

حسابان

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\log_{\sqrt{p}}(p^r - 2) = \log_{\sqrt{p}} p \implies p^r - 2 = p \implies p^r - p - 2 = 0 \implies \begin{cases} P_1 = -1 \\ P_2 = -\frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

ب

$$9^{3y-3} = 27^{y+1} \implies (3^2)^{3y-3} = (3^3)^{y+1} \implies 3^{6y-6} = 3^{3y+3} \implies 6y-6 = 3y+3$$

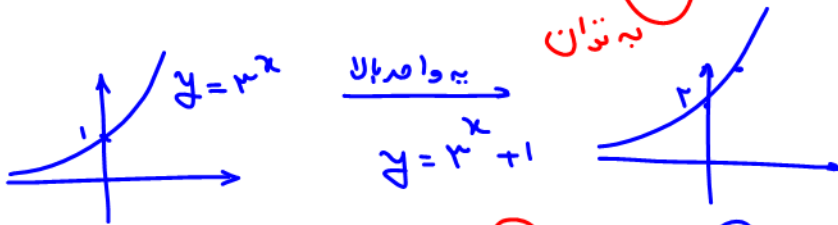
$$6y-6 = 3y+3 \implies 3y = 9 \implies y = 3$$

پ

$$\log_{\delta}^{(x+1)} + \log_{\delta}^{(x-1)} = 1$$

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_{\delta} (x+1)(x-1) = 1 \implies \log_{\delta} (x^2 - 1) = 1 \implies x^2 - 1 = \delta \implies x^2 = \delta + 1 \implies x = \pm \sqrt{\delta + 1}$$



۲ نمودار تابع نمایی $y = 3^x + 1$ را رسم کنید.

۲

۳ حاصل عبارت زیر را بیابید.

۳

$$\log_{\lambda}^{125} \times \log_{\sqrt{5}}^{256} + 3 \log_9^{25} = \left(\log_{\lambda}^5 \right) \times \left(\log_{\sqrt{5}}^2 \right) + 25$$

$$= \left(\frac{3}{2} \log_{\lambda}^5 \right) \left(\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}}^2 \right) + \left(25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \right) + 5 = 21$$

$$\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$\log_b^a \cdot \log_a^b = 1$$

$$\log_b^{a^m} = \frac{m \log a}{\log b}$$

۴ معادله $9^x = 3^{x-1}$ را حل کنید.

۴

فرض $3^x = t \implies 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$

$$t^2 = 3^x \times 3^{-1} \implies t^2 = t \times \frac{1}{3}$$

$$t^2 - \frac{t}{3} = t \left(t - \frac{1}{3} \right) = 0 \implies \begin{cases} t = 0 = 3^x \\ t = \frac{1}{3} = 3^x \implies x = -1 \end{cases}$$

انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶ ریشتر چند برابر یک زلزله ۲ ریشتری است؟

$E = 10^{11.8 + 1.5M}$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{11.8 + 1.5(6)}}{10^{11.8 + 1.5(2)}} = \frac{10^{11.8} \cdot 10^{9}}{10^{11.8} \cdot 10^3} = 10^6 = 1,000,000$$

$l_1 = l_2$ در تابع $f(x) = \begin{cases} mx + 3 & ; x < -2 \\ 2x & ; x = -2 \\ x^2 + m^2 & ; x > -2 \end{cases}$ مقدار m را طوری تعیین کنید که حد در نقطه -2 موجود باشد.

5

$$\begin{cases} x \rightarrow (-2)^- & mx + 3 = -2m + 3 = l_1 \\ x \rightarrow (-2)^+ & x^2 + m^2 = 4 + m^2 = l_2 \end{cases}$$

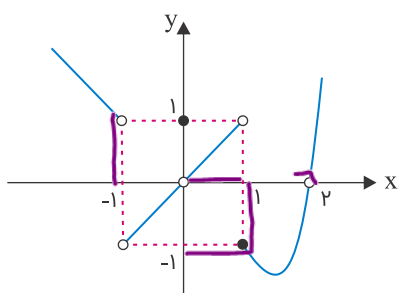
$$l_1 = l_2 \rightarrow m^2 + 4 = -2m + 3 \rightarrow m^2 + 2m + 1 = (-m - 1)^2 \rightarrow m = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$$
 حاصل را به دست آورید.

$$\frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}))} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

6

نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$

7

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$

8

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$

9

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$|v| = \begin{cases} v & v \geq 0 \\ -v & v < 0 \end{cases}$$

وجود حد برای تابع $f(x) = 3x + \frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.

$$\begin{cases} x \rightarrow 1^+ & 3x + \frac{x-1}{x-1} = 3+1=4 = L_1 \\ x \rightarrow 1^- & 3x + \frac{-(x-1)}{x-1} = 3-1=2 = L_2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2 \text{ حد ندارد}$$

آمار و احتمال

نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر a و b به صورت زیر است:

a : 14, 15, 15, 17, 16, 19

b : 17, 18, 17, 16, 14, 14

دقت عمل کدامیک بیشتر است؟ **با به ضریب تغییرات یا C.V حساب کنیم:**

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\text{اعراض عیار}}{\text{میانگین}}$$

a-15: -1, 0, 0, 2, 1, 4 $\rightarrow \bar{x} = \frac{7}{7} = 1 \rightarrow \bar{x}_a: 1+15 = 16$

$x_i - (\bar{x} = 16): -2, -1, -1, 1, 0, 3$

$(x_i - \bar{x})^2: 4, 1, 1, 1, 0, 9 \rightarrow S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{17}{7} \rightarrow S = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{7}}$

a: $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{7}}}{16} = \frac{\sqrt{17}}{16\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{119}}{112}$

b-17: 0, 1, 0, -1, -3, -4 $\rightarrow \bar{x} = \frac{-7}{7} = -1 \rightarrow \bar{x}_b = -1+17 = 16$

$x_i - \bar{x}: 1, 2, 1, 0, -2, -2 \rightarrow$

$(x_i - \bar{x})^2: 1, 4, 1, 0, 4, 4 \rightarrow \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n=7} = \frac{14}{7} = S^2 \rightarrow S = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$

b: $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{16}$ ~~$C.V_a = \frac{\sqrt{119}}{112}$~~ **نمره b بیشتر**

در ۳۰ داده آماری میانگین ۳ و انحراف معیار ۱/۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید را به دست آورید.

$$x_i \rightarrow 9x_i$$

$$C.V. = \frac{S.D.}{\bar{x}} = \frac{1.2}{3} = 0.4$$

$$C.V. = \frac{S.D.}{\bar{x}} = \frac{6}{12} = 0.5$$

جاهای خالی را با عبارت یا کلمات مناسب پر کنید.

اگر تمام داده‌های آماری برابر باشند، انحراف معیار آن‌ها صفر است.

اگر به هر داده آماری مقدار ثابتی اضافه یا کم کنیم، انحراف معیار آن ثابت می‌ماند.

اگر هر داده‌ی آماری را در عدد ثابتی ضرب کنیم، انحراف معیار تند می‌ماند می‌شود.

هشت داده آماری با میانگین ۲۰ و واریانس ۹ مفروض است. اگر دو داده ۱۱ و ۲۹ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ده داده حاصل را به دست آورید.

آن عدد منب: $29 - (20) = +9$ $11 - (20) = -9$

$$\bar{x} = \frac{20}{8} = 2.5$$

$$n = 10, \bar{x} = 2.5, S^2 = 9$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - 2.5)^2 + \dots + (x_8 - 2.5)^2 + 11 + 11}{10}$$

$$S^2 = \frac{72 + 11 + 11}{10} = \frac{94}{10} = 9.4$$

سه فرد A، B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال به هدف نخوردن تیر آن‌ها به ترتیب $\frac{5}{6}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{3}$ است. اگر بدانیم فقط دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد، چقدر است؟

یعنی فقط یک تیر به هدف نخورده

$$P(\text{هدف نخورد}) = \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{تیر A به هدف نخورد}) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{حاصل}) = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{36}{36} = 1$$

نوعی بذر با احتمال ۱/۸ می‌روید. اگر سه بذر بکاریم، با چه احتمالی لاقل یک بذر می‌روید؟

$1 - 0.125 = 0.875$

هر ۳ نزدیک

$$P = 1 - (0.125 \times 0.125 \times 0.125) = 1 - 0.00195 = 0.99805$$

$$P(A|B) = .1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B) = .12} \quad P(A) = .12$$

احتمال اینکه محمدرضا فردا به کوه برود برابر $\frac{1}{2}$ است. اگر فردا باران بیاید او به احتمال $\frac{1}{4}$ به کوه می‌رود. اگر احتمال بارش باران در فردا برابر $\frac{1}{4}$ باشد، چقدر احتمال دارد که فردا باران بیاید یا محمدرضا به کوه برود؟

$A \cup B$

$$P(B) = .12$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .12 + .12 - .02 = .22$$

حسابان



نمودار تابع $y = -\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ را رسم کنید. (با در نظر گرفتن مراحل رسم)



حاصل هریک از عبارات زیر را به دست آورید.

الف

$$\cos(140^\circ) + \cot(-600^\circ) - \tan(510^\circ) - \tan(-600^\circ) =$$

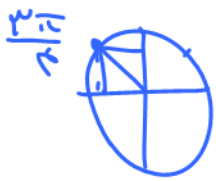
$$\cos(\frac{5\pi}{4}) - \cot(\frac{5\pi}{4}) - \tan(\frac{3\pi}{2}) + \tan(\frac{5\pi}{4}) =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$



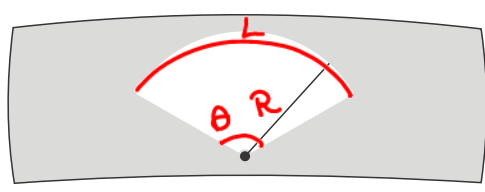
ب

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{2 \cos(-\frac{3\pi}{4}) + \tan(-\frac{4\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$-\tan(\frac{7}{4}) = -\sqrt{3}$$

طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه 12° طی می‌کند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



$$L = R \theta$$

رادیان

الف

$$12^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{12}{180} \pi$$

$$\theta = \frac{2}{15} \pi$$

اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

$$L = R\theta = r\left(\frac{r\pi}{r}\right) = 17\pi \text{ cm}$$

طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر است؟

ب

حاصل عبارت زیر را بیابید.

۲۴

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{-19\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-23\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-19\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{4} = \frac{20\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 5\pi - \frac{\pi}{4} = \pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\tan\left(\frac{-23\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{23\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

اگر $f\left(\frac{2}{1-x}\right) = 4x + 2$ باشد، $f^{-1}(3)$ را بیابید.

۲۵

$$\frac{2}{1-x} = t \rightarrow \frac{2}{t} = 1-x \rightarrow x = 1 - \frac{2}{t} \quad f\left(\frac{2}{1-x} = t\right) = 4\left(1 - \frac{2}{t}\right) + 2 = 4 - \frac{8}{t} + 2$$

$$2 - \frac{8}{t} = 3 \rightarrow 3 = \frac{8}{t} \quad f(t) = 2 - \frac{8}{t}$$

$$f\left(\frac{1}{f}\right) = 3$$

اگر $f = \{(-3, 2), (-1, 4), (1, 9), (3, 10)\}$ و $g(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$ مفروض باشند، تابع $f \circ g + 4$ را بیابید.

۲۶

$$D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \{\pm 3, \pm 1\} \cap \{\mathbb{R} - \{\pm 3\}\} = \{\pm 1\}$$

$$f \circ g + 4 = \left\{ \left(1, 9\left(\frac{5}{-1}\right) + 4\right), \left(-1, 4\left(\frac{3}{-1}\right) + 4\right) \right\}$$

اگر $f = \{(2, -1), (3, 5), (7, 4), (0, 0)\}$ و $g = \{(2, 7), (7, 9), (3, 8)\}$ حاصل $\left(\frac{2f+g}{f^2}\right)(2)$ را به دست آورید.

۲۷

$$\frac{2f(2) + g(2)}{f^2(2)} = \frac{-2 + 7}{1} = 5$$

$$f^2 = \{(2, 1), (3, 25), (7, 12), (0, 0)\}$$

یک به یک بودن تابع $f(x) = 3x + |x-1|$ را به کمک رسم شکل بررسی کنید و وارون آن را در صورت یک به یک بودن به دست آورید.

۲۸

$$f = \begin{cases} 3x + x - 1 & x \geq 1 \\ 3x - x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

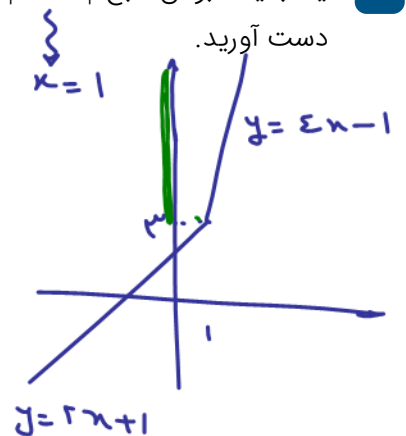
$$f^{-1} = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

آید صدای دیک به یک است.

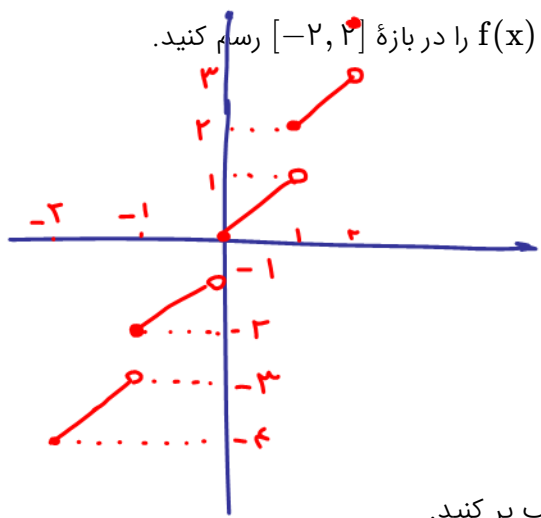
$$y = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{y+1}{2} \rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

$$y = 2x + 1 \rightarrow x = \frac{y-1}{2} \rightarrow y = \frac{x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & x \geq 1 \\ \frac{x-1}{2} & x < 1 \end{cases}$$



تابع با ضابطه $f(x) = x + [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.



جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

$-2 \leq x < -1 \rightarrow y = x - 2$
 $-1 \leq x < 0 \rightarrow y = x - 1$
 $0 \leq x < 1 \rightarrow y = x$
 $1 \leq x < 2 \rightarrow y = x + 1$
 $A(2, 2)$

اگر $x = 2$ صفر تابع $f(x) = x^3 - kx^2 + 8$ باشد، آنگاه مقدار k برابر با است.

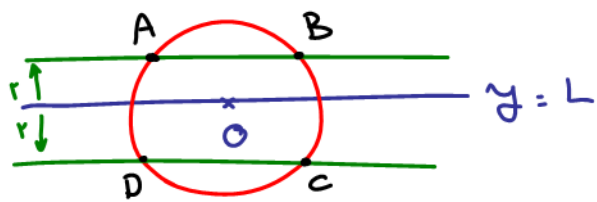
$f(2) = 8 - 4k + 8 = 0$
 $16 = 4k$

بیشترین مقدار تابع $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ برابر است.

$y_{Max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$
 $f(x_s=1) = 3 = y_{Max}$
سی دهانه به پایین

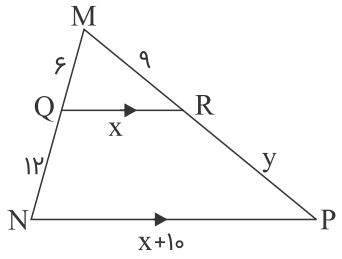
هندسه

نقطه O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه O به فاصله 3 و از خط L به فاصله 2 باشد؟ با رسم شکل دلیل بیاورید.



در هر شکل، مقادیر مجهول را بیابید.

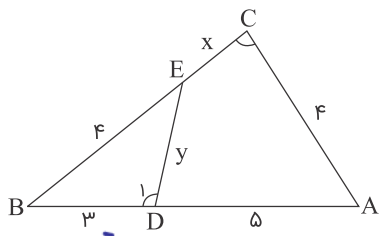
الف



$\frac{6}{6+12=18} = \frac{9}{9+y} = \frac{x}{x+10}$
 $\frac{1}{3} = \frac{9}{9+y} \rightarrow 9+y=27 \rightarrow y=18$
 $\frac{1}{3} = \frac{x}{x+10} \rightarrow x+10=3x \rightarrow 10=2x \rightarrow x=5$

ب

$$\triangle BFD \sim \triangle ABC$$



(می‌دانیم $\hat{C} = \hat{D}_1$)

$$\frac{BE = x}{AB = 1} = \frac{ED = y}{AC = 2} = \frac{BD = z}{BC = n + 2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{z}{n + 2} \rightarrow z = \frac{n + 2}{2} \rightarrow n = 2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \rightarrow y = 1$$

حسابان

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

۳۴

تغییر متغیر $\sqrt{x} = t \rightarrow t^2 - 2t + m - 1 = 0$

$\Delta > 0$: $S = \frac{b}{a} = 2 > 0$ برقرار
 $P > 0$: $P = \frac{c}{a} = m - 1 \geq 0 \rightarrow m \geq 1$ الف

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(m - 1) > 0$$

$$4 - 4(m - 1) > 0$$

$$1 - (m - 1) > 0$$

$$1 - m + 1 > 0$$

$$2 > m$$

مثث $\triangle ABC$ به رأس‌های $A \begin{vmatrix} -1 \\ 7 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -6 \\ 3 \end{vmatrix}$ مفروض است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

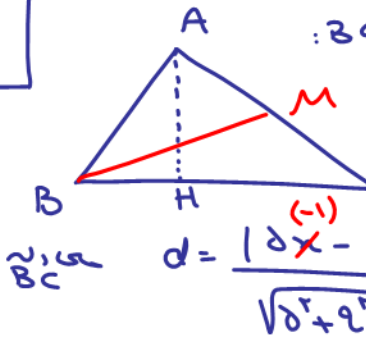
۳۵

الف $\rightarrow [1, 2]$

طول ارتفاع AH چقدر است؟ فاصله نقطه A از خط BC :

الف

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$d = \frac{|5x - 9y + 12|}{\sqrt{5^2 + 9^2}} = \frac{52}{\sqrt{106}}$$

$$S = \frac{(BC)(AH)}{2}$$

مساحت مثلث $\triangle ABC$ را به دست آورید.

ب

$$BC = \sqrt{(n+2)^2 + (n+2)^2} = 9^2 + 25 = \sqrt{106}$$

$$S = \frac{\sqrt{106} \left(\frac{52}{\sqrt{106}} \right)}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$$M \begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = -1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 5 \end{cases}$$

طول میانه BM را بنویسید.

ب

$$BM = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = 7\sqrt{2}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بیابید.

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 4PS}{P} = \frac{1 - 3(-\frac{1}{3})}{-\frac{1}{3}}$$

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\alpha\beta = P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1.0}{-\frac{1}{3}} = -3$$

معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$1 + \sqrt{x^2 + 5} = 2x$$

$$\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$$

(به توان ۲)

$$x^2 + 5 = 4x^2 - 4x + 1$$
$$= 3x^2 - 4x - 4$$

ع ۱

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-4)}}{2(3)} = \frac{4 \pm 8}{6}$$

(۲ = x)

-۲/۳ غنن زیرا ضریب $\sqrt{x^2 + 5}$ ، \ominus می‌نند