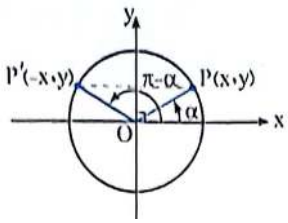
$$\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} \ , \ \cot(-\frac{\pi}{3}) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

تعریف: دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم هرگاه مجموع آن‌ها 180° یا π رادیان شود. به عنوان مثال، دو زاویهٔ 20° و 160° مکمل یکدیگر هستند $(20^\circ + 160^\circ = 180^\circ)$. مکمل زاویهٔ α برابر $180^\circ - \alpha$ یا $\pi - \alpha$ می‌باشد.

نکته: قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی (محور yها)، نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است. پس برای قرینه‌کردن نقطه نسبت به محور yها، فقط طول آن را قرینه می‌کنیم. به عنوان مثال، قرینهٔ نقطهٔ $(3,-1)$ نسبت به محور yها، نقطهٔ $(-3,-1)$ است. اگر $P(x,y)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی و α زاویهٔ بین OP و محور Ox باشد، آن‌گاه زاویهٔ بین OP' و محور Ox که در آن $P'(-x,y)$ می‌باشد، برابر $\pi - \alpha$ خواهد بود و داریم:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \ , \ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \ , \ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \ , \ \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$



برای به دست آوردن مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای 120° ، 135° و 150° از روابط بالا استفاده می‌کنیم.

مثال:
$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نکته: با توجه به روابط بالا، مقدار نسبت مثلثاتی سینوس یک زاویه با مقدار نسبت مثلثاتی سینوس مکمل آن برابر است و برای سه نسبت دیگر این دو مقدار قرینهٔ یکدیگرند و در نتیجه مجموع آن‌ها برابر صفر می‌شود، به عبارت دیگر اگر دو زاویهٔ α و β مکمل باشند، آن‌گاه:

$$\sin\alpha = \sin\beta \ , \ \cos\alpha + \cos\beta = 0 \ , \ \tan\alpha + \tan\beta = 0 \ , \ \cot\alpha + \cot\beta = 0$$

تمرین: حاصل $\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\tan 150^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ: مکمل $\frac{2\pi}{3}$ (یعنی 120°) برابر $\frac{\pi}{3}$ است، بنابراین:

$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

مکمل زاویهٔ 150°، زاویهٔ 30° است. بنابراین:

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\tan 150^\circ = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{3} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان یا 180°

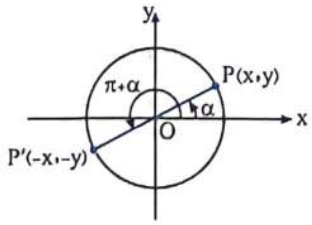
اختلاف دو زاویهٔ 30° و 210° برابر 180° است. در این قسمت با فرمول‌هایی که ارائه می‌کنیم؛ می‌توانیم مقادیر نسبت‌های مثلثاتی 210°،

۲۲۵° و ۲۴۰° را با توجه به مقادیر نسبت‌های مثلثاتی ۳۰° ، ۴۵° و ۶۰° به دست بیاوریم.

نکته: قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است. پس برای قرینه‌کردن نقطه نسبت به مبدأ مختصات، باید طول و عرض آن را قرینه کنیم. به عنوان مثال، قرینهٔ نقطهٔ $(۴,-۶)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $(-۴,۶)$ است.

اختلاف دو زاویهٔ α و $\pi+\alpha$ برابر π است. مطابق شکل زیر، اگر $P(x,y)$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ بین OP' با محور Ox برابر $\pi+\alpha$ است که در آن $P'(-x,-y)$ می‌باشد. داریم:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \ , \ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \ , \ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \ , \ \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$



مثال:

$$\tan ۲۱۰^\circ=\tan(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین: مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را به دست آورید.

پاسخ: اندازهٔ زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان برحسب درجه برابر $\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۴}=۲۲۵^\circ$ است و $۲۲۵^\circ=۱۸۰^\circ+۴۵^\circ$ ، بنابراین از روابط داده‌شده، مقادیر نسبت‌های مثلثاتی $\frac{۵\pi}{۴}$ را به دست می‌آوریم $(\frac{۵\pi}{۴}=\pi+\frac{\pi}{۴})$:

$$\cos(\frac{۵\pi}{۴})=\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \sin(\frac{۵\pi}{۴})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cot(\frac{۵\pi}{۴})=\cot(\pi+\frac{\pi}{۴})=\cot\frac{\pi}{۴}=۱ \qquad \tan(\frac{۵\pi}{۴})=\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

تمرین: اگر $\alpha\in(\frac{\pi}{۲},\pi)$ و $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ باشد، حاصل عبارت $۲\cos(\pi+\alpha)+\tan(-\alpha)$ را به دست آورید.

پاسخ: انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیهٔ دوم $\cos\alpha$ عددی منفی است، بنابراین:

$$\cos\alpha=-\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=-\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}}=-\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}=-\frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۵}{۱۳}}{-\frac{۱۲}{۱۳}}=-\frac{۵}{۱۲}$$

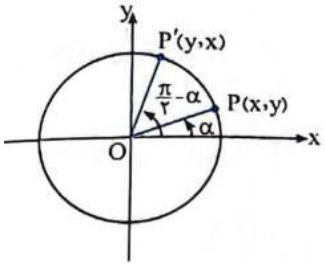
از طرفی $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ و $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ می‌باشند، پس:

$$\text{حاصل عبارت}=۲(-\cos\alpha)-\tan\alpha=۲\times(-(-\frac{۱۲}{۱۳}))-(-\frac{۵}{۱۲})=\frac{۲۴}{۱۳}+\frac{۵}{۱۲}=\frac{۲۸۸+۶۵}{۱۵۶}=\frac{۳۵۳}{۱۵۶}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

تعریف: دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم، هرگاه مجموع آن‌ها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشد. پس متمم زاویهٔ α برابر $۹۰^\circ-\alpha$ یا $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ است.

مثال: متمم زاویهٔ ۱۰° برابر $۹۰^\circ-۱۰^\circ=۸۰^\circ$ می‌باشد.



اگر $P(x,y)$ و زاویهٔ بین OP و محور Ox برابر α باشد، آن‌گاه زاویهٔ بین OP' و محور Ox برابر $\frac{\pi}{2}-\alpha$ است که در آن مختصات نقطهٔ P' به صورت $P'(y,x)$ می‌باشد، داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \ , \ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \ , \ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha \ , \ \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

به عبارت دیگر اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس.

نکته: می‌توان نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α به صورت زیر نوشت:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha \ , \ \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha \ , \ \tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha \ , \ \cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

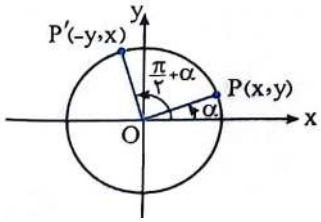
هم‌چنین می‌توان نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α و به صورت زیر نوشت:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha \ , \ \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha \ , \ \tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha \ , \ \cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

اختلاف دو زاویهٔ α و $\frac{\pi}{2}+\alpha$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است. مطابق شکل روبه‌رو، اگر $P(x,y)$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ بین OP' با محور Ox برابر $\frac{\pi}{2}+\alpha$ است که در آن $P'(-y,x)$ می‌باشد و داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha \ , \ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha \ , \ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha \ , \ \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$



از تساوی‌های بالا می‌توان برای به دست آوردن مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای 120° ، 135° و 150° استفاده کرد. اما این کار را قبلاً به کمک روابط در زوایای مکمل هم انجام داده‌ایم.

تمرین: مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای 135° را با استفاده از زوایای با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان به دست آورید.

پاسخ: دو زاویهٔ 135° و 45°، دو زاویه با اختلاف 90° هستند. بنابراین 135° را می‌توان به صورت $135^\circ=90^\circ+45^\circ$ نوشت و از روابط

زیر استفاده کرد:

$$\sin(۱۳۵^\circ)=\sin(۹۰^\circ+۴۵^\circ)=\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cos(۱۳۵^\circ)=\cos(۹۰^\circ+۴۵^\circ)=-\sin ۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(۱۳۵^\circ)=\tan(۹۰^\circ+۴۵^\circ)=-\cot ۴۵^\circ=-۱ \qquad \cot(۱۳۵^\circ)=\cot(۹۰^\circ+۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$$

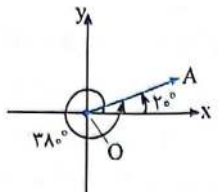
تمرین: اگر $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم باشد، حاصل $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha=-\frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha+۲\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}+۲(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۴}{۵}-\frac{۶}{۵}=-۲$$

دو زاویهٔ هم‌انتها: دو زاویهٔ α و β را هم‌انتها گوییم، هرگاه اضلاع انتهایی آن‌ها بر هم منطبق شود. در شکل مقابل زاویهٔ بین $\overrightarrow{OA}$ و محور Ox برابر ۲۰° است.



اگر $\overrightarrow{OA}$ یک بار به طور کامل حول نقطهٔ O و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، (به اندازهٔ ۳۶۰°، $\overrightarrow{OA}$ را دوران می‌دهیم.) آن‌گاه ضلع انتهایی این زاویه بر روی OA منطبق می‌شود و اندازهٔ این زاویه برابر $۳۶۰^\circ+۲۰^\circ=۳۸۰^\circ$ می‌باشد، اختلاف دو زاویهٔ هم‌انتهای ۳۸۰° و ۲۰° برابر ۳۶۰° است و در حالت کلی داریم:

نکته: اگر دو زاویه هم‌انتها باشند، آن‌گاه اختلاف آن‌ها مضربی صحیح از ۲π رادیان یا ۳۶۰° است. بنابراین:

$$\beta-\alpha=۲k\pi \text{ یا } ۳۶۰^\circ k \ , \ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \text{ و } \beta \text{ دو زاویهٔ هم‌انتها هستند.}$$

پس تمام زاویه‌های هم‌انتها با زاویهٔ α برابر $۳۶۰^\circ k+\alpha$ یا $۲k\pi+\alpha$ می‌باشند که در آن $k\in\mathbb{Z}$ است.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ هم‌انتها با هم برابرند، بنابراین اگر اندازهٔ زاویه از ۳۶۰° بیشتر باشد، می‌توان از نکتهٔ زیر برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه استفاده کرد:

نکته: اگر α و β دو زاویهٔ هم‌انتها باشند $(\beta=۲k\pi\pm\alpha \ , \ k\in\mathbb{Z})$، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها با هم برابرند، یعنی:

$$\sin\beta=\sin(۲k\pi\pm\alpha)\overset{\text{حذف }۲k\pi}{=\!=\!=}\sin(\pm\alpha)=\pm\sin\alpha \qquad \cos\beta=\cos(۲k\pi\pm\alpha)\overset{\text{حذف }۲k\pi}{=\!=\!=}\cos(\pm\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan\beta=\tan(۲k\pi\pm\alpha)\overset{\text{حذف }۲k\pi}{=\!=\!=}\tan(\pm\alpha)=\pm\tan\alpha \qquad \cot\beta=\cot(۲k\pi\pm\alpha)\overset{\text{حذف }۲k\pi}{=\!=\!=}\cot(\pm\alpha)=\pm\cot\alpha$$

با توجه به این‌که $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ و $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$ می‌باشد، می‌توان برای نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت، هر مضربی (فرد یا زوج) از π را حذف کرد، به عبارتی دیگر: $\tan(k\pi\pm\alpha)\overset{\text{حذف }k\pi}{=\!=\!=}\tan(\pm\alpha)$, $\cot(k\pi\pm\alpha)\overset{\text{حذف }k\pi}{=\!=\!=}\cot(\pm\alpha)$

تمرین: حاصل $\sin(۴۵۰^\circ)+\cos(۴۲۰^\circ)-\tan(۷۶۵^\circ)$ را به دست آورید.

پاسخ: زاویهٔ ۴۵۰° و زاویهٔ ۹۰° هم‌انتها هستند، زیرا:

$$۴۵۰^\circ=۱\times۳۶۰^\circ+۹۰^\circ$$

بنابراین:

$$\sin(۴۵۰^\circ)=\sin(۹۰^\circ)=۱ \quad (۱)$$

دو زاویهٔ 420° و 60° هم‌انتها هستند، زیرا: $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$

بنابراین: $\cos(420^\circ) = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (۲)

دو زاویهٔ 765° و 45° هم‌انتها هستند، زیرا: $765^\circ = 2 \times 360^\circ + 45^\circ$

بنابراین: $\tan(765^\circ) = \tan 45^\circ = 1$ (۳)

$(1),(2),(3) \Rightarrow$ حاصل $= 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

تمرین: حاصل $\sqrt{2}\sin(\frac{27\pi}{4}) - \tan(\frac{29\pi}{4})$ را به دست آورید.

پاسخ: با تقسیم ۲۷ و ۲۹ بر ۴، داریم:

$\sin(\frac{27\pi}{4}) = \sin(6\pi + \frac{3\pi}{4}) \overset{\text{حذف } 6\pi}{=\!=} \sin\frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\tan(\frac{29\pi}{4}) = \tan(7\pi + \frac{\pi}{4}) \overset{\text{حذف } 7\pi}{=\!=} \tan\frac{\pi}{4} = 1$ (۲)

$(1),(2) \Rightarrow \sqrt{2}\sin(\frac{27\pi}{4}) - \tan(\frac{29\pi}{4}) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

پرسش‌های تشریحی:

- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- مکمل زاویهٔ -25°، برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۲)

۲- مقدار $\sin 210^\circ$ برابر ..... است.

۳- مقدار $\cos(-\frac{4\pi}{3})$ برابر ..... است.

۴- مقدار $\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ با مقدار ..... برابر است.

- درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های چهار سوال زیر را مشخص کنید.

۵- اگر α و β دو زاویهٔ قرینه باشند، آن‌گاه $\cos\alpha + \cos\beta = 0$

۶- دو زاویهٔ 20° و 160° مکمل یکدیگرند.

۷- $\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$

۸- اگر α و β دو زاویهٔ مکمل باشند، آن‌گاه $\sin\alpha = \sin\beta$

۹- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 210° را به دست آورید.

۱۰- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

آ) $\tan(-\frac{5\pi}{3})$ ب) $\cot 315^\circ$ پ) $\cot(-\frac{\pi}{3})$

۱۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۸۷ کتاب درسی)

آ) $\sin(۳۹۰^\circ)+\tan ۱۳۵^\circ+\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})$ (شهریور ۱۴۰۲)

ب) $\sin ۲۱۰^\circ+\tan ۱۲۰^\circ+\cos\frac{۳\pi}{۴}$ (شهریور ۱۴۰۲)

پ) $\cos(-۳۹۰^\circ)+\tan(۶۰۰^\circ)-\sin(۳۳۰^\circ)$ (خرداد ۱۴۰۲)

ت) $\cos(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(-\frac{۵\pi}{۶})-\tan(\frac{۴\pi}{۳})$ (خرداد ۱۴۰۲)

ث) $\sin ۱۲۰^\circ-\cos ۱۵۰^\circ$ (خرداد ۱۴۰۲)

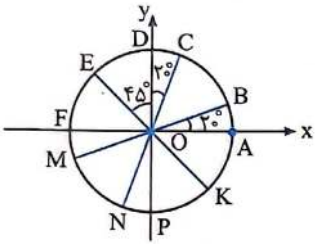
۱۲- اگر $\tan(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\frac{۸}{۱۵}$ و α در ناحیهٔ دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آورید.

۱۳- اگر $\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد، حاصل عددی هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

آ) $\sin(\frac{۱۵\pi}{۲}+\alpha)$ ب) $\tan(\alpha-\frac{۷\pi}{۲})$ پ) $\cot(\frac{۵۵\pi}{۲}+\alpha)$

۱۴- تمام زاویه‌های هم‌انتها با زوایای ۱۵° و $-\frac{\pi}{۹}$ را مشخص کنید.

۱۵- ضلع انتهایی هر یک از زاویه‌های داده‌شده، روی کدام‌یک از پاره‌خط‌های مشخص‌شدهٔ شکل روبه‌رو قرار می‌گیرد؟



آ) $\pi+\frac{\pi}{۹}$

ب) $\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۹}$

پ) $۵\pi-\frac{\pi}{۴}$

ت) $۸\pi-\frac{\pi}{۴}$

ث) $\frac{۹\pi}{۲}-\frac{\pi}{۹}$

ج) ۱۸۲۰°

۱۶- در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید. سپس مقادیر دیگری برای x مشخص کنید. *(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۸۷ کتاب درسی)*

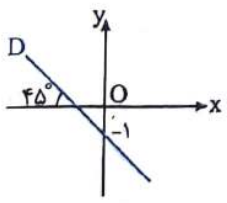
آ) $\sin(x+۲۵^\circ)=\cos x$

ب) $\sin(۲x+۷۰^\circ)=-\sin(x+۱۰^\circ)$

پ) $\cos(۲x+۳۰^\circ)=-\cos x$

۱۷- اگر $\tan\theta=۲$ باشد، مقدار عددی عبارت $\frac{۲\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)+\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{۳\sin(۵\pi+\theta)+\cos(۹\pi-\theta)}$ را به دست آورید.

۱۸- در شکل مقابل، معادلهٔ خط D را بنویسید.



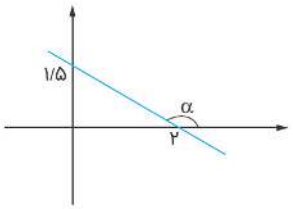
Homework (1)

۱ حاصل عبارت $\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ) - ۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ) - \cos(۲۹۲^\circ)}$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) −۰/۵
۳) −۲/۵
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ در شکل زیر، زاویهٔ α مشخص شده است. مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$
۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$
۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$
۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر $\tan x + \cot x = ۴$ و $۵\pi < ۴x < ۶\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۸\sqrt{۲}$
۲) $۰/۸\sqrt{۲}$
۳) $-\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۶ فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha)=\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)-\sin(\alpha-\pi)}{\left|\tan^{۲}(\alpha)-۱\right|}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴\left(۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۲) $\frac{۴\left(-۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۳) $\frac{۴\left(۲-\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۴) $-\frac{۴\left(۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ حاصل عبارت $\tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵)-\sin(۱۰۹۵)\cos(۲۵۵)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند.)

۱) $\sin^{۲}(۱۵)$
۲) $\cos^{۲}(۱۵)$
۳) $-\sin^{۲}(۱۵)$
۴) $-\cos^{۲}(۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ)-۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ)-\cos(۲۹۲^\circ)}=\frac{۳\cos(۲۷۰^\circ-۲۲^\circ)-۲\sin(۱۸۰^\circ-۲۲^\circ)}{\sin(۱۸۰^\circ+۲۲^\circ)-\cos(۲۷۰^\circ+۲۲^\circ)}$$

$$=\frac{-۳\sin ۲۲^\circ-۲\sin ۲۲^\circ}{-\sin ۲۲^\circ-\sin ۲۲^\circ}=\frac{۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{۱/۵}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

$$\tan x+\cot x=-۳\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-۳$$

$$\Rightarrow\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}=-۳\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{-۱}{۳}$$

$$(\sin x+\cos x)^۲=۱+۲\sin x\cos x=۱+(۲\times(\frac{-۱}{۳}))=\frac{۱}{۳}$$

$$(\sin x+\cos x)=\pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}\xrightarrow{\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi}\sin x+\cos x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{\sin^۳x+\cos^۳x}=\frac{۱}{(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{۱}{(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})\times\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۴}\sqrt{۳}=-۰/۷۵\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۱

$$\tan x + \cot x = ۴ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = ۴$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = ۴ \Rightarrow \sin x . \cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$۵\pi < ۴x < ۶\pi \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sin x < \cos x < ۰ \Rightarrow \sin x - \cos x < ۰$$

$$(\sin x - \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲ \sin x \cos x$$
$$= ۱ - ۲ \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = -\sqrt{۱ - ۲ \sin x \cos x} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\sin^۲ x + \cos^۲ x + \sin x \cos x)$$

$$= -\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ + \frac{۱}{۴}) = -\frac{۵}{۴\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x} = -۰/۸\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۲

$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$
$$= \tan(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \tan(۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ)$$
$$= \tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$
$$= (-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ)) + (-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$
$$= (-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

$\cos\alpha = \frac{۲}{۳}$ و α در ناحیهٔ چهارم است:

$$\sin\alpha = -\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۳} \quad , \quad \tan^۲\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{\frac{۵}{۹}}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲}) - \sin(\alpha-\pi)}{|\tan^۲\alpha - ۱|} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\frac{۵}{۴}-۱} = \frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ گزینه ۴

$$\tan(۲۸۵^\circ) = \tan(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \tan(۱۵^\circ)$$

$$\sin(۱۰۹۵^\circ) = \sin(۱۰۸۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$$

$$\cos(۲۵۵^\circ) = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin(۱۵^\circ)$$

$$\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ) - \sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)\tan(۱۵^\circ) + \sin^۲(۱۵^\circ)$$

$$= -۱ + \sin^۲(۱۵^\circ) = -\cos^۲(۱۵^\circ)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Homework (2)

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

۱ $\sin\frac{\pi}{۸}\times\cos\frac{\pi}{۸}$

۲ $\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}$

۳ $\tan(-۸۴۰^\circ)$

۴ $\cos ۱۵^\circ$

۵ مقدار عددی $A=۲\sin(-۱۲۰^\circ)+۳\tan\frac{۱۱\pi}{۶}$ را بیابید.

۶ حاصل عبارت $\frac{\sin ۳۰۰+\cos ۲۱۰}{\tan ۴۵-\cot ۱۳۵}$ را به‌دست آورید.

۷ حاصل عبارت $۲\sin(۶۳۰^\circ)+۳\tan(-۵۴۰^\circ)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) -۲ ۴) -۵

۸ حاصل $\frac{\tan^{۲}(\frac{\pi}{۶})+\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})}{\cot^{۲}(\frac{\pi}{۴})-\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳})}+\cos^{۲}\frac{۵\pi}{۱۲}+\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۹}$ ۲) $\frac{۲۰}{۹}$

۳) $\frac{۱۷}{۹}$ ۴) $\frac{۲۲}{۹}$

۹ اگر $\tan\alpha=-۲$ و $\cos\alpha>۰$ باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

۱۰ اگر α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = \frac{-۲}{\sqrt{۵}}$، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۱ اگر $\frac{۵\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۶}$ باشد و $\sin x = \frac{۲m-۱}{۲}$، آنگاه حدود m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} < m \leq ۱$ ۲) $۱ < m \leq ۲$

۳) $\frac{۱}{۲} < m \leq \frac{۵}{۲}$ ۴) $۱ < m \leq \frac{۳}{۲}$

۱۲ حاصل $A = \cos\frac{۱۴\pi}{۱۷} + \cos\frac{۱۰\pi}{۱۷} + \cos\frac{۷\pi}{۱۷} + \cos\frac{۳\pi}{۱۷}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳ اگر $\tan\theta = ۰/۲۵$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta) - \cos(\pi+\theta)}{\cos(\pi-\theta) - \sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)}$ کدام است؟

۱) ۰/۳۱۵ ۲) $-۰/۳۷۵$

۳) $-۰/۶۲۵$ ۴) ۰/۶۲۵

۱۴ در معادلهٔ $\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+x) + \cos(\frac{\pi}{۲}-x)}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x) - ۲\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)} = ۲$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$

۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

۱۵ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۴}) - \cos(\frac{۵\pi}{۳})}{۲\sqrt{۲}\sin(\frac{-۳\pi}{۴}) + \tan(\frac{-۳\pi}{۴})}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۶ حاصل $\sin ۳۳۰^\circ \times \tan ۳۰۰^\circ + \cos ۱۵۰^\circ$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۱۷ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $-\frac{۹}{۱۶}$

۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۸ حاصل عبارت $\sin ۵۷۰^\circ - \cot \frac{۷\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۹ حاصل $\tan^۲ \frac{۱۰\pi}{۳} + \cot(\frac{۹\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۰ حاصل $\frac{\tan^۲(\frac{\pi}{۶}) + \sin^۲(\frac{\pi}{۴})}{\cot^۲(\frac{\pi}{۴}) - \cos^۲(\frac{\pi}{۳})} + \frac{۲}{۹}\sin(\frac{۳\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۱۲}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۲۱ اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) - \sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi - \theta) - \sin(\frac{\pi}{۲} + \theta)}$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۲۲ حاصل $\frac{\sqrt{۲}\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos^۲\frac{۵\pi}{۶}}{\sqrt{۲}\sin(\frac{-۳\pi}{۴}) + \tan^۲(\frac{-۴\pi}{۳})}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۲۳ حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ Homework (2)

۱

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۸}} \frac{۱}{۲}\sin ۲\frac{\pi}{۸} = \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۲

$\frac{\pi}{۸}$ و $\frac{۳\pi}{۸}$ دو زاویه متمم یکدیگرند، درنتیجه: $\sin\frac{\pi}{۸} = \cos\frac{۳\pi}{۸}$

$$\cos^۲\frac{۳\pi}{۸} + \sin^۲\frac{۳\pi}{۸} = ۱$$

۳

$$\tan(-۸۴۰) = -\tan(۹۰۰ - ۶۰^\circ) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

۴

$$\begin{aligned}\cos(۴۵ - ۳۰) &= \cos ۴۵ \times \cos ۳۰ - \sin ۴۵ \times \sin ۳۰ \\ &= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}\end{aligned}$$

۵

$$A = -۲\sin ۱۲۰ + \sqrt{۳}\tan\frac{۱۱\pi}{۶}$$

$$\sin ۱۲۰ = \sin(۱۸۰ - ۶۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۶} = \tan(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$A = -۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + ۳(\frac{-\sqrt{۳}}{۳}) = -۲\sqrt{۳}$$

۶

$$\sin ۳۰۰ = \sin(۲\pi - ۶۰) = -\sin ۶۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰ = \cos(\pi + ۳۰) = -\cos ۳۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۵ = ۱$$

$$\cot ۱۳۵ = \cot(\pi - ۴۵) = -\cot ۴۵ = -۱$$

$$\frac{\sin ۳۰۰ + \cos ۲۱۰}{\tan ۴۵ - \cot ۱۳۵} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲} + (-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{۱ - (-۱)} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۷ گزینه ۳

$$\sin ۶۳۰^\circ = \sin(۲\pi + \frac{۳\pi}{۲}) = \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱$$

$$\tan ۵۴۰^\circ = \tan(۲\pi + \pi) = \tan\pi = ۰$$

$$\text{حاصل عبارت} = ۲\sin(۶۳۰^\circ) - ۳\tan(۵۴۰^\circ) = ۲(-۱) - ۳(۰) = -۲$$

۸ گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\cos^۲\frac{۵\pi}{۱۲} + \sin^۲\frac{۵\pi}{۱۲} = ۱$$

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{(۱)^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲} + ۱ = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۴}} + ۱$$

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}} + ۱ = \frac{۱۰}{۹} + ۱ = \frac{۱۹}{۹}$$

۹ گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix}\tan\alpha = -۲ < ۰ \\ \cos\alpha > ۰\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد}$$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + (-۲)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۵ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۵} \Rightarrow |\cos\alpha| = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\cos\alpha > ۰} \cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

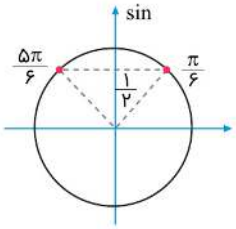
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow -۲ = \frac{\sin\alpha}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۰ گزینه ۲

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۴}{۵}}$$

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۵}{۴}\Rightarrow \cot^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\xrightarrow[\cot\alpha>۰]{\alpha\text{ ناحیهٔ سوم}}\cot\alpha=\frac{۱}{۲}$$

۱۱ گزینه ۴



$$\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\sin x\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۲m-۱}{۲}\le ۱$$

$$\Rightarrow ۱<۲m-۱\le ۲\Rightarrow ۲<۲m\le ۳\Rightarrow ۱<m\le\frac{۳}{۲}$$

۱۲ گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\hat\alpha+\hat\beta=\pi\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۳\pi}{۱۷}+\frac{۱۴\pi}{۱۷}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۱۷}+\cos\frac{۱۴\pi}{۱۷}=۰\\ \frac{۷\pi}{۱۷}+\frac{۱۰\pi}{۱۷}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۷\pi}{۱۷}+\cos\frac{۱۰\pi}{۱۷}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow A=۰$$

۱۳ گزینه ۳

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{-\cos\theta-\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{-۲\cos\theta}=-\frac{۱}{۲}\tan\theta-\frac{۱}{۲}$$

$$=-\frac{۱}{۲}(۰/۲۵)-\frac{۱}{۲}=-۰/۶۲۵$$

۱۴ گزینه ۳

$$\frac{\cos x+\sin x}{-\cos x-۲\sin x}=۲\Rightarrow -۲\cos x-۴\sin x=\cos x+\sin x$$
$$-۵\sin x=۳\cos x\Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۵}\cos x$$

$$\tan x=-\frac{۳}{۵}$$

۱۵ گزینه ۴

$$\sin\frac{۳\pi}{۴}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$
$$\tan(-\frac{۳\pi}{۴})=-\tan\frac{۳\pi}{۴}=-\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})=+\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})+۱}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{-۲+۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۶ گزینه ۴

$$\sin ۳۳۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)=-\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$
$$\tan ۳۰۰^\circ=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$
$$\cos ۱۵۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{حاصل عبارت}=(-\frac{۱}{۲})(-\sqrt{۳})+(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰$$

۱۷ گزینه ۱

گام اول

باتوجه‌به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می‌کنیم تمام زوایا را برحسب زاویهٔ ۱۵° به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵^\circ)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

برای اینکه در کسر داده‌شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۱۸ گزینه ۲

$$\sin(۵۷۰^\circ)=\sin(۳۶۰^\circ+۲۱۰^\circ)=\sin ۲۱۰^\circ=\sin(\pi+۳۰^\circ)=-\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۴}=\cot(\frac{۸\pi-\pi}{۴})=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin ۵۷۰^\circ-\cot\frac{۷\pi}{۴}=-\frac{۱}{۲}-(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

۱۹ گزینه ۳

$$\cot(\frac{۹\pi}{۴})=\cot(۲\pi+\frac{\pi}{۴})=\cot\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\tan\frac{۱۰\pi}{۳}=\tan(\frac{۹\pi+\pi}{۳})=\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$\text{حاصل عبارت}=۱+(\sqrt{۳})^۲=۴$$

۲۰ گزینه ۴

$$\frac{۲}{۹}(-۱)+\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{(۱)^۲-(\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{-۲}{۹}+\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{-۲}{۹}+\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{-۲}{۹}+\frac{۱۰}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

۲۱ گزینه ۲

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{-\cos\theta + \sin\theta}{-\cos\theta - \cos\theta} = \frac{-\cos\theta + \sin\theta}{-۲\cos\theta}$$
$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\tan\theta = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}(۰/۲) = ۰/۵ - ۰/۱ = ۰/۴$$

۲۲ گزینه ۱

$$\sin\frac{۳\pi}{۴} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin(-\frac{۳\pi}{۴}) = -\sin\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\tan(-\frac{۴\pi}{۳}) = -\tan\frac{۴\pi}{۳} = -\tan(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

$$\text{حاصل} = \frac{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) - (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}{\sqrt{۲}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) + (-\sqrt{۳})^{۲}} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{-۱ + ۳} = \frac{\frac{۱}{۴}}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

۲۳ گزینه ۲

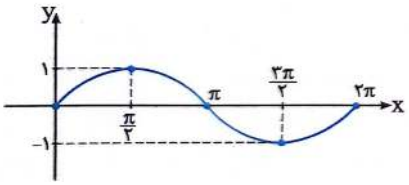
$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$
$$= \tan(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \tan(۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ)$$
$$= \tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$
$$= (-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ)) + (-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$
$$= (-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$

BOX 3: توابع مثلثاتی (صفحه ۸۸ تا ۹۴ کتاب درسی)

توابعی نظیر تابع سینوسی با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوسی با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این BOX با آن‌ها آشنا می‌شوید. هم‌چنین برخی دیگر از نمودار توابع مثلثاتی که به کمک انتقال، قرینه و ... از این دو تابع به دست می‌آیند را رسم می‌کنیم.

الف) رسم تابع سینوس

- نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت مقابل است:



- با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:

۱) در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$، مقدار تابع از صفر به ۱ افزایش می‌یابد.

۲) در بازهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$، مقدار تابع از ۱ به ۱- کاهش می‌یابد.

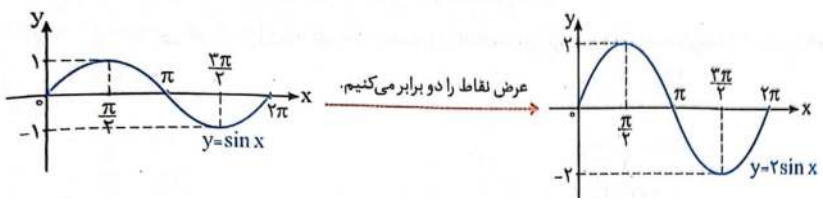
۳) در بازهٔ $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$، مقدار تابع از ۱- به صفر افزایش می‌یابد.

- تغییرات مقدار $\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

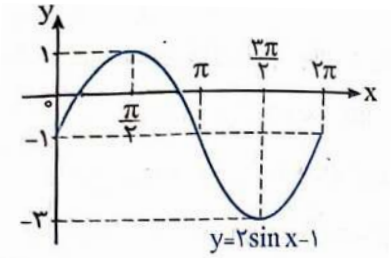
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	۰	۱	۰	-۱	۰
تغییرات	↗ افزایش	↘ کاهش	↘ کاهش	↗ افزایش	

تمرین: نمودار تابع $y=2\sin x-1$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y=2\sin x-1$، ابتدا در نمودار $y=\sin x$، عرض هر نقطه را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y=2\sin x$ به دست آید:

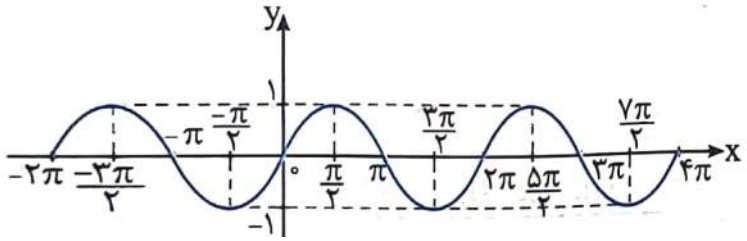


نمودار $y=2\sin x$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=2\sin x-1$ به دست آید:



- با توجه به تساوی $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ، مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند. پس نمودار تابع

$y=\sin x$ در بازه‌های $[0,2\pi]$ ، $[2\pi,4\pi]$ و ... یکسان است. هم‌چنین با توجه به تساوی $\sin(x-2\pi)=\sin x$ ، مقدار تابع سینوس با کم‌کردن 2π رادیان از کمان آن تغییر نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌های $[0,2\pi]$ ، $[-2\pi,0]$ ، $[-4\pi,-2\pi]$ و ... یکسان است. پس نمودار $y=\sin x$ در بازه‌های $[2k\pi,(2k+2)\pi]$ ، $k\in\mathbb{Z}$ یکسان است. نمودار تابع در بازهٔ $[-2\pi,4\pi]$ به صورت زیر است:



● با توجه به نمودار کلی $y=\sin x$ ، می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

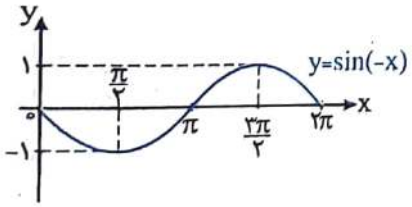
۱) دامنهٔ تابع $f(x)=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد: $f(x)=\sin x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[-1,1]$

۲) حداکثر مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های $\ldots,-\frac{7\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول‌های $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۳) حداقل مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -1 است و در نقاطی به طول‌های $\ldots,-\frac{5\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\ldots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول‌های $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۴) مقدار تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=k\pi$ برابر صفر است، بنابراین طول نقاط تلاقی نمودار این تابع با محور xها از تساوی $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=k\pi$ به دست می‌آید.

نکته: می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ ، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم. بنابراین نمودار $g(x)=-\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت مقابل است:

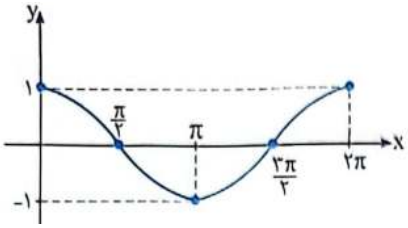


● با مقایسهٔ نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=-\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ ، هر نقطهٔ ماکزیمم در f، نقطهٔ مینیمم در g می‌شود و هم‌چنین هر نقطهٔ مینیمم در f، نقطهٔ ماکزیمم در g می‌شود. هم‌چنین با مقایسهٔ دو نمودار مشخص می‌شود که:

۱) تابع $f(x)=\sin x$ در سمت راست محور yها ابتدا دارای ماکزیمم و سپس مینیمم است.

۲) تابع $g(x)=-\sin x$ در سمت راست محور yها ابتدا دارای مینیمم و سپس ماکزیمم است.

ب) رسم تابع کسینوس



- نمودار تابع $y=\cos x$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$، به صورت مقابل است:
- با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ نکات زیر را می‌توان نوشت:

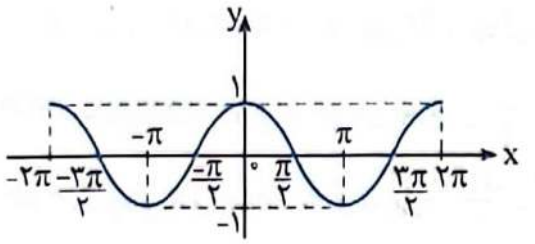
۱) در بازهٔ $[0,\pi]$ مقدار تابع از ۱ به -1 کاهش می‌یابد.

۲) در بازهٔ $[\pi,2\pi]$، مقدار تابع از -1 به ۱ افزایش می‌یابد.

- تغییرات مقدار $\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-1	۰	۱
تغییرات	↘ کاهش	↘ کاهش	↗ افزایش	↗ افزایش	

- با توجه به نمودار کلی $y=\cos x$ ، نکات زیر را می‌توان در نظر گرفت:



۱) دامنهٔ تابع $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد: $f(x)=\cos x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[-1,1]$

تمرین: کم‌ترین و بیشترین مقدار تابع $f(x)=-3\cos x+5$ را به دست آورید.

پاسخ: از نامساوی $-1\le\cos x\le 1$ و خواص نامساوی‌ها، حدود $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$-1\le\cos x\le 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3\le -3\cos x\le 3 \xrightarrow{+5} 2\le -3\cos x+5\le 8 \Rightarrow 2\le f(x)\le 8$$

بنابراین کم‌ترین مقدار تابع f برابر ۲ و بیشترین مقدار تابع برابر ۸ می‌باشد.

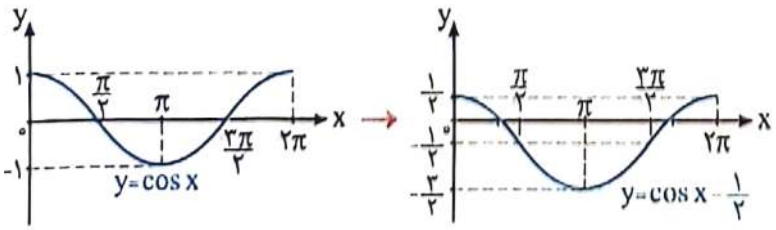
۲) حداکثر مقدار تابع $y=\cos x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های $\dots,-2\pi,0,2\pi,\dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی تابع $y=\cos x$ در نقاطی به طول‌های $x=2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۳) حداقل مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است و در نقاطی به طول‌های $x=2k\pi+\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

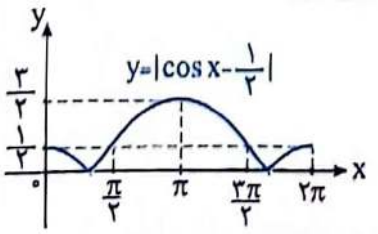
۴) مقدار تابع $y=\cos x$ در نقاطی به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ برابر صفر است. در واقع طول نقاط تلاقی نمودار $y=\cos x$ با محور xها از تساوی $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

تمرین: نمودار تابع $y=|\cos x-\frac{1}{2}|$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y=\cos x-\frac{1}{2}$ را با انتقال نمودار تابع $y=\cos x$ به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین رسم می‌کنیم:



قسمتی از نمودار تابع $y=\cos x-\frac{1}{2}$ را که پایین محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار به دست آمده نمودار تابع $y=|\cos x-\frac{1}{2}|$ می‌باشد:



نکته: ۱) همانند توابع سینوسی با قرینه‌کردن نمودار توابع کسینوسی نسبت به محور xها، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم دو تابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=-\cos x$ جابه‌جا می‌شوند.

۲) نمودار تابع $y=\cos x$ را به کمک انتقال نمودار $y=\sin x$ می‌توان رسم کرد. با توجه به تساوی $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$، اگر نمودار $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\cos x$ به دست می‌آید و هم‌چنین می‌توان نمودار $y=\sin x$ را به کمک انتقال نمودار $y=\cos x$ رسم کرد.

پرسش‌های تشریحی:

● با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از گزاره‌های سوالات زیر درست و کدام نادرست می‌باشند. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۹۴ کتاب درسی)

۱- دامنهٔ تابع $y = \sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد.

۲- تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، محور xها را قطع می‌کند.

۳- نمودا رتابع $y = \cos x$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ در یک نقطه دارای کم‌ترین مقدار و در یک نقطه دارای بیشترین مقدار است.

۴- نمودار تابع $y = \cos x$ در بازهٔ $[-2\pi, 0]$ در نقطه‌ای به طول $x = -\pi$ ، کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند.

۵- برای رسم نمودار $y = \sin(-x)$ ، کافی است نمودار $y = \sin x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۶- نمودار تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ دارای بیشترین مقدار است.

۷- کم‌ترین مقدار تابع $y = 3\cos x - 2$ برابر یک است.

۸- نمودار تابع $y = 4\sin x + 1$، از نقطهٔ $(\frac{\pi}{6}, 3)$ می‌گذرد.

● در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۹- حداکثر مقدار تابع کسینوس برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۲)

۱۰- حداکثر مقدار تابع $f(x) = \cos x$ برابر با ..... است که در نقاط به طول ..... حاصل می‌شود. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۱- نمودار تابع زیر را با توجه به نمودار $y = \sin x$ در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$y = \sin x + 1 \ , \ x \in [-\pi, \pi]$ (شهریور ۱۴۰۲)

۱۲- نمودار تابع زیر را با توجه به نمودار $y = \cos x$ در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$y = \cos(x) - 1 \ , \ x \in [0, 2\pi]$ (شهریور ۱۴۰۲)

۱۳- نمودار تابع $y = -\sin x + 1$ را در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکزیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

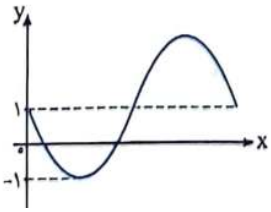
۱۴- نمودار تابع $y = ۲\sin x - ۱$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

۱۵- بیشترین و کم‌ترین مقدار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ) $y = ۴\cos(x + \frac{\pi}{۶}) - ۱$

ب) $y = |\cos x| + ۲$

۱۶- نمودار تابع $y = a\sin x + b$ به صورت مقابل است. مقادیر a و b را به دست آورید.



۱۷- نمودار تابع $f(x) = a\cos(x + \frac{\pi}{۶}) + b$ از نقطه‌های $(\frac{-\pi}{۶},۲)$ و $(\frac{۵\pi}{۶},۰)$ می‌گذرد. مقادیر a و b را به دست آورید.

Homework

۱ اگر $-\frac{\pi}{۱۲} < x < \frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\sin ۲x = \frac{m-۱}{۴}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۱, ۵)$
۲) $(-۱, ۵]$
۳) $(-۱, ۱)$
۴) $(-۱, ۱]$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = -|\sin(x - \frac{\pi}{۴})| \qquad x \in \left[-\frac{۷\pi}{۴}, \frac{۹\pi}{۴}\right]$$

۳ نمودار $y = ۱ - ۲\sin x$ را در $[۰, ۲\pi]$ رسم نمایید.

۴ هریک از نمودارهای زیر را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{۴}) + ۱$$

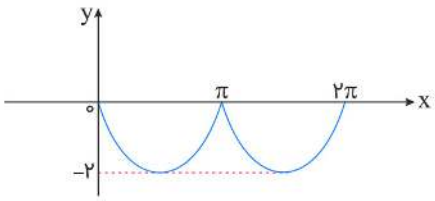
ب

$$y = ۱ - \cos x$$

۵ برد تابع $f(x) = ۳\sin(x + \frac{\pi}{۲}) - ۱$ کدام است؟

۱) $[-۴ , -۲]$
۲) $[۲ , ۴]$
۳) $[-۲ , ۴]$
۴) $[-۴ , ۲]$

۶ کدام ضابطهٔ تابع، مربوط به نمودار زیر است؟



۱) $y = -۲\sin x$
۲) $y = -\sin x$
۳) $y = |۲\sin x|$
۴) $y = -|۲\sin x|$

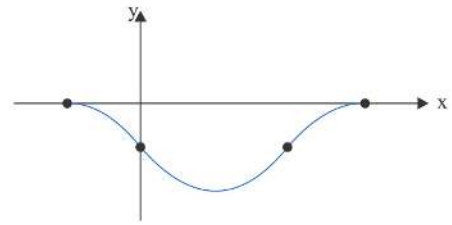
۷ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $[\cos x] + [\sin x]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

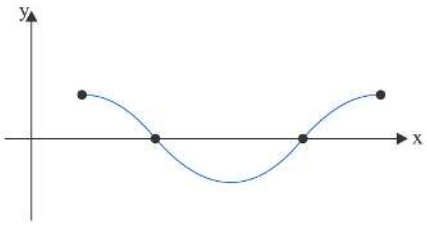
۱) ۲
۲) ۱
۳) -۲
۴) -۱

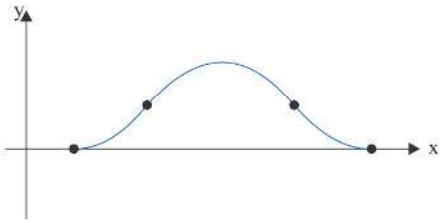
۸ بُرد تابع $y = ۲\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) + ۱$ از چند عدد صحیح تشکیل شده است؟

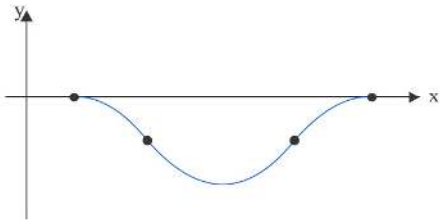
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۹ قطعه‌ای از نمودار $y = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰ در عبارت "حداقل مقدار تابع سینوس در نقاط به طول ..... و حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقاط به طول ..... (که $k \in \mathbb{Z}$) به دست می‌آید" جاهای خالی به ترتیب به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $۲k\pi$
۲) $۲k\pi$ و $۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$
۳) $۲k\pi$ و $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$
۴) $۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$ و $۲k\pi$

۱۱ نمودارهای $y = \sin(x - \frac{\pi}{۳})$ و $y = \sin x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۲ برد تابع $y = ۲\sin x + ۱$ کدام است؟

۱) $[۰, ۳]$
۲) $[-۱, ۳]$
۳) $[-۳, ۱]$
۴) $[-۱, ۲]$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

۱۳ مکمل زاویهٔ $\frac{\pi}{۱۲}$، $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ است.

۱۴ انتهای زاویهٔ ۳ رادیان در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد.

۱۵ اگر زاویهٔ بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازهٔ قاعدهٔ این مثلث کوچک‌تر از اندازهٔ هریک از دو ساق‌های آن است.

۱۶ کمترین مقدار $\sin x$ برابر -۱ است که از $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

۱۷ باتوجه‌به نمودار $y = \cos x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، نمودار $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) + ۱$ را رسم کنید.

۱۸ نمودار تابع زیر را رسم کنید. (در $[۰, ۲\pi]$)

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$$

۱۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف دامنهٔ $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر ..... و برد آن‌ها برابر ..... است.

ب وقتی می‌نویسیم $\sin x$، x برحسب ..... است.

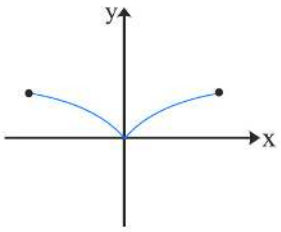
پ اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد، آنگاه $\cos x$ بین ..... است.

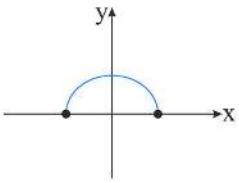
۲۰ برد تابع $f(x) = \frac{۲}{\sin(x + \pi) + ۲}$ کدام است؟

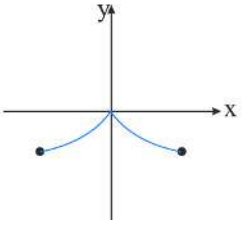
۱) $[\frac{۱}{۳}, ۱]$ ۲) $[۱, ۲]$

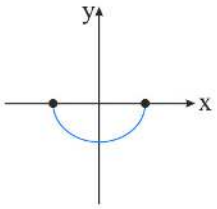
۳) $[\frac{۲}{۳}, ۱]$ ۴) $[\frac{۲}{۳}, ۲]$

۲۱ نمودار تابع $f(x) = -\sin|x|$ در بازه $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۲۲ برد تابع $f(x) = ۲\cos^۲ x - ۱$ کدام است؟

۱) $[۱, ۲]$
۲) $[-۱, ۰]$
۳) $[-۱, ۱]$
۴) $[-۳, ۱]$

۲۳ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $[\cos x] - [\sin x]$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۲
۳) ۱
۴) -۲

۲۴ برد تابع $f(x) = \sin^۲ x + ۲\sin x$ کدام است؟

۱) $[-۳, ۱]$
۲) $[-۱, ۳]$
۳) $[۰, ۳]$
۴) $[۰, ۱]$

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

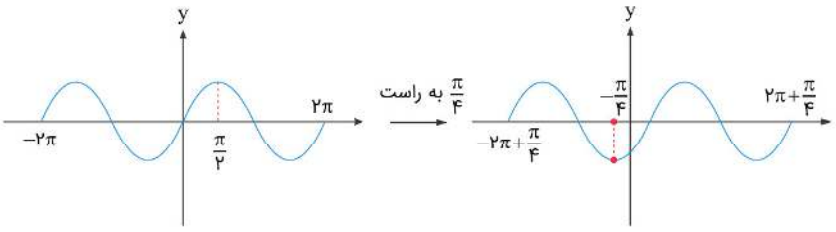
$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

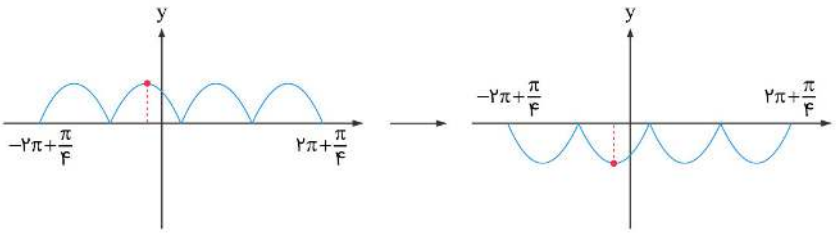
حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{1}{2}$ و حداکثر آن ۱ است.



$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq +4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

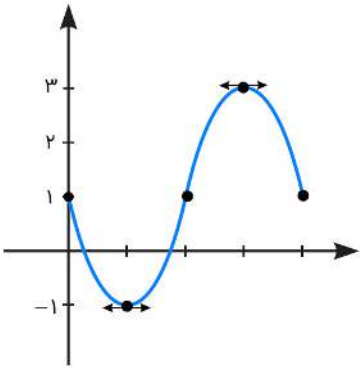
۲ نمودار $\sin x$، $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست انتقال می‌یابد.





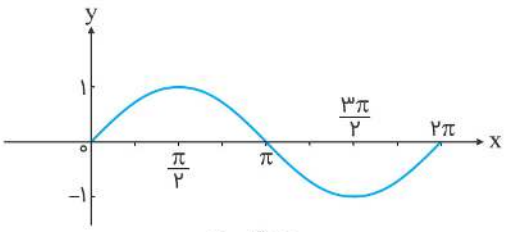
برد $R = [-1, 0]$

۳

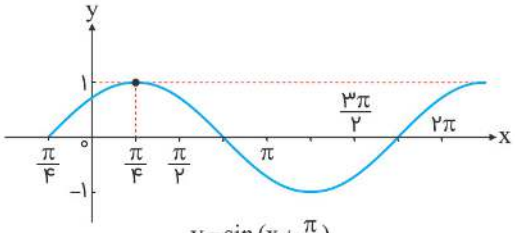


x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	−۱	۱	۳	۱

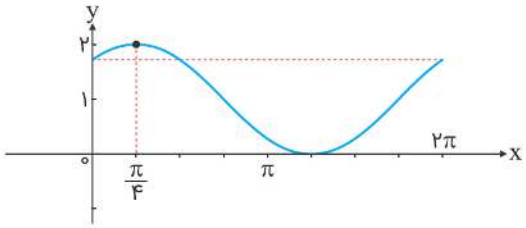
۴ الف ابتدا نمودار $\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ روی محور x به سمت چپ، سپس به اندازهٔ یک واحد روی محور y به سمت بالا می‌بریم.



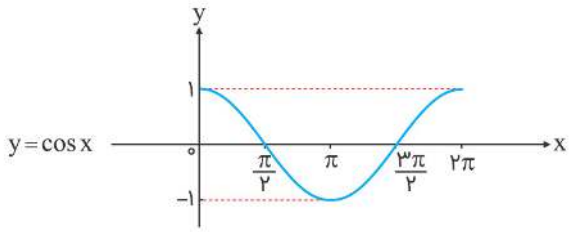
$y=\sin x$

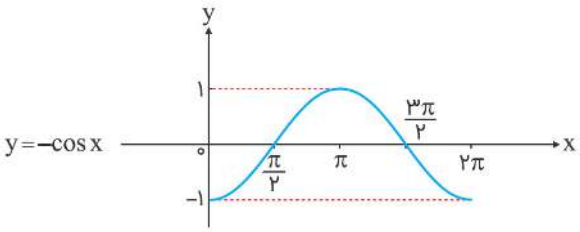


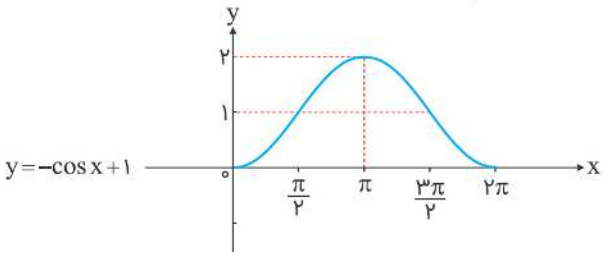
$y=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$



ب ابتدا نمودار $\cos x$ را نسبت به محور x قرینه کرده سپس یک واحد روی محور y بالا می‌بریم.







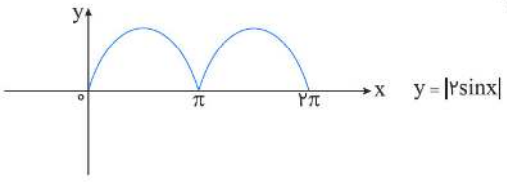
۵ گزینه ۴

$$-۱ \le \sin(x+\frac{\pi}{۲}) \le ۱ \Rightarrow -۳ \le ۳\sin(x+\frac{\pi}{۲}) \le ۳ \Rightarrow -۴ \le \underbrace{۳\sin(x+\frac{\pi}{۲})-۱}_{f(x)} \le ۲$$

$$\Rightarrow \quad R_f = [-۴\,,\,۲]$$

۶ گزینه ۴

وقتی در (۱-) ضرب شود، نسبت به محور xها قرینه می‌شود و گزینهٔ "۴" صحیح است.



۷ گزینه ۴

$$\frac{\pi}{۲} < x < \pi \Rightarrow ۰ < \sin x < ۱ \Rightarrow [\sin x] = ۰$$
$$\frac{\pi}{۲} < x < \pi \Rightarrow -۱ < \cos x < ۰ \Rightarrow [\cos x] = -۱$$

$$\text{حاصل عبارت} = ۰ + (-۱) = -۱$$

۸ گزینه ۴

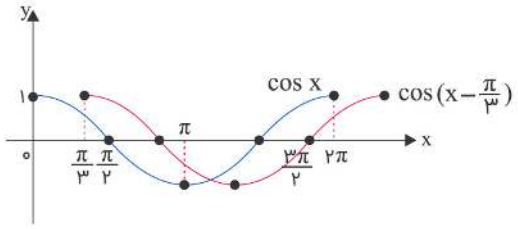
$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x$$

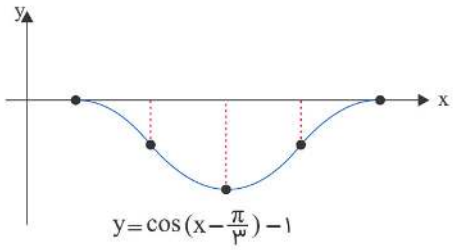
$$y=-۲\cos x+۱$$

$$-۱\le \cos x\le ۱ \Rightarrow -۲\le -۲\cos x\le ۲ \Rightarrow -۱\le -۲\cos x+۱\le ۳$$

$$R_f=[-۱,\ ۳]$$

۹ گزینه ۴



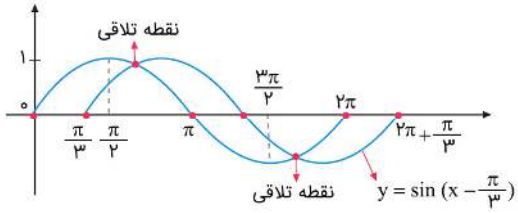


۱۰ گزینه ۲

گزینهٔ "۲" صحیح است.

۱۱ گزینه ۳

در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.



۱۲ گزینه ۲

می‌دانیم:

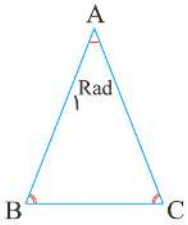
$$-۱\le \sin x\le ۱$$
$$-۲\le ۲\sin x\le ۲$$
$$-۱\le ۲\sin x+۱\le ۳$$

۱۳ درست

$$\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۱۱\pi}{۱۲}=\frac{۱۲\pi}{۱۲}=\pi$$

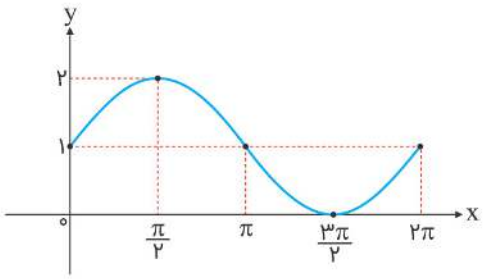
۱۴ نادرست، ۳ رادیان عددی کمتر از π هست، پس در ربع دوم قرار دارد.

۱۵ درست، ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه است و چون جمع زوایای مثلث ۱۸۰° و زوایای B و C باهم برابرند، اندازهٔ زاویهٔ A کمتر از B و C خواهد بود و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، کوچک‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر.

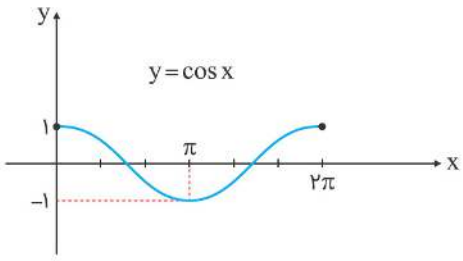


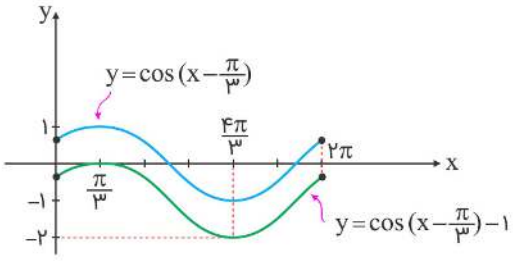
۱۶ نادرست، کمترین مقدار $\sin x$ برابر -۱ است که از $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ یا $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ و $k\in\mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

۱۷ (I) نمودار $\cos(x)$ را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به سمت راست ببرید.
(II) یک واحد در راستای قائم بالا ببرید.



۱۸





۱۹ الف) $\mathbb{R}$، $[-۱, ۱]$

ب) رادیان

پ) $(۰, ۱)$

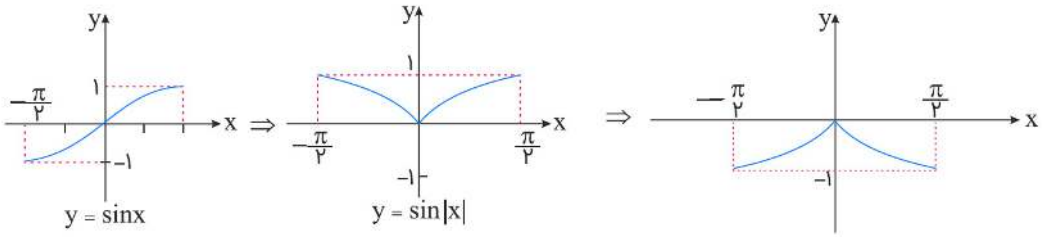
۲۰ گزینه ۴

$$-۱ \le \sin(x+\pi) \le ۱ \xrightarrow{+۲} ۱ \le \sin(x+\pi)+۲ \le ۳$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{۱} \ge \frac{۱}{\sin(x+\pi)+۲} \ge \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲ \ge \frac{۲}{\sin(x+\pi)+۲} \ge \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳} \le f(x) \le ۲ \Rightarrow R_f = [\frac{۲}{۳}, ۲]$$

۲۱ گزینه ۳



۲۲ گزینه ۳

$$-۱ \le \cos x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \cos^۲ x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le ۲\cos^۲ x \le ۲ \Rightarrow -۱ \le ۲\cos^۲ x - ۱ \le ۱$$

$$\Rightarrow R_f = [-۱, ۱]$$

۲۳ گزینه ۳

$$\frac{\pi}{۲} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} -۱ < \cos x < ۰ \Rightarrow [\cos x] = -۱ \\ ۰ < \sin x < ۱ \Rightarrow [\sin x] = ۰ \end{cases} \Rightarrow [\sin x] - [\cos x] = ۱$$

۲۴ گزینه ۲

$$f(x) = \sin^۲ x + ۲\sin x + ۱ - ۱ \Rightarrow f(x) = (\sin x + ۱)^۲ - ۱$$

می‌دانیم: $-۱ \leq \sin x \leq ۱$

$$\Rightarrow ۰ \leq \sin x + ۱ \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq (\sin x + ۱)^۲ \leq ۴$$

$$\Rightarrow -۱ \leq \underbrace{(\sin x + ۱)^۲ - ۱}_{f(x)} \leq ۳ \Rightarrow R_f = [-۱, ۳]$$

BOX 4: مثلثات (ویژه حسابان ۱) نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۱) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \begin{cases}\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta\end{cases}$

۲) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

۳) $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$

۴) $1\pm 2\sin x\cos x=(\sin x\pm\cos x)^2$

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha\pm\beta$:

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

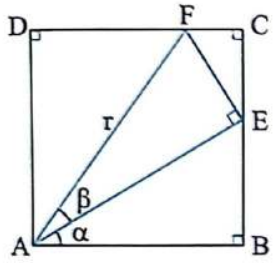
۲) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

۳) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

اثبات:

در شکل روبه‌رو چهارضلعی ABCD یک مستطیل است و اندازهٔ پاره‌خط AF برابر r (دلخواه) است.



زاویهٔ E نیم‌صفحه است : $F\hat{E}C+90^\circ+A\hat{E}B=180^\circ$

$\overset{\Delta}{AEB}$ مجموع زوایای داخلی : $\alpha+90^\circ+A\hat{E}B=180^\circ$

$\Rightarrow F\hat{E}C=\alpha \quad (1)$

AF مورب، CD و AB موازی $\Rightarrow A\hat{F}D=\alpha+\beta \quad (2)$

در مثلث $\overset{\Delta}{ADF}$:

$\sin(A\hat{F}D)=\frac{AD}{r} \Rightarrow AD=r\sin(A\hat{F}D)\overset{(2)}{=}r\sin(\alpha+\beta) \quad (3)$

$\cos(A\hat{F}D)=\frac{FD}{r} \Rightarrow FD=r\cos(A\hat{F}D)\overset{(2)}{=}r\cos(\alpha+\beta) \quad (4)$

در مثلث $\overset{\Delta}{AEF}$:

$\sin\beta=\frac{EF}{r} \Rightarrow EF=r\sin\beta \quad (5)$

$\cos\beta=\frac{AE}{r} \Rightarrow AE=r\cos\beta \quad (6)$

در مثلث $\overset{\Delta}{FCE}$:

$\sin(F\hat{E}C)=\frac{FC}{EF}\xrightarrow{(1),(5)}\sin\alpha=\frac{FC}{r\sin\beta}\Rightarrow FC=r\sin\alpha\sin\beta \quad (7)$

$\cos(F\hat{E}C)=\frac{EC}{EF}\xrightarrow{(1),(5)}\cos\alpha=\frac{EC}{r\sin\beta}\Rightarrow EC=r\cos\alpha\sin\beta \quad (8)$

در مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\sin\alpha=\frac{BE}{AE}\xrightarrow{(۶)}\sin\alpha=\frac{BE}{r\cos\beta}\Rightarrow BE=r\sin\alpha\cos\beta\quad(۹)$$

$$\cos\alpha=\frac{AB}{AE}\xrightarrow{(۶)}\cos\alpha=\frac{AB}{r\cos\beta}\Rightarrow AB=r\cos\alpha\cos\beta\quad(۱۰)$$

حال خواهیم داشت:

$$AD=BE+EC\xrightarrow{(۹),(۸),(۳)}r\sin(\alpha+\beta)=r\sin\alpha\cos\beta+r\cos\alpha\sin\beta\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$DF=AB-FC\xrightarrow{(۱۰),(۷),(۴)}r\cos(\alpha+\beta)=r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

تمرین: با استفاده از روابط فوق نسبت‌های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin۷۵^\circ$ ب) $\cos۱۵^\circ$

پاسخ:

الف) $\sin۷۵^\circ=\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\sin۴۵^\circ\cos۳۰^\circ+\cos۴۵^\circ\sin۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

ب) $\cos۱۵^\circ=\cos(۶۰^\circ-۴۵^\circ)=\cos۶۰^\circ\cos۴۵^\circ+\sin۶۰^\circ\sin۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

حواسمون بود که ۷۵° و ۱۵° متمم یکدیگرند؛ پس $\cos۱۵^\circ=\sin۷۵^\circ$.

تمرین: در مثلثی رابطه $\cos A\cos B(\tan A+\tan B)=۱$ برقرار است، نوع مثلث چیست؟

پاسخ:

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin AcoB+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

در نتیجه:

$$\cos A\cos B(\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B})=\sin(A+B)=۱\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{۲}$$

از آن‌جا که جمع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، زاویه سوم ۹۰° بوده و پس مثلث قائم‌الزاویه است.

تمرین: حاصل $\sin۵۰^\circ+\sqrt{۳}\cos۵۰^\circ$ کدام است؟

۱) $۲\cos۱۱۰^\circ$ ۲) $۲\cos۱۰^\circ$ ۳) $۲\cos۲۰^\circ$ ۴) $\sqrt{۳}\cos۲۰^\circ$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ می‌دانیم که $\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}$:

$$\sin۵۰^\circ+\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}\cos۵۰^\circ=\frac{\sin۵۰^\circ\cos۶۰^\circ+\sin۶۰^\circ\cos۵۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}=\frac{\sin(۵۰^\circ+۶۰^\circ)}{\cos۶۰^\circ}=\frac{\sin۱۱۰^\circ}{\frac{۱}{۲}}=۲\sin۱۱۰^\circ$$

$$=۲\sin(\frac{\pi}{۲}+۲۰^\circ)=۲\cos۲۰^\circ$$

تمرین: فرض کنید $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$ ، $\cos\beta=\frac{-۱۲}{۱۳}$ ، انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار باشد. در این صورت مطلوب است: (تمرین کتاب درسی)

الف) $\sin(\alpha+\beta)$ ب) $\cos(\alpha-\beta)$ پ) $\alpha+\beta$ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد.

پاسخ:

$$\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\pm۳}{۵}\xrightarrow[\sin>۰]{\alpha\text{ناحیه اول}}\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\cos\beta=\frac{-12}{13}\Rightarrow \sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Rightarrow \sin\beta=\pm\frac{5}{13}\xrightarrow[\sin\beta>0]{\beta\text{ ناحیه دوم}}\sin\beta=\frac{5}{13}$$

الف) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{-12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{-16}{65}$

ب) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{-12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{-33}{65}$

پ) $\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\frac{-16}{65}<0\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{-12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ پس $\alpha+\beta$ در ناحیه سوم مثلثاتی واقع است.

نکته: می‌دانیم که:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

با قراردادن α به جای β داریم:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

بنابراین روابط مثلثاتی 2α به صورت زیر خواهد بود:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

تمرین: حاصل عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

الف) $2\cos 165^\circ\cos 105^\circ$ ب) $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$ پ) $\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$

پاسخ:

الف) $2\cos(180^\circ-15^\circ)\cos(90^\circ+15^\circ)=2\cos(\pi-15^\circ)\cos(\frac{\pi}{2}+15^\circ)=2(-\cos 15^\circ)\times(-\sin 15^\circ)$

$$=2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

ب) $(\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12})\cancel{(\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12})}^{1}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{2\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) عبارت خواسته‌شده را در $\sin 10^\circ$ ضرب و بر $\sin 10^\circ$ تقسیم می‌کنیم. از رابطه زیر استفاده می‌نماییم:

$$\sin 2\theta=2\sin\theta.\cos\theta\Rightarrow \sin\theta.\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\sin(90^\circ-10^\circ)}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1}{8}\cot 10^\circ$$

نکته: با استفاده از روابط $\alpha+\beta$ داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1\pm\tan\alpha\tan\beta}$$

اثبات:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\xrightarrow{\text{با تقسیم صورت و مخرج بر } \cos\alpha\cos\beta}\ \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

نکته:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\xrightarrow{\alpha=\beta}\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

تمرین: حاصل $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ را تعیین کنید.

پاسخ: می‌دانیم که $\tan 45^\circ = 1$ بنابراین:

$$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

Homework (1)

۱ حاصل عبارت $\frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\cos ۲\alpha$
۴) $\sin ۲\alpha$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ حاصل عبارت $(۳\cos ۴x + \sqrt{۲}\sin x - \sqrt{۲}\cos x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $f(\alpha) = ۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha) + ۲\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۱
۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴ اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$
۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$
۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$
۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ اندازهٔ زاویهٔ A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازهٔ زاویهٔ B است. حاصل $۲\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ اگر $۱۰(\sin x + \cos x) = ۶\sqrt{۵}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ اگر $f(x) = ۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$

۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ اگر $f(x) = ۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶-۳\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶-\sqrt{۳}}{۱۶}$

۳) $\frac{۶+\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)} + \frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$، کدام است؟

۱) $\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)$ ۲) $\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

۳) $۲\cot\left(\frac{\theta}{۲}\right)$ ۴) $۲\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ اگر انتهای کمان α در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{۱}{۷}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴} + \alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ اگر انتهای کمان α در ربع دوّم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۱۱\pi}{۴} + \alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

به‌جای $\sin^۴\alpha$ و $\cos^۴\alpha$ به‌ترتیب زیر قرار می‌دهیم.

$$\frac{(۱-\cos^۲\alpha)^۲+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{(۱-\sin^۲\alpha)^۲+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$
$$=\frac{۱+\cos^۴\alpha-۲\cos^۲\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{۱+\sin^۴\alpha-۲\sin^۲\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$
$$=\frac{(۱+\cos^۲\alpha)^۲}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{(۱+\sin^۲\alpha)^۲}{۱+\sin^۲\alpha}=۱+\cos^۲\alpha-۱-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$$

البته دقت شود از روش عددگذاری می‌توانستیم به‌جای xها عدد مثلاً $\frac{\pi}{۲}$ را قرار دهیم و سریع‌تر به جواب برسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

از رابطه $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ استفاده می‌کنیم:

$$۳\cos ۴x+\sqrt{۲}(\sin x-\cos x)=۳\cos ۴x+۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

حال به‌جای x مقدار $\frac{\pi}{۱۲}$ می‌گذاریم:

$$۳\cos(۴\times\frac{\pi}{۱۲})+۲\sin(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴})=۳\cos\frac{\pi}{۳}-۲\sin\frac{\pi}{۶}$$
$$=۳\times\frac{۱}{۲}-۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۱

با استفاده از اتحادهایی که درستی آن‌ها را می‌دانیم، می‌توان به اتحاد زیر رسید:

$$\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$$

اول از اتحاد $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = ۴\sin\alpha\left(۱ - ۲\sin^۲\alpha\right) + ۲\sin\alpha = ۶\sin\alpha - ۸\sin^۳\alpha$$

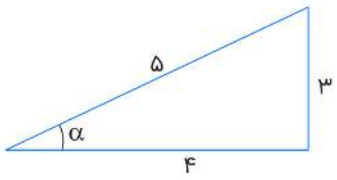
$$\xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} f(\alpha) = ۲\left(\underbrace{۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha}_{\sin ۳\alpha}\right) = ۲\sin ۳\alpha$$

پس:

$$f\left(\frac{۴۱\pi}{۹}\right) = ۲\sin\left(\frac{۴۱\pi}{۳}\right) = ۲\sin\left(۱۴\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = ۲\left(-\sin\frac{\pi}{۳}\right) = ۲\times\frac{-\sqrt{۳}}{۲} = -\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴ گزینه ۲



$$\tan\alpha = \frac{۳}{۴} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{۴}{۳} \quad , \quad \sin\alpha = -\frac{۳}{۵} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\cos\left(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot ۲\alpha} = \frac{\sin ۲\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}} = \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}}$$

$$= \frac{۲\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right) + \frac{۴}{۵}}{\frac{\frac{۴}{۳} - \frac{۳}{۴}}{۲}} = \frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۶}{۵} + ۱\right)}{\frac{۱۶ - ۹}{۲۴}} = \frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۱}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}} = \frac{۴(۱۱)(۲۴)}{۵(۵)(۷)} = \frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

$$\cot ۲\alpha = \frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha}{۲\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۲

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$A = B + ۴۵ = B + \frac{\pi}{۴},\ A + B + C = \pi$$
$$۲\cos A\sin B - \sin C = \sin(B+A) + \sin(B-A) - \sin C$$
$$= \sin(\pi - C) + \sin(\frac{-\pi}{۴}) - \sin C$$
$$= \sin C - \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sin C = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

$$\sin x + \cos x = \frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^۲x + \cos^۲x + ۲\sin x\cos x = \frac{۹}{۵}$$
$$\Rightarrow ۱ + \sin ۲x = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۴}{۵}$$
$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}$$
$$\Rightarrow ۴ + ۴\tan^۲x = ۱۰\tan x \Rightarrow ۴(۱+\tan^۲x) = ۱۰\tan x$$
$$\Rightarrow ۱ + \tan^۲x = \frac{۵}{۲}\tan x \xrightarrow{\times ۲} ۲\tan^۲ - ۵\tan x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۹} \begin{cases} \tan x = ۲ \\ \tan x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^۲x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲x = ۳۲\sin^۲x\cos^۲x\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= ۸\sin^۲(۲x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= ۲\sin^۲(۴x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= \frac{۱}{۳۲}\sin^۲(۳۲x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲(۳۲x)}{۳۲\sin^۲x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲ \times \frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$

$$= \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲} = \frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^۲۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲۳x = ۱۶\sin^۲۳x\cos^۲۳x\cos^۲۶x\cos^۲۱۲x\cos^۲۲۴x$$
$$\Rightarrow f(x)\sin^۲۳x = ۴\sin^۲۶x\cos^۲۶x\cos^۲۱۲x\cos^۲۲۴x$$
$$= \sin^۲۱۲x\cos^۲۱۲x\cos^۲۲۴x$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin^۲۲۴x\cos^۲۲۴x = \frac{۱}{۱۶}\sin^۲۴۸x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲۴۸x}{۱۶\sin^۲۳x}$$

$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = \frac{\sin^۲\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}$$
$$= \frac{۳}{۴\times۸\times(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ گزینه ۳

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۱

$$A=\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)=\sin(3\pi+(\frac{\pi}{4}+\alpha))=\sin(\pi+(\frac{\pi}{4}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$
$$=-(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha)=-(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)$$

همچنین $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ و ازطرفی می‌دانیم $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. پس:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+(\frac{1}{7})^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\xrightarrow{\alpha<90^\circ}\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$
$$\xrightarrow{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}\sin\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

پس A برابر است با:

$$A=-(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{5\sqrt{2}})=-(\frac{7}{10}+\frac{1}{10})=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۳

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}\xrightarrow[\cos\alpha<0]{\text{انتهای کمان }\alpha\text{ در ربع دوم}}\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$=-\sqrt{1-\frac{2}{100}}=-\frac{\sqrt{98}}{10}$$
$$\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)=\cos(3\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos(\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos(\frac{3\pi}{4}+\alpha)$$
$$=\cos\frac{3\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{4}\sin\alpha=(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times(-\frac{\sqrt{98}}{10})-(\frac{\sqrt{2}}{2})\times(\frac{\sqrt{2}}{10})$$
$$=\frac{\sqrt{196}}{20}-\frac{2}{20}=\frac{14-2}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

نکته:

$$\alpha+\beta=\pi\Rightarrow\cos\alpha=-\cos\beta$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱ $\sin^{۳} ۷/۵^\circ \cos ۷/۵^\circ - \cos^{۳} ۷/۵^\circ \sin ۷/۵^\circ$

۲ $\frac{۱}{۲}\cos ۱۵^\circ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۱۵^\circ$

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

۳ $\sin\frac{\pi}{۸} \times \cos\frac{\pi}{۸}$

۴ $\sin^{۲}\frac{\pi}{۸} + \sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}$

۵ $\tan(-۸۴۰^\circ)$

۶ $\cos ۱۵^\circ$

۷ با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه را نشان دهید.

$\cos ۲x = ۲\cos^{۲}x - ۱$

۸ مقدار عددی $\sin ۱۰۵^\circ$ را بیابید.

۹ اگر $\frac{\sin ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha} = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $۲\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha) + ۳\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $-\frac{۱۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۰ اگر $\tan(\frac{x}{۲}) = \sqrt{۲}$ باشد، حاصل کسر $\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۱ اگر $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، حاصل $\sin(\alpha - \beta)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۶۵}$
۲) $-\frac{۳۳}{۶۵}$
۳) $-\frac{۶۳}{۶۵}$
۴) $-\frac{۴۸}{۶۵}$

۱۲ اگر $\cos ۳x.\cos ۲x - \sin ۳x.\sin ۲x = \frac{۱}{۲}$ باشد، x کدام مقدار می‌تواند باشد؟ (x در ناحیهٔ اول مثلثاتی است)

۱) $\frac{\pi}{۱۵}$
۲) $\frac{\pi}{۵}$
۳) $\frac{\pi}{۲۰}$
۴) $\frac{\pi}{۶}$

۱۳ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

۱۴ حاصل $\frac{۱}{\cos ۷۵^\circ} + \frac{۱}{\sin ۷۵^\circ}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۵ حاصل عبارت $\sin ۲x.\cos x - \cos ۲x.\sin x + \frac{\cos ۲x}{\cos x + \sin x}$ کدام است؟

۱) $\sin x + \cos x$
۲) $\sin x - \cos x$
۳) $\cos x$
۴) $\sin x$

۱۶ حاصل عبارت $\sin^۳ x.\cos x - \cos^۳ x.\sin x$ به ازای $x = \frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$
۴) $\frac{-\sqrt{۳}}{۸}$

۱۷ حاصل $\sin ۳۶^\circ \times \cos ۳۶^\circ \times \cos ۷۲^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}\sin ۳۶^\circ$
۲) $\frac{۱}{۲}\sin ۳۶^\circ$
۳) $\frac{۱}{۴}\cos ۳۶^\circ$
۴) $\frac{۱}{۲}\cos ۳۶^\circ$

پاسخ Homework (2)

۱

$$\sin^{۳} ۷/۵^\circ \cos ۷/۵^\circ - \cos^{۳} ۷/۵^\circ \sin ۷/۵^\circ = \sin ۷/۵^\circ \cos ۷/۵^\circ (\sin^{۲} ۷/۵^\circ - \cos^{۲} ۷/۵^\circ)$$
$$= \frac{۱}{۲} \sin ۱۵^\circ (\cos ۱۵^\circ) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \sin ۳۰^\circ$$
$$= -\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۸}$$

۲

$$\frac{۱}{۲} \cos ۱۵^\circ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \sin ۱۵^\circ = \sin ۳۰^\circ \cos ۱۵^\circ + \cos ۳۰^\circ \sin ۱۵^\circ$$
$$= \sin(۳۰ + ۱۵)$$
$$= \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{۱}{۲} \sin ۲\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۸}} \frac{۱}{۲} \sin ۲\frac{\pi}{۸} = \frac{۱}{۲} \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۴

$\frac{\pi}{۸}$ و $\frac{۳\pi}{۸}$ دو زاویه متمم یکدیگرند، درنتیجه: $\sin \frac{\pi}{۸} = \cos \frac{۳\pi}{۸}$

$$\cos^{۲} \frac{۳\pi}{۸} + \sin^{۲} \frac{۳\pi}{۸} = ۱$$

۵

$$\tan(-۸۴۰) = -\tan(۹۰۰ - ۶۰^\circ) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

۶

$$\cos(۴۵ - ۳۰) = \cos ۴۵ \times \cos ۳۰ - \sin ۴۵ \times \sin ۳۰$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$$

۷

$$\cos ۲x = \cos(x+x) = \cos x(\cos x) - \sin x(\sin x)$$
$$= \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos^۲ x - (۱ - \cos^۲ x)$$
$$= \cos^۲ x - ۱ + \cos^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱$$

۸

$$\sin ۱۰۵ = \sin(۶۰ + ۴۵) = \sin ۶۰ \cos ۴۵ + \sin ۴۵ \cos ۶۰$$
$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

۹

گزینه ۲

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^۲\alpha} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cot\alpha = ۲$$

$$\text{عبارت} = ۲\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha) + ۳\cot(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -۲\cot\alpha + ۳\tan\alpha$$
$$= -۲(۲) + ۳(\frac{۱}{۲}) = -۴ + \frac{۳}{۲} = -\frac{۵}{۲}$$

۱۰

گزینه ۱

$$\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x} = \frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}} = \tan^۲\frac{x}{۲} = (\sqrt{۲})^۲ = ۲$$

۱۱

گزینه ۳

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۳}{۵}$$
$$\sin^۲\beta = ۱ - \cos^۲\beta = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow \sin\beta = \frac{۵}{۱۳}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta = (\frac{۴}{۵}) \times (-\frac{۱۲}{۱۳}) - \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۱۳}$$
$$= \frac{-۴۸-۱۵}{۶۵} = -\frac{۶۳}{۶۵}$$

۱۲

گزینه ۱

بنا به اتحاد مثلثاتی : $\cos a.\cos b - \sin a.\sin b = \cos(a+b)$

$$\Rightarrow \cos(۳x+۲x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۵x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۵x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۵x = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۵}$$

۱۳ گزینه ۴

یادآوری:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

$$\frac{\cos ۲\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\frac{\cos ۲\alpha}{\frac{۲}{\sin ۲\alpha}}=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha)=\frac{۱}{۴}\sin ۴\alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۱۶}}\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

۱۴ گزینه ۲

یادآوری:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

$$\frac{\cos ۷۵^\circ+\sin ۷۵^\circ}{\sin ۷۵^\circ\times\cos ۷۵^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\sin(۷۵^\circ+۴۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin ۱۵۰^\circ}=\frac{۲\sqrt{۲}\sin ۱۲۰^\circ}{\sin ۱۵۰^\circ}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}\sin ۶۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۶}$$

۱۵ گزینه ۳

یادآوری:

$$\sin a.\cos b-\cos a.\sin b=\sin(a-b)$$

$$\text{عبارت}=\sin ۲x.\cos x-\cos ۲x.\sin x+\frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{\cos x+\sin x}$$

$$\text{عبارت}=\sin(۲x-x)+\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}$$

$$\text{عبارت}=\sin x+\cos x-\sin x=\cos x$$

۱۶ گزینه ۲

$$\sin x.\cos x(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x.(-\cos ۲x)=-\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x$$

$$=-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴x)=-\frac{۱}{۴}\sin ۴x\underset{\downarrow}{=}-\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۸}$$

$x=\frac{\pi}{۲۴}$

یادآوری:

$$\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\cos ۲x$$

۱۷ گزینه ۱

$$(\sin ۳۶^\circ\times\cos ۳۶^\circ)\times\cos ۷۲^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۷۲^\circ\times\cos ۷۲^\circ=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۱۴۴^\circ)$$

$$=\frac{۱}{۴}\sin ۱۴۴^\circ=\frac{۱}{۴}\sin(۱۸۰^\circ-۳۶^\circ)=\frac{۱}{۴}\sin ۳۶^\circ$$

یادآوری:

$$\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin(۲\alpha)$$

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

(فصل ۵ ریاضی ۲ و فصل ۳ حسابان ۱)

BOX 1: تابع نمایی (صفحه ۹۶ تا ۱۰۴ کتاب درسی)

در این BOX با تعریف تابع نمایی، نمودار آن‌ها و ویژگی‌های آن‌ها آشنا می‌شوید.

تابع نمایی

توان‌های حقیقی

مشابه قوانین مربوط به اعداد توان‌دار با توان‌های گویا و پایه‌های حقیقی مثبت، برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است. فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱) $x^{\circ}=1$ ۲) $x^{-r}=\frac{1}{x^r}$ ۳) $x^r\times x^s=x^{r+s}$ ۴) $(x^r)^x=x^{rs}$

۵) $(xy)^r=x^r y^r$ ۶) $(\frac{x}{y})^r=\frac{x^r}{y^r}\ ,\ (y\neq 0)$ ۷) $\frac{x^r}{x^s}=x^{r-s}\ ,\ (x\neq 0)$ ۸) $1^r=1$

تمرین: هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $3^{1-\sqrt{2}}\times 3^{1+\sqrt{2}}$ ۲) $5^{2\sqrt{2}}\times 3^{\sqrt{8}}$ ۳) $\frac{2^{\sqrt{2}}\times 2^{2\sqrt{2}}}{4^{\sqrt{2}}\times 4^{2\sqrt{2}}}$

پاسخ: ۱) در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$3^{1-\sqrt{2}}\times 3^{1+\sqrt{2}}=3^{(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})}=3^2=9$$

۲) چون $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ است، پس توان‌ها با هم برابرند و داریم:

$$5^{2\sqrt{2}}\times 3^{\sqrt{8}}=5^{2\sqrt{2}}\times 3^{2\sqrt{2}}=(5\times 3)^{2\sqrt{2}}=15^{2\sqrt{2}}$$

۳) ابتدا هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج را به شکل یک عدد توان‌دار می‌نویسیم:

$$2^{\sqrt{2}}\times 2^{2\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=2^{3\sqrt{2}}\ ,\ 4^{\sqrt{2}}\times 4^{2\sqrt{2}}=4^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=4^{3\sqrt{2}}\Rightarrow \text{حاصل}=\frac{2^{3\sqrt{2}}}{4^{3\sqrt{2}}}=(\frac{2}{4})^{3\sqrt{2}}=(\frac{1}{2})^{3\sqrt{2}}$$

تابع نمایی

تعریف: هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک می‌باشد، تابع نمایی می‌گوییم.

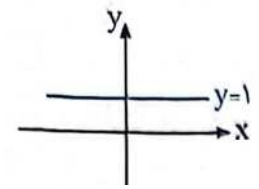
$y=a^x \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\ ,\ a>0\ ,\ a\neq 1$ تابع نمایی است.

مثال: توابع $y=3^x$ ، $y=(\sqrt{5})^x$ ، $y=2^{-x}=(2^{-1})^x=(\frac{1}{2})^x$، همگی در دستهٔ توابع نمایی قرار دارند، ولی $y=(-\sqrt{2})^x$ و $y=1^x$ به خاطر آن که در اولی $a=-\sqrt{2}<0$ و در دومی $a=1$ می باشد، در دستهٔ توابع نمایی قرار نمی‌گیرند.

تذکر: در تابع نمایی $y=a^x$ ، عدد ثابت a پایه و توان متغیر است، اما در تابع $y=x^a$ ، پایه متغیر و توان عدد ثابت است.

مثال: تابع $y=3^x$ یک تابع نمایی با پایهٔ ۳ و توان x و تابع $y=x^3$ یک تابع یک‌جمله‌ای از درجهٔ ۳ با پایهٔ x و توان ۳ می‌باشد.

نکته: در تابع $y=a^x$ ، اگر $a=1$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به صورت $y=1^x=1$ درمی‌آید که ضابطهٔ تابع ثابت می‌باشد و نمودار آن به صورت مقابل است:



تمرین: نمودار تابع $y=2^x$ را رسم کنید.

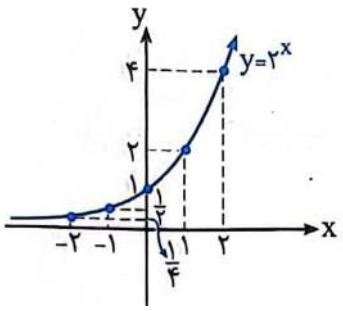
پاسخ: برای رسم تابع نمایی $y=2^x$ از نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم. به ازای برخی از مقادیر x، مقدار y را به دست می‌آوریم و با مشخص کردن این نقاط روی دستگاه و وصل کردن آن نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم:

$$x=0 \Rightarrow y=2^0=1 \ , \ x=1 \Rightarrow y=2^1=2 \ , \ x=2 \Rightarrow y=2^2=4$$

$$x=-1 \Rightarrow y=2^{-1}=\frac{1}{2} \ , \ x=-2 \Rightarrow y=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

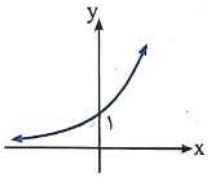
جدول زیر از نقاط به دست می‌آید و با وصل‌کردن نقاط به همدیگر، نمودار به دست می‌آید.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



همان‌طور که نمودار توابع $y=\sqrt{x}$ ، $y=x^2$ ، $y=|x|$ و ... را می‌شناسیم باید نمودار تابع نمایی $y=a^x$ را به خاطر بسپاریم. نمودار تابع نمایی $y=a^x$ برای $a>1$ و $0<a<1$ متفاوت است.

ویژگی‌های تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>1$



۱) نمودار تابع مانند نمودار تابع $y=2^x$ به صورت مقابل است:

۲) دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

۳) نمودار تابع، محور yها را در نقطهٔ $(0,1)$ قطع می‌کند.

۴) نمودار تابع، محور xها را قطع نمی‌کند.

۵) تابع در دامنهٔ آن یک‌به‌یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

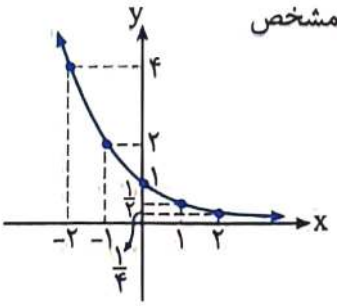
۶) در تابع نمایی $y=a^x \ (a>1)$ ، هرچه مقدار x بیشتر می‌شود، مقدار a^x نیز بزرگ‌تر می‌شود، پس به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه x و y، اگر $x>y$ ، آن‌گاه $a^x>a^y$ و برعکس. به عنوان مثال، $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ و در نتیجه $4^{\frac{1}{2}}>4^{\frac{1}{3}}$

تمرین: نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

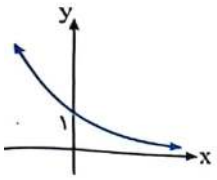
پاسخ: در جدول زیر به ازای برخی از مقادیر x، مقدار y به دست آمده است و با مشخص کردن نقاط روی دستگاه و وصل‌کردن آن‌ها به هم، نمودار تابع به دست می‌آید:

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

مشخص



ویژگی‌های تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $0<a<1$



۱) نمودار تابع مانند نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^x$ به صورت روبه‌رو است:

۲) دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(۰,+\infty)$ می‌باشد.

۳) نمودار تابع، محور yها را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کند.

۴) نمودار تابع، محور xها را قطع نمی‌کند.

۵) تابع در دامنهٔ آن یک‌به‌یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۶) در تابع نمایی $y=a^x$ در حالتی که $0<a<1$ ، هرچه مقدار x بیشتر می‌شود، مقدار y کم‌تر می‌شود. پس به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه x و y، اگر $x>y$ ، آن‌گاه $a^x<a^y$ و برعکس. به عنوان مثال، $\sqrt{۳}>\sqrt{۲}$ و در نتیجه $(\frac{۱}{۳})^{\sqrt{۳}}<(\frac{۱}{۳})^{\sqrt{۲}}$

تمرین: در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

۱) $۵^{۳}\ \bigcirc\ ۵^{\sqrt{۷}}$ ۲) $۳^{۲/۵}\ \bigcirc\ ۳^{\frac{۷}{۳}}$ ۳) $(\frac{۱}{۴})^{\sqrt{۲}}\ \bigcirc\ (\frac{۱}{۴})^{۱/۵}$ ۴) $(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۳/۲}\ \bigcirc\ (\frac{۱}{۴})^{۲}$

پاسخ: (۱) و (۲): پایه بزرگ‌تر از یک است، پس هرچه توان بزرگ‌تر باشد، عدد نیز بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین:

$$۳>\sqrt{۷}\ \Rightarrow\ ۵^{۳}>۵^{\sqrt{۷}}\ ,\ ۲/۵>\frac{۷}{۳}\ \Rightarrow\ ۳^{۲/۵}>۳^{\frac{۷}{۳}}$$

۳) پایه بین ۰ و ۱ است. هرچه توان بزرگ‌تر شود، عدد کوچک‌تر می‌شود:

$$\sqrt{۲}<۱/۵\ \Rightarrow\ (\frac{۱}{۴})^{\sqrt{۲}}>(\frac{۱}{۴})^{۱/۵}$$

۴) ابتدا پایه‌ها را یکی می‌کنیم:

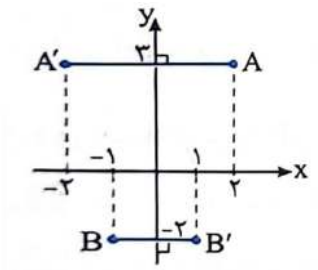
$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}}}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}}\ \Rightarrow\ (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۳/۲}=((\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}})^{۳/۲}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}\times ۳/۲}=(\frac{۱}{۲})^{۱/۶}$$

$$(\frac{۱}{۴})^{۲}=((\frac{۱}{۲})^{۲})^{۲}=(\frac{۱}{۲})^{۲\times ۲}=(\frac{۱}{۲})^{۴}$$

$$۱/۶<۴\ \Rightarrow\ (\frac{۱}{۲})^{۱/۶}>(\frac{۱}{۲})^{۴}$$

بازتاب (قرینه) نسبت به محور yها

● می‌خواهیم قرینهٔ نقاط $A(۲,۳)$ و $B(-۱,-۲)$ را نسبت به محور yها به دست آوریم. برای این کار، از نقاط داده‌شده پاره‌خطی عمود بر محور yها رسم می‌کنیم و این پاره‌خط را به همان اندازه امتداد می‌دهیم. نقاط به دست آمده قرینهٔ نقاط A و B نسبت به محور yها می‌باشند.



● قرینهٔ نقطهٔ A، نقطهٔ A' به مختصات $(-۲,۳)$ و قرینهٔ نقطهٔ B، نقطهٔ B' به مختصات $(۱,-۲)$ می‌باشد. با توجه به مختصات نقاط داده‌شده و قرینهٔ آن‌ها، در قرینه نسبت به محور yها فقط طول آن‌ها قرینه می‌شود، بنابراین:

نکته: ۱) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(-a,b)$ است.

۲) اگر نمودار توابع f و g نسبت به محور yها قرینه باشند، آن‌گاه $f(-x)=g(x)$ و $g(-x)=f(x)$

۳) اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم و آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم، آن‌گاه نمودار حاصل، نمودار تابع $y=f(-x)$ خواهد بود.

در تابع $y=۲^x$ اگر به جای x، $-x$ قرار دهیم، آن‌گاه: $y=۲^{-x}=(۲^{-۱})^x=(\frac{۱}{۲})^x$

پس، قرینهٔ نمودار $y=۲^x$ نسبت به محور yها، نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ به دست می‌آید.

نکته: نمودار توابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ $(a>۰, a\neq ۱)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.

یکی از مسائلی که باید یاد بگیریم، حل معادلات نمایی است. برای حل چنین معادلاتی باید در دو طرف پایه‌ها را یکی کنیم.

معادلات نمایی

تعریف: معادله‌ای را که در آن مجهول در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامیم.

هر معادله به صورت $a^u=b^v$ $(a,b>۰, a,b\neq ۱)$ یک معادلهٔ نمایی است. اگر بتوان در معادله‌های نمایی، پایهٔ دو طرف را یکسان کرد، می‌توان از نکتهٔ زیر برای حل معادله استفاده کرد.

نکته: اگر $a^u=a^v$ $(a>۰, a\neq ۱)$، آن‌گاه $u=v$ و برعکس.

تمرین: هر یک از معادلات نمایی زیر را حل کنید.

۱) $۲^{۳x-۱}=\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $۷^{x+۱}\times ۴۹^{۲x-۱}=(\frac{۱}{۷})^{x+۸}$

پاسخ: ۱) $\frac{۱}{۳۲}=\frac{۱}{۲^۵}=۲^{-۵} \Rightarrow ۲^{۳x-۱}=۲^{-۵} \Rightarrow ۳x-۱=-۵ \Rightarrow ۳x=-۵+۱=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}$

۲) هر یک از عبارت‌ها را به صورت یک عبارت توان‌دار با پایهٔ ۷ می‌نویسیم:

$۴۹^{۲x-۱}=(۷^۲)^{۲x-۱}=۷^{۲(۲x-۱)}=۷^{۴x-۲}$, $(\frac{۱}{۷})^{x+۸}=(۷^{-۱})^{x+۸}=۷^{-x-۸}$

$$۷^{x+۱}\times ۴۹^{۲x-۱}=(\frac{۱}{۷})^{x+۸} \Rightarrow ۷^{x+۱}\times ۷^{۴x-۲}=۷^{-x-۸} \Rightarrow ۷^{(x+۱)+(۴x-۲)}=۷^{-x-۸} \Rightarrow ۷^{۵x-۱}=۷^{-x-۸}$$

$$\Rightarrow ۵x-۱=-x-۸ \Rightarrow ۵x+x=-۸+۱ \Rightarrow ۶x=-۷ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۶}$$

پرسش‌های تشریحی:

● کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۰۴ کتاب درسی)

۱- محل تقاطع نمودار تابع $y=۲^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۲)$ است.

۲- نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\sqrt{۵})$ روی نمودار تابع، با ضابطهٔ $y=۵^x$ قرار دارد. (شهریور ۱۴۰۲)

۳- دامنهٔ توابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ یکسان است.

۴- نمودار توابع $y=۴^x$ و $y=(\frac{۱}{۴})^x$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند.

● در جاهای خالی سوالات، عبارت مناسب قرار دهید.

۵- در $x^۲$ ، متغیر در ..... و عدد ثابت در ..... است ولی در ۲^x ، ..... در توان و ..... در پایه است.

۶- تابع $y=۲^x$ ، تابع یک‌به‌یک .....

۷- اگر $x>y$ ، آن‌گاه ۳^x ..... از ۳^y است. (بزرگ‌تر ـ کوچک‌تر)

۸- برد تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$ ، ..... است.

۹- نمودار توابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ $(a>۰, a\neq ۱)$ نسبت به محور ..... قرینهٔ یکدیگرند.

۱۰- دامنهٔ تابع $f(x)=۲^x-۳$ برابر با ..... و برد آن برابر با ..... است. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۱- کدام‌یک از توابع زیر، ضابطهٔ یک تابع نمایی است؟ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰۴ کتاب درسی)

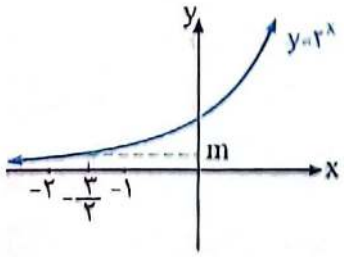
آ) $y=x^۲$ ب) $y=(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^x$ پ) $y=\frac{۲}{x}$

ت) $y=۶^{-x}$ ث) $y=(۰/۱)^x$ ج) $y=۲^x+x$

۱۲- نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y=(\frac{۵}{۲})^x \quad , \quad y=۳^x \quad , \quad y=۴^x$$

۱۳- نمودار تابع $y = ۲^x$ به صورت مقابل است:



آ) عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ را روی محور yها مشخص کنید.

ب) عدد m برابر چه عددی است؟

۱۴- کدام‌یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک‌به‌یک است؟ (فرداد ۱۴۰۲)

۱) $f(x) = x^۲$ ۲) $f(x) = [x]$ ۳) $f(x) = |x|$ ۴) $f(x) = ۲^x$

۱۵- در جاهای خالی علامت > یا = یا < قرار دهید.

آ) $(\frac{۱}{\pi})^{-\frac{۲}{۵}} \bigcirc (\frac{۱}{\pi})^{-\frac{۱}{۲}}$ ب) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{-۲} \bigcirc (\frac{\sqrt{۱۲}}{۴})^{-۳}$

۱۶- آ) نمودار توابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = ۲^x$ را در یک دستگاه رسم کنید. (کار در کلاس صفحهٔ ۹۸ کتاب درسی)

ب) معادلهٔ $۲^x = x^۲$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱۷- هر یک از معادلات نمایی زیر را حل کنید. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۰۴ کتاب درسی)

آ) $۴^{۲x+۴} = \frac{۱}{۶۴}$ (شهریور ۱۴۰۲)

ب) $۳^{x-۲} = \frac{۱}{۲۷^x}$ (خرداد ۱۴۰۲)

پ) $۳^{۲x-۱} = \frac{۱}{۲۷}$ (شهریور ۱۴۰۲)

۱۸- هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ) $(۲-\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}+۱} \times (۲+\sqrt{۳})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}$

ب) $\frac{(۳\sqrt{۵} \times ۱۷^{\sqrt{۵}}) \div ۵۱^{\sqrt{۲۰}}}{۲^{-\sqrt{۴۵}} \div (۰/۲۵)^{\sqrt{۵}}}$

پ) $\frac{۵^{\sqrt{۳}} \times ۱۲^{\sqrt{۳}}}{۱۰^{\sqrt{۱۲}} \times ۱۰^{-\sqrt{۳}}}$

۱۹- دامنهٔ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ) $f(x)=\frac{۳^x}{۴^x-۱۲۸}$

ب) $g(x)=\sqrt{۸^x-\frac{۱۶}{۴^x}}$

۲۰- حدود a را چنان تعیین کنید که تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{a+۲}{a-۱})^x$ ، یک تابع نمایی باشد.

Homework

۱ اگر $\frac{۳^{x}+۳^{x+۱}+۳^{x+۲}+۳^{x+۳}+۳^{x+۴}+۳^{x+۵}}{۲^{x-۲}+۲^{x-۱}+۲^{x}+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+۲^{x+۳}}=۵۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(۸)=۵$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

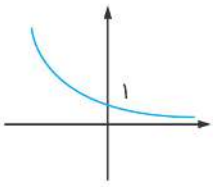
۳ تابع $f(x)=a+b(\frac{۱}{۲})^{x}$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(-۱)=-۱$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴ باتوجه‌به نمودارهای $y_۱=(\frac{۱}{۳})^{x}$ و $y_۲=(\frac{۱}{۵})^{x}$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر دو نمودار، محور yها را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کنند.
۲) به ازای $x<۰$، نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ قرار دارد.
۳) به ازای $x>۰$، نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ قرار دارد.
۴) نمودار هر دو تابع، حالت کاهشی دارند.

۵ کدام ضابطهٔ زیر می‌تواند مربوط به نمودار باشد؟



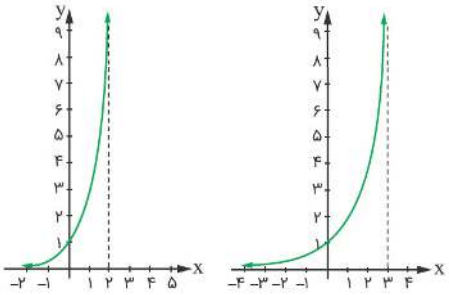
۱) $y=(۷)^{x}$
۲) $y=(\frac{۹}{۸})^{x}$
۳) $y=(\frac{۱}{۶})^{x}$
۴) $y=(\sqrt{۳}+۱)^{x}$

۶ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین‌حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}}$

ب) $۲^{۱/۲۵}$

پ) $۳^{\frac{۳}{۴}}$



به سؤالات داده شده پاسخ دهید.

۷ سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

۸ نامعادله توانی $۴^{۲x-۱} > \frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

۹ اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $a^x > a^y > a^z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $(a > ۱)$

معادلات زیر را حل کنید.

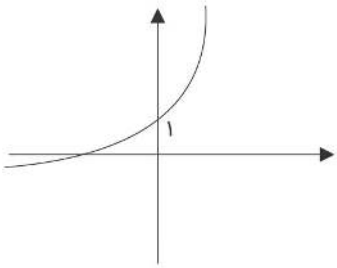
۱۰

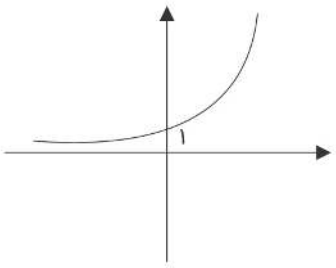
$$۲^{۵x-۱} = \frac{۱}{۶۴}$$

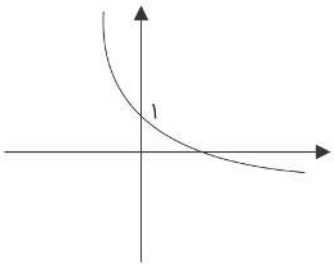
۱۱

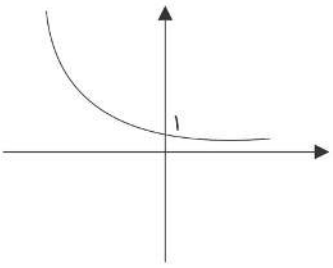
$$\log ۳ + \log(۳ + x) = \log(۳x + ۱) + \log ۲$$

۱۲ نمودار $y = (\frac{۵}{\sqrt{۶}})^{x}$ مشابه کدام نمودار زیر است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳ معادلهٔ $۲^{x} - x^{۲} = ۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) بدون ریشه

۱۴ نمودارهای توابع $y = x^{۲}$ و $y = ۲^{x}$ در چند نقطه با طول مثبت همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

۱۵ در کدام‌یک از توابع نمایی زیر با افزایش x مقدار y کم می‌شود؟

۱) $y = ۳^{x}$
۲) $y = (\frac{۸}{۷})^{-x}$
۳) $y = (\frac{۱}{۶})^{-x}$
۴) $y = (\sqrt{۵})^{x}$

۱۶ اگر $۴^{۲x-۱} \geq \frac{۱}{۱۰۲۴}$ باشد، حداقل مقدار x چقدر است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) -۲
۴) -۴

۱۷ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(\sqrt{۲})^{۲x^{۲}-x} \geq ۴^{x^{۲}+x+۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۱, ۲]$
۲) $[\frac{۵}{۲}, +\infty)$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\varnothing$

۱۸ نمودار یک تابع $f(x) = ۲^{ax+b}$ از دو نقطهٔ $A(۱, ۲)$ و $B(-۱, ۸)$ عبور می‌کند. $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۳

۱۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۴^x + ۲}{۲^{x+۱} - ۲} = ۳$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

۲۰ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۴^{۲x-۱} > (\sqrt{۲})^{۴x^۲}$ کدام است؟

۱) $(۱, +\infty)$
۲) $(-\infty, ۲)$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\varnothing$

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

$$\frac{۳^x(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^x(۲^{-۲}+۲^{-۱}+۱+۲+۲^۲+۲^۳)}=۵۲$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۳}{۲}\right)^x=\frac{۵۲\times ۱۵/۷۵}{۳۶۴}=\frac{۸۱۹}{۳۶۴}=۲/۲۵\Rightarrow x=۲$$

نکته:

$$۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵=\frac{۱(۱-۳^۶)}{۱-۳}=۳۶۴$$

$$۲^{-۲}+۲^{-۱}+۱+۲+۲^۲+۲^۳=\frac{\frac{۱}{۴}(۱-۲^۶)}{۱-۲}=\frac{۶۳}{۴}=۱۵/۷۵$$

۲ گزینه ۱

$$f(\frac{۱}{۲})=۱\xrightarrow{\text{جایگذاری}}۱=\sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۴}+b}}\Rightarrow ۲^{\frac{a}{۴}+b}=۱\Rightarrow \frac{a}{۲}+b=۰\Rightarrow b=-\frac{a}{۲}(*)$$

$$f^{-۱}(۸)=۵\Rightarrow f(۵)=۸\xrightarrow{\text{جایگذاری}}۸=\sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}$$

$$۲^{۵a+b}=۲^۹\Rightarrow ۵a+b=۹\xrightarrow{(*)}۵a-\frac{a}{۲}=۹\Rightarrow \frac{۹a}{۲}=۹\Rightarrow a=۲\xrightarrow{(*)}b=-۱$$

در آخر داریم:

$$a-b=۲-(-۱)=۳$$

۳ گزینه ۳

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{۰} = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(-۱) = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{-۱} = -۱$$
$$\Rightarrow a + ۲b = -۱ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ a + ۲b = -۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱, \ a = ۱$$

$$a - b = ۱ - (-۱) = ۲$$

۴ گزینه ۲

نمودار تابع نمایی، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، ولی محور xها را قطع نمی‌کند؛ بنابراین گزینهٔ "۱" درست می‌باشد. در نمودار تابع نمایی $y = a^x$، اگر $a > ۱$ باشد، نمودار حالت افزایش و اگر $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار حالت کاهشی دارد؛ یعنی از چپ به راست با زیاد شدن xها، yها کاهش می‌یابد. در دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ چون $۰ < a < ۱$ می‌باشد، بنابراین نمودارها حالت کاهشی دارند؛ در نتیجه گزینهٔ "۴" نیز درست می‌باشد. همچنین در هر دو حالت $a > ۱$ و $۰ < a < ۱$، هر چقدر مقدار a بیش‌تر شود، به ازای xهای مثبت، نمودار بالاتر می‌رود و به ازای xهای منفی، نمودار پایین‌تر می‌رود. چون $\frac{۱}{۳} > \frac{۱}{۵}$ می‌باشد، بنابراین در $x > ۰$، نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ و در $x < ۰$، نمودار $y_۱$ پایین نمودار $y_۲$ قرار دارد؛ بنابراین گزینهٔ "۲" نادرست می‌باشد.

۵ گزینه ۳

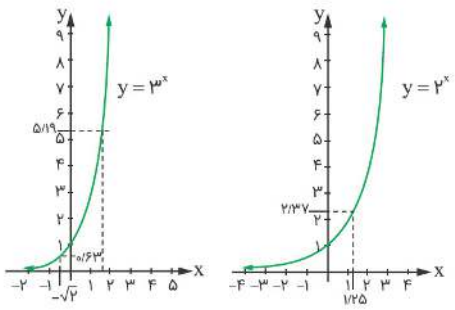
نمودار داده‌شده کاهشی است؛ یعنی با افزایش مقادیر x، مقادیر y کاهش می‌یابند. بنابراین در ضابطهٔ تابع نمایی $y = a^x$، a باید عددی بین صفر و یک باشد، که تنها گزینهٔ "۳" این شرط را داراست.

۶

الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}} \simeq ۰/۶۳$

ب) $۲^{۱/۲۵} \simeq ۲/۳۷$

پ) $۳^{\frac{۳}{۴}} \simeq ۵/۱۹$



۷

$۳^{\sqrt{۸}}$, $۳^{\sqrt{۷}}$, $۳^{\sqrt{۶}}$

۸

$۲^{۴x-۲} > ۲^{-۱۰} \Rightarrow ۴x - ۲ > -۱۰ \Rightarrow ۴x > -۸ \Rightarrow x > -۲$

۹

$x > y > z$

۱۰

$$۲^{۵x-۱} = \frac{۱}{۲^{۶}} \Rightarrow ۲^{۵x-۱} = ۲^{-۶} \Rightarrow ۵x - ۱ = -۶$$
$$\Rightarrow ۵x = -۵ \Rightarrow x = -۱$$

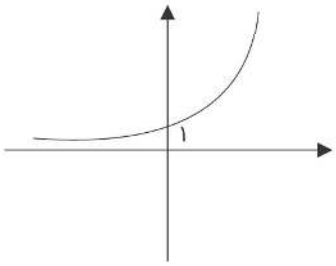
۱۱

$$\log(۳(۳ + x)) = \log(۲(۳x + ۱)) \Rightarrow ۳(۳ + x) = ۲(۳x + ۱)$$
$$\Rightarrow ۹ + ۳x = ۶x + ۲ \Rightarrow x = \frac{۷}{۳}$$

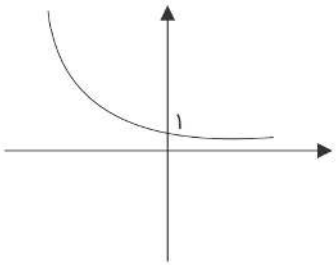
۱۲

گزینه ۲

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > ۱$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود:



و اگر $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود.

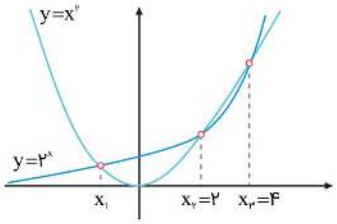


چون $\frac{۵}{\sqrt{۶}} > ۱$ می‌باشد، درنتیجه نمودار مشابه گزینهٔ ۲ خواهد بود.

۱۳ گزینه ۱

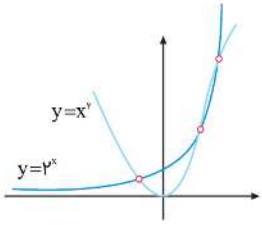
$۲^x = x^۲$

به روش هندسی، مشخص می‌شود معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.



۱۴ گزینه ۴

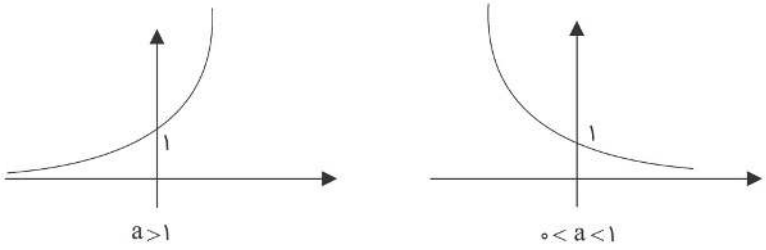
با ترسیم دو نمودار $y = x^۲$ و $y = ۲^x$ در یک دستگاه مختصات خواهیم داشت:



در دو نقطه با طول‌های $x = ۲$ و $x = ۴$ دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۵ گزینه ۲

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش x مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر با کاهش مقدار x ، مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند. اگر $a > 1$ باشد، با افزایش x، yها نیز زیاد می‌شود.



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱ :

$y = ۳^x \qquad a > ۱ \quad \times$

گزینه ۲ :

$y = (\frac{۸}{۷})^{-x} = (\frac{۷}{۸})^x \qquad ۰ < a < ۱$

گزینه ۳ :

$y = (\frac{۱}{۶})^{-x} = (۶)^x \qquad a > ۱ \quad \times$

گزینه ۴ :

$y = (\sqrt{۵})^x \qquad a > ۱ \quad \times$

۱۶ گزینه ۳

$۴^{۲x-۱} \geq \frac{۱}{۱۰۲۴} \Rightarrow (۲^۲)^{۲x-۱} \geq ۲^{-۱۰} \Rightarrow ۴x - ۲ \geq -۱۰ \Rightarrow ۴x \geq -۸ \Rightarrow x \geq -۲$

۱۷ گزینه ۴

$$(۲^{\frac{۱}{۴}})^{۲x^۲-x} \geq (۲^۲)^{x^۲+x+۲} \Rightarrow ۲^{x^۲-\frac{۱}{۲}x} \geq ۲^{۲x^۲+۲x+۴}$$
$$\Rightarrow x^۲ - \frac{۱}{۲}x \geq ۲x^۲ + ۲x + ۴ \Rightarrow x^۲ + \frac{۵}{۲}x + ۴ \leq ۰ \ (*)$$

$$\Delta = \frac{۲۵}{۴} - ۱۶ = \frac{-۳۹}{۴} < ۰$$

باتوجه‌به (*) علامت عبارت درجهٔ دوم همواره موافق ضریب $x^۲$ می‌باشد و مثبت است، پس ازآنجایی‌که $\Delta < ۰$ نامعادله بدون جواب می‌باشد.

۱۸ گزینه ۲

$$f(۱) = ۲ : ۲^{a+b} = ۲ \Rightarrow a + b = ۱$$
$$f(-۱) = ۸ : ۲^{-a+b} = ۲^۳ \Rightarrow -a + b = ۳$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ -a + b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = -۱ \ , \ b = ۲$$

$$f(x) = ۲^{-x+۲}$$
$$f(۰) = ۲^۲ = ۴$$

۱۹ گزینه ۱

$$۴^x + ۲ = ۳ \times ۲^{x+۱} - ۶$$
$$(۲^۲)^x + ۲ = ۳ \times ۲ \times ۲^x - ۶$$
$$(۲^x)^۲ - ۶ \times ۲^x + ۸ = ۰ \xrightarrow{۲^x = t} t^۲ - ۶t + ۸ = ۰$$

$$(t - ۲)(t - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow ۲^x = ۲ \Rightarrow x_۱ = ۱ \\ t = ۴ \Rightarrow ۲^x = ۲^۲ \Rightarrow x_۲ = ۲ \end{cases}$$

$$x_۱ + x_۲ = ۱ + ۲ = ۳$$

۲۰ گزینه ۴

$$(۲^۲)^{۲x-۱} > (۲^{\frac{۱}{۴}})^{۴x^۲} \Rightarrow ۲^{۴x-۲} > ۲^{۲x^۲}$$
$$۴x - ۲ > ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۲ < ۰$$

$$x^۲ - ۲x + ۱ < ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ < ۰ \Rightarrow \text{غ‌ق‌ق} \Rightarrow \text{جواب} = \varnothing$$

BOX 2: تابع لگاریتمی (صفحه ۱۰۵ تا ۱۱۱ کتاب درسی)

در بستهٔ قبل و با توجه به نمودار تابع نمایی، هر تابع نمایی، تابعی یک‌به‌یک است و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می‌نامیم. در این BOX نمایش تابع لگاریتمی، نمودار و برخی از ویژگی‌های آن گفته می‌شود.

تابع لگاریتمی

همان‌طور که دیده‌ایم، اگر دو تابع f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند، آن‌گاه:

۱) دامنهٔ تابع f با برد تابع f^{-1} و برد تابع f با دامنهٔ f^{-1} برابر است، یعنی: $D_{f^{-1}} = R_f \ , \ R_{f^{-1}} = D_f$

۲) اگر $f(a) = b$ ، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$

۳) با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y = x$ ، نمودار f^{-1} به دست می‌آید.

تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می‌گوییم. وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم. ($\log_a x$ را می‌خوانیم لگاریتم x در مبنای a)، بنابراین:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x \quad (a > 0 , a \neq 1)$$

مثال: با توجه به نمادگذاری انجام‌شده، اگر $f(x) = 3^x$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(x) = \log_3 x$ می‌باشد و داریم:

$$f(2) = 3^2 = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = \log_3 9 = 2 \ , \ f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{27} \Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{27}) = \log_3 \frac{1}{27} = -3$$

نکته: برای تبدیل یک تساوی نمایی به لگاریتم و همچنین تبدیل تساوی لگاریتمی به نمایی از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

تمرین: هر یک از تساوی‌های نمایی زیر را به صورت یک تساوی لگاریتمی بنویسید. *(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰ کتاب درسی)*

آ) $2^5 = 32$ ب) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

پاسخ: با استفاده از رابطهٔ «اگر $a^x = y$ ، آن‌گاه $\log_a y = x$»، هر یک از تساوی‌ها را به صورت یک تساوی لگاریتمی می‌نویسیم:

آ) $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$ ب) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

تمرین: هر یک از تساوی‌های لگاریتمی زیر را به صورت یک تساوی نمایی بنویسید. *(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰ کتاب درسی)*

آ) $\log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$ ب) $\log_{\frac{1}{16}} 8 = -\frac{3}{4}$

پاسخ: اگر $\log_b a = c$ ، آن‌گاه $a = b^c$ ، پس داریم:

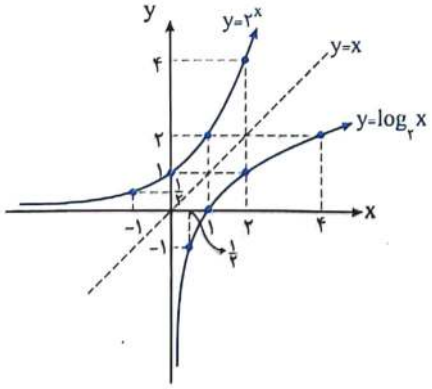
آ) $\log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ ب) $\log_{\frac{1}{16}} 8 = -\frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}} = 8$

نکته: اگر a عددی حقیقی و مثبت $(a \neq 1)$ باشد، آن‌گاه: ۱) $a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$ ۲) $a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$

تذکر: چون در تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ ، a همواره عددی مثبت و مخالف یک است، پس در تابع لگاریتمی با ضابطهٔ $y = \log_a x$ ، a عددی مثبت و مخالف یک می‌باشد.

تمرین: نمودار تابع $f(x) = \log_2 x$ را رسم کنید و مشخص کنید عدد $\log_2 3$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

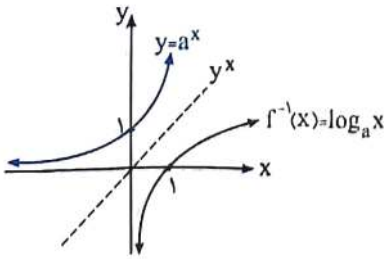
پاسخ: تابع $f(x)=\log_{۲} x$ وارون تابع نمایی $y=۲^{x}$ است. نمودار دو تابع f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند. پس اگر نقاط روی نمودار $y=۲^{x}$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، نمودار تابع $f(x)=\log_{۲} x$ به دست می‌آید:



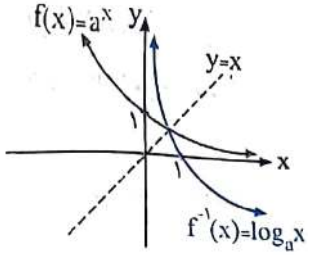
عدد ۲ بین دو عدد ۲ و ۴ قرار دارد. بنابراین $\log_{۲} ۳$ بین دو عدد $\log_{۲} ۲=۱$ و $\log_{۲} ۴=۲$ قرار می‌گیرد.

ویژگی‌های تابع لگاریتمی $f^{-۱}(x)=\log_a x$

۱) نمودار تابع $f^{-۱}(x)=\log_a x$ وقتی که $a>۱$ باشد، مانند نمودار $y=\log_{۲} x$ است و نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد:



و نمودار تابع $f^{-۱}(x)=\log_a x$ وقتی که $۰<a<۱$ باشد، با توجه به نمودار $f(x)=a^{x}$ به صورت مقابل می‌باشد:



۲) دامنه و برد تابع $f^{-۱}(x)=\log_a x$ با توجه به نمودار به صورت مقابل می‌باشد: $D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)\ ,\ R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

$D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)$ به این معنی است که لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود. لگاریتم برای اعداد منفی و صفر، بی‌معنی است.

۳) نمودار تابع، محور xها را در نقطهٔ $(۱,۰)$ قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

۴) تابع $f(x)=\log_a x$ یک تابع یک‌به‌یک است، زیرا خطوط موازی با محور xها، نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۵) اگر $a>۱$، آن‌گاه مقدار $y=\log_a x$ با افزایش x، بیشتر می‌شود و اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه مقدار $y=\log_a x$ با افزایش x، کم‌تر می‌شود.

تمرین: در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

۱) $\log_{۲} ۷ \bigcirc \log_{۲} ۵$ ۲) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۴ \bigcirc \log_{\frac{۱}{۳}} ۶$ ۳) $\log_{۵} \frac{۳}{۵} \bigcirc \log_{۵} \sqrt{۲}$

پاسخ: ۱) مبنای لگاریتم (برابر ۲) بزرگ‌تر از یک است. هر چه عدد بزرگ‌تر باشد، مقدار لگاریتم نیز بیشتر است:

$$۷ > ۵ \Rightarrow \log_{۲} ۷ > \log_{۲} ۵$$

۲) مبنای لگاریتم (عدد $\frac{۱}{۳}$) بین صفر و یک است. هر چه عدد بزرگ‌تر باشد، مقدار لگاریتم کم‌تر است:

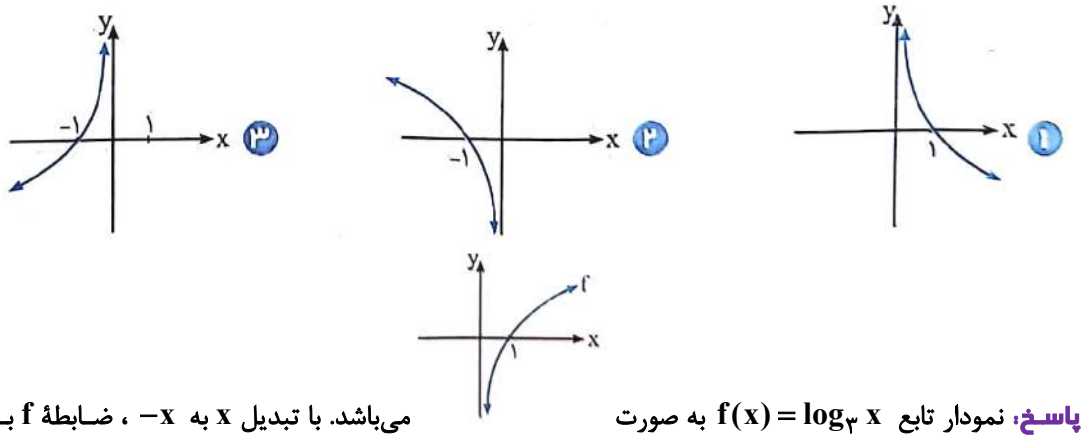
$$۶ > ۴ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۳}} ۶ < \log_{\frac{۱}{۳}} ۴$$

۳) مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از یک است، همانند قسمت (۱) داریم:

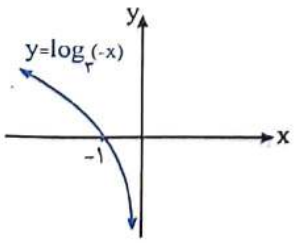
$$\frac{۳}{۵} = ۰/۶ < \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \Rightarrow \log_{۵} \sqrt{۲} > \log_{۵} \frac{۳}{۵}$$

یادآوری: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم و آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم، آن‌گاه نمودار حاصل، نمودار تابع $y = f(-x)$ خواهد بود.

تمرین: کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{۳}(-x)$ است؟



پاسخ: نمودار تابع $f(x) = \log_{۳} x$ به صورت $y = \log_{۳}(-x)$ می‌باشد. با تبدیل x به $-x$ ، ضابطهٔ f به صورت $y = f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم (قرینهٔ نقطهٔ $(۱,۰)$ نسبت به محور yها برابر $(-۱,۰)$ است):



تذکر: لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود. به عنوان مثال، به جای $\log_{۱۰} ۷$ می‌نویسیم $\log ۷$.

دامنهٔ توابع لگاریتمی

لگاریتم برای صفر و منفی تعریف نمی‌شود و هم‌چنین مبنای لگاریتم عددی مثبت و مخالف یک است.

نکته: دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ از حل نامعادلات $g(x) > ۰$ (لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود)، $h(x) > ۰$ و $h(x) \neq ۱$ (در لگاریتم، مبنا عددی مثبت و مخالف یک می‌باشد) به دست می‌آید.

تمرین: دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{x-۳}(x^{۲} - ۲x)$ را به دست آورید.

پاسخ: لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود: $x^۲-۲x>۰$

برای حل نامعادلهٔ $x^۲-۲x>۰$ ، عبارت $P=x^۲-۲x$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$P=۰ \Rightarrow x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

x		۰		۲	
$x^۲-۲x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$P>۰ \Rightarrow x<۰ \text{ یا } x>۲ \quad (۱)$$

همچنین مبنای لگاریتم باید عددی مثبت و مخالف یک باشد:

$$x-۲>۰ \ , \ x-۳\neq ۱ \Rightarrow x>۳ , x\neq ۴ \quad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow D_f : x>۳ \ , \ x\neq ۴ \Rightarrow D_f=(۳,۴)\cup(۴,+\infty)$$

پرسش‌های تشریحی:

● کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست می‌باشد؟

۱- نمودار توابع $y=۳^x$ و $y=\log_۳ x$ نسبت به محور yها قرینه هستند.

۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۳ x$ بازهٔ $(۰,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۳- اگر $a^b=c$ ، آن‌گاه $\log_a c=b$ $(a,c>۰ \ , \ a\neq ۱)$

۴- تابع $y=\log_{\frac{۱}{۴}} x$ ، تابعی غیر یک‌به‌یک است.

۵- اگر a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، آن‌گاه $\log_a ۱=۰$ است. *(شهریور ۱۴۰۲)*

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۶- دامنهٔ‌تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ $(a>۰ , a\neq ۱)$ ، ..... و برد آن ..... است.

۷- وارون تابع نمایی، تابع ..... است و وارون تابع لگاریتمی، تابع ..... است.

۸- نمودار تابع $y=\log_a x$ ، محور xها را در نقطهٔ ..... قطع می‌کند و محور yها را قطع ..... .

۹- مقدار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۴}} x$ با افزایش x، ..... می‌یابد.

۱۰- با استفاده از نماد لگاریتم، تساوی‌های داده‌شدهٔ زیر را به صورت یک تساوی لگاریتمی بنویسید. *(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰ کتاب درسی)*

آ) $۲^۳=۸$ ب) $۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$ پ) $۱۰^۰=۱$

۱۱- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

آ) $\log_{۴} ۵ \; \bigcirc \; \log_{۴} ۶$

ب) $\log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۳}{۴} \; \bigcirc \; \log_{\frac{۱}{۲}} ۰/۸$

پ) $\log ۳ \; \bigcirc \; \log \sqrt{۸}$

ت) $\log_{۰/۳} ۱۲ \; \bigcirc \; \log_{۰/۳} ۱۳$

۱۲- به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) نمودار تابع $y = \log x$ را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(۸,۳)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

۱۳- مشخص کنید هر یک از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرند؟

آ) $\log_{۲} ۵۷$

ب) $\log_{۳} ۲۰۰$

پ) $\log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳۰}$

۱۴- دامنهٔ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ) $f(x) = \log(x - ۳)$

ب) $g(x) = \log_{x-۲}(x^{۲} - x)$

پ) $h(x) = \log_{x-۳} \frac{x - ۲}{۴ - x}$

Homework

۱ دامنه تعریف تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{\log_{۲}(x-۲)}}$ کدام است؟

۱) $(۳,+\infty)$ ۲) $(۲,+\infty)$

۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۲,+\infty)$

۲ باتوجه‌به نمودارهای $y_۱=(\frac{۱}{۳})^x$ و $y_۲=(\frac{۱}{۵})^x$، کدام گزینه نادرست است؟

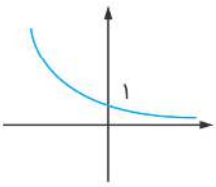
۱) هر دو نمودار، محور yها را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کنند.

۲) به ازای $x<۰$، نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ قرار دارد.

۳) به ازای $x>۰$، نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ قرار دارد.

۴) نمودار هر دو تابع، حالت کاهشی دارند.

۳ کدام ضابطهٔ زیر می‌تواند مربوط به نمودار باشد؟



۱) $y=(۷)^x$

۲) $y=(\frac{۹}{۸})^x$

۳) $y=(\frac{۱}{۶})^x$

۴) $y=(\sqrt{۳}+۱)^x$

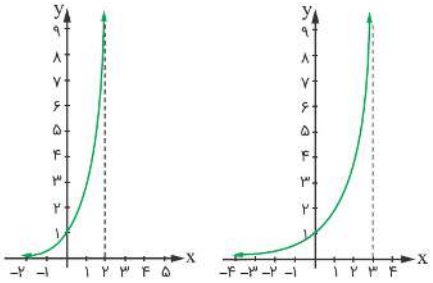
۴ اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt{۲}$ در مبنای x برابر با $۴/۵$ باشد، لگاریتم چه عددی در مبنای $x^۲$ برابر ۳ است؟

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین‌حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}}$

ب) $۲^{۱/۲۵}$

پ) $۳^{\frac{۳}{۲}}$



به سؤالات داده شده پاسخ دهید.

۶ سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

۷ اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $a^z > a^y > a^x$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $(a > ۱)$

معادلات زیر را حل کنید.

۸

$$۲^{۵x-۱} = \frac{۱}{۶۴}$$

۹

$$\log ۳ + \log(۳ + x) = \log(۳x + ۱) + \log ۲$$

۱۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = ۱ + ۳^{x-۲}$ کدام است؟

۱) $y = ۱ + \log_۳(x - ۲)$

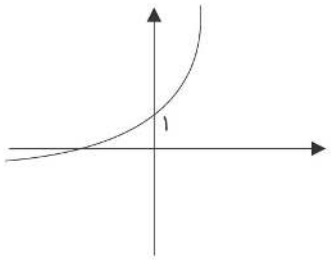
۲) $y = ۲ - \log_۳(x + ۱)$

۳) $y = ۲ + \log_۳(x - ۱)$

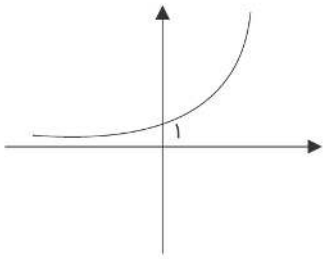
۴) $y = ۱ - \log_۳(x + ۲)$

۱۱ نمودار $y = (\frac{۵}{\sqrt{۶}})^x$ مشابه کدام نمودار زیر است؟

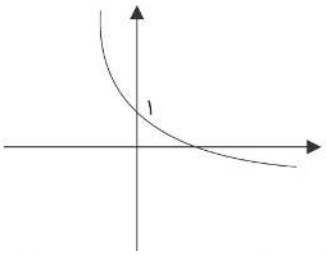
۱)



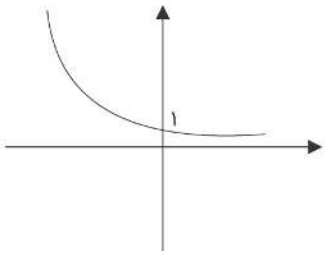
۲)



۳)



۴)



۱۲ در کدام‌یک از توابع نمایی زیر با افزایش x مقدار y کم می‌شود؟

۱) $y = ۳^x$

۲) $y = (\frac{۸}{۷})^{-x}$

۳) $y = (\frac{۱}{۶})^{-x}$

۴) $y = (\sqrt{۵})^x$

۱۳ دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{(x+۱)}(۹ - x^۲)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) یک

۲) دو

۳) سه

۴) بدون عدد صحیح

۱۴ اگر $f(x) = \log_{۳}(x-۱)$ باشد، مقدار $f(f^{-۱}(۲) - ۶)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۵ دامنهٔ تابع $f(x) = \log \frac{x^{۲} - ۴x + ۴}{x + ۳}$ کدام است؟

۱) $(-۳ , ۲) \cup (۲ , +\infty)$ ۲) $(-۴ , +\infty)$

۳) $(-۳ , +\infty)$ ۴) $(-۴ , ۲)$

۱۶ اگر $\sqrt[۳]{۲} = ۴^{۲x} + ۴^{-۲x}$ باشد، حاصل $\log_{۴}(-x) + \log_{۳}(۶x + ۱۰)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۷ دامنهٔ تعریف $f(x) = \log_{(x-۲)}(۵x - x^{۲})$ کدام است؟

۱) $(۰, ۵) - \{۳\}$ ۲) $(۲, ۵) - \{۳\}$

۳) $(۰, +\infty) - \{۳\}$ ۴) $(۲, +\infty) - \{۳\}$

۱۸ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(\sqrt{۲})^{۲x^{۲}-x} \geq ۴^{x^{۲}+x+۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۱, ۲]$ ۲) $[\frac{۵}{۲}, +\infty)$

۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۱۹ ضابطهٔ وارون تابع $y = \log_{۳}(۲x - ۱) - ۱$ کدام است؟

۱) $y = \frac{۱}{۲}(۳^{x-۱} + ۱)$ ۲) $y = \frac{۱}{۲}(۳^{x+۲} + ۲)$

۳) $y = \frac{۱}{۲}(۳^{x+۱} + ۱)$ ۴) $y = \frac{۱}{۲}(۳^{x-۲} + ۲)$

۲۰ دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{(x+۱)}(۹ - x^{۲})$ دارای چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بدون عدد صحیح

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

$$x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲$$

$$\log_۲(x - ۲) > ۰ \Rightarrow x - ۲ > ۲^۰ \Rightarrow x > ۳$$

اشتراک بازه‌های به‌دست آمده دامنه تابع است.

$$D = (۲, +\infty) \cap (۳, +\infty) = (۳, +\infty)$$

۲ گزینه ۲

نمودار تابع نمایی، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، ولی محور xها را قطع نمی‌کند؛ بنابراین گزینهٔ "۱" درست می‌باشد. در نمودار تابع نمایی $y = a^x$، اگر $a > ۱$ باشد، نمودار حالت افزایش و اگر $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار حالت کاهشی دارد؛ یعنی از چپ به راست با زیاد شدن xها، yها کاهش می‌یابد. در دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ چون $۰ < a < ۱$ می‌باشد، بنابراین نمودارها حالت کاهشی دارند؛ در نتیجه گزینهٔ "۴" نیز درست می‌باشد. همچنین در هر دو حالت $a > ۱$ و $۰ < a < ۱$، هر چقدر مقدار a بیش‌تر شود، به ازای xهای مثبت، نمودار بالاتر می‌رود و به ازای xهای منفی، نمودار پایین‌تر می‌رود. چون $\frac{۱}{۳} > \frac{۱}{۵}$ می‌باشد، بنابراین در $x > ۰$، نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ و در $x < ۰$، نمودار $y_۱$ پایین نمودار $y_۲$ قرار دارد؛ بنابراین گزینهٔ "۲" نادرست می‌باشد.

۳ گزینه ۳

نمودار داده‌شده کاهشی است؛ یعنی با افزایش مقادیر x، مقادیر y کاهش می‌یابند. بنابراین در ضابطهٔ تابع نمایی $y = a^x$، a باید عددی بین صفر و یک باشد، که تنها گزینهٔ "۳" این شرط را داراست.

۴

$$\log_x ۲\sqrt{۲} = ۴/۵ \Rightarrow x^{۴/۵} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x^{\frac{۹}{۲}} = ۲^{\frac{۳}{۲}}$$

$$x = ۲^{\frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۹}} \Rightarrow x = ۲^{\frac{۱}{۳}}$$

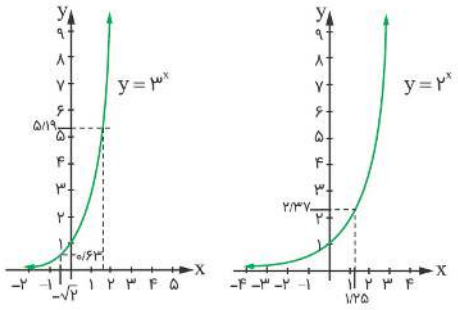
$$\log_{۲^{\frac{۲}{۳}}} y = ۳ \Rightarrow y = \left(۲^{\frac{۲}{۳}}\right)^۳ = ۲^۲ = ۴$$

۵

الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}} \simeq ۰/۶۳$

ب) $۲^{۱/۲۵} \simeq ۲/۳۷$

پ) $۳^{\frac{۳}{۲}} \simeq ۵/۱۹$



پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

۶

$۳^{\sqrt{۸}}$, $۳^{\sqrt{۷}}$, $۳^{\sqrt{۶}}$

۷

$x > y > z$

پاسخ سؤالات ۸ تا ۹

۸

$$۲^{۵x-۱} = \frac{۱}{۲۶} \Rightarrow ۲^{۵x-۱} = ۲^{-۶} \Rightarrow ۵x - ۱ = -۶$$
$$\Rightarrow ۵x = -۵ \Rightarrow x = -۱$$

۹

$$\log(۳(۳ + x)) = \log(۲(۳x + ۱)) \Rightarrow ۳(۳ + x) = ۲(۳x + ۱)$$
$$\Rightarrow ۹ + ۳x = ۶x + ۲ \Rightarrow \ x = \frac{۷}{۳}$$

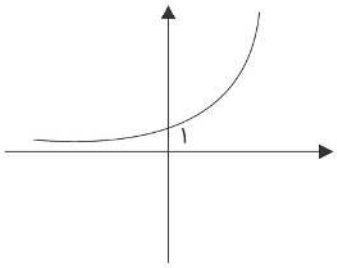
۱۰

گزینه ۳

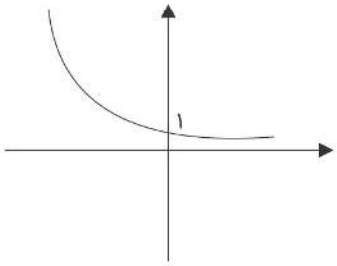
$$y = ۱ + ۳^{x-۲} \Rightarrow ۳^{x-۲} = y - ۱$$
$$x - ۲ = \log_{۳}(y - ۱) \Rightarrow \ x = \log_{۳}(y - ۱) + ۲$$
$$f^{-۱}(x) = ۲ + \log_{۳}(x - ۱)$$

۱۱ گزینه ۲

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > ۱$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود:



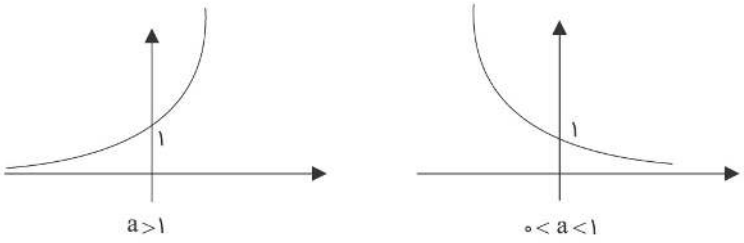
و اگر $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار به شکل زیر خواهد بود.



چون $\frac{۵}{\sqrt{۶}} > ۱$ می‌باشد، درنتیجه نمودار مشابه گزینهٔ ۲ خواهد بود.

۱۲ گزینه ۲

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش x مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر با کاهش مقدار x ، مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند. اگر $a > 1$ باشد، با افزایش x، yها نیز زیاد می‌شود.



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱ :

$y = ۳^x \quad a > ۱ \quad \times$

گزینه ۲ :

$y = (\frac{۸}{۷})^{-x} = (\frac{۷}{۸})^x \quad ۰ < a < ۱$

گزینه ۳ :

$y = (\frac{۱}{۶})^{-x} = (۶)^x \quad a > ۱ \quad \times$

گزینه ۴ :

$y = (\sqrt{۵})^x \quad a > ۱ \quad \times$

۱۳ گزینه ۲

$$\begin{cases} ۹ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۹ \Rightarrow |x| < ۳ \Rightarrow -۳ < x < ۳ \\ x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱ \\ x + ۱ \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۰ \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D = (-۱, ۳) - \{۰\}$

اعداد صحیح دامنه $= \{۱, ۲\}$

۱۴ گزینه ۱

برای محاسبه $f^{-1}(۲)$، تابع f را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\log_۳(x-۱)=۲ \Rightarrow x-۱=۳^۲ \Rightarrow x=۱۰ \Rightarrow f^{-1}(۲)=۱۰$$

$$f(f^{-1}(۲)-۶)=f(۱۰-۶)=f(۴)=\log_۳ ۳=۱$$

۱۵ گزینه ۱

$$\frac{x^۲-۴x+۴}{x+۳}>۰ \Rightarrow \frac{(x-۲)^۲}{x+۳}>۰ \xrightarrow{x\neq ۲} x+۳>۰ \Rightarrow x>-۳\ ,\ x\neq ۲ \Rightarrow D=(-۳\ ,\ ۲)\cup(۲\ ,\ +\infty)$$

۱۶ گزینه ۱

$$۴^{۲x}+۴^{۲x}=\sqrt[۳]{۲} \Rightarrow ۲\times ۴^{۲x}=۲^{\frac{۱}{۳}}=۲^{۱+۴x}=۲^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow ۱+۴x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۴x=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۶}$$

$$a=\log_۳(۶x+۱۰)=\log_۳(۶\times\frac{-۱}{۶}+۱۰)=\log_۳ ۹=۲$$

$$b=\log_۶(-x)=\log_۶\frac{۱}{۶}=-۱ \Rightarrow a+b=۲-۱=۱$$

۱۷ گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} ۵x-x^۲>۰ \Rightarrow ۰<x<۵ \\ x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \\ x-۲\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(۲,۵)-\{۳\}$$

۱۸ گزینه ۴

$$(۲^{\frac{۱}{۴}})^{۲x^۲-x} \geq (۲^۲)^{x^۲+x+۲} \Rightarrow ۲^{x^۲-\frac{۱}{۴}x} \geq ۲^{۲x^۲+۲x+۴}$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۱}{۲}x \geq ۲x^۲+۲x+۴ \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x+۴ \leq ۰\ (*)$$

$$\Delta=\frac{۲۵}{۴}-۱۶=\frac{-۳۹}{۴}<۰$$

باتوجه‌به (*) علامت عبارت درجهٔ دوم همواره موافق ضریب $x^۲$ می‌باشد و مثبت است، پس ازآنجایی‌که $\Delta<۰$ نامعادله بدون جواب می‌باشد.

۱۹ گزینه ۳

$$\log_{۳}(۲x-۱)=y+۱\Rightarrow ۲x-۱=۳^{y+۱}$$
$$۲x=۳^{y+۱}+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(۳^{y+۱}+۱)$$
$$f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}(۳^{x+۱}+۱)$$

۲۰ گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}۹-x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}<۹\Rightarrow |x|<۳\Rightarrow -۳<x<۳\\ x+۱>۰\Rightarrow x>-۱\\ x+۱\neq ۱\Rightarrow x\neq ۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} D=(-۱,۳)-\{۰\}$$

BOX 3: ویژگی‌های لگاریتم ـ معادلات لگاریتمی (صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۴ کتاب درسی)

برای ساده‌کردن محاسبات در عبارت‌های لگاریتمی از قوانینی استفاده می‌کنیم که در این BOX به آن‌ها اشاره می‌کنیم. این قوانین باید حفظ شوند.

الف) ویژگی‌های لگاریتم

۱) اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، آن‌گاه $\log_a \frac{1}{a} = -1$ ، $\log_a a = 1$ و $\log_a 1 = 0$ ، زیرا:

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0 \ , \ a^1 = a \Leftrightarrow \log_a = 1 \ , \ a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{a} = -1$$

لگاریتم عمل ضرب را به جمع تبدیل می‌کند.

۲) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و c یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\log_c ab = \log_c a + \log_c b}$$

نکته: ویژگی (۲) را می‌توان برای هر تعداد عدد حقیقی استفاده کرد:

$$\log_c abd\cdots = \log_c a + \log_c b + \log_c d + \cdots (a,b,c,d,\ldots > 0 \ , \ c \neq 1)$$

۳) اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$$

تمرین: اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ باشد، مقدار $\log 12$ را محاسبه کنید.

پاسخ: عدد ۱۲ را به صورت $3 \times 2^2 = 12$ می‌نویسیم. بنابراین:

$$\log 12 = \log(2^2 \times 3) \xrightarrow{\text{ضرب به جمع تبدیل می‌شود}} \log 2^2 + \log 3 = 2\log 2 + \log 3 = 2 \times 0/3 + 0/48 = 0/6 + 0/48 = 1/08$$

نکته: ۱) در ویژگی (۳)، به جای n هر عدد حقیقی نیز قرار بگیرد، تساوی برقرار است. $\log_a b^x = x \log_a b (a,b > 0 , a \neq 1)$

۲) در محاسبهٔ لگاریتم، اگر مبنا توان داشته باشد از قاعدهٔ مقابل برای ساده کردن استفاده می‌کنیم: $\log_{b^x} a = \frac{1}{x} \log_b a (a,b > 0 , b \neq 1)$

توجه کنید که در این حالت، توان مبنا را با معکوس کردن، به عنوان ضریب برای لگاریتم می‌نویسیم.

تذکر: دو نکتهٔ قبل را می‌توان به صورت روبه‌رو ادغام کرد:

$$\boxed{\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a}$$

نکته: در مسائل لگاریتم و برای به دست آوردن حاصل، معمولاً باید عدد جلوی لگاریتم و مبنا به فرم اعداد توان‌دار با پایهٔ یکسان نوشته شوند

یعنی باید اعداد مرکب را تجزیه کنیم، اعداد اعشاری را به صورت کسر بنویسیم واعداد رادیکالی را با استفاده از فرمول $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ به صورت عدد توان‌دار بنویسیم.

تمرین: حاصل $\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[3]{5} + \log_8 16$ را به دست آورید.

پاسخ: اعداد $\frac{1}{25}$ و $5\sqrt[3]{5}$ را به صورت اعداد توان‌دار با پایهٔ ۵ می‌نویسیم. هم‌چنین دو عدد ۱۶ و ۸ را به صورت عدد توان‌دار با پایهٔ ۲ می‌نویسیم:

$$\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[3]{5} = \log_{\frac{1}{5^2}} 5 \times 5^{\frac{1}{3}} = \log_{5^{-2}} 5^{1+\frac{1}{3}} = \log_{5^{-2}} 5^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{-2}{1}} \cancel{\log_5 5}^{1} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \cancel{\log_2 2}^{1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{-2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

لگاریتم عمل تقسیم را به تفریق تبدیل می‌کند.

۴) برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c $(c \neq 1)$، داریم: $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$

نکته: با توجه به قانون $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ و تساوی $\log_{10} 10 = 1$ ، داریم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 \ , \ \log 2 = 1 - \log 5$$

تمرین: با فرض $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/47$ ، مقدار عددی عبارت $\log \frac{24}{25}$ را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۲ کتاب درسی)

پاسخ: ابتدا از ویژگی $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ استفاده می‌کنیم و سپس هر یک از دو عدد ۲۴ و ۲۵ را تجزیه می‌کنیم:

$$\log \frac{24}{25} = \log 24 - \log 25 = \log(2^3 \times 3) - \log 5^2 = (\log 2^3 + \log 3) - 2\log 5$$

$$= 3\log 2 + \log 3 - 2\log 5 \overset{\log 5 = 1 - \log 2}{=\!=\!=} 3\log 2 + \log 3 - 2(1 - \log 2) = 5\log 2 + \log 3 - 2 = 5(0/3) + 0/47 - 2 = -0/03$$

در برخی از مسائل لگاریتمی، مبنای لگاریتم در فرض با مبنای لگاریتم خواسته‌شده متفاوت است. برای حل این مسائل از ویژگی زیر استفاده می‌کنیم.

۵) قانون تغییر مبنا: $\boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (a,b,c > 0 \ , \ b,c \neq 1)}$

تمرین: اگر $\log_2 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{18} 24$ را برحسب a به دست آورید.

پاسخ: چون مبنای لگاریتم در فرض عدد ۲ می‌باشد، با استفاده از قانون تغییر مبنا، $\log_{18} 24$ را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$\log_{18} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 18} = \frac{\log_2(2^3 \times 3)}{\log_2(2 \times 3^2)} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3^2} = \frac{3\log_2 2 + \log_2 3}{1 + 2\log_2 3} = \frac{3 + a}{1 + 2a}$$

حالت خاص ویژگی (۵) به صورت زیر می‌باشد:

نکته: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند، آن‌گاه: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ یا $\log_b a . \log_a b = 1$

۶) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

مثال: $4^{\log_4 5} = 5$

تمرین: حاصل $3^{3+2\log_3 2}$ را به دست آورید.

پاسخ: عبارت $3^{3+2\log_3 2}$ را به صورت $3^3 \times 3^{2\log_3 2}$ می‌نویسیم. برای به دست آوردن حاصل $3^{2\log_3 2}$، داریم:

$$2\log_3 2 = \log_3 2^2 = \log_3 4 \Rightarrow 3^{2\log_3 2} = 3^{\log_3 4} = 4 \Rightarrow 3^3 \times 3^{2\log_3 4} = 3^3 \times 4 = 27 \times 4 = 108$$

یکی از سوالات مربوط به لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است.

ب) معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، ابتدا دامنهٔ تعریف معادله را پیدا می‌کنیم، سپس از خواص و ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به یکی از دو صورت $\log_b f(x)=a$ یا $\log_b f(x)=\log_b g(x)$ درمی‌آوریم.

۱) اگر $\log_b f(x)=a$ ، آن‌گاه $f(x)=b^a$ و با حل این معادله، جواب‌هایی را که در دامنهٔ تعریف قرار دارند، مشخص می‌کنیم.

۲) اگر $\log_b f(x)=\log_b g(x)$ ، آن‌گاه $f(x)=g(x)$ و با حل معادلهٔ اخیر، جواب‌هایی را که در دامنهٔ تعریف قرار دارند، مشخص می‌کنیم.

تمرین: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\log_2(3x-1)=3$ ۲) $\log_5(2x-1)+\log_5(3x-5)=-\log_{\frac{1}{5}}5$

پاسخ: ۱)

حدود ط: $3x-1>0 \Rightarrow 3x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$

$\log_2(3x-1)=3 \Rightarrow 3x-1=2^3 \Rightarrow 3x=8+1=9 \Rightarrow x=3>\frac{1}{3}$ ✓ پط $x=3$ جواب معادله است.

۲)

$-\log_{\frac{1}{5}}5=-\log_{5^{-1}}5=\log_5 5$

حدود x: $2x-1>0\ ,\ 3x-5>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}\ ,\ x>\frac{5}{3} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>\frac{5}{3}$

$\log_5(2x-1)+\log_5(3x-5)=\log_5((2x-1)(3x-5))=\log_5 5 \Rightarrow (2x-1)(3x-5)=5$

$\Rightarrow 6x^2-13x+5=5 \Rightarrow 6x^2-13x=0 \Rightarrow x(6x-13)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=\frac{13}{6} \xrightarrow{x>\frac{5}{3}} x=\frac{13}{6}$

پرسش‌های تشریحی:

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید. *(مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۱۴ کتاب درسی)*

آ) $\log 4+\log 75-\log 3$ ب) $\log_{12}4+2\log_{12}6$

۲- با فرض $\log 2=0/3$ ، $\log 3=0/47$ و $\log 7=0/8$ ، مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۲ کتاب درسی)

آ) $\log_{42}18$ ب) $\log_4 3\times\log_{15}14$

۳- اگر $\log 2\simeq 0/3$ و $\log 3\simeq 0/5$ باشند، مقدار ترکیبی $\log\sqrt[3]{12^2}$ و $\log\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ را به دست آورید. *(شهریور ۱۴۰۲)*

۴- هر یک از معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید. (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۱۱۴ کتاب درسی)

آ) $\log(x+2)=3\log 2-\log(x-5)$ (خرداد ۱۴۰۲)

ب) $\log_5(x+6)+\log_5(x+2)=1$ (خرداد ۱۴۰۲)

پ) $\log(x+3)+\log x=1$ (خرداد ۱۴۰۲)

۵- آیا دو تابع $f(x)=\log x^2$ و $g(x)=2\log x$ با هم برابرند؟ چرا؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۶- از هر یک از دستگاه‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.

آ) $\begin{cases}\log(y+2)=1\\ \log(y-x)+\log(4x+y)=2\end{cases}$

ب) $\begin{cases}\log_2 x=1+\log_2(y+1)\\ x^2-y^2=32\end{cases}$

۷- دامنهٔ هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

آ) $f(x)=\sqrt{1-\log(x-1)}$

ب) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2-\log_2(x+1)}$

BOX 4: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی (صفحه ۱۱۵ تا ۱۱۸ کتاب درسی)

در BOXهای ۱ و ۲ با نمودار تابع نمایی $f(x)=a^x$ و تابع لگاریتمی $g(x)=\log_a x$ آشنا شدیم. در این BOX می‌خواهیم به کمک انتقال و قرینه، نمودار برخی از توابع نمایی و لگاریتمی را رسم کنیم.

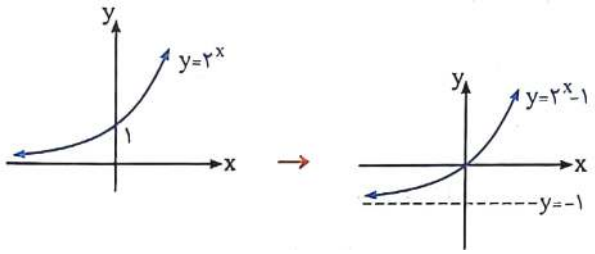
الف) نمودارها

انتقال عرضی و طولی

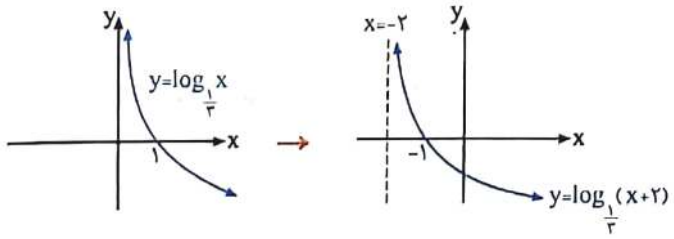
فرض کنیم b و k دو عدد مثبت باشند. می‌دانیم اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم، با انتقال b واحد به سمت بالا یا پایین به ترتیب نمودار $y=f(x)+b$ یا $y=f(x)-b$ به دست می‌آید. هم‌چنین با انتقال k واحد به سمت راست، نمودار $y=f(x-k)$ و با انتقال k واحد به سمت چپ، نمودار $y=f(x+k)$ به دست می‌آید.

تمرین: نمودار توابع $f(x)=2^x-1$ و $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار $f(x)=2^x-1$ ، کافی است نمودار $y=2^x$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین جابه‌جا کنیم (در این جابه‌جایی، محور xها نیز یک واحد به سمت پایین جابه‌جا می‌شود):

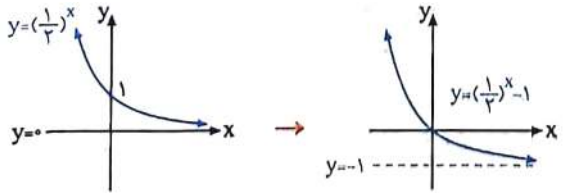


برای رسم نمودار $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ ، کافی است نمودار $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم (در این انتقال، خط $x=0$ (محور yها) نیز دو واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند):



نکته: توابعی با ضابطهٔ $f(x)=b.a^x+c$ رفتار توابع نمایی را دارند که رسم این توابع به کمک انتقال و قرینه انجام‌پذیر است. در رسم این توابع باید خط $y=0$ (محور xها) به اندازهٔ c واحد به سمت بالا $(c>0)$ یا به سمت پایین $(c<0)$ انتقال پیدا کند و نمودار به خط $y=c$ نزدیک شود.

مثال: به عنوان مثال، برای رسم نمودار $y=(\frac{1}{2})^x-1$ باید نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم. در این انتقال خط $y=0$ (محور xها) نیز به اندازهٔیک واحد به سمت پایین انتقال داده می‌شود و نمودار به خط $y=-1$ نزدیک می‌شود.



توجه: اگر نقطهٔ $(0,1)$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، به نقطهٔ $(0,0)$ می‌رسد. بنابراین نمودار از مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرد.

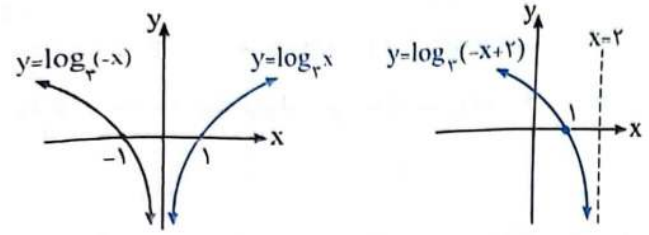
یادآوری: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم و آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم، آن‌گاه نمودار حاصل، نمودار تابع $y=f(-x)$ خواهد بود.

نکته: توابع $y=\log_a x$ و $y=\log_a(-x)$ نسبت به محور yها قرینهٔ همدیگر هستند.

تذکر: به کمک انتقال و قرینه نسبت به محور yها می‌توان نمودار توابع به فرم $y=f(-x\pm k)$ را رسم کرد.

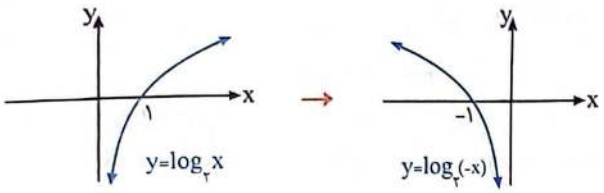
مثال: برای رسم نمودار تابع $y=\log_3(-x+2)$، داریم: $y=\log_3(-x+2)=\log_3(-(x-2))$

اگر ابتدا نمودار $y=\log_3 x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار $y=\log_3(-x)$ به دست می‌آید و سپس با انتقال ۲ واحد نمودار $y=\log_3(-x)$ به سمت راست، نمودار $y=\log_3(-(x-2))$ به دست می‌آید (توجه کنید که در انتقال ۲ واحد به سمت راست، خط $x=0$ نیز باید ۲ واحد به سمت راست انتقال پیدا کند).

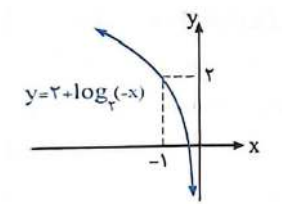


تمرین: نمودار تابع $y=2+\log_2(-x)$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا از روی نمودار $y=\log_2 x$، نمودار $y=\log_2(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، کافی است نمودار $y=\log_2 x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم:



اگر نمودار $y=\log_2(-x)$ را دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=2+\log_2(-x)$ به دست می‌آید:



یادآوری: اگر نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(x)$ به دست می‌آید.

نکته: نمودار توابع نمایی با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=-a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ و همچنین نمودار توابع لگاریتمی با ضابطه‌های $y=\log_a x$ و $y=-\log_a x$ نسبت به محور xها قرینهٔ یکدیگرند.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_2(5x-1)-2$:

۱) مقدار $f(\frac{1}{4})$ را به دست آورید.

۲) نمودار f، خط $y=-1$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

پاسخ: ۱) با قراردادن عدد $\frac{1}{4}$ به جای x در ضابطهٔ تابع f، مقدار $f(\frac{1}{4})$ را به دست می‌آوریم:

$$f(\frac{1}{4})=\log_2(5(\frac{1}{4})-1)-2=(\log_2\frac{1}{4})-2=(\log_2 2^{-2})-2=(-2\overset{1}{\cancel{\log_2 2}})-2=-4$$

۲) با حل معادلهٔ $f(x)=-1$ ، طول نقطهٔ تلاقی نمودار f با خط $y=-1$ به دست می‌آید:

$$f(x)=-1 \Rightarrow \log_2(5x-1)-2=-1 \Rightarrow \log_2(5x-1)=1 \Rightarrow 5x-1=2^1 \Rightarrow 5x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$$

ب) کاربرد تابع لگاریتمی

- زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزادشدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوستهٔ زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد.
- مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشدهٔ آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$\boxed{\log E=11/8+1/5M}$$

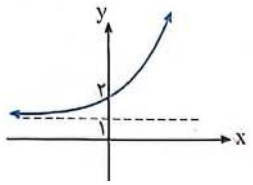
تمرین: اگر بزرگی زلزله‌ای برابر ۶ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزادشده در این زلزله را به دست آورید. *(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۷ کتاب درسی)*

پاسخ: طبق فرض $M=6$ است و داریم:

$$\log E=11/8+1/5M=11/8+1/5\times 6=11/8+9=20/8 \Rightarrow E=10^{20/8}Erg$$

پرسش‌های تشریحی:

۱- در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+2^{x-b}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید. *(تمرین ۱ صفحهٔ ۱۱۸ کتاب درسی)*



۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید. *(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۱۸ کتاب درسی)*

آ) $y=2+\log_3(x+1)$

ب) $y=-\log(x-3)$ (خرداد ۱۴۰۲)

پ) $y=1-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

ت) $y=\frac{|x|}{x}\log x$

۳- نمودار تابع $f(x)=2^x-1$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

۴- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\log_a x-1$ از نقطهٔ $(9,1)$ عبور کند: (شهریور ۱۴۰۲)

آ) مقدار a را به دست آورید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید.

۵- نمودار تابع $f(x)=-\log_2(x+2)$ را رسم کنید. دامنهٔ آن را به صورت بازه بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

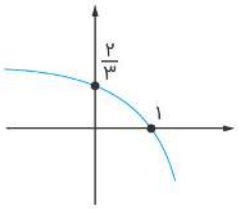
۶- نمودار تابع $y = \log_{۳} x$ را ابتدا ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۷- اگر بزرگی یک زمین‌لرزه برابر ۶/۲ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزادشده در این زلزله چه‌قدر است؟ *(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۷ کتاب درسی)*

۸- اگر انرژی آزادشده در یک زلزله برابر $۱۰^{۲۰/۵}$ اِرگ باشد، بزرگی این زلزله را به دست آورید.

Homework (1)

۱ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ۱ + c \times ۳^{a-bx}$ است. مقدار $f(-۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۰}{۹}$
۲) $\frac{۸}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۷}{۸}$

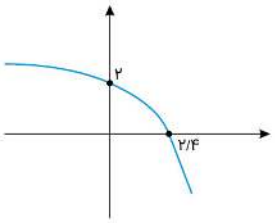
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $\log_۲(x^۲ + ۲x + ۴) + \log_۲(x - ۲) = ۳$ باشد، مقدار $\log_{۳\sqrt{۳}} x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ نمودار تابع $y = c + \log_۵(ax + b)$ به‌صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۵۳}$
۲) $-\frac{۳}{۵۱}$
۳) $-\frac{۱}{۱۰۳}$
۴) $-\frac{۳}{۱۰}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۴ اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $(\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲۶}{۳}$
۲) $\frac{۱۴}{۳}$
۳) $\frac{۱۴}{۱۱}$
۴) $\frac{۲۶}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ اگر $A = \{\frac{۱}{\sqrt{\log_۸ x + ۴\log_{x^۳} ۲}} : x > ۱\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\sqrt{۶}$
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز، $\frac{۱}{۷}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_۷ ۳ = ۰/۶$ و $\log_۲ ۳ = ۱/۶$)

۱) ۸
۲) ۲۸
۳) ۵۶
۴) ۱۲۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_۳ ۵ = ۱/۴$ و $\log_۲ ۵ = ۲/۴$)

۱) ۳۸۰
۲) ۳۶۰
۳) ۴۴۰
۴) ۴۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ اگر $\frac{۳^x + ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۳} + ۳^{x+۴} + ۳^{x+۵}}{۲^{x-۲} + ۲^{x-۱} + ۲^x + ۲^{x+۱} + ۲^{x+۲} + ۲^{x+۳}} = ۵۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ تابع نمایی $f(x) = ۵ - ۳^{ax+b}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(\frac{۱}{۲}) = ۲$ و $f(۰) = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار جزء صحیح $f(-\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۰ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(۸)=۵$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{۱}{۱۰}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log ۳=۰/۴۸)$

۱) ۳۶۰
۲) ۳۰۰
۳) ۲۷۰
۴) ۲۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ اگر تساوی $\log_x y-۲\log_y x=۱$ به ازای $x,y>۱$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

۱) $y=x^۲$
۲) $y=x^۳$
۳) $y=\sqrt{x}$
۴) $xy=۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a(\frac{۱}{۳})^x$ در نقطه‌ای به عرض ۴ محور yها را قطع می‌کند. مقدار تابع در $x=-۲$، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۹}{۴}$
۳) ۲۷
۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۴ تابع $f(x)=a+b(\frac{۱}{۲})^x$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(-۱)=-۱$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ از تساوی $(-\frac{۱}{۳})^x=(۸۱)^{-۱}\times ۹^{x-۱}$، مقدار x کدام است؟

۱) صفر
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ اگر در معادلهٔ $2\log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2$ مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) ۳ ۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

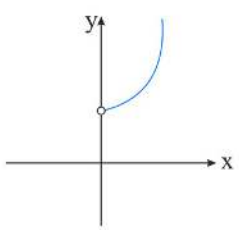
۱۷ در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به‌جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ $(\log 3 = 0/48 \ , \ \log 2 = 0/3)$

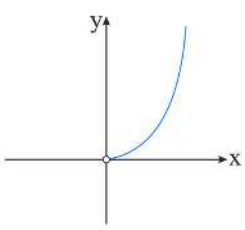
۱) ۲۰ ۲) ۲۴

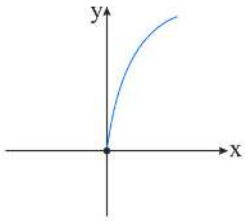
۳) ۳۰ ۴) ۳۲

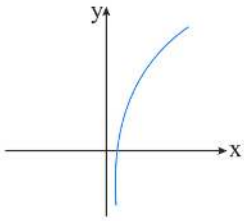
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸ نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$، کدام است؟ (با تغییر)

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a(\frac{1}{2})^x + b$ ، محور xها را با طول -1 و محور yها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع f در $x = 1$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۲۰ فرض کنید $[a, b]$ برد تابع $f(x) = 2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$ باشد. مقدار $a + b$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

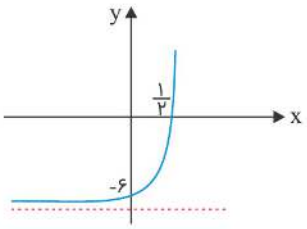
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۱ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\log_{۲}(۴^{x}+۱۵)=x+۳$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۵
۳) $\log_{۲}۱۵$
۴) $\log_{۴}۱۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

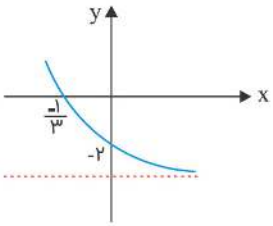
۲۲ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{ax+b}$ است. $f(۲)$، کدام است؟



۱) ۲۳۴
۲) ۱۰۸
۳) ۷۲
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۴+۲^{ax+b}$ است. $f(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟



۱) ۵۴
۲) ۶۰
۳) ۴۸
۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۲

$$f(۰)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۱+c\times ۳^{a}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow c\times ۳^{a}=-\frac{۱}{۳}$$

$$f(۱)=۰\Rightarrow ۱+c\times ۳^{a+b}=۰\Rightarrow ۱+c\times ۳^{a}\times ۳^{b}=۰$$

$$\xrightarrow{c\times ۳^{a}=-\frac{۱}{۳}} ۱+(-\frac{۱}{۳})(۳^{b})=۰\Rightarrow ۳^{b}=۳\Rightarrow b=۱$$

$$f(-۱)=۱+c\times ۳^{a-b}=۱+c\times ۳^{a}\times ۳^{-b}=۱+(-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳})=\frac{۸}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

معادله را به‌صورت زیر مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\log_{۲}(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)=۳\Rightarrow x^{۳}-۸=۸$$
$$\Rightarrow x^{۳}=۱۶\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۶}$$

حال این مقدار x را در عبارت داده شده جایگذاری می‌کنیم.

$$\log_{\sqrt[۳]{۲}}x=\log_{\sqrt[۳]{۲}}\sqrt[۳]{۱۶}=\log_{۲}۱۶=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۱

دو نقطه با مختصات مشخص $(۰,۲)$ و $(۲/۴,۰)$ را روی تابع صدق می‌دهیم.

$$(۰,۲) \Rightarrow ۲ = c + \log_۵ b$$
$$(۲/۴,۰) \Rightarrow ۰ = c + \log_۵(۲/۴a + b)$$
$$\Rightarrow \log_۵(۲/۴a + b) - \log_۵ b = -۲$$
$$\Rightarrow \log_۵ \frac{۲/۴a + b}{b} = -۲$$

پس:

$$\frac{۲/۴a + b}{b} = ۵^{-۲} \Rightarrow ۲/۴\frac{a}{b} + ۱ = \frac{۱}{۲۵}$$
$$\Rightarrow \frac{۲۴}{۱۰} \cdot \frac{a}{b} = \frac{-۲۴}{۲۵} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-۱۰}{۲۵} = \frac{-۲}{۵}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۲

$$\log ۵ = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۰/۷$$
$$\log ۹ = \log ۳^۲ = ۲\log ۳ \simeq ۰/۸$$

$$\log ۱۵ = \log ۵ + \log ۳ \simeq ۱/۱$$
$$\log \frac{۵}{۳} = \log ۵ - \log ۳ \simeq ۰/۳$$

$$(\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰ \Rightarrow ۰/۳x^۲ + ۰/۸x - ۱/۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} x_۱ = ۱,\ x_۲ = -\frac{۱/۱}{۰/۳}$$
$$\Rightarrow |x_۱ - x_۲| = ۱ + \frac{۱/۱}{۰/۳} = ۱ + \frac{۱۱}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۲

$$\log_{۸}x+۴\log_{x^۳}۲=\frac{۱}{۳}\log_{۲}x+\frac{۴}{۳}\log_{x}۲\geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}}=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_{۲}x+\frac{۴}{۳}\log_{x}۲\geq\frac{۴}{۳}\Rightarrow\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲}x+\frac{۴}{۳}\log_{x}۲}\geq\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{\log_{۸}x+۴\log_{x^۳}۲}}\leq\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

نکته ۱: دو عدد معکوس با ضرایب a و b که هر دو مثبت هستند، رابطهٔ زیر را دارند:

$$ax+\frac{b}{x}\geq ۲\sqrt{ab}$$

نکته ۲: $\log_n m$ و $\log_m n$ معکوس هم هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقی مانده را از دست می‌دهد یعنی $\frac{۱۲/۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۸}$ از جرم از دست می‌دهد و $\frac{۷}{۸}$ از جرم باقی می‌ماند. همچنین داریم:

$$\log_{۲}۳=۱/۶\Rightarrow\log_{۳}۲=\frac{۱۰}{۱۶}$$
$$\log_{۷}۳=۰/۶\Rightarrow\log_{۳}۷=\frac{۱۰}{۶}$$

اگر جرم اولیه را M فرض کنیم داریم:

$$\text{جرم باقی‌مانده}=(۱-\frac{۱}{۸})^{\frac{t}{۷}}\times M=\frac{۱}{۷}\times M$$
$$\xrightarrow{\frac{t}{۷}=n}(\frac{۷}{۸})^{n}\times M=\frac{۱}{۷}M\Rightarrow(\frac{۷}{۸})^{n}=\frac{۱}{۷}$$
$$\log_{۳}(\frac{۷}{۸})^{n}=\log_{۳}\frac{۱}{۷}\Rightarrow n(\log_{۳}۷-\log_{۳}۸)=-\log_{۳}۷$$
$$\Rightarrow n(\frac{۱۰}{۶}-۳\log_{۳}۲)=-(\frac{۱۰}{۶})\Rightarrow n(\frac{۱۰}{۶}-۳(\frac{۱۰}{۱۶}))=-\frac{۱۰}{۶}\Rightarrow n=۸$$
$$\Rightarrow\frac{t}{۷}=n\Rightarrow t=۷\times۸=۵۶$$

بنابراین پس از ۵۶ روز $\frac{۱}{۷}$ از جرم عنصر باقی می‌ماند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۱

اگر در هر ۶۰ دقیقه $\frac{۱}{۹}$ جرم از دست برود، پس $\frac{۸}{۹}$ آن باقی می‌ماند.

در لحظه صفر	,	پس از یک ساعت	,	...
a	,	$\frac{۸}{۹}a$	,	...

بنابراین یک دنبالهٔ هندسی داریم که بهتر است جملهٔ اول را $\frac{۸}{۹}a$ فرض کنیم، چون در لحظه صفر هنوز جرمی از دست نرفته است، پس:

$$a_n = ar^{n-۱} \Rightarrow \frac{۱}{۶}a = \frac{۸}{۹}a(\frac{۸}{۹})^{n-۱} \Rightarrow (\frac{۸}{۹})^n = \frac{۱}{۶}$$

بنابراین:

$$n = \log_{\frac{۸}{۹}} \frac{۱}{۶} = \frac{-\log ۶}{\log \frac{۸}{۹}} = \frac{-(\log ۲ + \log ۳)}{۳\log ۲ - ۲\log ۳} = \frac{-\cancel{\log ۲}(۱ + \log_۲ ۳)}{\cancel{\log ۲}(۳ - ۲\log_۲ ۳)}$$

با توجه به اطلاعات مسئله:

$$\xrightarrow[\log_۳ ۵ = ۱/۴]{\log_۲ ۵ = ۲/۴} \frac{\log_۲ ۵}{\log_۳ ۵} = \frac{۲/۴}{۱/۴} = \frac{\log_۵ ۳}{\log_۵ ۲} = \frac{۲۴}{۱۴} \Rightarrow \log_۲ ۳ = \frac{۱۲}{۷}$$

پس:

$$n = \frac{-(۱ + \frac{۱۲}{۷})}{۳ - \frac{۲۴}{۷}} = +\frac{۱۹}{۳} \Rightarrow n = \frac{۱۹}{۳} \times ۶۰ = ۱۹ \times ۲۰ = ۳۸۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۲

$$\frac{۳^x(۱ + ۳ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۴ + ۳^۵)}{۲^x(۲^{-۲} + ۲^{-۱} + ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳)} = ۵۲$$
$$\Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x = \frac{۵۲ \times ۱۵/۷۵}{۳۶۴} = \frac{۸۱۹}{۳۶۴} = ۲/۲۵ \Rightarrow x = ۲$$

نکته:

$$۱ + ۳ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۴ + ۳^۵ = \frac{۱(۱ - ۳^۶)}{۱ - ۳} = ۳۶۴$$

$$۲^{-۲} + ۲^{-۱} + ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ = \frac{\frac{۱}{۴}(۱ - ۲^۶)}{۱ - ۲} = \frac{۶۳}{۴} = ۱۵/۷۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ گزینه ۳

$$f(۰) = ۵ - ۳^{b} = ۲ \Rightarrow ۳^{b} = ۳^{۱} \Rightarrow b = ۱$$

$$\frac{۱}{۲}f(\frac{۱}{۲}) = ۲ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) = ۴$$

$$۵ - ۳^{\frac{a}{۲}+۱} = ۴ \Rightarrow ۳^{\frac{a}{۲}+۱} = ۱ = ۳^{۰} \Rightarrow \frac{a}{۲} + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

$$f(-\frac{۱}{۴}) = ۵ - ۳^{(-\frac{۱}{۴})(-۲)+۱} = ۵ - ۳^{\frac{۳}{۲}}$$

$$۵ - \sqrt[۲]{۳^{۳}} = ۵ - ۳\underbrace{\sqrt{۳}}_{۱/۷} \simeq -۰/۱$$

$$\Rightarrow [f(-\frac{۱}{۴})] = [-۰/۱] = -۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۱

$$f(\frac{۱}{۲}) = ۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۱ = \sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}} \Rightarrow ۲^{\frac{a}{۲}+b} = ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۲}(*)$$

$$f^{-۱}(۸) = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۸ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۸ = \sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}$$

$$۲^{۵a+b} = ۲^{۹} \Rightarrow ۵a + b = ۹ \xrightarrow{(*)} ۵a - \frac{a}{۲} = ۹ \Rightarrow \frac{۹a}{۲} = ۹ \Rightarrow a = ۲ \xrightarrow{(*)} b = -۱$$

در آخر داریم:

$$a - b = ۲ - (-۱) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ گزینه ۱

مقدار اولیهٔ عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{۱}{۱۰}$ باقی‌مانده را از دست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{۹}{۱۰}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$۸ = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n \Rightarrow (\frac{۹}{۱۰})^n = \frac{۱}{۳}$$

از طرفین $\log_{۱۰}$ می‌گیریم:

$$n(\log(\frac{۹}{۱۰})) = \log(\frac{۱}{۳}) \Rightarrow n(\log ۹ - \log ۱۰) = \log(\frac{۱}{۳})$$
$$\Rightarrow n(۲\log ۳ - \log ۱۰) = -\log ۳ \Rightarrow n(۲ \times ۰/۴۸ - ۱) = -۰/۴۸$$
$$\Rightarrow n(۰/۹۶ - ۱) = -۰/۴۸ \Rightarrow ۰/۰۴n = ۰/۴۸ \Rightarrow n = ۱۲$$

پس ۱۲ ماه یعنی $۱۲ \times ۳۰ = ۳۶۰$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم.)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ گزینه ۱

فرض می‌کنیم $\log_y x = t$ باشد:

$$\frac{۱}{t} - ۲t = ۱ \Rightarrow ۱ - ۲t^۲ = t \Rightarrow ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱, \frac{۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{x,y>۱} \log_y x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x^۲ = y$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۴

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow a(\frac{۱}{۳})^۰ = ۴ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow f(x) = ۴(\frac{۱}{۳})^x$$
$$f(-۲) = ۴(\frac{۱}{۳})^{-۲} = ۴ \times ۳^۲ = ۴ \times ۹ = ۳۶$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۳

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{۰} = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(-۱) = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{-۱} = -۱$$
$$\Rightarrow a + ۲b = -۱ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ a + ۲b = -۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱, \ a = ۱$$

$$a - b = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۴

$$(۸۱)^{-۱} = ۳^{-۴} \quad , \quad ۹^{x-۱} = ۳^{۲x-۲} \quad , \quad (-\frac{۱}{۳})^{x} = (-۳)^{-x}$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$۳^{-۴} \times ۳^{۲x-۲} = (-۳)^{-x} \Rightarrow ۳^{۲x-۶} = (-۳)^{-x}$$
$$۲x - ۶ = -x \Rightarrow x = ۲$$

چون x زوج است، $(-۳)^{-x}$ برابر همان ۳^{-x} می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۳

بافرض $x = ۹$ و تغییر متغیر $\log_a ۹ = t$ معادله را تنظیم می‌کنیم:

$$۲ \times \frac{۱}{t} + \frac{۱}{۲}t = ۲ \Rightarrow \frac{۲}{t} + \frac{t}{۲} = ۲ \Rightarrow \frac{t}{۲} = ۱ \Rightarrow t = ۲$$
$$\Rightarrow \log_a ۹ = ۲ \Rightarrow ۹ = a^{۲} \xrightarrow{a>۰} a = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۲

در هر روز غلظت محلول $\frac{۱۰۰-۴}{۱۰۰}$ یعنی $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n = a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

$$a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n = \frac{۱}{۳}a \Rightarrow n\log(\frac{۹۶}{۱۰۰}) = -\log ۳ \Rightarrow n(\log ۲^۵ \times ۳ - \log ۱۰^۲) = -\log ۳$$

$$\Rightarrow n(۵\log ۲ + \log ۳ - ۲) = -\log ۳ \Rightarrow n(۱/۵ + ۰/۴۸ - ۲) = -۰/۴۸ \Rightarrow n = \frac{-۰/۴۸}{-۰/۰۲} = ۲۴$$

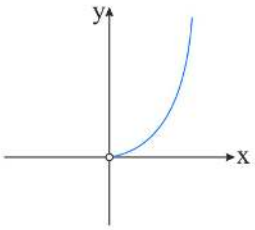
بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸ گزینه ۲

دامنهٔ تابع $x > ۰$ است.

$$f(x) = ۹^{\log_۳ x} = ۳^{۲\log_۳ x} = ۳^{\log_۳ x^۲} = x^۲$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۹ گزینه ۳

مختصات نقاط $(-۱, ۰)$ و $(۰, ۲)$ را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم و با استفاده از دستگاه معادلات، a و b را به دست می‌آوریم.

$$a(\frac{۱}{۲})^{-۱} + b = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad , \quad a(\frac{۱}{۲})^{۰} + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۲$$

$$\begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ a + b = ۲ \end{cases} \longrightarrow a = -۲ \quad , \quad b = ۴$$

ضابطه تابع f را نوشته و مقدار تابع را در $x = ۱$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = -۲(\frac{۱}{۲})^{x} + ۴ \Rightarrow f(۱) = -۲(\frac{۱}{۲}) + ۴ = ۳$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۴

$$۰ \le \sin^{۲}x \le ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۰ \le ۵\sin^{۲}x \le ۵ \xrightarrow{-۱} -۱ \le ۵\sin^{۲}x - ۱ \le ۴$$

$$\xrightarrow{۵\sin^{۲}x - ۱ \ge ۰} ۰ \le ۵\sin^{۲}x - ۱ \le ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{۵\sin^{۲}x - ۱} \le ۲$$

$$\Rightarrow ۰ \ge -\sqrt{۵\sin^{۲}x - ۱} \ge -۲ \Rightarrow ۲^{۰} \ge ۲^{-\sqrt{۵\sin^{۲}x - ۱}} \ge ۲^{-۲}$$

$$\Rightarrow ۱ \ge f(x) \ge \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{۴} \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{۵}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۱ گزینه ۳

$$\log_{۲}(۴^{x} + ۱۵) = x + ۳ \Rightarrow ۴^{x} + ۱۵ = ۲^{x+۳}$$

$$\xrightarrow{۲^{x} = t} t^{۲} + ۱۵ = ۸t \Rightarrow t^{۲} - ۸t + ۱۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۳)(t - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳ = ۲^{x} \Rightarrow x = \log_{۲}۳ \\ t = ۵ = ۲^{x} \Rightarrow x = \log_{۲}۵ \end{cases}$$

$$x_{۱} + x_{۲} = \log_{۲}۳ + \log_{۲}۵ = \log_{۲}۱۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۲ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, -۶)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(۰, -۶) : f(۰) = -۶ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰+b} = -۶ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{b} = ۳$$

$$\Rightarrow ۳^{-b} = ۳ \Rightarrow -b = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۹$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۳^{۲} \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}a+۱} = ۳^{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲x-۱} \Rightarrow f(۲) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۴-۱} = -۹ + ۳^{۵}$$

$$= -۹ + ۲۴۳ = ۲۳۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۰)$ و $(۰, -۲)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(۰, -۲) : f(۰) = -۲ \Rightarrow -۴ + ۲^{b} = -۲ \Rightarrow ۲^{b} = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$(-\frac{۱}{۳}, ۰) : f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۴ = ۲^{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}a + ۱ = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}a = ۱ \Rightarrow a = -۳$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -۴ + ۲^{-۳x+۱}$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = -۴ + ۲^{-۳\times(-\frac{۵}{۳})+۱} = -۴ + ۲^{۵+۱} = -۴ + ۲^{۶} = ۶۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱ نامعادلهٔ $(\frac{۱}{۴})^{x+۱} > ۸^{۲x+۱}$ را حل نمایید.

۲ در مورد تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}\log(-x)$ کدام گزینه درست است؟

۱) $D_f = (۰ , +\infty)$

۲) نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها تقارن دارد.

۳) نمودار تابع f در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۴) $R_f = \mathbb{R}$

۳ نمودار تابع $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{x-۱}$ را رسم کنید.

۴ توابع $y = x^۲$ و $y = ۲^x$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف نمودار توابع را رسم کنید.

ب در چند نقطه این دو تابع باهم مساوی هستند.

پ عدد $\sqrt{۲}$ را در محور xها در تابع $y = ۲^x$ پیدا کنید و مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را مشخص نمایید.

۵ نوعی باکتری در بدن انسان به‌صورت نمایی تکثیر می‌شود. این باکتری با تعداد ۱۰۰ عدد شروع می‌شود. پس از گذشت نیم ساعت هر باکتری به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازهٔ هر تودهٔ باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$p(t) = ۱۰۰ \times ۱۰^{۲t} \quad ; ۰ \le t \le ۱۶$$

الف پس از ۳ ساعت اندازهٔ توده چقدر است؟

ب پس از چند ساعت مقدار توده ۱۰۲۴۰۰ می‌شود؟

۶ شدت زلزلهٔ رودبار در سال ۱۳۶۹ برابر ۷/۲ ریشتر گزارش شده است. مقدار تقریبی انرژی آزادشدهٔ آن برحسب ارگ را پیدا کنید.

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

۷ $\log_۵ x + \log_۵ ۳ = \log_۵ ۱۲$

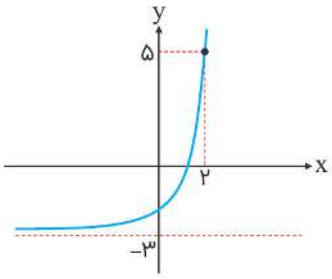
۸ $\log(x + ۳) + \log x = ۱$

۹ $(\frac{۳}{۵})^{x^۲-۴x} = (\frac{۶۲۵}{۸۱})$

۱۰ $\log_{\sqrt{۳}}(\log_{\sqrt[۳]{۴}}(\log_{\sqrt[۴]{۲۵}}x)) = ۲$

۱۱ نمودار $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{-x} - ۱$ را رسم نمایید.

۱۲ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a + ۲^{x-b}$ است. a و b را به دست آورید.



۱۳ نیمه‌عمر یک مادهٔ هسته‌ای ۲۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۸۰ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که بعد از ۷۰ سال باقی می‌ماند را بیابید.

۱۴ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{(\frac{۱}{۸^x} - ۴)(۲^{-x} + ۱)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty , -\frac{۳}{۲}]$
۲) $[-\frac{۲}{۳} , +\infty)$
۳) $(-\infty , -\frac{۲}{۳}]$
۴) $[-\frac{۳}{۲} , +\infty)$

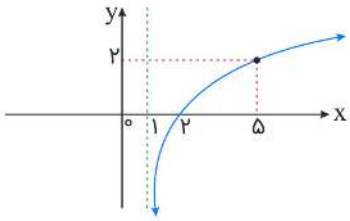
۱۵ کدام گزینه درست است؟

۱) $\sqrt{۳}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}} > \sqrt{۳}^{\sqrt{۲}-۱}$
۲) $(\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱})^x > (\sqrt{۲}-۱)^{x^۲} \Rightarrow x > ۱$ یا $x < ۰$
۳) $(\frac{۱}{x})^{\frac{x}{۳}} > x^{\frac{-x}{۳}} \Rightarrow ۰ < x < ۱$
۴) هیچ‌کدام

۱۶ معادلهٔ $۴^x + ۲^{x+۱} + ۱ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۱۷ شکل زیر، مربوط به $f(x) = a + \log_۲(x - b)$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟



۱) -۱

۲) ۱

۳) ۲

۴) -۲

۱۸ برد تابع $f(x) = ۳^{-x+۱} - ۲$ کدام است؟

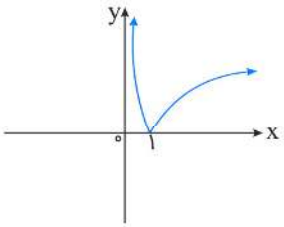
۱) $[-۲ , +\infty)$

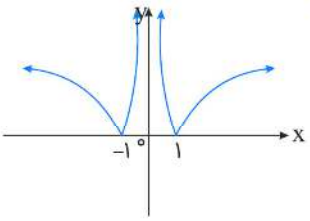
۲) $\mathbb{R}$

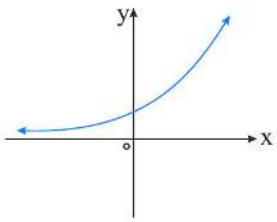
۳) $(-۲ , +\infty)$

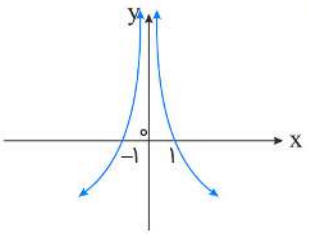
۴) $(-\infty , -۲)$

۱۹ نمودار مربوط به تابع $f(x) = |\log_a x|$ به‌ازای $۰ < a < ۱$ به کدام صورت است؟

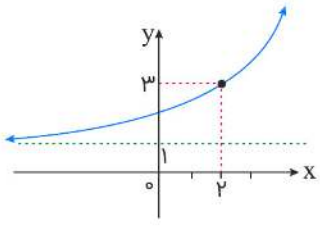
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۰ نمودار زیر، مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟



۱) $f(x) = \log_۲ x + ۱$

۲) $f(x) = \log_۲(x + ۱)$

۳) $f(x) = ۲^x - ۱$

۴) $f(x) = ۲^{x-۱} + ۱$

۲۱ اگر شدت یک زمین لرزه، یک ریشتر افزایش پیدا کند، انرژی آزاد شده توسط آن، چند برابر می‌شود؟

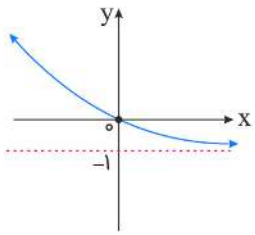
۱) ۱۰

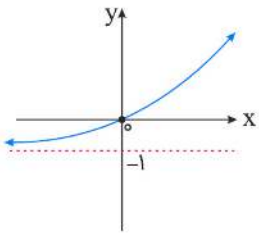
۲) $۱۰\sqrt{۱۰}$

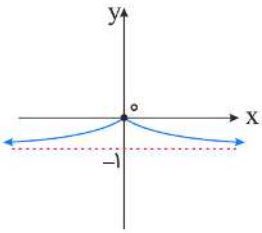
۳) $\sqrt{۱۰}$

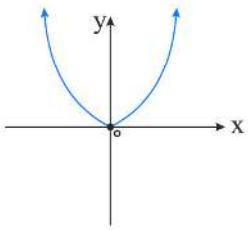
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

۲۲ نمودار تابع $f(x) = ۲^{-|x|} - ۱$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۲۳ چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $(\frac{۱}{۹})^{x} < (\sqrt{۳})^{x+۱} < \frac{۱}{۲۷}$ صدق می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۳

۲۴ معادلهٔ $۴^{x} + ۲^{x+۱} - ۳ = ۰$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) صفر ۲) یک

۳) دو ۴) بی‌شمار

۲۵ تابع $f(x) = ۲^{ax+b} - ۴$ از نقاط $A(-\frac{۱}{۳}, ۰)$ و $B(۰, -۲)$ می‌گذرد. $f(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۴۸

۳) ۶۰ ۴) ۲۸

۲۶ مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱})^{۳x+۸} > (\sqrt{۲}-۱)^{x^{۲}+x}$ کدام است؟

۱) $|x+۱| < ۳$ ۲) $|x+۱| > ۳$

۳) $|x-۱| < ۳$ ۴) $|x-۱| > ۳$

پاسخ Homework (2)

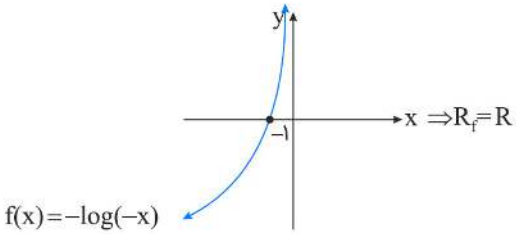
۱

$$۸^{۲x+۱} > (\frac{۱}{۴})^{x+۱} \Rightarrow (۲^{۳})^{۲x+۱} > (۲^{-۲})^{x+۱}$$
$$\Rightarrow ۲^{۶x+۳} > ۲^{-۲x-۲} \Rightarrow ۶x + ۳ > -۲x - ۲$$
$$\Rightarrow ۸x > -۵ \Rightarrow x > -\frac{۵}{۸}$$

۲

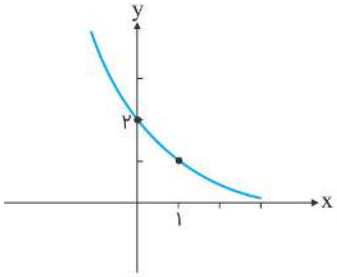
گزینه ۴

$$-x > ۰ \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow D_f = (-\infty , ۰)$$
$$x < ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x} \log(-x) \Rightarrow f(x) = -\log(-x)$$

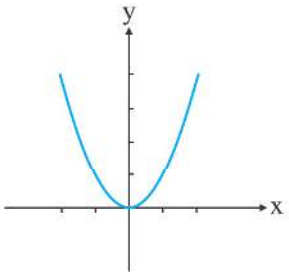


۳

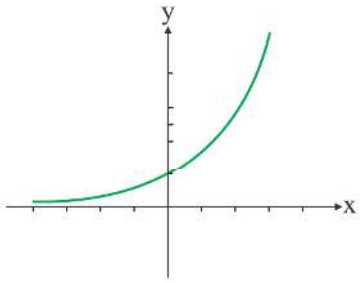
x	۰	۱
$g=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$	۲	۱



الف



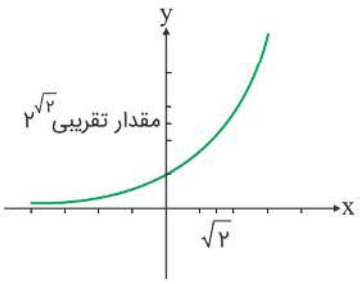
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y=x^{۲}$	۴	۱	۰	۱	۴



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y=۲^{x}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴

ب باتوجه‌به نمودار توابع در قسمت قبل، در ۳ نقطه مساوی هستند.

پ



۵

الف

$$p(۳) = ۱۰۰ \times ۲^{۲(۳)} = ۱۰۰ \times ۶۴ = ۶۴۰۰$$

ب

$$p(t) = ۱۰۰ \times ۲^{۲t} = ۱۰۲۴۰۰ \Rightarrow ۲^{۲t} = ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰} \Rightarrow ۲t = ۱۰ \Rightarrow t = ۵$$

۶

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷/۲) = ۲۲/۶$$

$$\Rightarrow E = ۱۰^{۲۲/۶} Erg$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

۷

$$\log_{۵}(۳x) = \log_{۵}۱۲ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

۸

$$\log x(x+۳)=۱ \Rightarrow x^۲+۳x=۱۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۵ & \text{غ ق ق} \\ x=۲ \end{cases}$$

۹

$$(\frac{۳}{۵})^{x^۲-۴x}=(\frac{۳}{۵})^{-۴} \Rightarrow x^۲-۴x=-۴ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

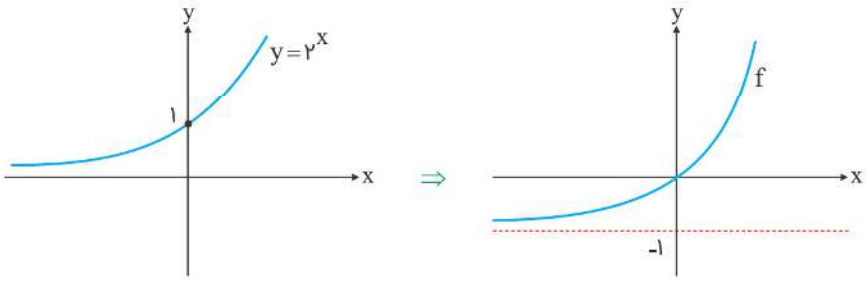
۱۰

$$\log_{\sqrt[۳]{۴}}(\log_{\sqrt[۴]{۲۵}}x)=(\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \log_{\sqrt[۴]{۲۵}}x=(\sqrt[۳]{۴})^{(\sqrt{۳})^{(۲)}}$$

$$\Rightarrow x=(\sqrt[۴]{۲۵})^{(\sqrt[۳]{۴})^{(\sqrt{۳})^۲}}=(\sqrt[۴]{۲۵})^{(\sqrt[۳]{۴})^۳}=۲۵$$

۱۱

$$f(x)=(\frac{۱}{۲})^{-x}-۱=۲^x-۱$$



۱۲ بنا به نمودار رسم‌شده نمودار ۲^{x-b}، ۳ واحد به پایین آورده شده است، پس $a=-۳$ است.

$$A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۵ \end{vmatrix} \in f: ۵=-۳+۲^{۲-b} \Rightarrow ۲^۳=۲^{۲-b} \Rightarrow ۲-b=۳ \Rightarrow b=-۱$$

۱۳

$$m(t)=۸۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۲۰}} \Rightarrow m(۷۰)=۸۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{۷۰}{۲۰}}=۸۰(\frac{۱}{۲})^{۳/۵}$$

$$=\frac{۸۰}{۲^{۳/۵}}=\frac{۸۰}{۲^{\frac{۷}{۲}}}=\frac{۸۰}{\sqrt[۲]{۲^۷}}=\frac{۸۰}{۸\sqrt{۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۲}=۵\sqrt{۲}$$

۱۴ گزینه ۳

$$(\frac{۱}{۸^x}-۴)(\underbrace{۲^{-x}+۱}_{\text{مثبت}}) \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۸^x}-۴ \geq ۰ \Rightarrow ۲^{-۳x} \geq ۴ \Rightarrow ۲^{-۳x} \geq ۲^۲$$

$$\Rightarrow -۳x \geq ۲ \Rightarrow x \leq -\frac{۲}{۳} \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{۲}{۳}]$$

۱۵ گزینه ۲

گزینهٔ "۱":

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow \sqrt{۳}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}}=\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}-۱}$$

گزینهٔ "۲":

$$(\sqrt{۲}-۱)^{x}>(\sqrt{۲}-۱)^{x^{۲}} \xrightarrow{۰<\sqrt{۲}-۱<۱} x<x^{۲}$$
$$\Rightarrow x^{۲}-x>۰\Rightarrow x<۰ \text{ یا } x>۱$$

گزینهٔ "۳": مثال نقض $x=۲$ دارد.

۱۶ گزینه ۱

$$۲^{x}=t\Rightarrow t^{۲}+۲t+۱=۰\Rightarrow (t+۱)^{۲}=۰\Rightarrow t=-۱$$

$$\Rightarrow \underbrace{۲^{x}}_{\text{مثبت}}=\underbrace{-۱}_{\text{منفی}}\Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

۱۷ گزینه ۲

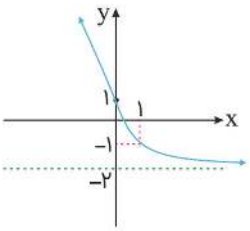
$$\begin{cases} f(۲)=۰ \Rightarrow ۰=a+\log_{۲}(۲-b) \\ f(۵)=۲ \Rightarrow ۲=a+\log_{۲}(۵-b) \end{cases} \Rightarrow ۲=\log_{۲}(۵-b)-\log_{۲}(۲-b)$$

$$\Rightarrow \log_{۲}\frac{۵-b}{۲-b}=۲\Rightarrow \frac{۵-b}{۲-b}=۴\Rightarrow ۵-b=۸-۴b\Rightarrow b=۱$$

$$f(۲)=۰\Rightarrow ۰=a+\log_{۲}(۲-۱)\Rightarrow ۰=a+\log_{۲}۱$$

$$\Rightarrow a=۰\Rightarrow b-a=۱-۰=۱$$

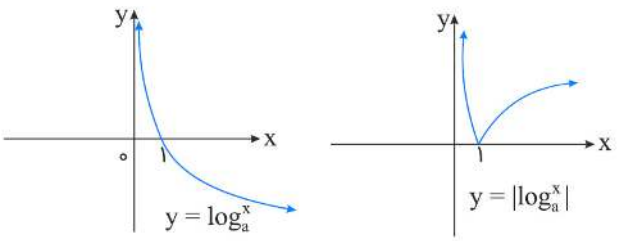
۱۸ گزینه ۳



$$\Rightarrow R_f=(-۲,+\infty)$$

$$f(x)=۳\times(\frac{۱}{۳})^{x}-۲$$

۱۹ گزینه ۱



۲۰ گزینه ۴

$$f(x) = \frac{۱}{۲} \times ۲^x + ۱ \Rightarrow f(x) = ۲^{x-۱} + ۱$$

۲۱ گزینه ۲

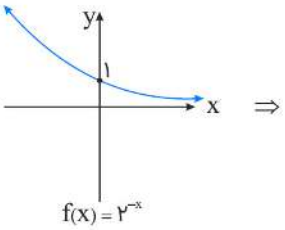
اگر بزرگی زلزله‌ای برابر با M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر با E در واحد ارگ است:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

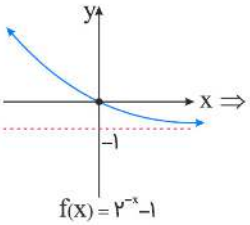
$$\begin{cases} \log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۱ \\ \log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵(M_۱ + ۱) \end{cases} \Rightarrow \log E_۲ - \log E_۱ = ۱/۵$$

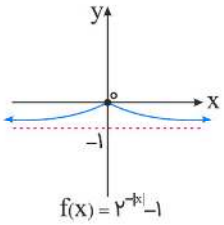
$$\Rightarrow \log \frac{E_۲}{E_۱} = ۱/۵ \Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱} = ۱۰^{۱/۵} \Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱} = ۱۰\sqrt{۱۰}$$

۲۲ گزینه ۳



$\Rightarrow$





۲۳ گزینه ۳

$$\frac{۱}{۲۷} < (\sqrt{۳})^{x+۱} : ۳^{-۳} < ۳^{\frac{x+۱}{۲}} \Rightarrow -۳ < \frac{x+۱}{۲} \Rightarrow x > -۷ \quad (۱)$$

$$(\sqrt{۳})^{x+۱} < (\frac{۱}{۹})^{x} : ۳^{\frac{x+۱}{۲}} < ۳^{-۲x} \Rightarrow \frac{x+۱}{۲} < -۲x \Rightarrow x+۱ < -۴x$$

$$\Rightarrow ۵x < -۱ \Rightarrow x < \frac{-۱}{۵} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} -۷ < x < \frac{-۱}{۵} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x = -۶ , -۵ , -۴ , -۳ , -۲ , -۱$$

۲۴ گزینه ۱

$$۲^x = t \Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow ۲^x = ۱ \Rightarrow x = ۰ \\ t = -۳ \Rightarrow ۲^x = -۳ \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

بنابراین معادله هیچ ریشهٔ مثبتی ندارد.

۲۵ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{array}{c} -\frac{۱}{۳} \\ ۰ \end{array}\right. \in f: ۲^{-\frac{a}{۳}+b}-۴=۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۲^{۲} \Rightarrow -\frac{a}{۳}+b=۲ \ (I) \\ B\left|\begin{array}{c} ۰ \\ -۲ \end{array}\right. \in f: ۲^{b}-۴=-۲ \Rightarrow ۲^{b}=۲ \Rightarrow b=۱ \ (II) \end{array}\right\}$$

$$(I)\ ,\ (II) \Rightarrow a=-۳\ ,\ b=۱$$

$$f(x)=۲^{-۳x+۱}-۴ \Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=۲^{۶}-۴=۶۰$$

۲۶ گزینه ۳

$$\begin{cases} (\sqrt{۲}-۱)^{x^{۲}+x} > (\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱})^{۳x+۸} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}-۱ \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{۲}-۱)^{x^{۲}+x} > (\sqrt{۲}-۱)^{۳x+۸}$$

$$\xrightarrow[\text{کاهشی}]{۰<\sqrt{۲}-۱<۱} x^{۲}+x<۳x+۸$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲x-۸<۰ \Rightarrow -۲<x<۴ \xrightarrow{-۱} -۳<x-۱<۳ \Rightarrow |x-۱|<۳$$

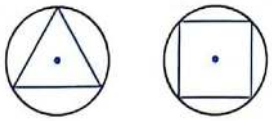
فصل ششم: حد و پیوستگی

BOX 1: فرایندهای حدی (صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۷ کتاب درسی)

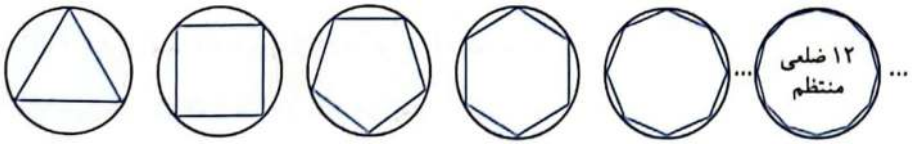
در این BOX، مفهوم حد چپ و راست، مفهوم حد، محاسبهٔ حد از روی نمودار بیان می‌شود.

فرایندهای حدی

- در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آن‌ها روی دایره واقع‌اند. چنین چندضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کم‌تر است.



- در زیر، شکل چندضلعی‌های محاطی رسم شده است.



- در تمام شکل‌های بالا، مساحت چندضلعی از مساحت دایره کم‌تر است اما مساحت چندضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آن‌که تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چندضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود.)

مفهوم میل کردن

تعریف: اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می‌گوییم x به سمت a از راست میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$x \to a^+$$

تعریف: اگر x با مقادیر کوچک‌تر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می‌گوییم x به سمت a از چپ میل می‌کند و می‌نویسیم:

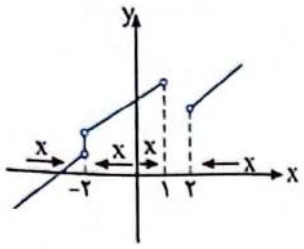
$$x \to a^-$$

تعریف: اگر x بتواند هم با مقادیر بزرگ‌تر از a و هم با مقادیر کوچک‌تر از a به عدد a بسیار نزدیک شود در این صورت می‌گوییم x به سمت a میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$x \to a$$

مثال: در شکل زیر، x فقط با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود و در نتیجه $x \to ۲^+$

هم‌چنین x فقط با مقادیر کوچک‌تر از یک می‌تواند به عدد یک نزدیک شود و در نتیجه $x \to ۱^-$ اما برای $x = -۲$ ، x هم با مقادیر بزرگ‌تر از -۲ و هم با مقادیر کوچک‌تر از -۲ به عدد -۲ نزدیک می‌شود و در نتیجه $x = -۲$.



مفهوم حد راست و حد چپ

حد راست: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (x_0, b) تعریف شده باشد. حد راست f در x_0 برابر عدد l است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

حد چپ: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) تعریف شده باشد. حد چپ f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

مفهوم حد تابع

حد تابع: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, b) شامل نقطهٔ x_0 (به‌جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن‌که x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

نکته: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

حد از روی نمودار

از روی نمودار تابع می‌توان حد تابع را (در صورت وجود) در نقطهٔ داده‌شده به دست آورد برای این کار کافی است در دامنهٔ تابع f و روی محور xها به عدد a نزدیک شویم و تغییرات $f(x)$ را بررسی کنیم. اگر با نزدیک‌شدن به عدد a در داخل دامنه، مقادیر تابع (روی محور yها) به یک مقدار منحصربه‌فرد نزدیک شوند، آن‌گاه تابع f در a حد دارد.

تمرین: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ -x+2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید. به کمک نمودار، $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ را محاسبه کنید. آیا تابع f در $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

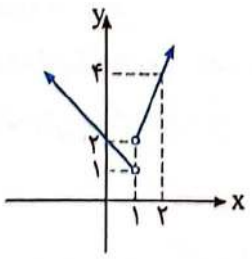
پاسخ: f یک تابع دوضابطه‌ای است. برای رسم نمودار f، خط $y = 2x$ را در محدوده $x > 1$ و خط $y = -x + 2$ را در محدوده $x < 1$ رسم می‌کنیم.

$y = 2x, x > 1 \Rightarrow$

x	۱	۲
y	۲	۴

$y = -x + 2, x < 1 \Rightarrow$

x	۰	۱
y	۲	۱



با توجه به نمودار، داریم:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

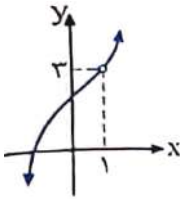
حد چپ و راست تابع f در $x = 1$ برابر نمی‌باشد و در نتیجه تابع f در $x = 1$ حد ندارد.

تمرین: نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که:

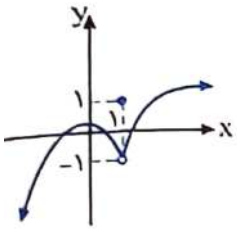
۱) حد تابع f در نقطهٔ $x=1$ برابر ۳ باشد ولی $f(1)$ وجود نداشته باشد.

۲) حد تابع f در نقطهٔ $x=1$ برابر -1 باشد و $f(1)=1$

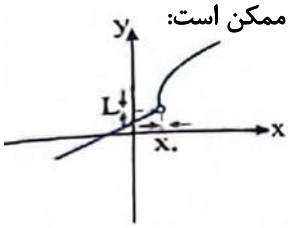
پاسخ: ۱) باید نمودار تابعی را رسم کنیم که در $x=1$ توخالی باشد ولی اگر این قسمت را روی محور yها تصویر کنیم، تصویر آن عدد ۳ باشد:



۲) مانند قسمت (۱) عمل می‌کنیم با این تفاوت که نقطهٔ $(1,1)$ را در نمودار مشخص می‌کنیم:



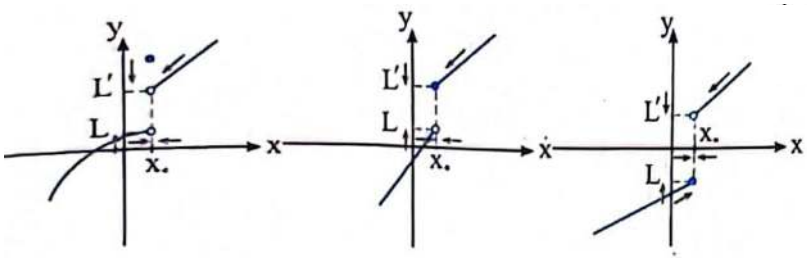
نکته: ۱) حد تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند x_0، به معین‌بودن یا معین‌نبودن تابع در x_0 بستگی ندارد. یعنی ممکن است:



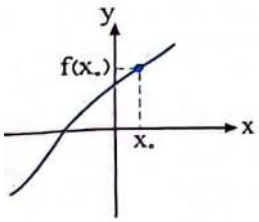
آ) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، حد داشته باشد.

ب) تابع f در x_0 تعریف شده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، تابع حد نداشته باشد.

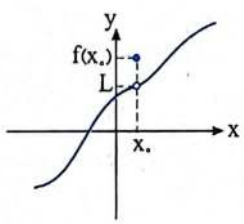
۲) وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از x_0 به x_0 نزدیک می‌شود، مقدار تابع به L' و وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از x_0 به x_0 نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شود اما $L \neq L'$، لذا f در $x=x_0$ حد ندارد.



۳) هنگامی که تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حد باشد و تابع در این نقطه تعریف شده باشد، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد. یعنی ممکن است:



$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$



$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$

پرسش‌های تشریحی:

۱- عبارت زیر درست یا نادرست است؟

تابع f ممکن است در $x=a$ حد داشته باشد ولی مقدار نداشته باشد.

۲- اگر حد راست تابع f در $x=۲$ برابر -۱ و حد چپ تابع f در $x=۲$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه تابع f در $x=۲$ ..... .

۳- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x>۱ \\ -۱ & -۱<x\leq ۱ \\ -x-۳ & x<-۲ \end{cases}$ را رسم کنید. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

(مشابه مثال ۱ صفحهٔ ۱۲۶ و تمرین ۱ صفحهٔ ۱۲۷ کتاب درسی)

آ) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$, $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=-۱$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x)=-۱$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ وجود ندارد.

ج) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)$

۴- اگر $f(x)=\frac{x}{|x|}$ باشد، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود دارد؟ (تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۲۷ کتاب درسی)

۵- در هر یک از قسمت‌های زیر، ضابطهٔ تابعی مانند f را بنویسید که: (مشابه تمرین‌های ۲، ۳ و ۴ صفحهٔ ۱۲۷ کتاب درسی)

آ) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۲$

ب) در $x=۲$ حد نداشته باشد و $f(۲)=۰$

پ) در $x=۰$ تعریف نشده باشد و $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-۱$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۳$ و $f(-۱)=-۲$

ث) در $x=-۲$ حد چپ و راست داشته باشد ولی $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ موجود نباشد.

Homework

۱ حد تابع $f(x)=\frac{۲}{[x]-۱}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ;x>۰\\ x^۲+۲x & ;x<۰\end{cases}$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$

ب $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$

پ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

ت $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$

۳ آیا $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در $x=۰$ دارای حد است؟ با ذکر دلیل آن را توضیح دهید.

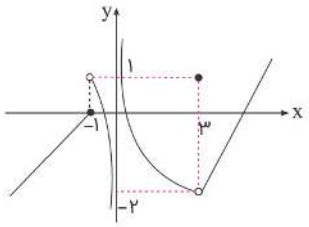
تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را رسم کرده به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۴ $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

۵ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

۶ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

۷ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۰$

۲) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = ۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = -۲$

۴) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۱$

۸ تابع $g(x)$ با ضابطهٔ $g(x) = \begin{cases} -۳ & ;x \in \mathbb{Z} \\ ۵ & ;x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض می‌باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) + \lim\limits_{x\to -۲} g(x) + \lim\limits_{x\to \sqrt{۳}} g(x)$ کدام است؟

۱) ۷

۲) -۱

۳) ۵

۴) ۱۵

۹ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲x - ۱ & ;x < ۱ \\ ۵ & ;x = ۱ \\ ۳x - a & ;x > ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۲

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۴

۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} ۳ & ;x \notin \mathbb{Z} \\ -۱ & ;x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) + \lim\limits_{x\to \sqrt{۳}} f(x)$ کدام است؟

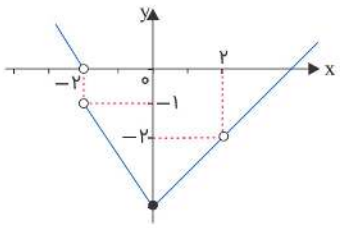
۱) ۲

۲) ۶

۳) -۲

۴) -۳

۱۱ باتوجه‌به نمودار تابع $f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ کدام است؟



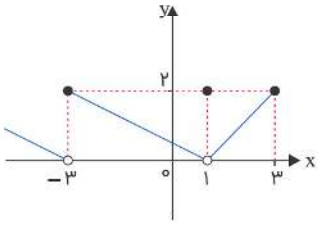
۱) -۳

۲) -۲

۳) -۱

۴) صفر

۱۲ باتوجه‌به نمودار تابع $y = f(x)$، کدام گزینه نادرست است؟



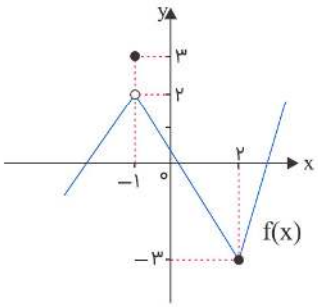
۱) $f(۱) = ۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) =$ وجود ندارد

۴) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰$

۱۳ نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر می‌باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) + ۲\lim\limits_{x\to +۲} f(x)$ کدام است؟



۱) -۳

۲) -۱

۳) -۴

۴) -۲

۱۴ توابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$، $g(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ و $h(x) = \sqrt{۲ + x}$ مفروض‌اند. چند تابع از توابع مذکور در $x = ۲$ حد ندارند؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

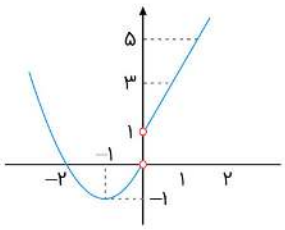
پاسخ Homework

۱

چون در مخرج کسر است $[x]-۱\neq ۰$
$\Rightarrow [x]\neq ۱ \Rightarrow x \notin [۱,۲)$

پس در ۱ همسایگی راست ندارد، پس حد ندارد.

۲



الف $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$

ب $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰$

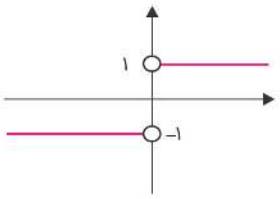
پ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ حد ندارد در $x = ۰$ f

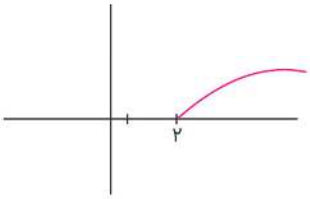
ت $\lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۰$

۳

$f(x) = \begin{cases} ۱ & ;x > ۰ \\ -۱ & ;x < ۰ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$
$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$
دارای حد نیست





۴ $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۰$

۵ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) =$ حد وجود ندارد.

۶ حد وجود ندارد.

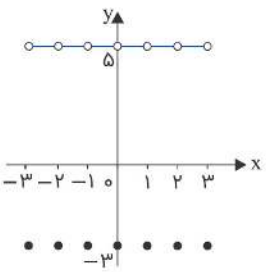
۷ **گزینه ۴**

بنا به شکل نمودار f :

$\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = -۲$

۸ **گزینه ۴**

بنا به نمودار $g(x)$:



$$\lim_{x\to ۲} g(x) + \lim_{x\to -۲} g(x) + \lim_{x\to \sqrt{۳}} g(x) = ۵ + ۵ + ۵ = ۱۵$$

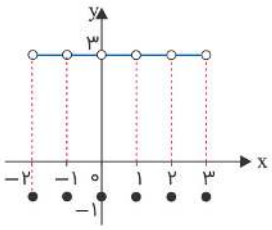
۹ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$a(1)^2 + 2(1) - 1 = 3(1) - a \Rightarrow a + 1 = 3 - a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۱۰ گزینه ۲

بنا به نمودار $f(x)$ داریم:



$$\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to \sqrt{3}} f(x) = 3 + 3 = 6$$

۱۱ گزینه ۱

$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) + \lim_{x\to 2} f(x) = -1 + (-2) = -3$$

۱۲ گزینه ۲

بنا به شکل نمودار f، گزینهٔ "۲" نادرست است.

۱۳ گزینه ۳

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 2$$

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) + 2\lim_{x\to 2} f(x) = 2 + 2(-3) = -4$$

۱۴ گزینه ۲

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty , ۲]$$

$f(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲ , ۲]$$

$g(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$$۲ + x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_h = [-۲ , +\infty)$$

$h(x)$ در $x = ۲$ حد دارد.

BOX 2: محاسبه حد تابع (صفحه ۱۲۸ تا ۱۳۰ کتاب درسی)

در BOX قبل برای محاسبهٔ هر از رسم نمودار تابع استفاده می‌کردیم. رسم نمودار برای همه توابع امکان‌پذیر نمی‌باشد و هم‌چنین می‌تواند زمان‌بر باشد. در این BOX با ارائه قواعد و دستورهایی هر توابع را بدون رسم نمودار به دست می‌آوریم.

محاسبهٔ حد تابع

حد تابع ثابت

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x)=k$ ، (k ددی حقیقی و ثابت است) در هر نقطهٔ دلخواه a، برابر همان مقدار ثابت k است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$$

حد تابع همانی

قضیه ۲: حد تابع $f(x)=x$ (تابع همانی) در هر نقطهٔ a $(a\in\mathbb{R})$ برابر با a است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x \xrightarrow{\text{به جای } x,a \text{ قرار می‌دهیم.}} a$$

تمرین: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}(-۵)$ ۲) $\lim\limits_{x\to -۱} x$

پاسخ: ۱) $f(x)=-۵ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}(-۵)=-۵$ تابع ثابت است.

۲) $f(x)=x \Rightarrow \lim\limits_{x\to -۱} x=-۱$ تابع همانی است.

حد مجموع

قضیه ۳: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = l+m$$

به عبارت دیگر، اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، آن‌گاه حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آن‌ها در همان نقطه است.

حد تفاضل

قضیه ۴: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l-m$$

یعنی حد تفاضل دو تابع برابر است با تفاضل حدهای آن دو تابع.

حد حاصل‌ضرب

قضیه ۵: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = l.m$$

یعنی حد حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن دو تابع.

نکته: قضیه‌های (۳) و (۵) را می‌توان به تعداد متناهی از توابع تعمیم داد، یعنی:

۱) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)+h(x)+\cdots+k(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)+\lim\limits_{x\to a} h(x)+\cdots+\lim\limits_{x\to a} k(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)h(x)\ldots k(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x).\lim\limits_{x\to a} h(x)\ldots\lim\limits_{x\to a} k(x)$

- از مطالب قبل می‌توان نتیجه‌های زیر را به دست آورد:

نتیجه ۱: اگر حد تابع f در نقطهٔ a وجود داشته باشد و c یک عدد ثابت باشد، آن‌گاه:

(اگر عددی ثابت در یک تابع ضرب شود، می‌توان آن را از حد بیرون آورد.)

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\,.\lim_{x\to a} f(x)$$

نتیجه ۲: حد تابع $f(x)=x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در نقطهٔ a، برابر است با a^n ، یعنی:

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

مثال: $\lim_{x\to ۵} x^۲ = ۵^۲ = ۲۵$

نتیجه ۳: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = l^n$$

نتیجه ۴: حد تابع چندجمله‌آی $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+c$، ($n$ عدد صحیح و نامنفی)، در نقطهٔ $x_۰$ برابر است با $f(x_۰)$، یعنی:

$$\lim_{x\to x_۰} f(x) = \lim_{x\to x_۰}(ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+c) = ax_۰^n+bx_۰^{n-۱}+\cdots+c = f(x_۰)$$

پس برای به دست آوردن حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه، کافی است مقدار تابع را در آن نقطه به دست آوریم.

حد تقسیم

قضیه ۶: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = m$ که $m\neq ۰$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{m} \quad , \quad m\neq ۰$$

یعنی حد خارج‌قسمت دو تابع، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج‌قسمت حدهای آن دو تابع.

تمرین: اگر $\lim_{x\to ۲} f(x) = -۱$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۳$ باشد، حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۲}(۳f(x)+۲g(x))$ ۲) $\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}$

پاسخ: ۱)

$$\lim_{x\to ۲}(۳f(x)+۲g(x)) = ۳\lim_{x\to ۲} f(x)+۲\lim_{x\to ۲} g(x) = ۳(-۱)+۲(۳) = -۳+۶ = ۳$$

۲) حد هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم و سپس حاصل‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}(۲f(x)-g(x)) = ۲\lim_{x\to ۲} f(x)-\lim_{x\to ۲} g(x) = ۲(-۱)-۳ = -۵$$

$$\lim_{x\to ۲} f(x)g(x) = \lim_{x\to ۲} f(x)\lim_{x\to ۲} g(x) = (-۱)\times ۳ = -۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-g(x)}{f(x)g(x)} = \frac{-۵}{-۳} = \frac{۵}{۳}$$

تمرین: اگر تابع f در $x=۳$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۵$ باشد، مقدار $\lim_{x\to ۳} f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $\lim_{x\to ۳} f(x) = A$ باشد، در این صورت:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = \frac{\lim_{x\to ۳}(۲f(x)-۱)}{\lim_{x\to ۳}(f(x)+۱)} = \frac{۲\lim_{x\to ۳} f(x)-۱}{\lim_{x\to ۳} f(x)+۱} = \frac{۲A-۱}{A+۱} = \frac{۵}{۱}$$

$$\Rightarrow ۲A-۱ = ۵(A+۱) \Rightarrow ۲A-۱ = ۵A+۵ \Rightarrow ۳A = -۶ \Rightarrow A = -۲ = \lim_{x\to ۳} f(x)$$

حد تابع کسر گویا

اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم به شرط آن‌که $\lim_{x\to a} Q(x)\neq ۰$ ، پس حد

تابع $f(x)=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots+c'}$، ($m$ و n دو عدد صحیح نامنفی) در a_0 برابر است با مقدار تابع f در نقطهٔ a_0، به شرط آن‌که a_0 ریشهٔ مخرج کسر نباشد.

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3+4x}{x^2+1}$ را حساب کنید.

پاسخ: با قراردادن عدد -2 به جای x، مقدار حد به دست می‌آید:

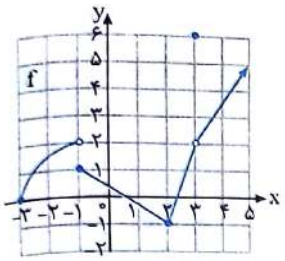
$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+4x}{x^2+1}=\frac{2(-2)^3+4(-2)}{(-2)^2+1}=\frac{-16-8}{5}=-\frac{24}{5}$$

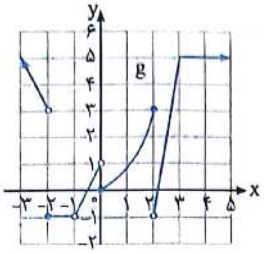
تمرین: با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+g(x))$

۲) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)+g(x))$

۳) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$





پاسخ: ۱) طبق نمودار $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=5$ می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to 3}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 3}f(x)+\lim_{x\to 3}g(x)=2+5=7$$

۲) تابع g در $x=-1$ حد ندارد و داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to(-1)^-}f(x)=2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)+\lim\limits_{x\to(-1)^+}g(x)=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)+\lim\limits_{x\to(-1)^-}g(x)=2-1=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع } f+g \text{ در } x=-1 \text{ حد ندارد.}$$

۳)

$$\lim_{x\to 2}f(x)=-1\ ,\ \lim_{x\to 2^+}g(x)=-1\ ,\ \lim_{x\to 2^-}g(x)=3$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{-1}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow \text{تابع } \frac{f}{g} \text{ در } x=2 \text{ حد ندارد.}$$

حد ریشه

● اگر $\lim\limits_{x\to a}(mx+n)=l>0$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{mx+n}=\sqrt{\lim_{x\to a}(mx+n)}=\sqrt{l}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{4x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(4x+1)}=\sqrt{4(2)+1}=\sqrt{9}=3$

● اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ و n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

توجه: اگر n زوج باشد، آن‌گاه l باید عددی مثبت باشد.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x^2+4}$ را به دست آورید.

پاسخ: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{5x^2+4}$ برابر $\mathbb{R}$ است ($5x^2+4$ همواره مثبت است)، بنابراین $x\to 1$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\sqrt{5x^2+4}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(5x^2+4}=\sqrt{5(1)^2+4}=\sqrt{9}=3$$

با توجه به قضایا و نکات گفته‌شده، در حدگیری برخی از توابع مانند f، مثالی از حدهای چپ و راست تابع f که ضابطهٔ آن داده شده است، ارائه می‌کنیم.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x\geq 1\\ 2x-ax & x<1\end{cases}$، اگر $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=4$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

پاسخ: حد راست تابع f در $x=1$ را از ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx$ به دست می‌آوریم و آن را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1^+}(ax^2+bx)=a(1)^2+b(1)=a+b=4\quad (*)$$

حد چپ تابع f در $x=1$ را از ضابطهٔ $f(x)=2x-ax$ به دست می‌آوریم و آن را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-ax)=2-a=3\Rightarrow a=-1\xrightarrow{(*)}-1+b=4\Rightarrow b=5$$

● در قضایا و نکات گفته‌شده، با شرط وجود حد دو تابع f و g در $x=a$ ، توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ نیز در $x=a$ حد ندارد و با فرض $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ نیز در $x=a$ حد دارد، ولی اگر یکی از این دو تابع یا هر دو تابع در $x=a$ حد نداشته باشند، آن‌گاه توابع بالا در $x=a$ حد دارند یا خیر؟ به این سوالات در نکات بعدی با ذکر مثال‌هایی پاسخ می‌دهیم.

نکته: اگر فقط یکی از دو تابع f و g در $x=a$ حد نداشته باشند، توابع $f+g$ و $f-g$ حتماً در $x=a$ حد ندارند. اما $f.g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند.

مثال: تابع $f(x)=x^2$ در $x=0$ حد دارد و تابع $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ در $x=0$ حد ندارد و داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=0^2+1=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=0^2-1=-1$$

پس تابع $f+g$ در $x=0$ حد ندارد. به همین ترتیب تابع $f-g$ نیز در $x=0$ حد ندارد، اما تابع‌های $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در $x=0$ حد دارند:

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)g(x))=\lim_{x\to 0^+}x^2=0^2=0\ ,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x^2)=0$$

پس تابع $f.g$ در $x=0$ دارای حدی برابر صفر است.

به همین ترتیب داریم: $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1}=0\ ,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{-1}=0$

پس تابع $\frac{f}{g}$ در $x=0$ دارای حدی برابر صفر است.

تذکر: در نکتهٔ قبل ذکر شده است که ممکن است توابع $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در $x=a$ دارای حد باشد. یعنی می‌توان مثالی ارائه کرد که این دو تابع نیز در $x=a$ حد نداشته باشند. به مثال زیر دقت کنید:

تمرین: با فرض $f(x)=x^2$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x<1\end{cases}$، آیا تابع $f.g$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

پاسخ: تابع f در $x=1$ حد دارد و تابع g در $x=1$ حد ندارد

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=\lim_{x\to 1^+}1=1\neq\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1\ ,\ \lim_{x\to 1}f(x)=1^2=1$$

برای تابع $f.g$ ، داریم: $\lim_{x\to 1^+}(f(x)g(x))=\lim_{x\to 1^+}(x^2\times 1)=1^2=1\ ,\ \lim_{x\to 1^-}(f(x)g(x))=\lim_{x\to 1^-}(x^2\times(-1))=-1$

چون حد چپ و راست تابع $f.g$ در $x=1$ با هم برابر نیستند، پس تابع $f.g$ در $x=1$ حد ندارد.

نکته: اگر هیچ‌یک از دو تابع f و g در $x=a$ حد نداشته باشند،هر یک از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند و هم‌چنین ممکن است در $x=a$ حد نداشته باشند. در این حالت باید حتماً حد چپ و راست هر یک از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آوریم و سپس بررسی کنیم.

پرسش‌های تشریحی:

۱- اگر $\lim_{x\to 2}f(x)=5$ ، $\lim_{x\to 2}g(x)=3$ و $\lim_{x\to 2}h(x)=-1$ باشد، حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی)

آ) $\lim_{x\to 2}g(x)(h(x))^2$

ب) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-(g(x))^2}{(h(x))^3+g(x)}$

۲- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی)

آ) $\lim_{x\to 1} 5$ ب) $\lim_{x\to -2} (3x^4 - 5x + 2)$ پ) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5x}{x^3 + 2x}$ ت) $\lim_{x\to 3} \sqrt{5x+1}$

ث) $\lim_{x\to -3} \sqrt{4+3x}$ ج) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2 + x}$ چ) $\lim_{x\to 1} \frac{(2x^2+1)\sqrt{x+3}}{x^2-4}$

۳- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+2}{x+1} & x > 1 \\ 2x + a & x < 1 \end{cases}$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x) - \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۴- دو تابع متفاوت مثال بزنید که در نقطهٔ $x = -1$ دارای حد برابر باشند. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی)

۵- در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f + g$ چه می‌توان گفت؟ (تمرین ۶ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

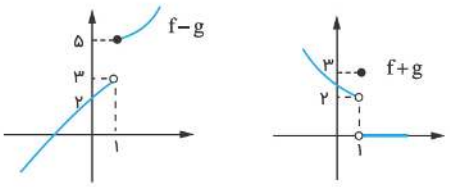
آ) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۶- اگر تابع f در $x = 0$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)+3}{3f(x)-2} = \frac{2}{5}$ باشد، مقدار $\lim_{x\to 0} f(x)$ را به دست آورید.

Homework (1)

۱ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟



۱) حد ندارد.

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$$(f+g)+(f-g)=۲f \Rightarrow f=\frac{۱}{۲}((f+g)+(f-g))$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^+}(f+g)+\lim\limits_{x\to ۱^+}(f-g)}{۲}=\frac{۰+۵}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^-}(f+g)+\lim\limits_{x\to ۱^-}(f-g)}{۲}=\frac{۲+۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Homework (2)

۱ حد تابع $f(x)=\frac{۲}{[x]-۱}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

درستی و نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

۲ اگر تابع $f+g$ در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه f و g حتما در $x=a$ حد دارند.

۳ اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و g در $x=a$ حد نداشته باشد، آن‌گاه $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد ندارد.

۴ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ;x>۰\\ x^۲+۲x & ;x<۰\end{cases}$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$

ب $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$

پ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

ت $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$

۵ اگر f در $x=a$ حدی مخالف صفر داشته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{۵f(x)+۳}{۲f(x)}=۱$ باشد. آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-۱}{۲+f(x)}$ را محاسبه کنید.

۶ آیا $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در $x=۰$ دارای حد است؟ با ذکر دلیل آن را توضیح دهید.

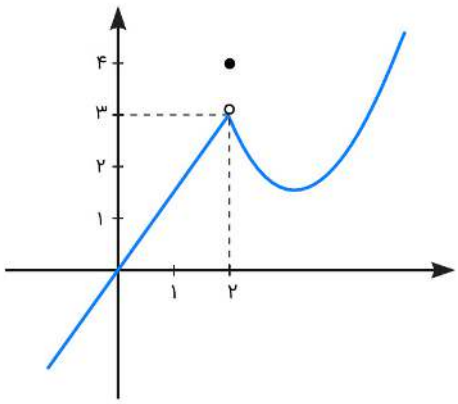
تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را رسم کرده به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۷ $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

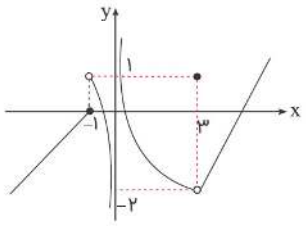
۸ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

۹ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

۱۰ با استفاده از نمودار زیر حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}(xf(x))$ را بیابید.



۱۱ نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=-۲$

۴) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۱$

۱۲ تابع $g(x)$ با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases}-۳ & ;x\in\mathbb{Z}\\ ۵ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ مفروض می‌باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)+\lim\limits_{x\to -۲} g(x)+\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}} g(x)$ کدام است؟

۱) ۷

۲) -۱

۳) ۵

۴) ۱۵

۱۳ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^۲+۲x-۱ & ;x<۱\\ ۵ & ;x=۱\\ ۳x-a & ;x>۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۲

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۴

۱۴ اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & ;x\notin\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۲}f(x)+\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}}f(x)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۶
۳) -۲
۴) -۳

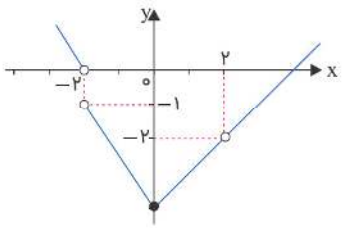
۱۵ اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\begin{cases}x+۳ & ;x>-۱\\ ۲x+۱ & ;x\le -۱\end{cases}$ مفروض باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) f و g در $x=-۱$ حد دارند.
۲) f در $x=-۱$ حد ندارد، ولی g در $x=-۱$ حد دارد.
۳) f در $x=-۱$ حد دارد، ولی g در $x=-۱$ حد ندارد.
۴) f و g در $x=-۱$ حد ندارند.

۱۶ اگر $f(x)=\begin{cases}ax-۳ & ;x<۲\\ x^۲+۳a & ;x\ge ۲\end{cases}$ و داشته باشیم $\lim\limits_{x\to۲^-}f(x)-\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=-۲$، مقدار a کدام است؟

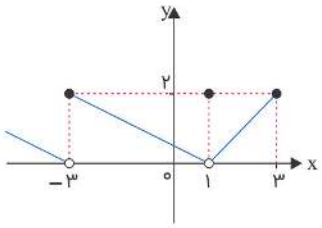
۱) -۷
۲) -۴
۳) -۳
۴) -۵

۱۷ باتوجه‌به نمودار تابع $f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}f(x)+\lim\limits_{x\to۲}f(x)$ کدام است؟



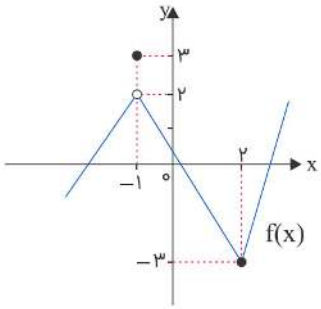
۱) -۳
۲) -۲
۳) -۱
۴) صفر

۱۸ باتوجه‌به نمودار تابع $y=f(x)$، کدام گزینه نادرست است؟



۱) $f(۱)=۲$
۲) $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=۲$
۳) $\lim\limits_{x\to۳}f(x)=$ وجود ندارد
۴) $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=۰$

۱۹ نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر می‌باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) + ۲\lim\limits_{x\to +۲} f(x)$ کدام است؟



۱) -۳

۲) -۱

۳) -۴

۴) -۲

۲۰ توابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$، $g(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ و $h(x) = \sqrt{۲ + x}$ مفروض‌اند. چند تابع از توابع مذکور در $x = ۲$ حد ندارند؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

پاسخ Homework (2)

۱ چون در مخرج کسر است $[x]-۱\neq ۰$

$\Rightarrow [x]\neq ۱ \Rightarrow x \notin [۱,۲)$

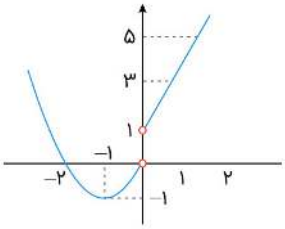
پس در ۱ همسایگی راست ندارد، پس حد ندارد.

پاسخ سؤالات ۲ تا ۳

۲ نادرست

۳ درست

۴



الف $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$

ب $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰$

پ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ حد ندارد $x = ۰$ در f

ت $\lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۰$

۵

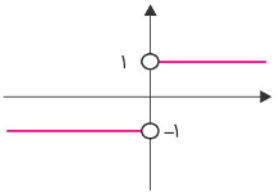
فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \frac{۵L+۳}{۲L} = ۱$

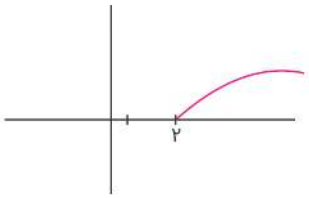
$\Rightarrow ۵L+۳ = ۲L \Rightarrow ۳L = -۳ \Rightarrow L = -۱$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-۱}{۲+f(x)} = \frac{L-۱}{۲+L} = \frac{-۱-۱}{۲-۱} = \frac{-۲}{۱} = -۲$

۶

دارای حد نیست $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$ $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۱$ $f(x) = \begin{cases} ۱ & ; x > ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$





۷

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۰$

۸

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) =$ حد وجود ندارد.

۹

حد وجود ندارد.

۱۰

$\lim_{x\to ۲} xf(x) = \lim_{x\to ۲} x \times \lim_{x\to ۲} f(x) = ۲ \times ۳ = ۶$

۱۱

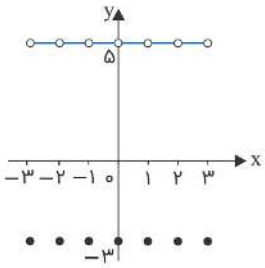
گزینه ۴

بنا به شکل نمودار f :

$\lim_{x\to ۳} f(x) = -۲$

۱۲ گزینه ۴

بنا به نمودار $g(x)$:



$$\lim_{x\to ۲} g(x) + \lim_{x\to -۲} g(x) + \lim_{x\to \sqrt{۳}} g(x) = ۵ + ۵ + ۵ = ۱۵$$

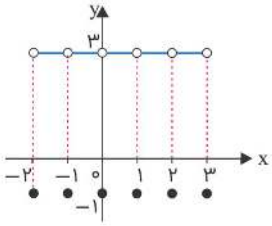
۱۳ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x)$$

$$a(۱)^۲ + ۲(۱) - ۱ = ۳(۱) - a \Rightarrow a + ۱ = ۳ - a \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

۱۴ گزینه ۲

بنا به نمودار $f(x)$ داریم:



$$\lim_{x\to ۲} f(x) + \lim_{x\to \sqrt{۳}} f(x) = ۳ + ۳ = ۶$$

۱۵ گزینه ۴

$$x+۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \Rightarrow D_f = [-۱, +\infty)$$

$f(x)$ در $x = -۱$ حد ندارد. (چون تابع f برای $x < -۱$ تعریف نشده است)

$g(x)$ در $x = -۱$ حد ندارد، چون حد راست و چپ نابرابر هستند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to (-۱)^+} g(x) = \lim\limits_{x \to (-۱)^+} (x+۳) = -۱+۳ = ۲ \\ \lim\limits_{x \to (-۱)^-} g(x) = \lim\limits_{x \to (-۱)^-} (۲x+۱) = -۲+۱ = -۱ \end{cases}$$

۱۶ گزینه ۴

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۲a - ۳$$
$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۴ + ۳a$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) - \lim_{x \to ۲^+} f(x) = -۲ \Rightarrow (۲a-۳) - (۴+۳a) = -۲$$
$$\Rightarrow -a - ۷ = -۲ \Rightarrow a = -۵$$

۱۷ گزینه ۱

$$\lim_{x \to (-۲)^+} f(x) + \lim_{x \to ۲} f(x) = -۱ + (-۲) = -۳$$

۱۸ گزینه ۲

بنا به شکل نمودار f، گزینهٔ "۲" نادرست است.

۱۹ گزینه ۳

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x \to -۱} f(x) = ۲$$

بنا به نمودار $f(x)$:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = -۳$$

$$\lim_{x \to -۱} f(x) + ۲\lim_{x \to ۲} f(x) = ۲ + ۲(-۳) = -۴$$

۲۰ گزینه ۲

$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty , ۲]$

$f(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲ , ۲]$

$g(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$۲ + x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_h = [-۲ , +\infty)$

$h(x)$ در $x = ۲$ حد دارد.

BOX 3: حد گویای $\frac{0}{0}$ ، حد تابع قدرمطلقی ـ حد تابع مثلثاتی ـ حد تابع جزء صحیح

(صفحه ۱۳۱ تا ۱۳۶ کتاب درسی)

در این BOX می‌خواهیم حد توابع گویایی را به دست بیاوریم که بعد از جای‌گذاری a به جای x، حاصل کسر به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید.

انواع $\frac{0}{0}$

الف) حد گویای $\frac{0}{0}$

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x-x_0$: اگر چندجمله‌ای $ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c$ به ازای $x=x_0$ برابر صفر شود (x_0 ریشهٔ چندجمله‌ای باشد)، آن‌گاه چندجمله‌ای بر $x-x_0$ بخش‌پذیر است. از این خاصیت می‌توان برای تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.

تمرین: نشان دهید چندجمله‌ای x^3+4x-5 بر $x-1$ بخش‌پذیر است، سپس عبارت x^3+4x-5 را تجزیه کنید.

پاسخ: اگر حاصل عبارت x^3+4x-5 به ازای $x=1$ (ریشهٔ معادلهٔ $x-1=0$) برابر صفر شود، آن‌گاه عبارت x^3+4x-5 بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

$$x=1 \xrightarrow{\text{جایگذاری از چندجمله‌ای}} (1)^3+4(1)-5=1+4-5=0$$

بنابراین x^3+4x-5 بر $x-1$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت x^3+4x-5 بر $x-1$ ، عبارت x^3+4x-5 را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x-5 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+5 \\ \hline x^2+4x-5 & \\ -x^2+x & \\ \hline 5x-5 & \\ -5x+5 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow x^3+4x-5=(x-1)(x^2+x+5)$$

نکته: اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم: $P(x)=Q(x)=0$ ، آن‌گاه برای محاسبهٔ حد، ابتدا $P(x)$ و $Q(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم ($P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه می‌کنیم) و سپس $x-a$ را در صورت و مخرج ساده می‌کنیم و مقدار حد را با عددگذاری به دست می‌آوریم.

تمرین: حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2x^2-5x+3}$

پاسخ: ۱) $x=-1$ عبارت‌های صورت و مخرج کسر $\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ را برابر صفر می‌کند. با استفاده از اتحادهای جبری صورت و مخرج را تجزیه و سپس با حذف عامل $x+1$ در صورت و مخرج عددگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{-1+2}=\frac{-1}{1}=-1$$

۲) عبارت $1-x^3$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر و عبارت $2x^2-5x+3$ را با تقسیم بر $x-1$ تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{2x^2-5x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{\overset{-1}{\cancel{(1-x)}}(1+x+x^2)}{\cancel{(x-1)}(2x-3)}=\frac{-1\times(1+1+1^2)}{2(1)-3}=\frac{-3}{-1}=3$$

ب) حد توابع قدرمطلقی

در محاسبهٔ حد $|f|$ ، اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه حد از قدرمطلق عبور می‌کند، یعنی: $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to a}f(x)|$

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x^2-3x|}{\sqrt{3x-2}}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-3x|}{\sqrt{3x-2}}=\frac{|2^2-3(2)|}{\sqrt{3(2)-2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$$

اگر در حد توابع شامل قدرمطلق، حاصل حد با عددگذاری به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، ابتدا باید با استفاده از تعریف قدرمطلق، آن را بدون قدرمطلق بنویسیم و سپس حاصل حد را به دست آوریم.

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x^2+3x-4|}{x^2-x}$ را به دست آورید.

پاسخ: با عددگذاری، حاصل حد به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. پس ابتدا باید تابع داده‌شده را بدون قدرمطلق بنویسیم.

تجزیهٔ عبارت x^2+3x-4 به صورت $(x-1)(x+4)$ می‌باشد. در عبارت $x+4$ ، به جای x عدد یک را قرار می‌دهیم. داریم:

$$x=1 \Rightarrow x+4=1+4=5 \Rightarrow |x^2+3x-4|=|(x-1)\underbrace{(x+4)}_{5}|=5|x-1|$$

با توجه به مفهوم $x\to 1^+$ ، عبارت $|x-1|$ را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$x\to 1^+ \Rightarrow x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1|=(x-1) \Rightarrow 5|x-1|=5(x-1)$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2+3x-4|}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5(x-1)}{x(x-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

پ) حد تابع‌های سادهٔ مثلثاتی

همان‌گونه که برای عبارت‌های جبری با استفاده از قضایایی که تاکنون گفته شده است، حد را محاسبه کرده‌ایم (بدون رسم نمودار و یا تشکیل جدول)، می‌توان حد توابع مثلثاتی را با استفاده از قضایای زیر و بدون استفاده از جدول و نمودار به دست آورد:

قضیه: تابع $f(x)=\sin x$ در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

قضیه: تابع $f(x)=\cos x$ در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

تمرین: حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2\cos x)$

۲) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x + \sin^2 x}{2\cos x + 1}$

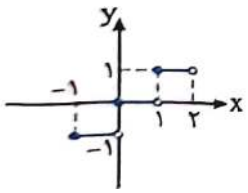
پاسخ: ۱)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2\cos x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x + \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} 2\cos x = \sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۲)

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x + \sin^2 x}{2\cos x + 1} = \frac{2\cos(-\frac{\pi}{3}) + (\sin(-\frac{\pi}{3}))^2}{2\cos(-\frac{\pi}{3}) + 1} = \frac{2\times\frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}+1} = \frac{1+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{8}$$

ت) حد تابع جزء صحیح



- نمودار تابع $y=[x]$ به صورت مقابل است:

- با توجه به نمودار f در نقطه‌ای به طول $x=1$ ، داریم:

۱) اگر $x\to 1^+$ $(x>1)$، آن‌گاه مقادیر f برابر ۱ است:

$$1<x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(1/01)=f(1/001)=\cdots=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

۲) اگر $x\to 1^-$ $(x<1)$، آن‌گاه مقادیر f برابر صفر است:

$$x\to 1^- \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}[x] = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0$$

چون حد راست و چپ تابع در $x=1$ با هم برابر نیستند، پ ستابع f در $x=1$ حد ندارد. می‌توان با توجه به نمودار، نکتهٔ کلی بعدی را برای تابع $y=[x]$ در نقطهٔ صحیح $x=m$ بیان کرد:

نکته: اگر m یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه تابع $y=[x]$ در $x=m$ حد ندارد و داریم:

$$\lim_{x\to m^+}[x]=m \quad , \quad \lim_{x\to m^-}[x]=m-1$$

اما تابع $y=[x]$ در هر نقطهٔ غیرصحیحی حد دارد و مقدار حد آن برابر است با مقدار تابع در آن نقطه.

مثال: اگر $x=\frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}}[x] = [\frac{3}{2}] = 1$$

محاسبهٔ حد چپ و حد راست در توابع شامل جزء صحیح

در محاسبهٔ حد توابع شامل جزء صحیح، ابتدا باید با توجه به تعریف جزء صحیح $([u]=n \Leftrightarrow n \le u < n+1)$، به جای جزء صحیح عدد ثابتی قرار دهیم و سپس با توجه به قضایای حد، حدگیری را انجام دهیم.

تمرین: حاصل حد $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2[x]+\sqrt{x}}{[-x]+3x}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا با استفاده از مفهوم حد و تعریف جزء صحیح، مقدار $[x]$ و $[-x]$ را به دست می‌آوریم:

$$x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \xrightarrow{\substack{x \text{ با مقادیر بزرگ‌تر از یک به} \\ \text{عدد یک نزدیک می‌شود.}}} 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [x]=1 \\ -2 < -x < -1 \Rightarrow [-x]=-2 \end{cases}$$

با قراردادن عدد ۱ به جای $[x]$ و -2 به جای $[-x]$، حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2(1)+\sqrt{x}}{-2+3x} = \frac{2+\sqrt{1}}{-2+3(1)} = \frac{3}{1} = 3$$

پرسش‌های تشریحی:

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱- مقدار $\lim[x]$ وقتی $x \to 0$ برابر صفر است. (شهریور ۱۴۰۲)

۲- مقدار $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ برابر یک است.

● جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

۳- حد تابع $f(x)=\frac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \to -1^-$ برابر ..... است. (خرداد ۱۴۰۲)

۴- حد تابع $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$ وقتی که $x \to 1^-$ برابر ..... است.

۵- حاصل هر یک از حدهای زیر را به دست آورید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی)

آ) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ (خرداد ۱۴۰۲)

ب) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+x}$ (خرداد ۱۴۰۲)

پ) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$

ت) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x}{2x^2+5x+3}$

ث) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$ (شهریور ۱۴۰۲)

ج) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$

۶- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. *(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی)*

آ) $\lim\limits_{x\to ۱۴۰۲^-} [x]$ *(خرداد ۱۴۰۲)*

ب) $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{۲x+۳}{[x]+۲}$ *(خرداد ۱۴۰۲)*

پ) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲+۱}{[x]}$ *(شهریور ۱۴۰۲)*

ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۲[x]-۱}{x^۲+۳x+۱}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} (x+[x])$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{x+۳}{[x]}$ *(شهریور ۱۴۰۲)*

۷- حاصل حدهای مثلثاتی زیر را به دست آورید. *(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی)*

آ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\cos x)$ *(خرداد ۱۴۰۲)*

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x+\cos x)$ *(شهریور ۱۴۰۲)*

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\tan x+\cot x)$ *(شهریور ۱۴۰۲)*

Homework (1)

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^+} \frac{|x+۱|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۱ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ اگر $f(x)=x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

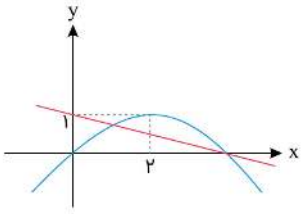
۴ مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}[۲\sin x-۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است)

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}$ ، کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$x \to -1^+ \Rightarrow [x] = -1\ ,\ [-x] = 0\ ,\ x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1+(-1)}{x-0} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

راه‌حل دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^3}{x} = \lim_{x\to 0} (\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^3 = (\sqrt{\frac{1}{9}})^3 = \frac{1}{27}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴ گزینه ۱

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{6})^-} [2\sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^-] - 1 = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۳

معادلهٔ سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x-0)(x-4) = ax(x-4)$$
$$f(2) = 1 \Rightarrow -8a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{8}$$
$$g(x) = \frac{-x}{4} + 1 = \frac{-1}{4}(x-4)$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)+g(x)}{4-x} = \lim_{x\to 4^-} \frac{-\frac{1}{8}x(x-4) - \frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$
$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{-\frac{1}{8}(x-4)(x+1)}{-(x-4)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{8}(x+1) = \frac{5}{8}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Homework (2)

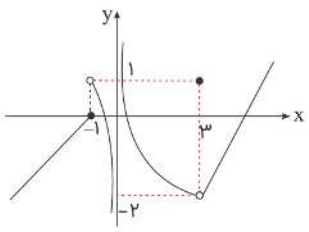
۱ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^{۲}x}{۱-\sin x}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۲ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^{+}}\frac{[\sin x]}{[\cos x]}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۲

۳ نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}f(x)=۰$
۲) $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}f(x)=۱$
۳) $\lim\limits_{x\to۳^{+}}f(x)=-۲$
۴) $\lim\limits_{x\to۳}f(x)=۱$

۴ تابع $g(x)$ با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases}-۳ & ;x\in\mathbb{Z}\\ ۵ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ مفروض می‌باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to۲}g(x)+\lim\limits_{x\to-۲}g(x)+\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}}g(x)$ کدام است؟

۱) ۷
۲) -۱
۳) ۵
۴) ۱۵

۵ اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & ;x\notin\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}}f(x)+\lim\limits_{x\to۲}f(x)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۶
۳) -۲
۴) -۳

۶ توابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$، $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $h(x)=\sqrt{۲+x}$ مفروض‌اند. چند تابع از توابع مذکور در $x=۲$ حد ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

۷ $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۱}$

۸ $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x^۲+۳x-۴}$

۹ $\lim\limits_{x\to ۴}[\cos x]$

۱۰ $\lim\limits_{x\to(\frac{-۱}{۳})^+}[-\dfrac{۱}{x^۲}]$

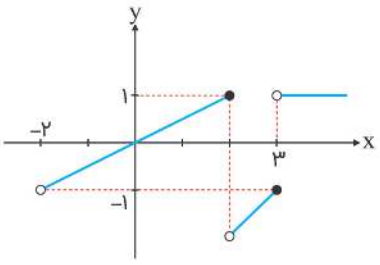
درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۱۱ اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ تعریف نشده باشد، در a حد ندارد.

۱۲ اگر تابع f در $x=a$ حد چپ و راست داشته باشد، حد دارد.

۱۳ تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را رسم نمایید و در مورد حد این تابع در نقاط بازهٔ $(-۳,۳)$ نظر دهید.

۱۴ باتوجه‌به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف $\lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)$

ب $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x+۲)$

۱۵ حاصل حدود زیر را بیابید.

الف

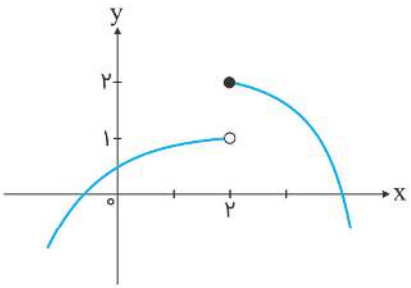
$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲ - ۹}$$

ب

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x . \cos ۲x}{۱ + \cos^۲ x}$$

۱۶ دو تابع مانند f و g مثال بزنید که در $x = ۱$ حد نداشته باشد ولی مجموع آن‌ها در $x = ۱$ حد داشته باشد.

۱۷ باتوجه‌به نمودار زیر حاصل حدهای خواسته‌شده را بیابید.



الف

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

۱۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۲ - ۳x - ۲}{\sqrt{x + ۲} - ۲}$$

ب

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos ۲x}{x \sin ۲x}$$

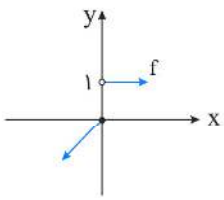
پ

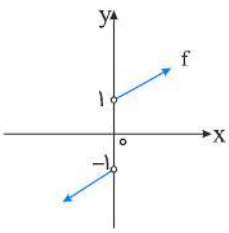
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۴x - \pi}{\cos ۲x}$$

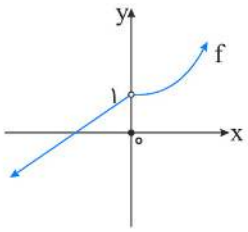
ت

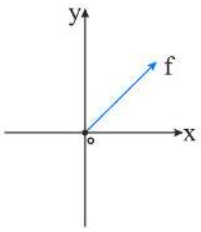
$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[x] - ۱۸}{x^۲ - ۳x}$$

۱۹ کدام‌یک از توابع زیر، در $x = ۰$ حد دارد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۰ اگر $f(x) = \sqrt{x-۲}$ و $g(x) = \begin{cases} x & ; x > ۲ \\ -x & ; x \le ۲ \end{cases}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f در $x = ۲$ حد دارد ولی تابع g در $x = ۲$ حد ندارد.

۲) تابع f در $x = ۲$ حد ندارد ولی تابع g در $x = ۲$ حد دارد.

۳) هر دو تابع f و g در $x = ۲$ حد دارند.

۴) هیچ‌یک از توابع f و g در $x = ۲$ حد ندارند.

۲۱ اگر $f(x) = \begin{cases} ۲ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) + \lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} f(x)$ کدام است؟

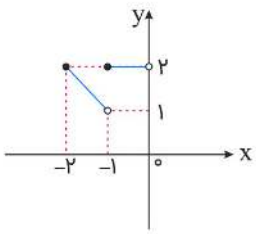
۱) -۱

۲) ۴

۳) -۲

۴) ۱

۲۲ باتوجه‌به نمودار تابع f، کدام گزینه نادرست است؟



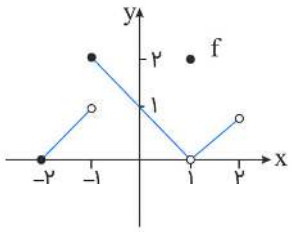
۱) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۲) $\lim\limits_{x\to -۰/۵} f(x) = ۲$

۳) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) = ۲$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲$

۲۳ باتوجه‌به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) + \lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟



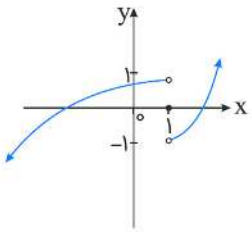
۱) ۲

۲) ۱

۳) وجود ندارد.

۴) -۲

۲۴ باتوجه‌به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} f\left(\frac{۱}{۲x-۱}\right)$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) موجود نیست.

۲۵ حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} \frac{|x|x - x + ۲}{x+۲}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) -۲

۲۶ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x[x]-۱}{x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) وجود ندارد. ۴) صفر

۲۷ در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} [x]-۱ & ; x \geq ۱ \\ \frac{x-۱}{|x-۱|} & ; x < ۱ \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۱$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۱$

۲۸ می‌دانیم تابع $f(x) = \begin{cases} [x]+۳a & ; x > ۲ \\ a - x & ; x < ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) -۱

۲۹ کدام گزینه درست است؟

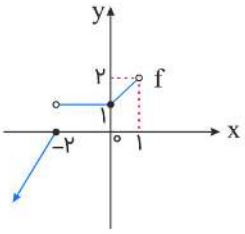
۱) اگر تابع f در $x = a$ تعریف نشده باشد، قطعاً در $x = a$ حد ندارد.

۲) اگر تابع f در $x = a$ تعریف شده باشد، قطعاً در $x = a$ حد دارد.

۳) اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد، قطعاً در $x = a$ تعریف شده است.

۴) هیچ‌کدام

۳۰ باتوجه‌به نمودار تابع f، کدام گزینه درست است؟



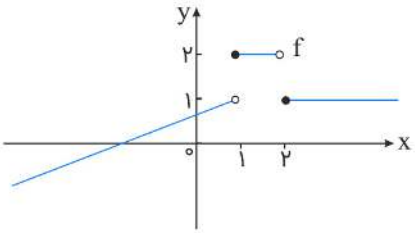
۱) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

۲) $\lim_{x\to(-2)} f(x) = 0$

۳) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ وجود ندارد.

۴) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

۳۱ باتوجه‌به شکل زیر، حاصل $\lim_{x\to 2^-} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x)$ کدام است؟



۱) صفر

۲) -1

۳) ۲

۴) ۱

۳۲ کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} = 0$

۲) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

۳) $\lim_{x\to 0^-} [x] = 0$

۴) $\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲x}{۱-\sin x}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۱+۱=۲$$

۲ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\sin x]}{[\cos x]}=\frac{[\sin\pi^+]}{[\cos\pi^+]}=\frac{[۰^-]}{[(-۱)^+]}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

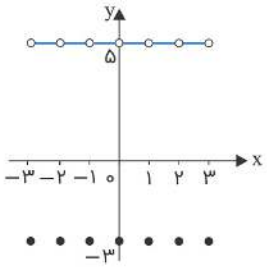
۳ گزینه ۴

بنا به شکل نمودار f :

$$\lim_{x\to۳}f(x)=-۲$$

۴ گزینه ۴

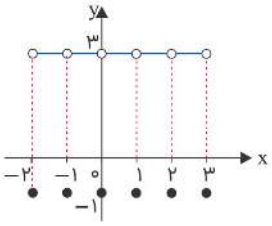
بنا به نمودار $g(x)$:



$$\lim_{x\to۲}g(x)+\lim_{x\to-۲}g(x)+\lim_{x\to\sqrt{۳}}g(x)=۵+۵+۵=۱۵$$

۵ گزینه ۲

بنا به نمودار $f(x)$ داریم:



$$\lim_{x\to ۲} f(x) + \lim_{x\to \sqrt{۳}} f(x) = ۳ + ۳ = ۶$$

۶ گزینه ۲

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty\,,\,۲]$$

$f(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲\,,\,۲]$$

$g(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

$$۲ + x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_h = [-۲\,,\,+\infty)$$

$h(x)$ در $x = ۲$ حد دارد.

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

۷

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{x - ۱} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)}{(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{\cancel{x - ۱}}{\cancel{(x - ۱)} \times ۳} = \frac{۱}{۳}$$

۸

$\lim_{x\to ۱} \sqrt{(x-۱)(x+۴)}$ حد چپ موجود نیست پس تابع در $x = ۱$ حد ندارد

۹

$$\lim_{x\to ۴} [\cos ۴] = -۱$$

۴ رادیان حدودا ۲۲۸° است که در ناحیهٔ ۳ قرار دارد و $\cos x$ بین صفر و ۱- است، پس جزء صحیح آن ۱- می‌شود.

۱۰

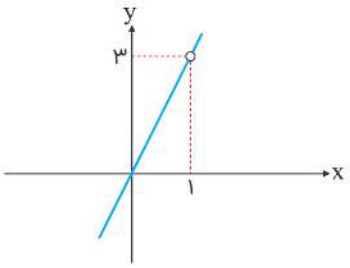
$$x > \frac{-۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{x} < -۳ \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} > ۹ \Rightarrow -\frac{۱}{x^۲} < -۹ \Rightarrow [\frac{-۱}{x^۲}] = -۱۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (\frac{-۱}{۳})^+} [-\frac{۱}{x^۲}] = -۱۰$$

پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۲

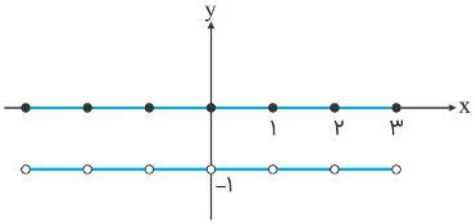
۱۱ نادرست. ممکن است تابع در $x = a$ تعریف نشده باشد ولی دارای حد باشد.

۱۲ نادرست. باید حد راست و چپ باهم مساوی باشند:



$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۳$$

۱۳



$$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

در تمامی نقاط دارای حد است.

۱۴

الف

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = -۱$$

ب

$$x < ۰ \Rightarrow x + ۲ < ۲ \qquad \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱$$

۱۵ الف

$$\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x+۳)(x-۳)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}\times\cos\pi}{۱+\cos^{۲}\frac{\pi}{۲}}=\frac{(۱)(-۱)}{۱+۰}=-۱$$

۱۶ $f(x)=[x]$ و $f(x)=[-x]$ در $x=۱$ حد ندارند ولی مجموع آن‌ها $y=[x]+[-x]$ در $x=۱$ حد دارند.

$$\lim_{x\to ۱}[x]+[-x]=-۱$$

مثال‌های مشابه هم قبول است.

۱۷ الف

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۱$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=۲$$

۱۸ الف

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^{۲}-۳x-۲}{\sqrt{x+۲}-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(۲x^{۲}-۳x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}{x+۲-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(۲x+۱)(\sqrt{x+۲}+۲)}{\cancel{x-۲}}=۵(۴)=۲۰$$

ب

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}x}{x\sin ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲(\frac{\sin x}{x}\times x)^{۲}}{x(\frac{\sin ۲x}{۲x}\times ۲x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^{۲}}{۲x^{۲}}=۱$$

پ

$$x-\frac{\pi}{۴}=y\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}+y$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۴x-\pi}{\cos ۲x}=\lim_{y\to ۰}\frac{\cancel{\pi}+۴y-\cancel{\pi}}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۲y)}=\lim_{y\to ۰}\frac{۴y}{-\sin ۲y}=\lim_{y\to ۰}\frac{\frac{۴y}{۱}}{\frac{-\sin ۲y}{۲y}\times ۲y}$$

$$=\lim_{y\to ۰}\frac{۴y}{-۲y}=-۲$$

ت

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^{۲}[x]-۱۸}{x^{۲}-۳x}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^{۲}[۳^-]-۱۸}{x^{۲}-۳x}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۲x^{۲}-۱۸}{x^{۲}-۳x}$$

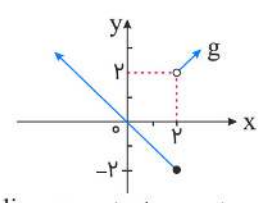
$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{(x-۳)}(۲x+۶)}{x\cancel{(x-۳)}}=۴$$

۱۹ گزینه ۳

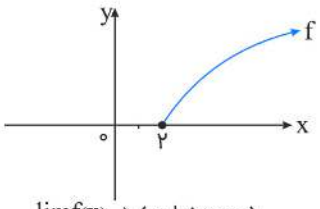
یک تابع زمانی در یک نقطه حد دارد که حد چپ و راست آن در آن نقطه باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$$

۲۰ گزینه ۴

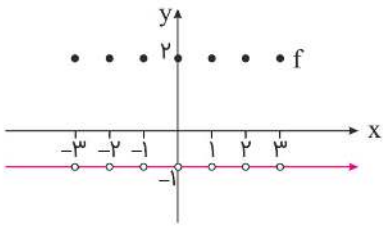


$\lim_{x\to ۲} g(x) \to$ (وجود ندارد)



$\lim_{x\to ۲} f(x) \to$ (وجود ندارد)

۲۱ گزینه ۳



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} f(x) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) + \lim_{x\to \sqrt{۲}} f(x) = -۲$$

۲۲ گزینه ۴

گزینهٔ ۴ نادرست است.

۲۳ گزینه ۳

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to -۱} f(x) \Rightarrow \text{وجود ندارد} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -۱} f(x) + \lim_{x\to ۱} f(x) \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

۲۴ گزینه ۲

$$(x \to ۱^+) \Rightarrow (\frac{۱}{۲x-۱} \to ۱^-)$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(\frac{۱}{۲x-۱}) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$$

۲۵ گزینه ۳

$$x \to (-۲) \Rightarrow |x| = -x$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} \frac{\overset{-x}{\cancel{|x|}}\, x - x + ۲}{x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{-x^۲ - x + ۲}{x+۲}$$

$$= \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{-\cancel{(x+۲)}(x-۱)}{\cancel{x+۲}} = \lim_{x\to(-۲)^-} (۱-x) = ۳$$

۲۶ گزینه ۱

$$x \to ۱^+ \Rightarrow [x] = ۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x\overset{۱}{\cancel{[x]}} - ۱}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{x^۲-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{(x-۱)}(x+۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$$

۲۷ گزینه ۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ([x]-۱) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x-۱}{|x-۱|} = -۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) \text{ (وجود ندارد)}$$

۲۸ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} ([x] + ۳a) = \lim_{x\to ۲^-} (a-x)$$

$$\Rightarrow \; ۲ + ۳a = a - ۲ \Rightarrow a = -۲$$

۲۹ گزینه ۴

وجود یا عدم وجود حد در یک نقطه، به خود نقطه مربوط نمی‌شود بلکه به همسایگی (محذوف) آن نقطه مربوط می‌شود.

۳۰ گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۲)} f(x) \text{ (وجود ندارد)} \quad , \quad \lim_{x\to ۰} f(x) = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲$$

۳۱ گزینه ۱

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱ - ۱ = ۰$$

۳۲ گزینه ۴

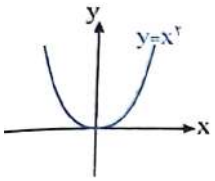
$$\lim_{x\to ۲} \sqrt{x-۲} \text{ (وجود ندارد)} \quad , \quad \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} [x] = -۱$$

BOX 4: پیوستگی (صفحه ۱۳۷ تا ۱۴۲ کتاب درسی)

در این BOX تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه را بررسی می‌کنیم. هم‌چنین در ادامه تعریف پیوستگی چپ، راست و پیوستگی روی بازه گفته می‌شود.

پیوستگی

مفهوم هندسی پیوستگی توابع: تابع $f(x)=x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و نمودار آن را که یک سهمی است، در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌بینید سهمی در هیچ نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک‌تکه یا پیوسته است. در واقع می‌توان نمودار تابع $y=x^2$ را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.

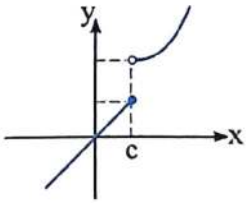


تعریف: تابع f را در نقطهٔ $c\in\mathbb{R}$ پیوسته می‌گوییم، هرگاه:

۱) تابع در $x=c$ حد داشته باشد.

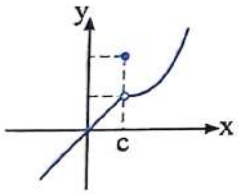
۲) حد تابع در $x=c$ با مقدار تابع در c برابر باشد، یعنی: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

نکته: اگر تابع f در $x=c$ حد نداشته باشد و یا مقدار تابع f در $x=c$ (یعنی $f(c)$) با حد تابع در $x=c$ برابر نباشد و یا تابع f در $x=c$ تعریف نشده باشد، تابع f در $x=c$ پیوسته نمی‌باشد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



تابع f در $x=c$ حد ندارد.

(حدهای چپ و راست با هم برابر نمی‌باشند.



تابع f در $x=c$ حد دارد،

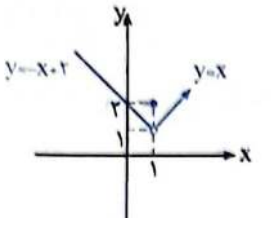
ولی حد آن با مقدار تابع برابر نمی‌باشد.

تمرین: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و پیوستگی تابع را در $x=1$ بررسی کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x=1 \\ -x+2 & x<1 \end{cases}$

۲) $g(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$

پاسخ: ۱) f یک تابع سه ضابطه‌ای است. نمودار f به صورت مقابل است:

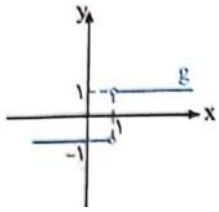


تابع f در $x=1$ حدی برابر یک دارد و مقدار تابع f در $x=1$ برابر ۲ است. چون مقدار تابع با حد تابع در $x=1$ برابر نمی‌باشد، پس تابع f در $x=1$ ناپیوسته است.

۲) با حذف قدرمطلق، تابع g را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & x\geq 1\\ -(x-1) & x<1\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x-1}=1 & x>1\\ \frac{-(x-1)}{x-1}=-1 & x<1\end{cases}=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x<1\end{cases}$$

نمودار تابع g به صورت روبه‌رو است:



تابع g در $x=1$ حد ندارد و در نتیجه ناپیوسته است. هم‌چنین تابع g در $x=1$ مقدار ندارد.

نکته: در توابع چندضابطه‌ای، اگر $x=c$ طول نقطهٔ مرزی باشد، آن‌گاه شرط پیوستگی f در $x=c$ به صورت زیر است:

$$\underbrace{\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^-} f(x)}_{\text{شرط حدداشتن تابع f در x=c}}=f(c)$$

تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & x\geq 1\\ x^2-x+1 & 0\leq x<1\\ \frac{x+\sqrt{1-x}}{x+1} & x<0\end{cases}$ از نظر پیوستگی در نقطهٔ به طول $x=1$ چگونه است؟

پاسخ: f در $x=1$ پیوسته است. $\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-x+1)=1\ ,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x^2+2x)=1\ ,\ f(1)=$

تمرین: عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}ax+1 & x>-2\\ 13 & x=-2\\ 2ax^2+bx-1 & x<-2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-2$ پیوسته باشد.

پاسخ: برای این‌که تابع f در $x=-2$ پیوسته باشد، باید داشته باشیم: $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=f(-2)=\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$

$$f(-2)=13\ ,\ \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(ax+1)=-2a+1\ ,\ \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(2ax^2+bx-1)=8a-2b-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2a+1=13\Rightarrow -2a=12\Rightarrow a=-6\\ 8a-2b-1=13\end{cases}\Rightarrow -48-2b-1=13\Rightarrow 2b=-62\Rightarrow b=-31$$

پیوستگی راست و پیوستگی چپ

پیوستگی راست: تابع f در $x=c$ از طرف راست پیوسته است، هرگاه: $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$

در این صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: تابع f در $x=c$ از طرف چپ پیوسته است، هرگاه: $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$

در این صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

نکته: اگر تابع f در $x=c$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد، آن‌گاه f در $x=c$ پیوسته است.

تمرین: پیوستگی راست و چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۲x^۲-۱ & x>۲\\ ۷ & x=۲\\ ۳x & x<۲\end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید.

پاسخ: مقدار حد راست تابع f در $x=۲$ را از ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲-۱$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x^۲-۱)=۲(۲)^۲-۱=۷=f(۲)$$

چون حد راست تابع f در $x=۲$ با مقدار تابع f در $x=۲$ برابر است، پس تابع f در $x=۲$ پیوستگی راست دارد.

مقدار حد چپ تابع f در $x=۲$ را از ضابطهٔ $f(x)=۳x$ به دست می‌آوریم: $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} ۳x=۶\neq f(۲)=۷$

بنابراین تابع f در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد.

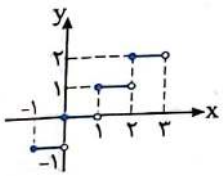
تمرین: به ازای چه مقداری از a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲x}{x+۳} & x>۱\\ -۲a+۱ & x=۱\\ \frac{x-۲}{۲x} & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوستگی راست دارد؟

پاسخ: اگر $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)$ باشد، آن‌گاه تابع f در $x=۱$ پیوستگی راست دارد:

$$f(۱)=-۲a+۱\ ,\ \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\left(\frac{۲x}{x+۳}\right)=\frac{۲}{۱+۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲a+۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲a=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

پیوستگی تابع جزء صحیح

نمودار تابع $f(x)=[x]$ به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در نقاط به طول صحیح $(x=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$ ناپیوسته است. اما در این نقاط پیوستگی راست دارد و در بقیهٔ نقاط (نقاط غیرصحیح) تابع پیوسته است.

پیوستگی روی بازه

۱) تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است هرگاه در هر نقطهٔ این بازه پیوسته باشد.

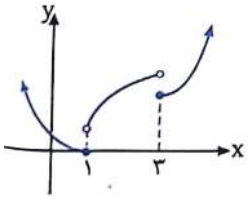
مثال: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در هر نقطه از بازهٔ $(۰,+\infty)$ پیوسته است، پس تابع f روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ پیوسته می‌باشد.

۲) تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ a پیوستگی راست و در نقطهٔ b پیوستگی چپ داشته باشد.

۳) تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ a پیوستگی راست داشته باشد.

۴) تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ b پیوستگی چپ داشته باشد.

تمرین: نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار f، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟



۱) f روی بازهٔ $(-\infty,1]$ پیوسته است.

۲) f روی بازهٔ $[1,3)$ پیوسته است.

۳) f در تمام نقاط بازهٔ $[3,+\infty)$ پیوسته است.

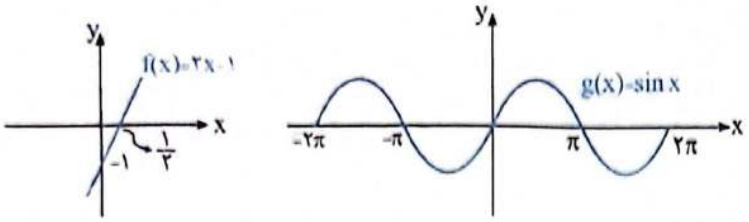
پاسخ: ۱) درست است، زیرا f در هر نقطه از بازهٔ $(-\infty,1)$ پیوسته و در $x=1$ پیوستگی چپ دارد. بنابراین f در بازهٔ $(-\infty,1]$ پیوسته است.

۲) نادرست است، زیرا f در $x=1$ از راست پیوستگی ندارد. پس f روی بازهٔ $[1,3)$ پیوسته نمی‌باشد.

۳) فقط پیوستگی راست در $x=3$ را بررسی می‌کنیم که چون در $x=3$ از راست پیوسته است، پس در $[3,+\infty)$ پیوسته است.

نکته: اگر $D_f=\mathbb{R}$ و تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال: توابع $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\sin x$ با نمودارهای زیر، روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند:



در نکتهٔ بعد، پیوستگی برخی از توابع خاص را روی دامنهٔ آن‌ها بررسی می‌کنیم.

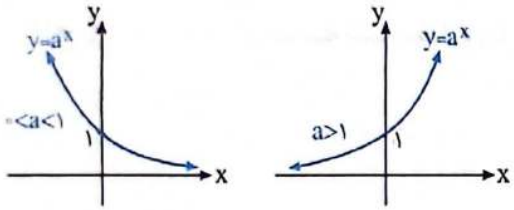
نکته: ۱) توابع چندجمله‌ای همه‌جا (روی $\mathbb{R}$) پیوسته اند.

مثال: تابع $f(x)=x^5-2x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲) توابع کسری گویا در دامنه‌اشن پیوسته‌اند.

مثال: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ پیوسته است و تابع $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ روی $D_g=\mathbb{R}$ پیوسته است.

۳) توابع رادیکالی در دامنه‌شان پیوسته‌اند.



مثال: تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ روی بازهٔ $[2,+\infty)$ پیوسته است.

۴) توابع مثلثاتی در دامنه‌شان پیوسته‌اند.

۵) تابع $f(x)=\log_a x$ در دامنهٔ خود، یعنی بازهٔ $(0,+\infty)$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\log_3 x$ در بازهٔ $(0,+\infty)$ پیوسته است.

۶) تابع $f(x)=a^x$ در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

۷) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، آن‌گاه روی هر زیربازهٔ دلخواه از آن نیز پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=2^x$ روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و در نتیجه روی هر زیربازهٔ دلخواه از آن، مثلاً بازهٔ $[-1,4)$ نیز پیوسته است.

تمرین: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در بازهٔ داده‌شده بررسی کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x}\ ,\ (-۳,۰]$ ۲) $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x^۲-۴x}\ ,\ [۱,۵]$

پاسخ: ۱) تابع رادیکالی روی دامنهٔ تابع و در نتیجه روی هر زیربازه‌ای از آن پیوسته است. دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲-۲x\geq ۰\}\ ,\ x^۲-۲x\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\leq ۰ \text{ یا } x\geq ۲ \Rightarrow x\in(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$$

تابع f روی بازهٔ $(-۳,۰]$ که زیربازه‌ای از دامنهٔ f می‌باشد، پیوسته است.

۲) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲-۴x\neq ۰\}\ ,\ x^۲-۴x=x(x-۴)\neq ۰\ ,\ ۴ \Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq ۰,۴\}=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$

تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=۰$ و $x=۴$ پیوسته نمی‌باشد و در بقیهٔ نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است. تابع f در بازهٔ $[۱,۵]$ ، در نقطه‌ای به طول $x=۴$ پیوسته نمی‌باشد، پس تابع f روی بازهٔ $[۱,۵]$ پیوسته نیست.

همانند قضایای حد برای مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع، برای پیوستگی نیز این قضایا برقرار است.

به عنوان نمونه، اگر دو تابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند، آن‌گاه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}(g(a)\neq ۰)$ در $x=a$ پیوسته می‌باشند.

مثال: دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^۲$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته هستند، پس توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و تابع $\dfrac{f}{g}$ در همه‌جا به غیر از $x=۰$ پیوسته است.

پرسش‌های تشریحی:

۱- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}x-۵ & x<۲\\ -۳ & x=۲\\ x^۲-۷ & x>۲\end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید. *(شهریور ۱۴۰۲)*

۲- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲ & x>۰\\ b+۱ & x=۰\\ -۲x+a & x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد. *(شهریور ۱۴۰۲)*

۳- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطهٔ $x=-1$ پیوسته باشد. (فرداد ۱۴۰۲)

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ ax+b & x=-1\\ x^2-b & x>-1\end{cases}$$

۴- عددهای a و b را چنان بیابید که تابع روبه‌رو در نقطهٔ $x=0$ پیوست باشد. (دی ۹۵)

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+a & x>0\\ -4 & x=0\\ 3x+2b & x<0\end{cases}$$

۵- مجموعهٔ نقاط پیوستگی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۴۲ کتاب درسی)

آ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ ب) $f(x)=\sqrt{3-4x}$ پ) $f(x)=2[x]-3$ ت) $f(x)=\log_5(x^2-6x)$

ث) $f(x)=2\sin x-3\cos x$ ج) $f(x)=3^{\frac{x^2}{x+1}}$ چ) $f(x)=\begin{cases}x^3-x & x\geq 1\\ x^2-1 & -2<x<1\\ \dfrac{4}{x} & x\leq -2\end{cases}$

۶- حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}ax+4 & x\geq 2\\ x^3-x & x<2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته نباشد. (فرداد ۹۴)

۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{3}{x^2+4x+m}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را مشخص کنید.

Homework (1)

۱ تابع ناصفر $f(x) = b[x^۲ - ax] - ۲a$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع $f(x) = \begin{cases} (۱-a)[x] + (۳a^۲ - ۱)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & ; |x^۳| < x^۲ \\ ۱ + \cos \pi x & ; |x^۳| = x^۲ \\ [x^۲] - [x] & ; |x^۳| > x^۲ \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) بی‌شمار ۴) در همهٔ نقاط پیوسته است

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۴ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{۳x^۲ + (m-۱)x + (m-۴)}}{|x^۳ + ((m-۷)x + a)^۲|} & : x \neq a \\ \frac{۲\sin b}{\sqrt[۳]{x+۲}} & : x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$

۳) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲|} & ;\ x\neq a\\ \dfrac{۲\tan b}{\sqrt{-x}} & ;\ x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار b باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|[-x]-x| & ;\ [x]\text{ فرد}\\ k-x+[x] & ;\ [x]\text{ زوج}\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) برای هیچ مقداری از n، پیوسته نیست.
۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۳) n فرد
۴) n زوج

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & ;\ [x]\text{ زوج}\\ |x-[x-a]| & ;\ [x]\text{ فرد}\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ $(a<-۱)$

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ تابع $f(x)=\begin{cases}\tan\dfrac{(۲x+۱)\pi}{۴} & ;\ x\leq ۱\\ \dfrac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)} & ;\ ۱<x<۵\\ b(x-[-x]) & ;\ x\geq ۵\end{cases}$ روی بازهٔ $[۱,۵]$ پیوسته است، مقدار ab کدام است؟

۱) $-۰/۷$
۲) $-۰/۵$
۳) $۰/۷$
۴) $۰/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ اگر در ریشه‌ای از معادلهٔ $۵x^۲-ax+b=۰$، حد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+ax+b}{x-۱}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $[\frac{b-۲a}{۳}]$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲\sin^۲x-\sin x-۱}{\cos^۲x} & ;\ x\neq\dfrac{\pi}{۲}\\ a & ;\ x=\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$ در $x=\dfrac{\pi}{۲}$، پیوسته است؟

۱) $۱/۵$
۲) ۱
۳) -۱
۴) $-۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x\ ;\ |x|\leq ۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;|x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ;|x-۱|\geq ۱\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\dfrac{۳}{۲}$
۲) -۱
۳) ۱
۴) $\dfrac{۵}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۱

تابع $[x^۲ - ax]$ روی $\mathbb{R}$ ناپیوسته است، برای آنکه تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $b = ۰$ شود. در این صورت $f(x) = -۲a$ خواهد بود.

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(۰)} = \frac{a}{-۲a} = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

در نقاط صحیح حد تابع از ضابطه اول و مقدار تابع از ضابطه دوم به‌دست می‌آید مثلاً در نقطه $x = ۱$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = (۱ - a) \times ۱ + (۳a^۲ - ۱) \times (-۲)$$
$$= -۶a^۲ - a + ۳$$
$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = (۱ - a) \times ۰ + (۳a^۲ - ۱) \times (-۱)$$
$$= -۳a^۲ + ۱$$

پس لازم است:

$$-۶a^۲ - a + ۳ = -۳a^۲ + ۱$$
$$\Rightarrow ۳a^۲ + a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

اگر $a = -۱$ باشد:

$$b \sin(\frac{\pi}{-۱}) = -۳a^۲ + ۱ \Rightarrow ۰ = -۲ \text{ غ‌ق‌ق}$$

اگر $a = \frac{۲}{۳}$ باشد:

$$b \sin(\frac{\pi}{\frac{۲}{۳}}) = -۳a^۲ + ۱ \Rightarrow b \times (-۱) = -۳ \times \frac{۴}{۹} + ۱$$
$$\Rightarrow -b = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

$$|x^۳| = x^۲ \Rightarrow x^۲|x| = x^۲ \Rightarrow x^۲(|x| - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۱, -۱$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & ; x \in (-۱, ۱) - \{۰\} \\ ۱ + \cos \pi x & ; x = ۰, ۱, -۱ \\ [x^۲] - [x] & ; x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

ضابطهٔ سوم به‌ازای تمام xهایی که در آن $x^۲$ صحیح ولی x غیرصحیح می‌شود، ناپیوسته است. همچنین در همهٔ xهای صحیح منفی ناپیوسته است. پس تابع f در بی‌شمار نقطه ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۴ گزینه ۱

چون در پیوستگی، باید مقدار حد چپ و راست با هم برابر باشد پس زیر رادیکال باید ریشه مضاعف داشته باشیم:

$$\sqrt{۳x^۲ + (m-۱)x + (m-۴)} = \sqrt{(x+۱)(۳x + m - ۴)} \Rightarrow m - ۴ = ۳ \Rightarrow m = ۷$$

$$m = ۷ : |x^۳ + ((m-۷)x + a)^۲| = |x^۳ + a^۲|$$

$x = a$ ریشه صورت و مخرج است، پس: $a = -۱$

$$\lim_{x \to -۱} \frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳ + ۱|} = \lim_{x \to -۱} \frac{\sqrt{۳}|x+۱|}{|x+۱|(x^۲ - x + ۱)} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$x = -۱ : f(-۱) = \frac{۲\sin b}{۳\sqrt{-۱+۲}} = \frac{۲\sin b}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۱

a باید ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. ازطرفی ریشهٔ مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m+۳)^۲ - ۴(۶)(\frac{m}{۲}) = m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۲m = m^۲ - ۶m + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

$$x = a = \frac{-(m+۳)}{۲ \times ۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶(x+\frac{۱}{۲})^۲}}{|۲x^۳ + \frac{۱}{۴}|} = \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳ + \frac{۱}{۸}|}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x+\frac{۱}{۲}||x^۲ + \frac{۱}{۴} - \frac{x}{۲}|} = \frac{\sqrt{۶}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲\tan b}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲}\tan b = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ گزینه ۴

اگر تابع را در $x = ۳$ یعنی به ازای $n = ۳$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \lim_{x \to ۳^+} |[-x] - x| = |[-(۳^+)] - ۳| = ۷$$
$$f(۳) = |[-۳] - ۳| = ۶$$

درنتیجه قطعاً در $x = ۳$ ناپیوسته است و n نمی‌تواند فرد باشد.

و اگر در $x = ۲$ و $x = -۲$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \to ۲^+} f(x) = k - ۲ + ۲ = k \\ f(۲) = k \\ \lim_{x \to ۲^-} f(x) = |[-۲^-] - ۲| = ۴ \end{cases} \Rightarrow k = ۴$$

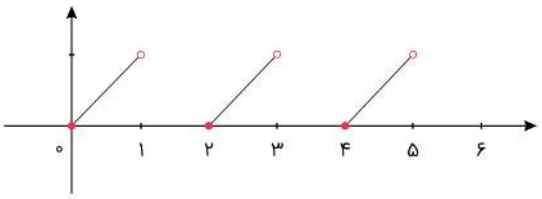
$$\begin{cases} \lim_{x \to -۲^+} f(x) = k + ۲ - ۲ = k \\ f(-۲) = k \\ \lim_{x \to -۲^-} f(x) = |[-(-۲^-)] + ۲| = ۴ \end{cases} \Rightarrow k = ۴$$

پس در n زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

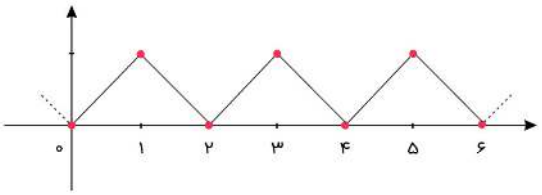
۷ گزینه ۱

بخشی از نمودار تابع $x - [x]$ وقتی که $[x]$ زوج باشد، به صورت زیر است:



$$y = |x - [x]| \quad , \quad [x] = ۲k$$

تابع را به صورت $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; \ [x] \text{ زوج} \\ |x - a - [x - a] + a| & ; \ [x] \text{ فرد} \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. اگر a مثبت باشد، شکل بالا را a واحد به سمت بالا و راست منتقل می‌کنیم، پس پیوسته نمی‌شود. اما اگر $a < ۰$ باشد، با انتقال، نمودار به‌صورت زیر پیوسته می‌شود:



برای پیوستگی در $\mathbb{R}$ لازم است ضابطهٔ دوم یعنی $|x - [x - a]|$ به شکل زیر شود؛ یعنی شیب آن منفی شود و a زوج منفی باشد که امکان‌پذیر نیست پس a وجود ندارد.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۱

تابع در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد:

$$f(۱) = \tan\frac{۳\pi}{۴} = -۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱ - x)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|(x-۱)(x+۲)|}{a(۱-x)}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۲)}{-a(x-۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x+۲}{-a} = \frac{-۳}{a}$$

$$\frac{-۳}{a} = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

در $x = ۵$ پیوستگی چپ دارد:

$$f(۵) = b(۵ - [-۵]) = ۱۰b$$

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x) = \lim_{x\to ۵^-} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱-x)} = \frac{۲۸}{-۴a} = \frac{-۷}{a}$$

$$f(۵) = \lim_{x\to ۵^-} f(x) \Rightarrow \frac{-۷}{a} = ۱۰b \Rightarrow ab = \frac{-۷}{۱۰} = -۰/۷$$

توجه: در حل سؤال بالا نیازی به محاسبه مقدار a نبود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ گزینه ۱

تابع f فقط در $x = ۱$ ناپیوسته است:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + ax + b}{x - ۱} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow ۱ + a + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۱$$

$$۵x^۲ - ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۵ - a + b = ۰ \Rightarrow -a + b = -۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -۱ \\ -a + b = -۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲b = -۶ \Rightarrow b = -۳ , a = ۲$$

$$[\frac{b - ۲a}{۳}] = [\frac{-۳ - ۴}{۳}] = [\frac{-۷}{۳}] = -۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۴

تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x) = f(\frac{\pi}{۲}) = a$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\sin^۲x - \sin x - ۱}{\cos^۲x} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\sin^۲x - \sin x - ۱}{\cos^۲x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(۲\sin x + ۱)(\sin x - ۱)}{(۱ - \sin^۲x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(۲\sin x + ۱)\cancel{(\sin x - ۱)}}{-\cancel{(\sin x - ۱)}(\sin x + ۱)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (-\frac{۲\sin x + ۱}{\sin x + ۱}) = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۴

$$f(x) = [x]\sin \pi x \;\; ; \;\; x \in [-۲, ۲]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما ازآنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش صفر نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;|x-1|<1\\ x^2+ax+b & ;|x-1|\geq 1\end{cases}=\begin{cases}(x-1)[x] & ;-1<x-1<1\\ x^2+ax+b & ;x-1\geq 1 \text{ یا } x-1\leq -1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}(x-1)[x] & ;0<x<2\\ x^2+ax+b & ;x\geq 2 \text{ یا } x\leq 0\end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x=0$ و $x=2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4+2a+b\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=(2-1)[2^-]=1\end{cases}\Rightarrow 4+2a+b=1 \quad (I)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=(0-1)[0^+]=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b\end{cases}\Rightarrow b=0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} a=-\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱ تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ;\ ۰<x<k \\ ۶-x & ;\ x\geq k \end{cases}$ در بازه $(۰,+\infty)$ پیوسته است. $f(k)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{|x-۲|}{x-۲} & ;\ x>۲ \\ -۱ & ;\ x=۲ \\ ۳-x^{۲} & ;\ x<۲ \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ بررسی کنید.

۳ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x-[x] & ;\ x<۰ \\ a & ;\ x=۰ \\ \sqrt{x+۱}+b & ;\ x>۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته باشد.

۴ اگر $f(x)=x^{۲}-x$ باشد، توابع $[f([f(x)])]$ و $[f(f(x))]$ در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟

۱) ناپیوسته ـ پیوسته ۲) پیوسته ـ ناپیوسته

۳) ناپیوسته ـ ناپیوسته ۴) پیوسته ـ پیوسته

۵ بازه‌های پیوستگی تابع $y=\frac{x^{۲}-x}{x^{۳}-۸}$ را بیابید.

۶ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} b[x]+۳ax & ;\ x>۱ \\ ۷ & ;\ x=۱ \\ \frac{۳a\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}}{x^{۳}-۱} & ;\ x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است)

۱) -۲۸ ۲) ۳۵

۳) ۲۸ ۴) ۲۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۷ نمودار تابع نمایی $f(x)=a^{x}$ به‌ازای ..... افزایشی است.

۸ انتهای کمان ۲ رادیان در ناحیهٔ ..... مثلثاتی قرار دارد.

۹ تابع f روی بازهٔ $(a , b]$ پیوسته است، هرگاه در بازهٔ (a , b) پیوسته باشد و در b، ..... داشته باشد.

۱۰ میانهٔ داده‌های آماری ۱۸ ، ۱۰ ، ۹ ، ۱۶ ، ۱۲ ، ۷ ، ۱۶ برابر ..... است.

۱۱ تابع f به معادله $f(x) = \frac{\sin^۲ x}{۱ - \cos x}$ در $x = ۰$ پیوسته است، $f(۰)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۸ ۴) ۲

۱۲ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = -۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ + [x]}{|x|} & ; x < -۱ \\ -۲x + b & ; x = -۱ \\ a - ۵x & ; x > -۱ \end{cases}$$

۱۳ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x_۰ = ۰$ پیوسته باشد ([ ] نماد جزء صحیح است).

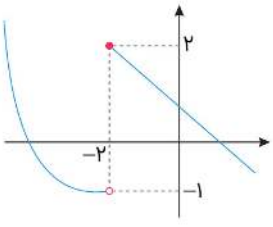
$$f(x) = \begin{cases} ۲ + \sin x & ; x > ۰ \\ a + ۱ & ; x = ۰ \\ [x + ۲] + b & ; x < ۰ \end{cases}$$

۱۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos(\frac{\pi}{۲}x) & ; x < ۲ \\ b & ; x = ۲ \\ [-x] + ۴ & ; x > ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ پیوسته است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) صفر ۴) -۲

۱۵ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} [x] + f(x) & ; x < -۲ \\ a + ۱ & ; x = -۲ \\ bf(x) & ; x > -۲ \end{cases}$ در $x = -۲$ پیوسته باشد، مقدار $\sqrt[b]{۴ - a}$ چقدر است؟



۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) ۴

۱۶ نقاط ناپیوستگی دو تابع $f(x) = [x]; ۰ < x < ۳$ و $g(x) = \frac{۱}{۲x^۲ + ax + b}$ یکسان است. مقدار $a + b$ چقدر است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۳

۱۷ پیوستگی تابع $f(x)$ با ضابطهٔ زیر را در $x = ۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} & ; x > ۲ \\ ۵ & ; x = ۲ \\ x + [۲x] & ; x < ۲ \end{cases}$$

۱۸ مقدار k را طوری بیابید تا تابع زیر در $x = ۴$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x - k & ; x > ۴ \\ ۵ + ۳x^۲ & ; x = ۴ \\ -x + ۱ & ; x < ۴ \end{cases}$$

۱۹ تابع f با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید و به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x + ۴ & ; x < -۱ \\ x^۲ - ۱ & ; -۱ \le x < ۲ \\ -x + ۵ & ; ۲ < x < ۵ \end{cases}$$

الف ۱) نمودار تابع f را رسم کنید.
۲) دامنه و برد تابع f را به دست اورید.
۳) پیوستگی تابع f را روی بازه‌های $[-۱, ۱]$ و $(۲, ۵)$ و $[-۲, ۰]$ فقط مشخص کنید.

ب درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:
۱) f روی بازهٔ $(-\infty, -۱]$ پیوسته است.
۲) f روی بازهٔ $(-\infty, -۱)$ پیوسته است.
۳) f روی بازهٔ $[۲, ۵]$ پیوسته است.
۴) $\lim\limits_{x \to ۵} f(x) = ۰$

۲۰ پیوستگی تابع زیر را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۸} & ; x > ۱ \\ ۵ & ; x = ۱ \\ ۲x^۲ - ۵ & ; x < ۱ \end{cases}$$

۲۱ پیوستگی $f(x) = [x^۲] - [۲x]$ در $x_۰ = ۱$ را بررسی کنید.

۲۲ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ; x < ۲ \\ a & ; x = ۲ \\ -x^۲ + b & ; x > ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۲$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۲۳ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} b[\frac{۴}{x}] & ;x>۱ \\ b+x & ;x\leq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۲۴ اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{۱-\cos^۴ x}{\sin^۲ x} & ;x>۰ \\ b+۱ & ;x=۰ \\ a[x] & ;x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) ۱ ۴) ۲

۲۵ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۱} & ;۰<x<۳ \\ a+۱ & ;x=۳ \\ b+\frac{x-۳}{\sqrt{۳x}-۳} & ;x>۳ \end{cases}$ در $x=۳$ پیوسته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱۲} f^۲(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹

۳) ۲ ۴) ۴

۲۶ چندتا از توابع زیر در بازهٔ $[۲\ ,\ ۳)$ پیوسته است؟

الف) $y=[x]$ ب) $y=[x]+[-x]$ پ) $y=x-[x]$ ت) $y=\tan x$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲۷ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x^۲]$ ..... تا ..... از تابع $g(x)=[x]^۲$ است. (در بازهٔ $((-۲\ ,\ ۲)$)

۱) ۳ - بیشتر ۲) ۳ - کمتر

۳) ۲ - بیشتر ۴) ۲ - کمتر

۲۸ مقدار a کدام باشد، تا تابع $f(x)=\begin{cases} ax-۱ & ;x\geq ۱ \\ \frac{۲}{[x]-۱} & ;x<۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته شود؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) -۲ ۴) صفر

۲۹ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} a[۴x]-b & ;x<۱ \\ ۱ & ;x=۱ \\ a\sin(\frac{\pi}{۲}x)+b & ;x>۱ \end{cases}$ در $x_۰=۱$ پیوسته است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۳

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۴

$$f(k) = \lim_{x \to k} f(x) \Rightarrow k^{۲} = ۶ - k \Rightarrow k^{۲} + k - ۶ = ۰ \Rightarrow k = ۲, -۳$$

$k = ۲$ قابل قبول است.

$$f(k) = f(۲) = ۶ - ۲ = ۴$$

۲

$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{+}} \frac{|x - ۲|}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^{+}} \frac{x - ۲}{x - ۲} = ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^{-}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{-}} ۳ - x^{۲} = ۳ - ۴ = -۱$$

$$f(۲) = -۱$$

تابع f در $x = ۲$ ناپیوسته است. (پیوستگی چپ دارد)

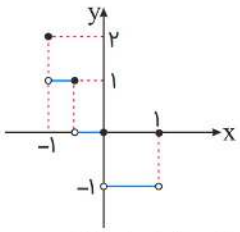
۳

$$\lim_{x \to ۰^{-}} f(x) = \lim_{x \to ۰^{-}} ۳x - [x] = \lim_{x \to ۰} ۳x + ۱ = ۱$$

$$\lim_{x \to ۰^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۰} \sqrt{x + ۱} + b = b + ۱$$

$$f(۰) = a \Rightarrow a = ۱ = b + ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b + ۱ = ۱ \Rightarrow b = ۰ \end{cases}$$

۴ گزینه ۴



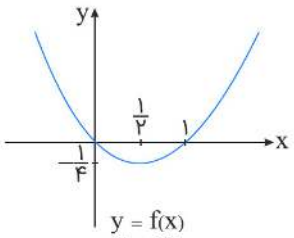
$y = [f(x)] = [x^۲ - x]$
شکل (۱)

$$y = [f(x)] = [x^۲ - x]$$

$$[f([f(\frac{۱}{۲})])] = [f([(\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲}])] = [f([\frac{-۱}{۴}])] = [f(-۱)] = ۲$$

$$f(x) = x^۲ - x = (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{شکل ۱}} \lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^+} [f([f(x)])] = \lim_{x \to \frac{۱}{۲}^-} [f([f(x)])] = f(-۱) = ۲$$



$y = f(x)$
شکل (۲)

$$y = f(x)$$

$$[f(f(\frac{۱}{۲}))] = [f(-\frac{۱}{۴})] = ۰$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} [f(f(x))] \xrightarrow{\text{شکل ۲}} \lim_{x \to \frac{۱}{۲}} [f(f(x))] = \lim_{x \to -\frac{۱}{۴}^+} [f(x)] \xrightarrow{\text{شکل ۱}} \lim_{x \to -\frac{۱}{۴}^+} [f(x)] = ۰$$

۵

$x^۳ - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۲$ ریشهٔ مخرج $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$

بازه‌های پیوستگی $= (-\infty, ۲) \ , \ (۲, +\infty)$

۶ گزینه ۴

مقدار تابع $f(۱) = ۷$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (b[x] + ۳ax) = b + ۳a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۳a|x-۱|}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-۳a(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} = -a$$

چون تابع $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته است، پس:

$$-a = b + ۳a = ۷ \Rightarrow \begin{cases} a = -۷ \\ b = ۲۸ \end{cases} \Rightarrow \quad a + b = ۲۱$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

۷ $a > ۱$

۸ ناحیهٔ دوم

۹ پیوستگی چپ

۱۰ ۱۲

۱۱ گزینه ۴

چون f در $x = ۰$ پیوسته است:

$$f(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{(۱-\cos x)}(۱+\cos x)}{\cancel{۱-\cos x}} = ۲$$

۱۲

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = f(-۱)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = a + ۵ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^-} \dfrac{x^۲-۲}{-x} = \dfrac{-۱}{+۱} = -۱ \Rightarrow a + ۵ = -۱ = ۲ + b \Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = -۳ \end{cases} \\ f(-۱) = ۲ + b \end{cases}$$

۱۳

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} (۲+\sin x) = ۲+۰ = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} [x+۲] + b = ۱ + b \\ f(۰) = a+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲ = ۱ + b = a + ۱ \Rightarrow b = ۱,\ a = ۱$$

۱۴ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} a\cos(\frac{\pi}{۲}x) = a\cdot\cos\pi = -a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = [-(۲^+)] + ۴ = -۳ + ۴ = ۱$$

$$f(۲) = b$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲)$$

$$-a = ۱ = b \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۰$$

۱۵ گزینه ۱

$$g(-۲) = a + ۱ \quad , \quad \lim_{x\to(-۲)^+} g(x) = b \times ۲ = ۲b$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} g(x) = [(-۲)^-] + (-۱) = -۳ - ۱ = -۴$$

چون $g(x)$ در ۲- پیوسته است، پس:

$$\begin{cases} a + ۱ = -۴ \Rightarrow a = -۵ \\ ۲b = -۴ \Rightarrow b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \sqrt[b]{۴ - a} = \sqrt{۹} = ۳$$

۱۶ گزینه ۲

تابع $[x]$ در بازهٔ $(۰\ ,\ ۳)$ در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = ۲$ ناپیوسته است، پس باید تابع $g(x)$ نیز در این دو نقطه ناپیوسته باشد، درنتیجه $x = ۱$ و $x = ۲$ ریشه‌های مخرج تابع $g(x)$ هستند.

$$۲x^۲ + ax + b = ۲(x-۱)(x-۲) = ۲(x^۲ - ۳x + ۲) = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۲$$

۱۷

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = ۴$$

$$f(۲) = ۵$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (x + [۲x]) = ۲ + [۴^-] = ۲ + ۳ = ۵$$

تابع f در $x = ۲$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی از چپ دارد.

۱۸ برای پیوستگی راست در ۴ باید $\lim_{x\to ۴^+} f(x) = f(۴)$ باشد.

$$f(۴) = ۵ + ۳(۴)^۲ = ۵۳$$

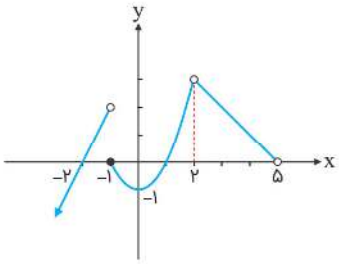
$$\Rightarrow ۴ - k = ۵۳ \Rightarrow k = -۴۹$$

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x) = ۴ - k$$

۱۹

الف

۱)



۲)

دامنه : $D_f = (-\infty, ۲) \cup (۲, ۵)$

برد : $R_f = (-\infty, ۳)$

۳) $[-۱, ۱]$: پیوسته، $(۲, ۵)$: پیوسته، $[-۲, ۰]$: ناپیوسته

ب ۱) نادرست ۲) درست ۳) نادرست ۴) نادرست

۲۰

$$x \to ۱^+ : \sqrt{۱ + ۸} = ۳$$

$$x \to ۱^- : ۲ - ۵ = -۳$$

$$f(۱) = ۵$$

برابر نیستند، لذا تابع پیوسته نمی‌باشد.

۲۱

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = [۱^+] - [۲^+] = ۱ - ۲ = -۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = [۱^-] - [۲^-] = ۰ - ۱ = -۱$$

$$f(۱) = ۱ - ۲ = -۱$$

پس f در $x = ۱$ پیوسته است.

۲۲ گزینه ۴

$$f(۲) = a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (-x^۲ + b) = b - ۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (x^۲ + ۱) = ۵$$

تابع در $x = ۲$ پیوسته است پس:

$$\begin{cases} a = ۵ \\ b - ۴ = ۵ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۱۴$$

۲۳ گزینه ۳

$$f(۱) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = b + ۱\,,\ \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} b[\frac{۴}{x}] = ۳b$$

چون f در $x = ۱$ پیوسته است:

$$b + ۱ = ۳b \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} b[\frac{۴}{x}] = b[\frac{۴}{۲^+}] = \frac{۱}{۲}[۲^-] = \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

۲۴ گزینه ۱

$$f(۰) = b + ۱\,,\ \lim_{x\to ۰^-} a[x] = -a$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{(۱ - \cos^۲ x)(۱ + \cos^۲ x)}{۱ - \cos^۲ x} = \lim_{x\to ۰^+} (۱ + \cos^۲ x) = ۲$$

$$b + ۱ = -a = ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱$$

۲۵ گزینه ۴

$$f(۳)=a+۱\ ,\ \lim_{x\to ۳^-}(x-\sqrt{x+۱})=۳-۲=۱$$

$$\lim_{x\to ۳^+}(b+\frac{x-۳}{\sqrt{۳x}-۳})=b+\lim_{x\to ۳^+}\frac{(x-۳)(\sqrt{۳x}+۳)}{(\sqrt{۳x}-۳)(\sqrt{۳x}+۳)}$$

$$=b+\lim_{x\to ۳^+}\frac{(x-۳)(\sqrt{۳x}+۳)}{۳(x-۳)}=b+\lim_{x\to ۳^+}\frac{\sqrt{۳x}+۳}{۳}=b+۲$$

$$\begin{cases}a+۱=۱\\ b+۲=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\ b=-۱\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to ۱۲}f^۲(x)=(-۱+\frac{۱۲-۳}{۶-۳})^۲=(-۱+\frac{۹}{۳})^۲=۲^۲=۴$$

۲۶ گزینه ۳

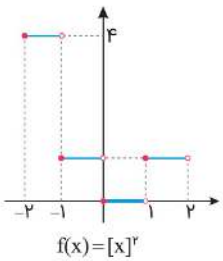
می‌دانیم توابع $y=[x]$ و $y=x-[x]$ در نقاط صحیح از راست پیوسته هستند، بنابراین این توابع در بازهٔ $[۲\ ,\ ۳)$ پیوسته‌اند. تابع $y=\tan x$ فقط در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ تعریف‌نشده و درنتیجه ناپیوسته است و چون بازهٔ $(۲\ ,\ ۳]$ شامل چنین نقاطی نیست، پس روی آن پیوسته می‌باشد. تابع $y=[x]+[-x]$ در نقاط صحیح از راست ناپیوسته است، درنتیجه در بازهٔ $[۲\ ,\ ۳)$ پیوسته نیست.

۲۷ گزینه ۱

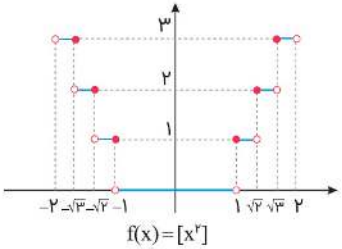
توابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت درون آن عدد صحیح می‌شود، حد ندارند و درنتیجه پیوسته نیستند، مگر اینکه در آن نقطه دارای مینیمم یا ماکزیمم باشند، بنابراین در بازهٔ $(-۲\ ,\ ۲)$ تابع $f(x)=[x^۲]$ در نقاط $x=\pm۱\ ,\ \pm\sqrt{۲}\ ,\ \pm\sqrt{۳}$ پیوسته نیست. توجه کنید که f در $x=۰$ دارای مینیمم است، پس در این نقطه پیوسته می‌باشد.

$$(\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}[x^۲]=[۰^+]=۰\ ,\ \lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}[x^۲]=[۰^+]=۰)$$

و تابع $g(x)=[x]^۲$ در نقاط ±۱ و $x=۰$ پیوسته نیست.



$f(x)=[x]^۲$



$f(x)=[x^۲]$

بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x^۲]$، ۳تا بیشتر از تابع $g(x)=[x]^۲$ است.

۲۸ گزینه ۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (ax - ۱) = a - ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{۲}{[x] - ۱} = \frac{۲}{[۱^-] - ۱} = \frac{۲}{-۱} = -۲ \\ f(۱) = a - ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - ۱ = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

۲۹ گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (a\sin(\frac{\pi}{۲}x) + b) = a + b \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (a[۴x] - b) = ۳a - b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a + b = ۳a - b = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{۲} \\ b = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \quad a + b = ۱$$

BOX 5: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$) (حد ویژه حسابان)

همان‌طور که در فصل اول مشاهده کردید، اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $P(a)=0$، آن‌گاه در تجزیه چندجمله‌ای $P(x)$ حتماً عامل $(x-a)$ وجود دارد.

برای محاسبه حالت مبهم در توابع کسری، با تجزیه صورت و مخرج و حذف عامل صفرکننده $(x-a)$ به محاسبه حد می‌پردازیم. به عنوان مثال:

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-x}$

برای تجزیه عبارت صورت از آن‌جا که $P(1)=1^3+1-2=0$ پس $P(x)$ دارای عامل $(x-1)$ است. پس کافی است $P(x)$ را بر $(x-1)$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3+x-2 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+2 \\ \hline x^2+x-2 & \\ -x^2+x & \\ \hline 2x-2 & \\ -2x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x(x-1)}=4$$

نکته: اتحادهای جبری مورد استفاده در تجزیه چندجمله‌ای‌ها:

۱) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

۲) $(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$

۳) $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

۴) $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

۵) $(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$

۶) $(x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$

۷) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{x-2}+\cdots+1)$

نکته: اگر برای محاسبه حالت $\frac{0}{0}$ صورت یا مخرج شامل عبارات گنگ بود با ضرب‌کردن صورت و مخرج در یک عبارت مناسب، کسر را به عبارتی گویا تبدیل می‌کنیم.

تمرین: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$

پاسخ: صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8})^2-(3)^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}=\frac{1}{2\times(\sqrt{1+8}+3)}=\frac{1}{12}$$

تمرین: $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

پاسخ: برای گویاکردن عبارات گنگ با فرجه ۳، کافی است در پرانتز چاق ضرب کنیم و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، عبارت گنگ را گویا کنیم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x})^3-(2)^3}=\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=12$$

تمرین: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-\sqrt{3x-2}}$ ب) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ پ) $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+x+2}}{x^3-8}$

ت) $\lim_{x\to 2^+}\frac{2[x]-x^2}{x^2-9x+14}$ ث) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$ ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-\sqrt{3x-2}}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x)^2-(\sqrt{3x-2})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{x^2-3x+2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}{\cancel{(x-2)}(x-1)}=\frac{4\times 4}{1}=16$$

ب) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(4-x)}(3+\sqrt{2x+1})}{2\cancel{(4-x)}(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}$

پ) $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+x+2}}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)\sqrt{x^2+x+2}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=\frac{4\times\sqrt{8}}{12}=\frac{\sqrt{8}}{3}$

ت) $\lim_{x\to 2^+}\frac{2[x]-x^2}{x^2-9x+14}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4-x^2}{x^2-9x+14}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{-1}{\cancel{(2-x)}}(2+x)}{\cancel{(x-2)}(x-7)}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$

ث) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{(x^2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=1$

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to ۶۳}\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}-b}{x-۶۳}=a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۹۶}$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

از آن‌جا که مخرج کسر صفر است پس حالت $\frac{۰}{۰}$ بوده، یعنی:

$$\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}-b \xrightarrow{x=۶۳} ۳-b=۰ \Rightarrow b=۳$$

$$\lim_{x\to ۶۳}\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}-۳}{x-۶۳}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}+۳}{\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}+۳}=\lim_{x\to ۶۳}\frac{(\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}})^۲-(۳)^۲}{(x-۶۳)(\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۶۳}\frac{\sqrt{۱+x}-۸}{(x-۶۳)(\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}+۳)}\times\frac{\sqrt{۱+x}+۸}{\sqrt{۱+x}+۸}=\lim_{x\to ۶۳}\frac{\cancel{x-۶۳}}{\cancel{(x-۶۳)}(\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}+۳)(\sqrt{۱+x}+۸)}=\frac{۱}{۶\times ۱۶}=a$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱}{۹۶}$$

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۶+x^۲-۲}{x^۲-۱} & x>۱\\ ax+۲ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۶+x^۲-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+۲x+۲)}{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax+۲)=a+۲ \Rightarrow a+۲=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$\begin{array}{r|l}
x^۶+x^۲-۲ & x-۱\\
\hline
-x^۶+x^۵ & x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+۲x+۲\\
\hline
x^۵+x^۲-۲ & \\
-x^۵+x^۲ & \\
\hline
x^۴+x^۲-۲ & \\
-x^۴+x^۳ & \\
\hline
x^۳+x^۲-۲ & \\
-x^۳+x^۲ & \\
\hline
۲x^۲-۲ & \\
-۲x^۲+۲x & \\
\hline
۲x-۲ & \\
-۲x+۲ & \\
\hline
۰ &
\end{array}$$

نکته: چند اتحاد مثلثاتی که در محاسبه حد بعضی از توابع مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارت‌اند از:

۱) $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$

۲) $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$

۳) $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=۲\cos^۲ x-۱=۱-۲\sin^۲ x$

از مورد شماره ۳ نتیجه می‌گیریم: $۱-\cos\theta=۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}$ ، $۱+\cos\theta=۲+\cos^۲\frac{\theta}{۲}$

نکته: در ابتدای فصل حد، با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ دریافتیم که:

$$\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱\ ,\ \lim_{u\to ۰}\frac{\tan u}{u}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin u}{u}\times\frac{۱}{\cos u}=۱\times\frac{۱}{\cos(۰)}=۱$$

نکته:

$$\lim_{u\to ۰}\frac{u}{\sin u}=۱\ ,\ \lim_{u\to ۰}\frac{u}{\tan u}=۱$$

تمرین: مقدار حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}$

۲) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos^۳ x}$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\cos x-\sin x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan ۵x}{\sin ۳x}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{\sqrt{۱-\cos x}}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۳+\tan x}-\sqrt{۳-\tan x}}{۳x}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x.\tan ۸x}{x^۴+۴x^۲}$

۸) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x\cos x-\sin ۲x}{x^۳}$

۹) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\tan ۳x\sqrt{۱-\cos ۴x}}{x^۲}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x-\tan x}{x^۳}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sin(۱-\sqrt{x})}{۱-x}$

پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲\sin x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲}{\cos x}=۱\times\frac{۲}{\cos(۰)}=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos^۳ x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱+\cos^۳ x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(۱-\cos x)\cancel{(۱+\cos x)}}{\cancel{(۱+\cos x)}(۱-\cos x+\cos^۲ x)}=\frac{۲}{۳}$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos ۳x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{\cos x-\sin x}}=\sqrt{۲}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan ۵x}{\sin ۳x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\frac{\cancel{\tan ۵x}}{\cancel{۵x}}\times ۵x}{\frac{\cancel{\sin ۳x}}{\cancel{۳x}}\times ۳x}=\frac{۵}{۳}$ (۱ در مخرج)

۵) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{\sqrt{۱-\cos x}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{\sqrt{۲}\,|\sin\frac{x}{۲}|}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{۲}}\times ۲}{-\sqrt{۲}\sin\frac{\cancel{x}}{\cancel{۲}}}=-\sqrt{۲}$

۶) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۳+\tan x}-\sqrt{۳-\tan x}}{۳x}\times\frac{\sqrt{۳+\tan x}+\sqrt{۳-\tan x}}{\sqrt{۳+\tan x}+\sqrt{۳-\tan x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\tan x}{۳x(\sqrt{۳+\tan x}+\sqrt{۳-\tan x})}$

$=\frac{۲}{۳\times ۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

۷) $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x\tan ۸x}{x^{۴}+۴x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\tan x}{x}\times x\times\frac{\tan ۸x}{۸x}\times ۸x}{x^{۴}+۴x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۸x^{۲}}{x^{۲}(x^{۲}+۴)}=\frac{۸}{۴}=۲$

۸) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x\cos x-\sin ۲x}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x(\cos x-۱)}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x\times(-۲\sin^{۲}\frac{x}{۲})}{x^{۳}}$

$=\lim\frac{\frac{\sin ۲x}{۲x}\times ۲x\times(-۲)\,(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\times\frac{x}{۲})^{۲}}{x^{۳}}=\frac{-x^{۳}}{x^{۳}}=-۱$

۹) $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\tan ۳x\sqrt{۱-\cos ۴x}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\tan ۳x\sqrt{۲\sin^{۲}۲x}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\tan ۳x\sqrt{۲}\sin ۲x}{x^{۲}}$

$=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\frac{\tan ۳x}{۳x}\times ۳x\times\sqrt{۲}\;\frac{\sin ۲x}{۲x}\times ۲x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۶\sqrt{۲}x^{۲}}{x^{۲}}=۶\sqrt{۲}$

۱۰) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\tan x}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x\times(\cos x-۱)}{x^{۳}\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(-۲\sin^{۲}\frac{x}{۲})}{x^{۳}\cos x}$

$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{x}\times x(-۲)(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\times\frac{x}{۲})^{۲}}{x^{۳}\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^{۴}}{۲}}{x^{۳}\cos x}=\frac{-۱}{۲}$

۱۱) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sin(۱-\sqrt{x})}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sin(۱-\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۲}$

نکته: روش تغییر متغیر در محاسبه حدود:

در این روش با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را ساده‌تر کرده و سپس حد جدید را محاسبه می‌کنیم. در میل کردن x به سمت a $(x \to a)$ عامل صفرکننده $(x-a)$ می‌باشد که در روش تغییر متغیر $x-a=t$ و از آن‌جا که $x \to a$ پس $t \to 0$ میل می‌کند.

تمرین: حدود زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan 4x}{4x-\pi}$

۲) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\cot \pi x$

۳) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x}$

۴) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x \cos x}{1+\cos 2x}$

پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan 2x}{4x-\pi} \xrightarrow[x=\frac{\pi}{4}+t]{x-\frac{\pi}{4}=t} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 4(\frac{\pi}{4}+t)}{4(\frac{\pi}{4}+t)-\pi} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan(\pi+4t)}{4t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 4t}{4t} = 1$

۲) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\cot \pi x \xrightarrow[x=t+1]{x-1=t} \lim\limits_{t \to 0} t\cot \pi(t+1) = \lim\limits_{t \to 0} t\cot(\pi+\pi t) = \lim\limits_{t \to 0} t\cot(\pi t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\frac{1}{\pi} \times \pi t}{\tan \pi t} = \dfrac{1}{\pi}$

۳) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x} \xrightarrow[x=t+1]{x-1=t} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2}(t+1)}{-t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-\sin \frac{\pi t}{2}}{-t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin \frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2} \times \frac{2}{\pi}} = \dfrac{\pi}{2}$

۴) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x \cos x}{1+\cos 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x \cos x}{2\cos^2 x} \xrightarrow[x=\frac{\pi}{2}+t]{x-\frac{\pi}{2}=t} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 2(\frac{\pi}{2}+t)}{2\cos(\frac{\pi}{2}+t)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan(\pi+2t)}{-2\sin t}$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 2t}{-2\sin t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\frac{\tan 2t}{2t} \times 2t}{\frac{-2\sin t}{t} \times t} = \dfrac{2t}{-2t} = -1$

معادله آزاد (روش‌های تستی جهت استفاده دانش‌آموزان علاقه‌مند)

اگر $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ باشد، در این صورت f و g را در نقطه a هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $f \sim g$.

در محاسبه حد توابع می‌توان به جای f از هم‌ارز آن یعنی تابع g استفاده کرد.

هم‌ارزی‌های مهم در محاسبه حد توابع:

اگر $u=0$ میل کند، داریم:

۱) $au^n+bu^{n-1}\dots+cu^m\sim cu^m$ (هم‌ارزی کم‌توان)

۲) $\sqrt[n]{1\pm u}\sim 1+nu$

۳) $(1+u)^n\sim 1+nu$

$\Rightarrow$ (هم‌ارزی برنولی)

۴) $a\sin u\sim au$

۵) $a\tan u\sim au$

۶) $u-\sin\sim\frac{u^3}{6}$

۷) $u-\tan u\sim-\frac{u^3}{3}$

۸) $\tan u-\sin u\sim\frac{u^3}{2}$

۹) $1-\cos^n u\sim\frac{n}{2}u^2$

نکته: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{a}}{1-u}\sim\frac{1}{n}$

نکته: اگر f و g هر دو به سمت ۱ میل کنند، آن‌گاه داریم (n عدد طبیعی است):

$$f-g=\frac{f^n-g^n}{n}$$

تمرین: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[4]{x}+x}{3\sqrt[4]{x}-x}$

۲) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2(x+2)^4+3(x+2)^3+(x+2)^2}{(x+2)^6+2(x+2)^2}$

۳) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}+2(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}+4(x-1)}$

۴) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

۵) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{1+2x}}{\sin\frac{x}{6}}$

۶) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x\sin 2x\tan 3x\dots\sin nx}{nx^{n-1}\sin 3x}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-\sqrt[3]{1-\tan x}}{x}$

۸) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[5]{x}-1)}{(x-3)^3}$

۹) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin 5x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x\tan 2x}{1-\sqrt{\cos x}}$

پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[4]{x}+x}{3\sqrt[4]{x}-x}\xrightarrow{\text{کم‌توان}}\sim\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x}}=\frac{2}{3}$

۲) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2(x+2)^4+3(x+2)^3+(x+2)^2}{(x+2)^6+2(x+2)^2}\xrightarrow[x\to -2:t\to 0]{x+2=t}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2t^4+3t^3+t^2}{t^6+2t^2}\xrightarrow{\text{کم‌توان}}\sim\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}$

۳) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}+2(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}+4(x-1)} \xrightarrow{\text{کم‌توان}} \sim \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{6}} = 0$

۴) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{x}{2}-(1-\frac{x}{2})}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -}\dfrac{x}{x^2+x} \xrightarrow{\text{کم‌توان}} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1$

۵) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1+2x}}{\sin\frac{x}{6}} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{x}{2}-(1+\frac{2x}{3})}{\frac{x}{6}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{7x}{6}}{\frac{x}{6}} = -7$

۶) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\sin 2x\tan 3x\ldots\sin nx}{nx^{x-1}\sin 3x} \sim \lim\dfrac{x\times 2x\times 3x\times\cdots\times nx}{nx^{n-1}\times 3x} = \lim\dfrac{n!x^n}{3nx^n} = \dfrac{n!}{3n} = \dfrac{(n-1)}{3}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-\sqrt[3]{1-\tan x}}{x} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{2\sin x}{2}-(1-\frac{\tan x}{3})}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\tan\frac{x}{3}}{x} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{x}{3}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{4x}{3}}{x} = \dfrac{4}{3}$

با استفاده از نکته بالا داریم:

۸) $\sqrt{x}-1 \xrightarrow[n=2]{f=\sqrt{x},\ g=1} \sim \dfrac{x-1}{2}$

$\sqrt[3]{x}-1 \xrightarrow[x=3]{f=\sqrt[3]{x},\ g=1} \sim \dfrac{x-1}{3}$

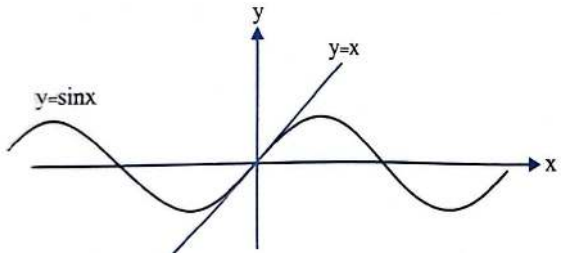
$\sqrt[5]{x}-1 \xrightarrow[x=5]{f=\sqrt[5]{x},\ g=1} \sim \dfrac{x-1}{5}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[5]{x}-1)}{(x-1)^3} \sim \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\frac{x-1}{2})(\frac{x-1}{3})(\frac{x-1}{5})}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{30}(x-1)^3}{(x-1)^3} = \dfrac{1}{30}$

۹) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3}\sin 5x}{\sqrt{1-\cos^3 x}} \sim \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3}\times 5x}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3}\times 5x}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5\sqrt{2}x}{-x} = -5\sqrt{2}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x\tan 2x}{1-\sqrt{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x\tan 2x}{1-(\cos x)^{\frac{1}{2}}} \sim \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\times 2x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\dfrac{2x^2}{\frac{1}{4}x^2} = 8$

نکته: با توجه به شکل روبه‌رو در همسایگی نقطه $x=0$ ، اندازه x از $\sin x$ بیشتر است.



$x\to 0 \Rightarrow |x|>|\sin x|$

بنابراین حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$ در اصل برابر 1^+ (چون صورت از مخرج بزرگ‌تر است) است و حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ در اصل برابر 1^- (چون مخرج از صورت بزرگ‌تر است) است.

تمرین: حاصل عبارت‌های $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{x}{\sin x}]$ و $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) ۱ ، ۱ ۲) ۱ ، ۰ ۳) ۰ ، ۱ ۴) ۰ ، ۰

پاسخ: $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}]=[1^-]=0$ $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{x}{\sin x}]=[1^+]=1$

Homework (1)

۱ اگر $f(x)=(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x})^{2}$ و $f(x)=xg(x)+1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) -۴ ۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۲ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^{-}} \frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$

۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳ فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \frac{\sin\left(\sqrt{1-x^{3}}-1\right)-2\tan[x]}{x^{n}\left(1-\cos\left(\sqrt{3x}\right)\right)}=a$ باشد، مقدار a^{n}، کدام است؟ ($[\,]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) -۲ ۴) $-\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$، کدام است؟

۱) -۱/۵ ۲) -۱/۲

۳) -۰/۸ ۴) -۰/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶ فرض کنید $a = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{\left(1 - \cos\left(\sqrt{2x}\right)\right)^n}$. مقدار $a + n$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$

۲) $\frac{9}{4}$

۳) $\frac{15}{4}$

۴) $\frac{17}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۷ حاصل $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$، کدام است؟

۱) -2

۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

ابتدا تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$xg(x) = f(x) - ۱ \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - ۱}{x}$$

پس:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^۲ - ۱}{x} = \frac{۰}{۰}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{(-۱+\sin x)^۲ - (۱+\sin x)^۲}{(۱+\sin x)^۲}}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{(-۱+\sin x)^۲ - (۱+\sin x)^۲}{x(۱+\sin x)^۲}$$
$$= \lim_{x\to ۰} \frac{-۴\sin x}{x(۱+\sin x)^۲} = -۴$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^۲ - ۱}{x} = \frac{۰}{۰}$$
$$\xrightarrow{H} \lim_{x\to ۰} \frac{۲(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})(\frac{۲\cos x}{(۱+\sin x)^۲})}{۱} = \frac{۲\times(-۱)\times ۲}{۱} = -۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

روش اول:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x})(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}{\sqrt{2(1-\cos x)}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(2-3x)-(2-5x)}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}(2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-2\sin\frac{x}{2}(2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4\frac{x}{2}}{-4\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2})}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{2|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+\frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1}$$

$$=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=a$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n\times\frac{1}{2}(3x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{2}x^3-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x^{n+1}}=a\Rightarrow\begin{cases}n=2\\a=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow a^n=\frac{1}{9}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ گزینه ۴

راه حل اول:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}\times\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}\times\frac{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+x)}=-\frac{3}{2}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}\overset{x=-1}{=}\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-7\sqrt{x}+5)(2x+\sqrt{3x+1})}{4x^2-3x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{3x+1})}{(x-1)(4x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{3x+1})}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(4x+1)}$$
$$=\frac{-3\times 4}{2\times 5}=\frac{-12}{10}=-1/2$$

راه‌حل دوم: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}=-\frac{6}{5}=-1/2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶ گزینه ۴

وقتی $x \to ۰$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\cos^n x \underset{x\to ۰}{\sim} ۱ - \frac{n}{۲}x^۲$$

$$\tan x \sim x$$

پس:

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\tan^۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} - ۱\right)}{\left(۱-\cos\left(\sqrt{۲x}\right)\right)^n} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} - ۱\right)^۲}{\left(\frac{۲x}{۲}\right)^n} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\left(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}} \times \frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۱+\sqrt{۱-x^۲}}\right)^۲}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to ۰^+} \frac{\left(۱-\left(۱-x^۲\right) \times \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}\times\left(۱+\sqrt{۱-x^۲}\right)}\right)^۲}{x^n} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\left(\frac{x^۲}{۲}\right)^۲}{x^n} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{x^۴}{۴}}{x^n} \xrightarrow{n=۴} a = \frac{۱}{۴}$$

$$a + n = ۴ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۷}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

پس باید رفع ابهام انجام دهیم. می‌دانیم $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$. ازطرفی می‌دانیم اگر x به‌سمت صفر میل کند، $\sin x$ هم‌ارز با x می‌شود، پس نتیجه می‌گیریم که $x\to 0 \Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

به‌علاوه هم‌ارزی زیر را داریم:

$$u\to 0\Rightarrow\sqrt[n]{1\pm u}\sim 1\pm\frac{u}{n}$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\frac{3}{2}x}-\sqrt{1-\frac{1}{2}x})}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}((1+\frac{\frac{3}{2}x}{2})-(1-\frac{\frac{1}{2}x}{2}))}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sqrt{2}x}{4}}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=-2$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

حال کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4\cancel{x}\sqrt{1+\cos x}}{(-\cancel{x})\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{4\sqrt{2}}{-1(2\sqrt{2})}=-2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

Homework (2)

حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱

$$\lim_{x\to -۲} = \frac{x^۲ - ۴}{\sqrt{۲x+۸}+x}$$

۲

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲ - ۲x - ۱}{x^۲ - x}$$

۳

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[x] - ۱۸}{x^۳ - ۱۰x + ۳}$$

۴

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۴x - \pi}{\cos ۲x}$$

حد توابع زیر را به‌دست آورید.

۵

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x+۱}{[۴x-۱]}$$

۶

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۳ - ۸}{x^۲ - ۴}$$

۷ حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱ - \sin^۲ x}{۱ - \sin x}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۸ حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) -۱
۴) ۲

۹ اگر $f(x)=\frac{(x-۲)(x+۱)}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x^۲+۱}{۳x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}(f\times g)(x)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) حد ندارد.

۱۰ اگر $f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}\cdot(x+۱)$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)+\lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۸
۳) -۱
۴) ۲

۱۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{x^۲-۴x}{\sqrt{x}-۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۲ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x[۲x]-۲}{x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) -۱

۱۳ حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۲}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۱

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{\sqrt{۲x+۸}+x}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x^۲-۴)(\sqrt{۲x+۸}-x)}{(\sqrt{۲x+۸}+x)(\sqrt{۲x+۸}-x)}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)(x+۲)A}{۲x+۸-x^۲}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}A}{\cancel{(x+۲)}(-x+۴)}$$
$$=\frac{-۴(۴)}{۶}=\frac{-۸}{۳}$$

۲

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۳x+۱)}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\cancel{(x-۱)}(۳x+۱)}{x\cancel{(x-۱)}}=+۴$$

۳

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۲x^۲-۱۸}{x^۳-۱۰x+۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{(x-۳)}(۲x+۶)}{\cancel{(x-۳)}(x^۲+۳x-۱)}=\frac{۱۲}{۱۷}$$

۴

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۴x-\pi}{\cos ۲x}=\lim_{y\to ۰}\frac{۴(\frac{\pi}{۴}+y)-\pi}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۲y)}$$
$$x-\frac{\pi}{۴}=y\to x=\frac{\pi}{۴}+y$$
$$\lim_{y\to ۰}\frac{۴y}{-\sin ۲y}=\lim_{y\to ۰}\frac{۴\cancel{y}}{-۲\cancel{y}}=-۲$$

۵

$$\frac{۳\times ۲+۱}{[۷^+]}=\frac{۷}{۷}=۱$$

۶

$$\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=\frac{۴+۴+۴}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

۷

گزینه ۲

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\sin^۲x}{۱-\sin x}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(۱+\sin x)=۱+۱=۲$$

۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۹ گزینه ۱

$$(f\times g)(x)=\frac{(x-۲)(x+۱)}{x-۱}\times\frac{x^۲+۱}{۳(x+۱)}=\frac{(x-۲)(x^۲+۱)}{۳(x-۱)}$$

$$\lim_{x\to -۱}(f\times g)(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{(x-۲)(x^۲+۱)}{۳(x-۱)}=\frac{(-۳)(۲)}{۳(-۲)}=۱$$

۱۰ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\left(\frac{(x-۳)}{x-۳}\cdot(x+۱)\right)=\lim_{x\to ۳^+}(x+۱)=۴$$

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{-(x-۳)}{x-۳}\cdot(x+۱)\right)=\lim_{x\to ۳^-}(-x-۱)=-۴$$

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)+\lim_{x\to ۳^-}f(x)=۴+(-۴)=۰$$

۱۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۴x}{\sqrt{x}-۲}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۴x}{\sqrt{x}-۲}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{x(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}{x-۴}=۱۶$$

۱۲ گزینه ۱

$$x\to ۱^+:[۲x]=[۲(۱^+)]=[۲^+]=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۱۳ گزینه ۴

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۱)(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

فصل هفتم: آمار و احتمال (ریاضی ۲ ویژه رشته تجربی)

BOX 1: یادآوری احتمال ـ احتمال شرطی ـ پیشامدهای مستقل (صفحه ۱۴۴ تا ۱۵۲ کتاب درسی)

در سال قبل با برخی از مفاهیم احتمال و هم‌چنین محاسبهٔ احتمال رخداد یک پیشامد از فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ *آشنا شدید. در این* BOX *ابتدا آن‌ها را یادآوری می‌کنیم و چند مثال بیان می‌کنیم.*

یادآوری احتمال، احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل

پدیده‌های تصادفی: به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که از همهٔ حالات ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم اما از این‌که کدام حالت قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداشته باشیم، پدیدهٔ تصادفی می‌گوییم.

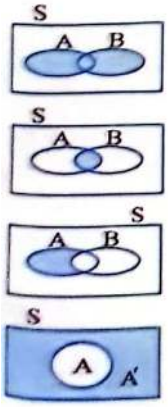
فضای نمونه‌ای: مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن پدیده‌های تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهند.

پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم و معمولاً آن را با A نشان می‌دهیم.

تعریف: می‌دانیم $\varnothing \subset S$ ، پس $\varnothing$ یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S است. $\varnothing$ را پیشامد نشدنی یا غیرممکن می‌نامیم.

تعریف: هم‌چنین $S \subseteq S$، بنابراین S یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S است. S را پیشامد حتمی می‌گوییم.

اعمال روی پیشامدها



۱) اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد Bیا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cup B$ مشخص شده است:

۲) اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cap B$ مشخص شده است:

۳) تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. در شکل مقابل پیشامد $A-B$ مشخص شده است:

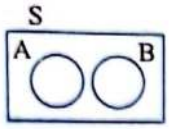
۴) متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی و A پیشامدی از آن باشد، در این صورت متمم A را با A' نمایش می‌دهیم و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند.

نکته: ۱) با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، نتایج زیر حاصل می‌شوند:

آ) $A'=S-A$ ب) $A \cup A'=S$ پ) $A \cap A'=\varnothing$ ت) $n(A')=n(S)-n(A)$

۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه: $A-B=A \cap B'$

پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B=\varnothing$، در این صورت آن‌ها را دو پیشامد ناسازگار می‌گوییم. در واقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، هم‌زمان رخ نمی‌دهند. در شکل مقابل دو پیشامد ناسازگار Aو B مشخص شده است:



احتمال رخداد یک پیشامد

● احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و برای محاسبهٔ $P(A)$ کافی است تعداد اعضای A یعنی $n(A)$ را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$ تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی $P(A)$ عددی حقیقی است که شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$\text{احتمال رخداد پیشامد } A \text{ در فضای نمونه‌ای } S = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

● برای تعیین احتمال رخداد یک پیشامد دلخواه مانند A، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) مشخص:ردن آزمایش تصادفی

۲) مشخص:ردن فضای نمونه‌ای و تعیین تعداد اعضای آن

۳) مشخص‌کردن پیشامد مطلوب و تعیین تعداد اعضای آن

سپس با استفاده از رابطهٔ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$، احتمال رخداد پیشامد به دست می‌آید.

تمرین: در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مربع کامل باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی ۳۶ عضو دارد؛

$$A = \{\underbrace{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)}_{\text{۴=مجموع}},\underbrace{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)}_{\text{۹=مجموع}}\} \Rightarrow n(A) = ۷ \quad \text{(مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مربع کامل باشد.)}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۷}{۳۶}$$

قوانین احتمال

اگر A پیشامدی دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه:

۱) $\boxed{۰ \le P(A) \le ۱}$ ۲) $\boxed{P(\varnothing) = ۰}$ ۳) $\boxed{P(S) = ۱}$

نکته: هر چه‌قدر تعداد اعضای A بیشتر باشد، کسر $\frac{n(A)}{n(S)}$ بزرگ‌تر و به عدد یک نزدیک‌تر بوده و اصطلاحاً می‌گوییم احتمال رخداد پیشامد A بیشتر است.

برای محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد A و B از قانون جمع احتمالات استفاده می‌کنیم.

قانون جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

احتمال پیشامد متمم: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در این صورت:

$$\boxed{P(A') = ۱ - P(A) \ , \ P(A) = ۱ - P(A')}$$

تمرین: درون جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره با هم و به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که حداکثر ۲ مهرهٔ‌خارج‌شده سیاه باشد را به دست آورید.

پاسخ: فضای نمونه‌آی، تمام حالت‌های انتخاب ۳ مهره از $۹ = ۲ + ۴ + ۳$ مهرهٔ درون جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۳!} = ۸۴$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن حداکثر ۲ مهرهٔ خارج‌شده سیاه باشد، آن‌گاه متمم آن (A') پیشامدی است که در آن هر سه مهرهٔ خارج‌شده سیاه است. داریم:

$$n(A') = \binom{۴}{۳} = ۴ \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۴}{۸۴} = \frac{۱}{۲۱} \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۲۱} = \frac{۲۰}{۲۱}$$

احتمال شرطی

در پرتاب یک تاس،احتمال روشدن عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۶}$ است، اما اگر گفته شود عدد روشده در پرتاب تاس، عددی زوج است، آن‌گاه احتمال روشدن عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. چنین احتمال‌هایی را که با اطلاعات جدید فضای نمونه تغییر می‌کند را احتمال شرطی می‌گوییم.

تعریف: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > ۰$، در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A \mid B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم و از دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

محاسبهٔ احتمال شرطی

در محاسبهٔ احتمال شرطی، همهٔ حالت‌های ممکن برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آن‌ها B رخ داده است. در واقع B فضای نمونه‌آی جدید ما خواهد بود و تمام حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که هم Bو هم A رخ داده باشند.

و در فضای نمونه‌ای گسستهٔ هم‌شانس داریم:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

تمرین: ۱) اعداد ۱ تا ۶ را روی ۶ کارت می‌نویسیم و دو کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع آن‌ها زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد زوج است؟

۲) در خانواده‌ای با سه فرزند، اگر دقیقاً ۲ فرزند خانواده دختر باشند، احتمال آن‌ه فرزند اول خانواده دختر باشد را به دست آورید.

پاسخ: ۱) پیشامدهای A و B را به صورت‌های زیر در نظر می‌گیریم: A: هر دو عدد زوج است. B: مجموع دو عدد زوج است.

تعداد حالت‌هایی که هر دو عدد زوج باشد برابر $n(A) = \binom{۳}{۲} = ۳$ است. برای آن‌که جمع دو عدد زوج باشد، باید هر دو زوج یا هر دو فرد باشند:

$$n(B) = \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۲} = ۳ + ۳ = ۶ \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

۲) فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۳ فرزند به صورت زیر است:

$$S = \{(پ، پ، پ) , (د، پ، پ) , (پ، د، پ) , (د، د، پ) , (پ، پ، د) , (د، پ، د) , (پ، د، د) , (د، د، د)\}$$

اگر B پیشامدی باشد که در آن ۲ فرزند دختر باشند، آن‌گاه:

$$B = \{(د، د، پ) , (د، پ، د) , (پ، د، د)\} \Rightarrow n(B) = ۳$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن فرزند اول خانواده دختر باشد، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{(د، پ، د) , (پ، د، د)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۲ \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۳}$$

تذکر: در حل تمرین قبل، نیازی به نوشتن فضای نمونه‌ای S نداریم، اما باید از روی S، پیشامد B را مشخص کنیم.

نکته: در محاسبهٔ احتمال شرطی، اگر پیشامدهای A و B شمارشی نباشند، باید از فرمول $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ استفاده کنیم.

تمرین: فرض کنید احتمال این‌که تیم A اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، ۰/۷ است. احتمال قهرمانی تیم A برابر ۰/۸ است و اگر اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، آن‌گاه احتمال قهرمانی به ۰/۹ افزایش پیدا می‌کند. احتمال این‌که تیم A قهرمان شود یا اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، چه‌قدر است؟ *(مشابه مثال صفحهٔ ۱۴۶ کتاب درسی)*

پاسخ: برای پاسخ به سوال باید دو پیشامد تعریف کنیم و از فرمول استفاده کنیم. پیشامدهای C و D را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

C: تیم A قهرمان شود. D: تیم A اصلی‌ترین رقیبش را ببرد.

باید مقدار $P(C\cup D)$ را به دست بیاوریم. طبق قانون جمع احتمالات داریم: $P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$

طبق فرض، $P(C)=۰/۸$ و $P(D)=۰/۷$ است. اما این‌که گفته شده، اگر اصلی‌ترین رقیب را ببرد، آن‌گاه احتمال قهرمانی برابر $۰/۹$ می‌شود، یعنی $P(C\mid D)=۰/۹$ است. طبق فرمول احتمال شرطی داریم: $P(C\mid D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)} \Rightarrow ۰/۹=\frac{P(C\cap D)}{۰/۷}$

$$\Rightarrow P(C\cap D)=۰/۹\times ۰/۷=۰/۶۳ \Rightarrow P(C\cup D)=۰/۸+۰/۷-۰/۶۳=۰/۸۷$$

قانون ضرب احتمالات: از رابطهٔ $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، تساوی $P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)$ به دست می‌آید که به آن قانون ضرب احتمالات می‌گوییم و از این قانون برای به دست آوردن احتمال هم‌زمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

تمرین: درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم A پیشامد سالم‌بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب‌بودن لامپ دوم باشد. می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را به دست آوریم. داریم: $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$

$$P(A)=\frac{۴}{۵} \ , \ P(B\mid A)=P(\text{لامپ دوم معیوب} \mid \text{لامپ اول سالم})=\frac{۱}{۴} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۵}$$

- در مثال‌های مربوط به احتمال شرطی دیدیم که برخی از پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند اما برخی پیشامدها وجود دارند که بر احتمال وقوع دیگری تأثیر ندارند. برای چنین پیشامدهایی نامگذاری دیگری داریم.

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد مستقل: پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A تأثیر نداشته باشد.

به عبارت دیگر پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه: $P(A\mid B)=P(A)$

پس برای بررسی مستقل‌بودن پیشامد A از B، یک بار $P(A)$ (احتمال وقوع A با فضای نمونه‌ای S) و بار دیگر $P(A\mid B)$ (احتمال وقوع A در فضای نمونه‌ای جدید B) را به دست می‌آوریم. اگر این دو عدد یکسا نباشد، آن‌گاه پیشامد A از B مستقل است.

نکته: پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ باشد.

با توجه به فرمول $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ و تساوی $A\cap B=B\cap A$، می‌توان نوشت:

پیشامد B از A مستقل است. $\Rightarrow P(B\cap A)=P(A\cap B)=P(A)P(B)=P(B)P(A)$

نکته: ۱) اگر پیشامد A از پیشامد B مستقل باشد، آن‌گاه پیشامد B نیز از A مستقل است و می‌گوییم دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند.

۲) دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

در برخی از مثال‌ها می‌توان به طور شهودی استقلال دو پیشامد را تشخیص داد و نیازی به بررسی درستی تساوی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ نمی‌باشد. به مثال زیر توجه کنید:

تمرین: یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید را به دست آورید.

پاسخ: روش اول: فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه و یک تاس، ۱۲ عضو دارد که به صورت زیر است:

$$S=\{(ر\ ،\ ۱)\ ,\ (ر\ ،\ ۲)\ ...\ ,\ ...\ (ر\ ،\ ۶)\ ,\ (پ\ ،\ ۱)\ ,\ ...\ ,\ (پ\ ،\ ۶)\}$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید به صورت زیر است:

$$A=\{(پ\ ،\ ۲)\ ,\ (پ\ ،\ ۴)\ ,\ (پ\ ،\ ۶)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: پشت آمدن سکه، تأثیری در احتمال زوج‌آمدن تاس ندارد. پس می‌توان پیشامدهای A و Bرا به صورت زیر در نظر گرفت که این

دو پیشامد مستقل از هم‌اند:

A: پیشامد پشت آمدن سکه B: پیشامد روشدن عددی زوج در پرتاب تاس

باید احتمال $P(A\cap B)$ را به دست بیاوریم. چون A و B مستقل‌اند، بنابراین: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(A)$ یعنی احتمال پشت آمدن سکه در یک پرتاب که این عدد برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

$P(B)$ یعنی احتمال روشدن عددی زوج در پرتاب یک تاس که این عدد برابر $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، در این صورت:

آ) A' و B نیز مستقل از هم هستند. $(P(A'\cap B)=P(A')P(B))$

ب) A و B' نیز مستقل از هم هستند. $(P(A\cap B')=P(A)P(B'))$

پ) A' و B' نیز مستقل از هم هستند. $(P(A'\cap B')=P(A')P(B'))$

تمرین: اگر A و B دو پیشامد مستقل، $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A\cup B')=\frac{۳}{۴}$ باشند، مقدار $P(B)$ را به دست آورید.

پاسخ: دو پیشامد A و B مستقل‌اند، پس دو پیشامد A و B' نیز مستقل خواهند بود. داریم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')\ (۱)\quad ,\quad B',A \text{ مستقل‌اند.} \Rightarrow P(A\cap B')=P(A)P(B')\ (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A)P(B')\Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}+P(B')-\frac{۱}{۴}P(B')\Rightarrow \frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=(۱-\frac{۱}{۴})P(B')$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}P(B')\Rightarrow P(B')=\frac{۲}{۳}\Rightarrow P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

گاهی اوقات در ظاهر پیشامدهایی وجود دارند که وقوع آن‌ها با هم در ارتباط است ولی نمی‌توان به طور قطع گفت که این دو پیشامد مستقل نیستند.

تمرین: در پرتاب دو تاس آبی و قرمز پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید (ابتدا تاس آبی و سپس تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم.):

(مشابه مثال صفحهٔ ۱۴۸ کتاب درسی)

A: مجموع عددهای روشده ۴ باشد. B: مجموع عددهای روشده ۷ باشد. C: تاس آبی عدد ۳ بیاید.

۱) آیا A مستقل از C است؟ چرا؟

۲) آیا B مستقل از C است؟ چرا؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $۶\times۶=۳۶$ عضو دارد.

۱) باید $P(A)$ و $P(A\,|\,C)$ را به دست آوریم. در صورت برابری این دو عدد، دو پیشامد A و C مستقل‌اند:

$$A \text{ مجموع دو عدد برابر ۴ باشد.}: A=\{(۱,۳),(۳,۱۰,(۲,۲)\}\ ,\ n(S)=۳۶\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$C \text{ تاس آبی عدد ۳ بیاید.}: C=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow A\cap C=\{(۳,۱)\}$$

$$\Rightarrow P(A\,|\,C)=\frac{n(A\cap C)}{n(C)}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)\neq P(A\,|\,C)\Rightarrow \text{دو پیشامد A و C مستقل از هم نمی‌باشند.}$$

۲) B مجموع عددهای روشده ۷ باشد: $B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$B \cap C = \{(3,4)\} \Rightarrow n(B \cap C) = 1 \Rightarrow P(B|C) = \frac{n(B \cap C)}{n(C)} = \frac{1}{6} = P(B) \Rightarrow$ B مستقل از C است.

پرسش‌های تشریحی:

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱- دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد ..... می‌گوییم.

۲- منظور از $P(A|B)$، احتمال وقوع پیشامد ..... است به شرط آن که بدانیم پیشامد ..... رخ داده است.

۳- هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک ..... در فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

۴- اگر وقوع پیشامد A بر احتمال وقوع پیشامد B تأثیری نداشته باشد، دو پیشامد A و B را ..... می‌نامیم.

۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A \cap B)$ برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۲)

۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۱) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

۲) $P(A \cap B) = P(S)$

۳) $A \cap B = \varnothing$

۴) $A \cap B = A \times B$

۷- دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آن‌که هر دو عدد روشده زوج باشند، به شرط این‌که بدانیم مجموع اعداد روشده برابر ۸ باشد را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)

۸- دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می‌کنیم. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۵۲ کتاب درسی)

آ) اگر بدانیم مجموع عدد روشده در دو تاس ۸ شده است، احتمال این‌که تاس سفید ۵ آمده باشد را به دست آورید.

ب) اگر بدانیم تاس سفید ۵ آمده است، احتمال این‌که مجموع دو تاس ۸ شده باشد را به دست آورید.

۹- احتمال این‌که یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورت بردن رقیب اصلی‌اش، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش می‌یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۱۰- ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آن‌ها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان‌دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان‌دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان‌دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۱۱- فرض کنید در یک سال، احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران ۰/۶ و احتمال قهرمانی تیم والیبال ایران ۰/۷ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان آسیا خواهد شد؟ (شهریور ۱۴۰۲)

۱۲- در پرتاب یک سکه و دو تاس با هم، احتمال آن‌که سکه رو یا مجموع اعداد روی دو تاس برابر ۵ باشد را به دست آورید.

۱۳- اگر $P(A')=\frac{۱}{۴}$ ، $P(B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(A\cup B)=\frac{۴}{۵}$ باشد، مقدار $P(A\mid B)$ را به دست آورید.

۱ سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر $\frac{۱}{۱۵}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱۵}{۹۱}$
۴) $\frac{۵}{۵۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار kاُم "رو" ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، برابر احتمال $\frac{k}{k+۵}$ آن است که در n پرتاب k بار سکه "رو" بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ یک سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار mاُم "رو" ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، برابر $\frac{m}{m+۳}$ احتمال آن است که در n پرتاب m بار سکه "رو" بیاید. کدام مقدار می‌تواند nm باشد؟

۱) ۵۰
۲) ۴۵
۳) ۴۰
۴) ۳۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ احتمال اینکه یک کشتی‌گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{۱}{۵}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{۱}{۳}$ بوده و درصورتی‌که اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{۱}{۲}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی‌گیر قهرمان می‌شود یا رقیب اصلی خود را می‌برد؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$
۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$
۳) $\frac{۱۳}{۳۰}$
۴) $\frac{۷}{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر ۰/۰۸ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر ۰/۵ است. احتمال اینکه فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در دورهٔ بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دوبار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد) (با تغییر)

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ احتمال اینکه یک دانش‌آموز در یک امتحان نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال اینکه در امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸۵}{۹۴}$

۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴۵}{۴۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

طبق اطلاعات مسئله پیشامد "عدد سوم ۱۰ باشد" را با A نمایش می‌دهیم.

معنی این جمله این است که عدد انتخابی اول و دوم ۱۰ نمی‌باشند و عدد سوم ۱۰ است.

$$P(A) = \frac{n-۱}{n} \times \frac{n-۲}{n-۱} \times \frac{۱}{n-۲} = \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow n = ۱۵$$

حال از بین اعداد ۱ تا ۱۵ احتمال آن را حساب می‌کنیم که عدد اول و دوم مضرب ۳ نباشد و فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد. توجه داشته باشید که مضارب ۳ عبارتند از $\{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}$.

$$P(B) = \frac{۱۰}{۱۵} \times \frac{۹}{۱۴} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۵}{۹۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۲

پیشامد اینکه در n بار پرتاب دقیقاً بار kاُم "رو" ظاهر شود مانند این است که تمام $k-۱$ بار قبلی در $n-۱$ پرتاب پشت ظاهر شده باشد:

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \frac{k}{k+۵}\binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{k}{k+۵}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{k}{k+۵}\frac{n}{k} \Rightarrow ۱ = \frac{n}{k+۵} \Rightarrow n = k+۵ \xrightarrow{+k} n+k = ۲k+۵$$

$n+k$ باید عددی فرد و بزرگتر از ۷ باشد. تنها گزینه با این ویژگی‌ها گزینهٔ ۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۳

در پرتاب nاُم، mاُمین "رو" ظاهر شود، یعنی در $n-1$ پرتاب قبلی $m-1$ بار "رو" ظاهر شده باشد.

$$\Rightarrow \frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n} = \frac{m}{m+3} \times \frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m+1)!} = \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!} = \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{m!}$$
$$\Rightarrow 1 = \frac{m}{m+3} \times \frac{n}{m} \Rightarrow n = m+3$$

$$\Rightarrow nm = m(m+3) \xrightarrow{m=5} nm = 5 \times 8 = 40$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

پیشامد "بردن رقیب اصلی" را با A و پیشامد "کسب مدال طلا" را با B نمایش می‌دهیم.

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$
$$P(B|A) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{10}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{6+10-3}{30} = \frac{13}{30}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

$$P(\text{ابتلا}) = 0/08 \, , \, P(\text{ابتلا}|\text{بهبود}) = 0/5$$
$$\Rightarrow P(\text{بهبود} \cap \text{ابتلا}) = P(\text{ابتلا}) \times P(\text{ابتلا}|\text{بهبود})$$
$$= 0/08 \times 0/5 = 0/04$$

$$\Rightarrow 0/04 \times 100 = 4\,\%$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۴

A: متولد شدن خرگوش نر در اولین بارداری

B: متولد شدن خرگوش نر در دومین بارداری

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۶}{۰/۷} = \frac{۶}{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ گزینه ۳

A: قبولی در امتحان اول

B: قبولی در امتحان دوم

$$P(B) = ۰/۹ \quad , \quad P(A \cap B) = ۰/۸۵$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۸۵}{۰/۹} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

BOX 2: آمار توصیفی (صفحه ۱۵۳ تا ۱۶۳ کتاب درسی)

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می‌پردازد. در این بسته روش محاسبهٔ میانگین، میانه، دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌ها گفته می‌شود.

معیارهای گرایش به مرکز

میانگین و میانه به عنوان دو معیار گرایش به مرکز می‌باشند که می‌توان به کمک آن‌ها، نتیجهٔ مطالعات را گزارش داد.

میانگین: حاصل تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد داده‌ها را میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌ها می‌گوییم و آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم. پس

اگر داده‌ها x_1، x_2، ... و x_N باشند، آن‌گاه:

$$\bar{X}=\frac{x_1+\cdots+x_N}{N}$$

که در آن N تعداد داده‌ها است.

تمرین: وزن ۸ نفر به صورت مقابل است. میانگین وزن این ۸ نفر را به دست آورید. ۷۳, ۷۸, ۸۲, ۷۹, ۸۴, ۷۷, ۷۹, ۸۰

پاسخ: مجموع وزن ۸ نفر را به دست می‌آوریم و سپس آن را بر عدد ۸ تقسیم می‌کنیم. عدد حاصل میانگین وزن این ۸ نفر است:

$$\bar{X}=\frac{۷۳+۷۸+۸۲+۷۹+۸۴+۷۷+۷۹+۸۰}{۸}=\frac{۶۳۲}{۸}=۷۹$$

نکته:

۱) اگر میانگین N دادهٔ آماری برابر $\bar{X}$ باشد، آن‌گاه مجموع داده‌ها برابر $N\bar{X}$ است: $\frac{x_1+\cdots+x_N}{N}=\bar{X} \Rightarrow x_1+\cdots+x_N=N\bar{X}$

۲) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، میانگین نیز با آن‌ها برابر است و در غیر این صورت میانگین همواره عددی بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده است.

۳) اگر میانگین داده‌های x_1 ، ... و x_N برابر $\bar{X}$ باشد، آن‌گاه با حذف و یا اضافه‌کردن تعدادی داده که میانگین آن‌ها نیز برابر $\bar{X}$ باشد، در میانگین داده‌ها تغییری به وجود نمی‌آید.

ویژگی‌های میانگین

قضیه: اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، آن‌گاه میانگین آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت جمع می‌شود.

قضیه: اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آن‌ها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

در دو قضیهٔ بالا که ویژگی‌های میانگین گفته شده است را می‌توان به صورت یک نکته به صورت زیر بیان کنیم:

نکته: اگر $\bar{X}$ میانگین داده‌های x_1، x_2، ... و x_N باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های ax_1+b ، ax_2+b ، ... و ax_N+b برابر $a\bar{X}+b$ می‌باشد و می‌نویسیم: $\overline{aX+b}=a\bar{X}+b$

به عبارت دیگر اگر داده‌ها را در مقدار ثابت aضرب و با مقدار ثابت b جمع کنیم، آن‌گاه برای به دست آوردن میانگین داده‌های جدید، کافی است، میانگین اولیه را در a ضرب و سپس با b جمع کنیم.

تمرین: اگر میانگین داده‌های x_1، x_2، ... و x_N برابر ۱۲ باشد، میانگین داده‌های $۴x_1-۳$، $۴x_2-۳$، ... و $۴x_N-۳$ را به دست آورید.

پاسخ: هر دادهٔ آماری، چهار برابر شده است و سپس سه واحد از آن‌ها کم شده است، پس میانگین آن‌ها را ابتدا ۴ برابر می‌کنیم و سپس ۳ واحد از آن کم می‌کنیم. بنابراین: میانگین داده‌های جدید $=۴\times۱۲-۳=۴۵$

با علائم ریاضی، داریم: $\overline{۴X-۳}=۴\bar{X}-۳=۴\times۱۲-۳=۴۵$

نکته: مجموع اختلافات داده‌ها از میانگین (انحراف از میانگین) برابر صفر است. به عبارت دیگر، اگر $\bar{X}$ میانگین داده‌های x_1، ... و x_N

باشد، آن‌گاه: $(x_1-\bar{X})+(x_2-\bar{X})+\cdots+(x_N-\bar{X})=0$

در واقع میانگین در مرکز داده‌ها قرار دارد، یعنی همان مقداری که داده‌ها از میانگین اضافی دارند، همان مقدار هم از میانگین کم دارند.

میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌ها بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

تذکر: لزومی ندارد که میانه عضوی از داده‌ها باشد.

روش پیداکردن میانه:

۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۲) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار می‌گیرد، برابر میانه است.

۳) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار گرفته‌اند، برابر میانه است.

تمرین: ۱) میانهٔ داده‌های ۲۹,۲۶,۲۴,۲۵,۲۷,۲۶,۲۵,۲۴,۲۴ را به دست آورید و سپس داده‌های قبل و بعد از میانه را مشخص کنید.

۲) داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم قبل از یک مسابقهٔ ورزشی است:

۱۰۰,۹۱,۸۲,۷۵,۹۸,۱۰۵,۹۸,۸۸,۱۰۱,۸۹,۹۲,۹۷

آ) میانهٔ داده‌ها را به دست آورید. ب) میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

پاسخ: ۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۲۴,۲۴,۲۴,۲۵,۲۵,۲۶,۲۶,۲۷,۲۹

تعداد داده‌ها برابر ۹ است، پس دادهٔ وسط (دادهٔ پنجم)، میانهٔ داده‌ها است: $Q_2=25$

داده‌های بعد از میانه: ۲۶,۲۶,۲۷,۲۹ داده‌های قبل از میانه: ۲۴,۲۴,۲۴,۲۵

۲) آ) برای به دست آوردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۷۵,۸۲,۸۸,۸۹,۹۱,۹۲,۹۷,۹۸,۹۸,۱۰۰,۱۰۱,۱۰۵

تعداد داده‌ها برابر ۱۲ است. میانگین دو دادهٔ وسط، یعنی داده‌های ۹۲ و ۹۷ میانهٔ داده‌ها می‌باشد: $\text{میانه}=\frac{92+97}{2}=94/5$

۲) برای به دست آوردن میانگین، دوازده داده را با هم جمع می‌نیم و حاصل را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\bar{X}=\frac{75+82+88+89+91+92+97+98+98+100+101+105}{12}=\frac{1116}{12}=93$$

نکته: ۱) میانه فقط به این نکته توجه دارد که تعداد داده‌های بعد از آن برابر تعداد داده‌های قبل از آن باشد و به بزرگی و یا کوچک یداده‌ها کاری ندارد. به عبارت دیگر، میانه نسبت به اندازهٔ داده‌ها حساسیت نشان نمی‌دهد.

۲) میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک که در آمار به آن‌ها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. در صورتی که میانهٔ داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین در صورت وجود دادهٔ دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم. در غیر این صورت از میانگین استفاده می‌کنیم.

شاخص‌های پراکندگی

به معیارهایی که نزدیکی یا دوری داده‌ها را از میانگین برای ما اندازه‌گیری می‌کنند، شاخص پراکندگی می‌گوییم. شاخص‌های پراکندگی در این قسمت عبارت‌اند از: ۱) دامنهٔ تغییرات ۲) واریانس ۳) انحراف معیار ۴) ضریب تغییرات

دامنهٔ تغییرات: دامنهٔ تغییرات که آن را با R نمایش می‌دهیم عبارت است از اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده. به عبارت دیگر:

دامنهٔ تغییرات: $R=$ بزرگ‌ترین داده $-$ کوچک‌ترین داده $=b-a$

تمرین: دامنهٔ تغییرات داده‌های ۱۸، ۱۶، ۱۷، ۱۴، ۱۲، ۱۱، ۹، ۷، ۸، ۷، ۵، ۹، ۱۰ و ۱۵ را به دست آورید.

پاسخ: $a=5\ ,\ b=18\ \Rightarrow\ R=b-a=18-5=13$

نکته: ۱) دامنهٔ تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد.

۲) هر چه‌قدر دامنهٔ تغییرات کم‌تر باشد، داده‌های آماری به هم نزدیک‌ترند و پراکندگی داده‌ها کم‌تر است و در صورتی که تمام داده‌ها با هم برابر باشد، دامنهٔ تغییرات برابر صفر است و برعکس.

واریانس: میانگین مجذور انحرافات از میانگین داده‌ها را واریانس داده‌ها می‌گوییم و آن را با σ^2 نشان می‌دهیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (x_N - \bar{X})^2}{N}$$

تمرین: واریانس داده‌های ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱ و ۱۳ را به دست آورید.

پاسخ: میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{13+11+11+10+10}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (x_5 - \bar{X})^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{(10-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (11-11)^2 + (13-11)^2}{5} = \frac{1+1+0+0+4}{5} = \frac{6}{5} = 1/2$$

تذکر: واحد واریانس برابر با توان دوم واحد دادهٔ موردنظر است.

نکته: هرچه واریانس داده‌ها کوچک‌تر باشد، پراکندگی داده‌ها کم‌تر است، یعنی داده‌ها به هم و در نتیجه به میانگین خودشان نزدیک‌ترند و اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها همگی با هم برابرند و برعکس.

تمرین: ۱) اگر واریانس داده‌های a، $b-2$، $2c+1$ و ۱۷ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a+b$، $4c+1$، ۳۵، ۳۶ و ۳۸ را به دست آورید.

۲) نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B به صورت مقابل است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

آ) واریانس نمره‌های هر یک از دو کلاس A و B را به دست آورید.

ب) یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

پاسخ: ۱) واریانس داده‌های a، $b-2$، $2c+1$ و ۱۷ برابر صفر است، پس این داده‌ها همگی با هم برابرند:

$$a = b-2 = 2c+1 = 17 \Rightarrow a = 17 \ , \ b = 19 \ , \ c = 8$$

داده‌های جدید: $a+b = 36 \ , \ 4c+1 = 33 \ , 35 \ , 36 \ , 38$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{36+33+35+36+38}{5} = \frac{178}{5} = 35/6$$

۲) آ)برای به دست آوردن واریانس کلاس A، میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

مجذور اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A به دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و حاصل را بر ۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(8-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (12-10)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

برای به دست آوردن واریانس کلاس B، میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{0+5+10+15+20}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-10)^2+(5-10)^2+(10-10)^2+(15-10)^2+(20-10)^2}{5} = \frac{100+25+0+25+100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

ب) واریانس نمرات ریاضی کلاس A کوچک‌تر است و در نتیجه داده‌ها از پراکندگی کم‌تری برخوردارند و در نتیجه معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کلاس A تدریس کند.

ویژگی‌های واریانس:

۱) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آن‌ها تغییر نمی‌کند.

۲) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آن‌ها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

دو ویژگی واریانس را می‌توان در یک نکته به صورت زیر ادغام کرد:

نکته: اگر داده‌ها را با عدد ثابتی جمع کنیم، واریانس آن‌ها تغییری نمی‌کند و اگر داده‌ها را در عدد ثابتی ضرب کنیم، واریانس آن‌ها در مجذور این عدد ضرب خواهد شد. با بیان ریاضی، اگر واریانس داده‌های x_1، ... و x_N برابر σ_x^2 باشد، آن‌گاه واریانس داده‌های x_1+b ، ... و x_N+b برابر σ_x^2 و واریانس داده‌های ax_1، ... و ax_N برابر $a^2\sigma_x^2$ خواهد بود و در حالت کلی داریم: $(\sigma_{ax+b})^2 = a^2\sigma_x^2$

تمرین: واریانس تعدادی دادهٔ آماری برابر ۵ است. ابتدا به هر دادهٔ آماری ۴ واحد اضافه می‌کنیم و سپس آن‌ها را دو برابر می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید ر ا به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم x_1 ، x_2، ... و x_N داده‌های اولیه با واریانس $\sigma_x^2 = 5$ باشند، داده‌های جدید به صورت $2(x_1+4)$، $2(x_2+4)$، ... و $2(x_N+4)$ می‌باشند. می‌دانیم جمع عدد ثابت در واریانس تأثیر ندارد و داریم: $\sigma^2_{2(x+4)} \xrightarrow{\text{حذف عدد ۴}} \sigma^2_{2x} = 2^2\sigma_x^2 = 4\times 5 = 20$

انحراف معیار:

- واحد واریانس برابر است با مجذور واحد متغیر. به عنوان مثال اگر واحد داده‌ها متر باشد، آن‌گاه واریانس برحسب مترمربع است. اگر از واریانس جذر بگیریم، آن‌گاه واحد این عدد با واحد داده‌ها یکی می‌شود.

- جذر واریانس را انحراف معیار می‌گوییم و آن را با نماد σ نمایش می‌دهیم، پس: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{X})^2+\cdots+(x_N-\bar{X})^2}{N}}$

- توجه کنیم که جذر عددی مثبت است، پس σ مثبت است و هرچه کوچک‌تر باشد، آن‌گاه داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و اگر $\sigma = 0$ باشد، آن‌گاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.

نکته: اگر انحراف معیار داده‌های x_1، ... و x_N برابر σ_x باشد، آن‌گاه انحراف معیار داده‌های ax_1+b، ... و ax_N+b برابر $|a|\sigma_x$ است، در واقع: $\alpha_{ax+b} = |a|\sigma_x$

ضریب تغییرات:

اگر بخواهیم پراکندگی نمرات دو کلاس در درس ریاضی را با هم مقایسه کنیم، ابتدا واریانس نمرات هر یک از کلاس‌ها را به دست می‌آوریم. با فرض یکسان‌بودن میانگین نمرات دو کلاس، واریانس نمرات هر کلاسی کم‌تر باشد، آن داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و در نتیجه پراکندگی کم‌تر یدارند. اما اگر میانگین نمرات دو کلاس متفاوت باشد، از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم. هم‌چنین اگر بخواهیم پراکندگی دو دسته از داده‌ها را که هم‌واحد نیستند با هم مقایسه کنیم، از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم. هرچه ضریب تغییرات داده‌ها کم‌تر باشد، پراکندگی داده‌ها کم‌تر است.

- ضریب تغییرات که آن را با نماد CV نشان می‌دهیم عبارت است از خارج‌قسمت انحراف معیار بر میانگین، پس: $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$

مفهوم ضریب تغییرات: ضریب تغییرات عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

تمرین: ضریب تغییرات داده‌های $۶,۶,۶,۶,۶,۶,۸,۴$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا میانگین داده‌های آماری را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X}=\frac{۴+۸+۶+۶+۶+۶+۶+۶}{۸}=\frac{۴۸}{۸}=۶$$

انحراف معیار این ۸ دادهٔ آماری برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(۴-۶)^۲+(۸-۶)^۲+۶(۶-۶)^۲}{۸}}=\sqrt{\frac{۴+۴}{۸}}=\sqrt{۱}=۱ \Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{X}}=\frac{۱}{۶}$$

نکته: ضریب تغییرات برای داده‌های مثبت تعریف می‌شود.

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) سه عدد هستند که داده‌ای مرتب‌شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با $Q_۱$ و چارک سوم را با $Q_۳$ نمایش می‌دهند.

محاسبهٔ چارک‌ها

۱) ابتدا میانهٔ داده‌ها را به دست می‌آوریم.

۲) برای داده‌های مرتب‌شدهٔ قبل از میانه، یک میانه به دست می‌آوریم و آن را چارک اول می‌نامیم.

۳) برای داده‌های مرتب‌شدهٔ بعد از میانه، یک میانه به دست می‌آوریم و آن را چارک سوم می‌نامیم.

تمرین: چارک‌ها را برای داده‌های مقابل مشخص کنید. $۱۳,۱۳,۱۲,۱۴,۱۱,۱۵,۱۵,۱۰,۱۶,۱۷,۱۲,۱۳,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸$

پاسخ: داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: $۱۰,۱۱,۱۲,۱۲,۱۳,۱۳,۱۳,۱۴,۱۵,۱۵,۱۵,۱۶,۱۶,۱۷,۱۷,۱۸$

تعداد داده‌ها برابر ۱۶ است. $Q_۲$ ، داده‌ها را به دو گروه ۸تایی تقسیم می‌کند: $Q_۲=\frac{\text{مجموع داده‌های هشتم و نهم}}{۲}=\frac{۱۴+۱۵}{۲}=۱۴/۵$

میانهٔ هشت دادهٔ اول، $Q_۱$ است: $Q_۱=\frac{\text{مجموع داده‌های چهارم و پنجم}}{۲}=\frac{۱۲+۱۳}{۲}=۱۲/۵$

میانهٔ هشت دادهٔ آخر، $Q_۳$ است: $Q_۳=\frac{x_{۱۲}+x_{۱۳}}{۲}=\frac{۱۶+۱۶}{۲}=۱۶$

در این مثال، داده‌ها به ۴ گروه چهارتایی تقسیم شده‌اند:

$$\underset{\downarrow Q_۱}{x_۱,x_۲,x_۳,x_۴} \;,\; \underset{\downarrow Q_۲}{x_۵,x_۶,x_۷,x_۸} \;,\; \underset{\downarrow Q_۳}{x_۹,x_{۱۰},x_{۱۱},x_{۱۲}} \;,\; x_{۱۳},x_{۱۴},x_{۱۵},x_{۱۶}$$

نکته: با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصلهٔ بین دو دادهٔ متوالی قرار گیرند.

پرسش‌های تشریحی:

● درستی یا نادرستی عبارت‌های سه سوال زیر را مشخص کنید.

۱- اگر مقدار ثابت و مثبت C از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{C}$ کاهش می‌یابد.

۲- ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان کلاس در ۱۰ سال دیگر افزایش می‌یابد.

۳- اگر مقدار ثابت و مثبت C در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار C برابر می‌شود.

۴- میانگین داده‌های $x_1,\dots,x_N$ برابر ۱۷ است. میانگین داده‌های هر یک از دسته‌های زیر را به دست آورید.

آ) $x_1+5, x_2+5,\dots,x_N+5$

ب) $3x_1, 3x_2,\dots,3x_N$

پ) $4x_1-1, 4x_2-1,\dots,4x_N-1$

۵- واریانس داده‌ای دسته زیر را به دست آورید. $12,13,13,14,14,15,16,15$

۶- نمرات ریاضی یک کلاس به قرار زیر است: $18,18,13,20,14,15,16,17,19,20$

میانه و انحراف معیار را برای این جامعهٔ آماری به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۷- کارخانه‌ای دو نوع تسمه‌تایم تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۷۵۰۰۰ کیلومتر و ۹۰۰۰۰ کیلومتر و واریانس برای نوع A و B به ترتیب ۴۰۰ کیلومتر مربع و ۶۲۵ کیلومتر مربع است. کدام نوع تسمه‌تایم بهتر است؟

۸- اگر واریانس داده‌های a، $b-1$، $2c+4$ ، d و ۱۶ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a+7$، $b+8$، $c+12$، $d+9$، ۱۷، ۱۸، ۱۸ و ۱۹ را به دست آورید.

۹- اگر واریانس داده‌های a، $b-1$، $2c+4$، d و ۱۶ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $a+7$، $b+8$، $c+12$، $d+9$، ۱۷، ۱۹، ۱۹ و ۱۹ را به دست آورید.

۱۰- اگر میانگین و واریانس داده‌های x_1، ... و x_N به ترتیب ۵ و ۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2x_1+5$، ... و $2x_N+5$ را به دست آورید.

۱۱- ثابت کنید مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

۱۲- اختلاف داده‌ها از میانگین به صورت ۳-، ۲، ۱، ۱-، a، ۰، ۵ و ۲- است. مقدار a و واریانس داده‌ها را به دست آورید.

Homework (1)

۱ برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به ترتیب برابر ۹ و ۳۹ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم کدام است؟

$$۱۸, ۲۳, ۳۹, ۱, ۳, ۴۲, a, a, ۲a + ۱, ۲۳, ۹$$

۱) ۲۰ ۲) ۲۱/۸

۳) ۴۵ ۴) ۵۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به‌طوری‌که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر ۱/۲۵ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵

۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر یکی از داده‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ را با یک عدد فرد که فقط کوچک‌تر از همان عدد است، جایگزین کنیم، به‌طوری‌که واریانس داده‌های جدید کمتر از واریانس داده‌های اولیه باشد؛ میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۲۵

۳) ۴/۵ ۴) ۴/۷۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۴ اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همهٔ اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند. انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$

۳) $\sqrt{۲۱}$ ۴) $\sqrt{۲۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸

۳) ۶ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ در یک دسته ۷تایی از اعداد طبیعی متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد طبیعی دیگری را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین دسته آخر، مکعب انحراف معیار باشد. اختلاف کوچک‌ترین عضو دسته اول و دسته آخر، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را در دسته جدید قرار می‌دهیم. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و غیرتکراری باشند. میانگین داده‌های دسته جدید کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۵/۵

۳) ۵۰ ۴) ۵۰/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ اگر ۱ , ۲a , ۱ , ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های ۱۱ , ۶a , ۹ , ۸ باشد، مقدار انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$

۳) ۱/۸ ۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ اگر ۲۵ , ۲a − ۱۷ , ۱۶ , ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز ۱۳ , a , ۴ , ۶ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۹/۵

۳) ۱۱ ۴) ۱۱/۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۰ انحراف معیار شش دادهٔ آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر $۳, -۱, b, -۱, ۰, a$ است. اگر $a > ۰$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) -۲ ۴) -۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ چارک دوم تعدادی دادهٔ آماری برابر ۳ است. قرینهٔ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴/۵

۳) ۳ ۴) ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دوتای آن‌ها را با کوچک‌ترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد در دستهٔ دوم (دستهٔ جدید) تک‌رقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دستهٔ اول به دستهٔ دوم کدام است؟

۱) $۰/۲\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۴\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ کوچک‌ترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$ ۲) $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۳) $\frac{۱}{۱۲\sqrt{۶}}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴ در یک مطالعهٔ آماری ۸۳ داده جمع‌آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد، حداقل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

۱) صفر ۲) ۱۳

۳) ۳ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دستهٔ اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است؛ یعنی $\{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}, \{۵, ۶, ۷, ۸\}, \ldots$. میانهٔ عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟

۱) ۶۱۴۴/۵ ۲) ۶۱۴۵/۵

۳) ۱۲۲۸۹/۵ ۴) ۱۲۲۸۸/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ میانگین شش دادهٔ آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها به‌صورت $۹, a^۲, ۰, ۹, b^۲, ۱$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱) -۴
۲) ۴
۳) ۲
۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۷ داده‌های جمع‌آوری‌شده در یک مطالعهٔ آماری اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همهٔ داده‌ها ۲ واحد بیافزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۸ ۹ دادهٔ آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت دادهٔ آماری، از میانگین برابر ۱+ یا ۱- و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۹ در داده‌های $۲, ۱۲, ۸, ۴, ۵, ۲, ۱۰$ با حذف داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، دامنه تغییرات چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱) ۵۰
۲) ۴۰
۳) ۲۵
۴) ۲۰

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۲۰ اگر انحراف معیار پنج داده برابر صفر باشد و با ترکیب داده‌های ۸، ۵ و ۱۱ با پنج داده اولیه، میانگین هشت داده تغییر نکند، انحراف معیار این هشت داده، کدام است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۲/۲۵
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۱ در داده‌های آماری $۱۴, ۱۳, ۱۷/۵, ۱۶, ۹, ۱۳, ۱۲/۵, ۱۰, ۱۷, ۱۵$ تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۳
۴) ۰/۴

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۲ داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}} \simeq ۰/۵۳۴\right)$

۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۲۰
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۱۷
۴) ۰/۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

چارک اول $Q_1 = ۹$ و چارک سوم $Q_3 = ۳۹$ است، بنابراین داده‌های بین چارک‌های اول و سوم $a, a, ۲۳, ۲۳, ۱۸$ خواهد بود.

$$\frac{a + a + ۲۳ + ۲۳ + ۱۸}{۵} = ۲۶ \Rightarrow ۲a + ۶۴ = ۱۳۰$$

$$\Rightarrow ۲a = ۶۶ \Rightarrow a = ۳۳$$

داده‌ها به‌صورت زیر مرتب می‌شود.

$$۱ \quad ۳ \quad \boxed{۹} \quad ۱۸ \quad ۲۳ \quad \boxed{۲۳} \quad ۳۳ \quad ۳۳ \quad \boxed{۳۹} \quad ۴۲ \quad ۶۴$$
$$\downarrow Q_1 \qquad \downarrow Q_2 \qquad \downarrow Q_3$$

میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۴۲ + ۶۷}{۲} = \frac{۱۰۹}{۲} = ۵۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

داده‌ای که جابه‌جا شده با هم برابر بوده است پس بعد از جابه‌جایی واریانس تغییر نخواهد کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

تنها با تبدیل ۸ به ۷ می‌توانیم عددی فرد اضافه کنیم که فقط از ۸ کوچک‌تر باشد و از ۲، ۴ و ۶ بزرگ‌تر است، پس:

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۴ + ۶ + ۷}{۴} = \frac{۱۹}{۴} = ۴/۷۵$$

دقت کنید که در این حالت با کم شدن دامنه تغییرات، واریانس و انحراف معیار نیز کم می‌شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۳

۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹

باید اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین باشند. بنابراین همهٔ اعداد زوج ۱۸, ۱۶, ۱۴, ۱۲, ۱۰ را کنار می‌گذاریم. از اعداد باقی‌مانده که فرد هستند (۱۹, ۱۷, ۱۵, ۱۳, ۱۱, ۹) به‌صورتی دوتا دوتا انتخاب می‌کنیم که اختلاف آن‌ها تکراری نباشد و همچنین بیشترین میانگین شود. بنابراین داریم:

$$۱۷ - ۹ = ۸$$
$$۱۹ - ۱۳ = ۶$$
$$۱۵ - ۱۱ = ۴$$

درنتیجه دنبالهٔ اعداد زیر حاصل می‌شود:

۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸

حال انحراف معیار این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۶ + ۱۸}{۸} = \frac{۸۸}{۸} = ۱۱$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ + ۵^۲ + ۳^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲}{۸}} = \sqrt{\frac{۲(۴۹ + ۲۵ + ۹ + ۱)}{۸}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۸۴)}{۸}} = \sqrt{۲۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۲

دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی را به شکل زیر نشان می‌دهیم (دسته اول):

$$۲k, ۲k+۲, ۲k+۴, ۲k+۶, ۲k+۸, ۲k+۱۰, ۲k+۱۲$$

اعداد متوالی و تعدادشان فرد است، پس میانگین برابر عدد وسط است یعنی $۲k+۶$

$$\overline{x} = ۲k+۶$$

از همه اعداد موجود در دسته $۲k$ را کم می‌کنیم و مطمئن هستیم که انحراف معیار دسته ایجاد شده با انحراف معیار دسته قبلی برابر است:

$$\text{دسته جدید} : ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲$$

$$\sigma = ۴$$

در سؤال گفته شده در دسته اول میانگین دو برابر انحراف معیار است پس: $\overline{x} = ۸$.

$$\overline{x} = ۲k+۶ = ۸ \Rightarrow ۲k = ۲ \Rightarrow k = ۱$$

میانگین دسته آخر، مجذور انحراف معیار است، پس:

$$\text{دسته اول} : \text{داده وسط} = \text{میانگین} = ۸$$

$$\text{دسته آخر} : \text{داده وسط} = \sigma^۲ = ۱۶$$

اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر برابر اختلاف داده‌های وسط دو دسته است: $۱۶ - ۸ = ۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲

نکته: واریانس n دادهٔ آماری که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲} \times d^۲$$

انحراف معیار ۷ عدد طبیعی متوالی برابر است با: $\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ - ۱}{۱۲}} = ۲$

اگر ۷ دادهٔ اول را $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ فرض کنیم، میانگین برابر ۴ دارند و انحراف معیار ۲ که نصف میانگین است. دسته‌ای که میانگین (داده وسطی) آن $\sigma^۳ = ۸$ است، دستهٔ $۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱$ می‌باشد. کوچک‌ترین عضو دسته اول برابر ۱ و کوچک‌ترین عضو دسته آخر برابر ۵ است. پس اختلاف آن‌ها $۵ - ۱ = ۴$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۳

باتوجه‌به توضیحات داده‌شده در صورت سؤال اعداد به‌صورت یک عدد زوج و یک عدد فرد از دستهٔ اول به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\underbrace{۱,۱۰۰}_{۹۹} \quad \underbrace{۲,۹۹}_{۹۷} \quad \underbrace{۳,۹۸}_{۹۵} \quad \underbrace{۴,۹۷}_{۹۳} \quad \cdots \quad \underbrace{۴۹,۵۲}_{۳} \quad \underbrace{۵۰,۵۱}_{۱}$$

اعداد دستهٔ جدید : $۱,۳,۵,\ldots,۹۹$

$$\overline{x} = \frac{۱+۳+۵+\cdots+۹۹}{۵۰} = \frac{۱+۳+\cdots+(۲\times ۵۰-۱)}{۵۰}$$

$$= \frac{(۵۰)^۲}{۵۰} = ۵۰ \Rightarrow \overline{x} = ۵۰$$

نکته: می‌دانیم: $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = n^۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ گزینه ۱

میانگین داده‌ها عبارت است از:

$$\overline{x} = \frac{۸+۹+۶a+۱۱}{۴} = \frac{۲۸+۶a}{۴} = ۷ + \frac{۳a}{۲}$$

با توجه به مربع انحراف از میانگین داده‌ها پس:

$$(۸-۷-\frac{۳a}{۲})^۲ = ۴ \Rightarrow ۱-\frac{۳a}{۲} = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱-\frac{۳a}{۲} = ۲ \Rightarrow a = -\frac{۲}{۳} & \times \\ ۱-\frac{۳a}{۲} = -۲ \Rightarrow a = ۲ \end{cases}$$

انحراف معیار داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{۴+۱+۴+۱}{۴} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ گزینه ۴

ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۶ + ۴ + a + ۱۳}{۴} = \frac{۲۳ + a}{۴}$$

برای داده ۶ داریم:

$$(۶ - \frac{۲۳ + a}{۴})^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۲۴ - ۲۳ - a}{۴} = \pm ۲ \Rightarrow \frac{۱ - a}{۴} = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱ - a = ۸ \Rightarrow a = -۷ \\ ۱ - a = -۸ \Rightarrow a = ۹ \end{cases}$$

اگر برای داده ۴ امتحان کنیم:

$$(۴ - \frac{۲۳ + a}{۴})^۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۷ \Rightarrow (۴ - ۴)^۲ = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ a = ۹ \Rightarrow (۴ - ۸)^۲ = ۱۶ \quad \text{درست} \end{cases}$$

پس:

$$\sigma^۲ = \frac{۴ + ۱۶ + ۲a - ۱۷ + ۲۵}{۴} = \frac{۲۰ + ۱۸ - ۱۷ + ۲۵}{۴} = \frac{۴۶}{۴} = ۱۱/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۴

$$\sigma = ۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۳^۲ + (-۱)^۲ + b^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ + a^۲}{۶}$$

$$a^۲ + b^۲ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۳ \quad (۱)$$

ازطرفی می‌دانیم جمع انحرافات از میانگین همواره صفر است یعنی:

$$۳ + (-۱) + b + (-۱) + ۰ + a = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \quad (۲)$$

$$a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab \xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۳ = ۱ - ۲ab \Rightarrow ab = -۶$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ = b \\ x = ۲ = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ گزینه ۳

زوج n : $x_1 , x_2 , \dots , x_{\frac{n}{2}} , x_{\frac{n}{2}+1} , \dots , x_n$

$$-\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{x_{\frac{n}{2}+1} + \dots + x_n}{\frac{n}{2}}\right) - 6$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\frac{n}{2}} = 6 \Rightarrow 2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = 6 \Rightarrow 2\bar{x} = 6 \Rightarrow \bar{x} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۳

باتوجه‌به صورت مسئله اعداد دستهٔ دوم همگی زوج تک‌رقمی و غیرتکراری هستند پس اعداد دستهٔ دوم ۲, ۴, ۶, ۸ خواهند بود. درنتیجه اعداد دستهٔ اول ۱, ۳, ۷, ۹ می‌باشند. داریم:

$$\{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1 + 3 + 7 + 9}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10}$$

$$\{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۴

سه عدد زوج متوالی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$x-۲\,,\,x\,,\,x+۲ \Rightarrow \sigma^۲=\frac{(-۲)^۲+۰^۲+۲^۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

میانگین هر سه عدد زوج متوالی عدد وسط است و چون در محاسبه ضریب تغییرات، میانگین در مخرج قرار دارد، بنابراین برای یافتن کوچک‌ترین ضریب تغییرات بزرگ‌ترین میانگین را انتخاب می‌کنیم که متعلق به سه‌تایی $\{۹۴,۹۶,۹۸\}$ می‌باشد:

$$\overline{X}=۹۶$$

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}{۹۶}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}\times ۴۸}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$$

نکته: واریانس سه عدد زوج متوالی برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{d^۲}{۱۲}(N^۲-۱)=\frac{۴}{۱۲}(۹-۱)=\frac{۱}{۳}\times ۸=\frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴ گزینه ۴

اگر هیچ‌کدام از داده‌ها با میانگین برابر نباشند، مجموع انحرافات از میانگین نمی‌تواند صفر شود! چون ۸۳ داده داریم و امکان ندارد که جمع تعداد فردی از ۱+ یا ۱- باهم به صفر برسند، پس حداقل یکی از داده‌ها باید برابر میانگین باشد!

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۱

تعداد اعداد دستهٔ دوم برابر ۲تا است. دستهٔ سوم ۴تا، دستهٔ چهارم ۸تا و به همین طریق پیش خواهد رفت یعنی $۲^{n-۱}$ ، پس دستهٔ سیزدهم با جملهٔ $۱+۲^{۱۲}$ آغاز شده و به $۲^{۱۳}$ ختم می‌شود. همچنین می‌دانیم این دسته $۲^{۱۲}$ یعنی ۴۰۹۶ عضو دارد.

$$\text{دسته سیزدهم}: \{۴۰۹۷,۴۰۹۸,\ldots,۸۱۹۱,۸۱۹۲\}$$

میانهٔ این ۴۰۹۶ داده برابر میانگین داده‌های ۲۰۴۸ و ۲۰۴۹ام است.

$$\text{میانه}=\frac{(۴۰۹۶+۲۰۴۸)+(۴۰۹۶+۲۰۴۹)}{۲}=۶۱۴۴/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۴

$$\sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۱ + b^۲ + ۹ + ۰ + a^۲ + ۹}{۶} \Rightarrow a^۲ = ۵ - b^۲$$

چون a و b اعدادی صحیح هستند، پس حتماً یکی از آن‌ها اندازهٔ ۱ دارد و دیگری اندازهٔ ۲. اما برای این‌که مجموع انحرافات از میانگین صفر شود، حتماً باید یکی از آن‌ها را منفی در نظر بگیریم. پس $ab = -۲$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۱

نکته: در داده‌هایی که به صورت دنبالهٔ حسابی هستند، میانه و میانگین برابرند.

داده‌های آماری اعداد طبیعی متوالی هستند، پس جملات دنباله‌ای حسابی می‌باشند. بنابراین طبق نکته میانگین و میانه برابر است. با افزودن ۲ واحد به تمام داده‌ها، همچنان دنباله‌ای حسابی می‌باشد، بنابراین اختلاف میانه و میانگین برابر با صفر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۸ گزینه ۴

می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است، بنابراین اختلاف چهار داده از میانگین برابر با ۱ و اختلاف چهار داده از میانگین نیز برابر با ۱- می‌باشد.

$$\sigma^۲ = \frac{۴(۱)^۲ + ۴(-۱)^۲ + ۰}{۹} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \sigma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۹ گزینه ۴

$$\underset{Q_۱}{۲,۲} \;,\; \underset{Q_۲}{۴,۵} \;,\; \underset{Q_۳}{۸,۱۰} \;,\; ۱۲$$

دامنه تغییرات اولیه را می‌یابیم:

$$R_۱ = ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

دامنهٔ تغییرات جدید بعد از حذف ۱۲:

$$R_۲ = ۱۰ - ۲ = ۸$$

توجه کنید که ۲ کوچک‌تر از ۲ نیست و آن را حذف نمی‌کنیم. (هر چند تأثیری در حل سؤال نداشت)

$$\begin{matrix} ۱۰ & ۱۰۰ \\ ۲ & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۱۰۰}{۱۰} = ۲۰\%$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۲۰ گزینه ۲

انحراف معیار زمانی صفر است که داده‌ها برابر باشند. همهٔ پنج داده را x فرض می‌کنیم:

$$x = \frac{5x + 8 + 5 + 11}{8} \Rightarrow x = 8$$

ابتدا واریانس را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = \frac{(11-8)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2 + 5(8-8)^2}{8} = \frac{18}{8} = 2/25$$
$$\sigma = \sqrt{2/25} = 1/5$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۱ گزینه ۲

برای پیدا کردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$9, 10, 12/5, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 17/5$$

تعداد داده‌ها زوج است بنابراین میانه برابر با میانگین دو دادهٔ پنجم و ششم است. داریم:

$$\text{میانه} = \frac{13 + 14}{2} = 13/5$$

میانگین داده‌ها را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{میانگین} = \frac{9 + 10 + 12/5 + 13 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 17/5}{10} = 13/7$$

بنابراین تفاضل میانه از میانگین برابر است با:

$$13/7 - 13/5 = 0/2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۲ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{5 + 7 + 3 \times 8 + 2 \times 10}{7} = \frac{12 + 24 + 20}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

واریانس:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(5-8)^2 + (7-8)^2 + 3 \times (8-8)^2 + 2 \times (10-8)^2}{7}$$

$$= \frac{9 + 1 + 0 + 8}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} : \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3}{8} \times 0/534 \simeq 0/20$$

راه‌حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$-3, -1, 0, 0, 0, 2, 2$$

$$\overline{x}_{\text{جدید}} = \frac{2 + 2 - 1 - 3}{7} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{2 \times 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}{7} = \frac{18}{7} \quad \Rightarrow \sigma = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{جدید}} + 8 = 0 + 8 = 8$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} \simeq 0/20$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ گزینه ۲

راه‌حل اول:

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = \frac{50 + 44 + 98}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{واریانس } \sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{5 \times (10 - 12)^2 + 4 \times (11 - 12)^2 + 7 \times (14 - 12)^2}{16}$$

$$= \frac{5 \times 4 + 4 \times 1 + 7 \times 4}{16} = \frac{20 + 4 + 28}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \simeq 0/15$$

راه‌حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها} : \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{۵ تا}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{۴ تا}}, \underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{\text{۷ تا}}$$

$$\overline{x}_{\text{کوچک}} = \frac{0 + 4(1) + 7(4)}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{کوچک}} + 10 = 2 + 10 = 12$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} \simeq 0/15$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱ نمرات ۶ درس دانش‌آموزی اعلام شده که میانگین آن‌ها ۱۸ بوده است؛ سپس نمرات ۴ درس دیگر او نیز اعلام شد که میانگین آن ۴ درس ۱۵ بوده است.
میانگین ۱۰ درس او را حساب کنید.

۲ انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌های زیر را حساب کنید:

۱۱, ۲۵, ۲۶, ۱۸

۳ میانگین داده‌های آماری ۱، ۵، ۱۰، x و y برابر ۱۲ است. میانگین داده‌های ۷، ۱۳، $3x$ و $3y$ را حساب کنید.

عبارات زیر را کامل کنید.

۴ اگر مجموعه دامنه گزاره‌نمای $(x^2-9)(4x-5)(x^2-5)=0$ اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب آن دارای ..... عضو است.

۵ دو تاس و سه سکه را با هم می‌اندازیم. فضای نمونه این آزمایش ..... عضو دارد.

۶ احتمال قبولی علی در درس ریاضی ۹۰ درصد و احتمال قبولی رضا در این درس ۷۰ درصد است. با احتمال ..... درصد علی در درس ریاضی قبول و رضا مردود می‌شود.

۷ اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر ۱۶ باشد، انحراف معیار داده‌های $-2x_1+7, -2x_2+7, \ldots, -2x_n+7$ برابر است با: .....

۸ در یک جامعه آماری، نمونه‌ای که معرف خوبی برای جامعه نیست و به سمت خاصی انحراف پیدا می‌کند، نمونه ..... نام دارد.

۹ ضریب تغییرات داده‌های ۷، ۵، ۵، ۵ و۳ را به‌دست آورید.

۱۰ میانگین ۱۲ دادهٔ آماری ۱۰ است. اگر ۳ دادهٔ ۹، ۱۰ و ۱۱ را کنار بگذاریم، میانگین ۹ دادهٔ باقی‌مانده چقدر می‌شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰
۳) ۱۰/۵ ۴) ۹

۱۱ معدل شش درس یک دانش‌آموز برابر ۱۷ بوده است. اگر دو نمرهٔ ۱۵ و ۱۹ را به نمرات او اضافه کنیم، معدل جدید دانش‌آموز چقدر است؟

۱۲ اگر میانگین داده‌های $16, 9, 17, 13, 10, x, 10, 17, 11, 16$ برابر ۱۳/۱ باشد، میانهٔ داده‌ها چقدر است؟

۱۳ داده‌های آماری ۲۰ ، ۹ ، ۸ ، ۷ ، ۵ ، ۵ مفروض‌اند. واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۱۵۷}{۶}$ ۲) $\frac{۷۹}{۳}$

۳) $\frac{۱۵۵}{۶}$ ۴) $\frac{۸۰}{۳}$

۱۴ اگر انحراف از میانگین داده‌های $x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴$ ، ۱۰ مساوی صفر باشد، میانگین اعداد $x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴$ ، ۵ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۰/۵ ۴) ۱۱

۱۵ اگر مجموع ۴۰ دادهٔ آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات آن ۳۴۰ باشد، مطلوب است:

الف) واریانس

ب) ضریب تغییرات

حسابان

۱۶ کدام‌یک از جملات درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.

ب هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشت هستند.

پ پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و ممکن است پیشامد B رخ ندهد.

ت برای ده دادهٔ آماری $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ خواهیم داشت ($\overline{x}$ میانگین داده‌ها):

$$(x_۱ - \overline{x}) + (x_۲ - \overline{x}) + \cdots + (x_{۱۰} - \overline{x}) = ۰$$

آمار و احتمال

۱۷ دمای هوای شش روز از ماه اسفند شهر تهران به‌صورت زیر است:

دما (برحسب سانتی‌گراد)	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹

الف میانگین و واریانس دمای این شش روز را به دست آورید.

ب ضریب تغییرات این دماها را به دست آورید.

۱۸ داده‌های جمع‌آوری‌شدهٔ زیر مربوط به تراکنش‌های مالی شعبهٔ بانکی در بازهٔ زمانی ۹ تا ۱۰ صبح (به میلیون تومان) می‌باشد. میانه و چارک سوم آن‌ها را مشخص کنید.

۳۴, ۳۰, ۲۰, ۸۰, ۳۰, ۷۰

۱۹ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای اعداد زیر به دست آورید.

$۲, ۲, ۳, ۳, -۳, ۰, ۶, ۳$

۲۰ انحراف از میانگین ۸ داده آماری، اعداد $-۳, -۲, -۲, ۰, ۱, ۲, ۴, a$ می‌باشند. اگر مجموع داده‌ها ۳۲ باشد، میانگین مربعات آن‌ها کدام است؟

۱) ۱۹/۲۵
۲) ۲۰/۷۵
۳) ۲۰/۲۵
۴) ۲۱/۷۵

۲۱ کارخانه‌ای سه نوع لامپ A و B و C را تولید می‌کند که میانگین طول عمر و انحراف معیار آن‌ها در جدول زیر آمده است. کدام نوع لامپ بهتر است؟

لامپ	انحراف معیار	میانگین طول عمر
A	۲۰۰۰	۱۱۰۰۰
B	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
C	۱۵۰۰	۱۲۰۰۰

۱) A
۲) C
۳) B
۴) A و B

۲۲ در یک سری داده آماری، ضریب تغییرات ۰/۴ است. اگر ۳ برابر میانگین را به هر داده بیافزاییم، ضریب تغییرات جدید کدام است؟

۱) ۰/۱
۲) $\frac{۱}{۱۵}$
۳) ۰/۲
۴) $\frac{۱}{۲۵}$

پاسخ Homework (2)

۱ رابطه کلی: اگر میانگین m داده $\bar{x}$ و میانگین n داده $\bar{y}$ باشد، میانگین $m+n$ داده با هم که $\bar{z}$ می‌نامیم، از دستور زیر حساب می‌شود:

$$\bar{z}=\frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+n}$$

$$m=۶\ ,\ \bar{x}=۱۸\ ,\ n=۴\ ,\ \bar{y}=۱۵$$

$$\bar{z}=\frac{۶\times ۱۸+۴\times ۱۵}{۶+۴}=\frac{۱۰۸+۶۰}{۱۰}=\frac{۱۶۸}{۱۰}=۱۶/۸$$

۲

$$\overline{x}=\frac{۱۱+۲۵+۲۶+۱۸}{۴}=\frac{۸۰}{۴}=۲۰$$

$$\sigma^{۲}=\frac{(۲۰-۱۱)^{۲}+(۲۰-۲۵)^{۲}+(۲۰-۲۶)^{۲}+(۲۰-۱۸)^{۲}}{۴}=\frac{۸۱+۲۵+۳۶+۴}{۴}=۳۶/۵$$

$$\sigma=\sqrt{۳۶/۵}\approx ۶$$

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{۶}{۲۰}=۰/۳$$

۳

$$\frac{۱+۵+۱۰+x+y}{۵}=۱۲\Rightarrow\frac{۱۶+x+y}{۵}=۱۲\Rightarrow x+y=۴۴$$

$$\overline{x}=\frac{۷+۱۳+۳x+۳y}{۴}=\frac{۲۰+۳(۴۴)}{۴}=۳۸$$

۴ دو

۵ ۲۸۸

۶ ۲۷

۷ ۸

۸ اریب

۹

$$\overline{x} = \frac{۳+۵+۵+۵+۷}{۵} = ۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۳-۵)^۲ + ۳(۵-۵)^۲ + (۷-۵)^۲}{۵} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۸}{۵}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{\frac{۸}{۵}}}{۵}$$

۱۰ گزینه ۲

$$\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{۱۲} = ۱۰ \Rightarrow \text{مجموع داده‌ها} = ۱۲۰$$

$$۱۲۰ - \underbrace{(۱۱+۱۰+۹)}_{۳۰} = ۹۰ \Rightarrow \frac{۹۰}{۹} = ۱۰$$

۱۱

$$\overline{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_۶}{۶} = ۱۷ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ = ۱۰۲$$

$$\overline{X}_{\text{جدید}} = \frac{۱۰۲ + ۱۵ + ۱۹}{۸} = \frac{۱۳۶}{۸} = ۱۷$$

۱۲

$$\overline{x} = \frac{۱۶+۹+۱۷+۱۳+۱۰+x+۱۰+۱۷+۱۱+۱۶}{۱۰} = ۱۳/۱$$

$$\frac{۱۱۹+x}{۱۰} = ۱۳/۱ \Rightarrow ۱۱۹ + x = ۱۳۱ \Rightarrow x = ۱۲$$

داده‌ها باید به‌صورت صعودی مرتب شوند:

$$۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, \underbrace{۱۲, ۱۳}, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷$$

$$\text{میانه} = \frac{۱۲+۱۳}{۲} = ۱۲/۵$$

۱۳ گزینه ۲

$$\text{میانگین} : \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۵+۵+۷+۸+۹+۲۰}{۶} = \frac{۵۴}{۶} = ۹$$

$$\text{واریانس} : \sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{(۵-۹)^۲ + (۵-۹)^۲ + (۷-۹)^۲ + (۸-۹)^۲ + (۹-۹)^۲ + (۲۰-۹)^۲}{۶}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱۶+۱۶+۴+۱+۰+۱۲۱}{۶} = \frac{۱۵۸}{۶} = \frac{۷۹}{۳}$$

۱۴ گزینه ۱

اگر انحراف از میانگین تعدادی عدد مساوی صفر باشد، به این معنا است که همهٔ اعداد باهم مساوی‌اند.

$$x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = ۱۰$$

$$\bar{x} = \frac{۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۵}{۵} = \frac{۴۵}{۵} = ۹$$

۱۵

$$n = ۴۰$$

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۴۰} = ۱۰۰$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + \cdots + x_{۴۰}^۲ = ۳۴۰$$

$$\overline{x} = \frac{۱۰۰}{۴۰} = \frac{۵}{۲} \quad , \quad (\overline{x})^۲ = \frac{۲۵}{۴}$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum x_i^۲}{n} - \overline{x}^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۳۴۰}{۴۰} - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۱۷}{۲} - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۳۴}{۴} - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \sigma = \frac{۳}{۲}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۳}{۵}$$

حسابان

۱۶

الف) درست

ب) نادرست

پ) نادرست

ت) درست

۱۷ **الف**

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۹۶}{۶} = ۱۶$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^۲}{۶}$$

$$= \frac{(۱۵-۱۶)^۲ + (۱۴-۱۶)^۲ + (۱۵-۱۶)^۲ + (۱۶-۱۶)^۲ + (۱۷-۱۶)^۲ + (۱۹-۱۶)^۲}{۶}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

ب

$$C.V = \frac{\sigma}{\overline{\overline{X}}} = \frac{\sqrt{\frac{۸}{۳}}}{۱۶} = \frac{\sqrt{۲۴}}{۴۸} = ۰/۱۰۲$$

۱۸ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۲۰, ۳۰, ۳۰, ۳۴, ۷۰, ۸۰

$$\text{میانه} = \text{میانگین دو دادهٔ وسط} = \frac{۳۰ + ۳۴}{۲} = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲$$

$$Q_۳ = \text{چارک سوم} = ۷۰$$

۱۹

$$\text{میانگین } \overline{x} = \frac{۲ \times ۲ + ۳ \times ۳ - ۳ + ۰ + ۶}{۸} = ۲$$

$$\text{واریانس } \sigma^۲ = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x - \overline{x}_i)^۲}{N}$$

$$= \frac{۲(۲-۲)^۲ + ۳(۳-۲)^۲ + (-۳-۲)^۲ + (۰-۲)^۲ + (۶-۲)^۲}{۸} = ۶$$

$$\text{انحراف معیار} = \text{جذر واریانس} = \sigma = \sqrt{۶}$$

$$\text{ضریب تغییرات } C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۲۰ گزینه ۲

مجموع انحراف از میانگین داده‌های آماری برابر صفر است، پس:

$$(x_۱ - \bar{x}) + \cdots + (x_۸ - \bar{x}) = ۰$$
$$\Rightarrow -۳ - ۲ - ۲ + ۰ + ۱ + ۲ + ۴ + a = ۰ \Rightarrow ۰ + a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

واریانس این ۸ داده آماری برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_۸ - \bar{x})^۲}{۸} = \frac{۹ + ۴ + ۴ + ۰ + ۰ + ۱ + ۴ + ۱۶}{۸} = \frac{۳۸}{۸} = ۴/۷۵$$

می‌خواهیم میانگین مربعات این ۸ داده یعنی $\frac{x_۱^۲ + \cdots + x_۸^۲}{۸}$ را به دست آوریم، پس داریم:

$$\sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + \cdots + x_۸^۲}{۸} - (\bar{x})^۲ \Rightarrow ۴/۷۵ = \frac{x_۱^۲ + \cdots + x_۸^۲}{۸} - (\frac{۳۲}{۸})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{x_۱^۲ + \cdots + x_۸^۲}{۸} = ۴/۷۵ + ۱۶ = ۲۰/۷۵$$

۲۱ گزینه ۳

برای هر نوع لامپ ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{۲۰۰۰}{۱۱۰۰۰} = \frac{۲}{۱۱} = ۰/۱۸$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

$$CV_C = \frac{\sigma_C}{\bar{x}_C} = \frac{۱۵۰۰}{۱۲۰۰۰} = \frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$$

پس $CV_A > CV_C > CV_B$ بنابراین B بهتر است، زیرا ضریب تغییراتش کوچک‌تر است.

۲۲ گزینه ۱

با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

$$(CV)' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{\bar{x} + ۳\bar{x}} = \frac{\sigma}{۴\bar{x}} = \frac{CV}{۴} = \frac{۰/۴}{۴} = ۰/۱$$