

کارنامه خرد

# جمع‌بندی ریاضی یازدهم

مدرس: استاد سهیل بابازاده

بهار، ۱۴۰۳

۱- اگر  $f(x) + 2f(-x) = 2x$  مطلوب است محاسبه‌ی  $f(x)$

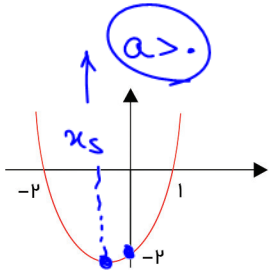
$$\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = 2x \\ (-2) \cdot \begin{cases} f(-x) + 2f(x) = -2x \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(-x) = 2x \\ -2f(-x) - 4f(x) = 4x \end{cases}$$

$$\underline{-3f(x) = 6x} \Rightarrow \boxed{f(x) = -2x}$$

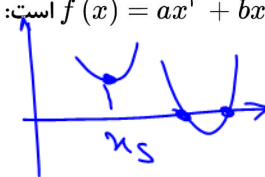
۲- با توجه به نمودار مقابل که مربوط به تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است:

اولاً علامت  $f(x)$  را تعیین کنید.

ثانیاً ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  را بدست آورید.



$C = -2$   $c < 0$   
 $x_s < 0 \rightarrow \frac{-b}{2a} < 0$   
 $-b < 0 \rightarrow b > 0$

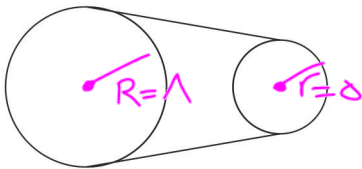


$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

$a(x+2)(x-1) = y$   
 $-2a = -2 \rightarrow a = 1$

$y = (x+2)(x-1)$   
 $y = x^2 + x - 2$

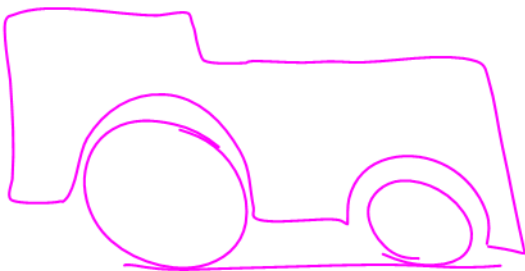
۳- دو چرخ به شعاع‌های  $5cm$  و  $8cm$  توسط یک تسمه به هم متصل شده‌اند. اگر چرخ بزرگتر  $100^\circ$  بچرخد، چرخ کوچکتر چند درجه و چند رادیان می‌چرخد؟



$\theta \text{ (rad)} = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta$

$l_1 = l_2 \Rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2$   
 $5 \times \alpha = 8 \times 100^\circ$   
 $\alpha = 160^\circ$

$160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{16}{18} \pi = \frac{8\pi}{9}$



$f^{-1}(4) = a$  از طرفین  $f$

~~$f(f^{-1}(4)) = 4$~~   
 $f(a) = 4$   
 $\boxed{4 = f(a)}$   $(\delta, \epsilon)$

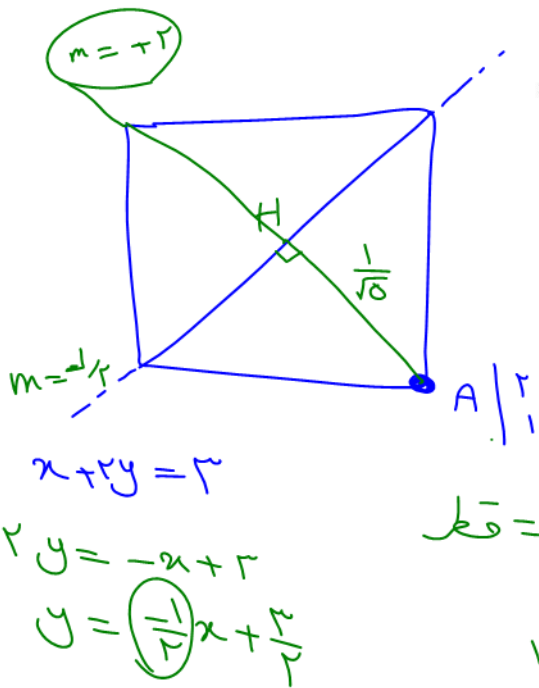
۴- اگر  $f(x) = f^{-1}(4) + 2x - 11$ ، آن‌گاه حاصل  $f^{-1}(26)$  را بیابید.

$f(a) = f^{-1}(4) + 2a - 11$   
 $4 = a + 2a - 11 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow a = 5$   
 $f(x) = 5 + 2x - 11 = 2x - 6$   
 $f(x) = 2x - 6 \rightarrow 26 = 2x - 6 \rightarrow 32 = 2x \rightarrow \boxed{x = 16}$

۵- دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|}-4}{\sqrt{x+7}-5}$  را بیابید.  
 $x+7 \geq 0 \rightarrow x \geq -7$

$|x-2| - 4 \geq 0 \Rightarrow |x-2| \geq 4 \Rightarrow$   
 $|x| < a \rightarrow -a < x < a$   
 $|x| > a \rightarrow x > a \text{ یا } x < -a$   
 $x-2 > 4 \text{ یا } x-2 < -4 \rightarrow x < -2$   
 $x > 6 \cup x < -2$   
 $[-7, -2] \cup [6, +\infty) - \{18\}$

$\sqrt{x+7} - 5 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+7} \neq 5 \rightarrow x+7 \neq 25$   
 $x \neq 18$



۶- اگر  $A(2, 1)$  یکی از رئوس مربع  $ABCD$  و  $x+2y=3$  معادله یک قطر آن باشد:  
 الف) معادله قطر دیگر مربع را بیابید.  
 ب) مساحت مربع را بیابید.

$2+2(1) = 4 \neq 3$   
 $|AH| = \frac{|2+2(1) - 3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

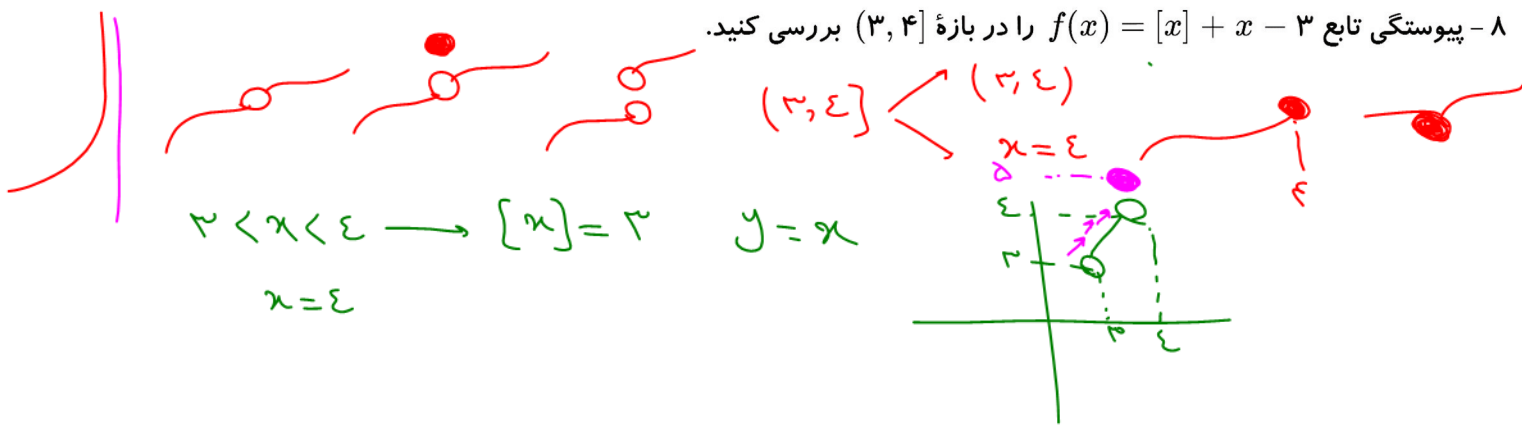
قطر  $= \frac{2}{\sqrt{5}}$   
 $\sqrt{2}a = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$   
 $S = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 2(x - 2)$   
 $y = 2x - 3$

۷- اگر  $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$  و  $g(x) = \frac{2x+1}{x}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) \cdot g(x)$  را بیابید.

$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{x+1}{(2x+1)(x-1)} \cdot \frac{(2x+1)}{x} = \frac{1/2}{(-3/2)(-1/2)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$

۸- پیوستگی تابع  $f(x) = [x] + x - 3$  را در بازه  $(3, 4)$  بررسی کنید.



$3 < x < 4 \rightarrow [x] = 3 \quad y = x$   
 $x = 4$

۹- اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه برابر  $\frac{13\pi}{18}$  رادیان و تفاضل آن‌ها  $30^\circ$  باشد، این دو زاویه را بر حسب رادیان بیابید.

$\frac{13\pi}{18} = 130^\circ$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 130 \\ \alpha - \beta = 30 \end{cases}$$

$2\alpha = 160$

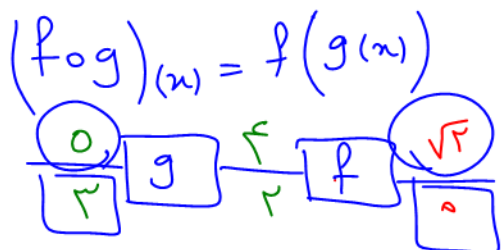
$\alpha = 80$

$\beta = 50$

$\frac{50\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}$

$\frac{4\pi}{9} = \frac{1\pi}{18} = \frac{10 \times \pi}{18}$

۱۰- اگر  $f(x) = \sqrt{x-2}$  و  $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, -9)\}$  مفروض باشند، توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را بیابید.



$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$   $x-2 \geq 0$   
 $x \geq 2$

$D_{f \circ g} = \{0, 3\}$   $x \in \{0, 3, 5\}$  و  $g(x) \geq 2$   
 $\cap x \in \{0, 3\}$

$f(4) = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

$f(2) = \sqrt{2-2} = 0$

$f \circ g = \{(0, \sqrt{2}), (3, 0)\}$

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| x | 0 | 3 | 5  |
| y | 4 | 2 | -9 |

$y = \log_p(x-1) + 2 \Rightarrow$

$(y-2) = \log_p(x-1) \Rightarrow 2^{y-2} = x-1 \Rightarrow x = 2^{y-2} + 1$

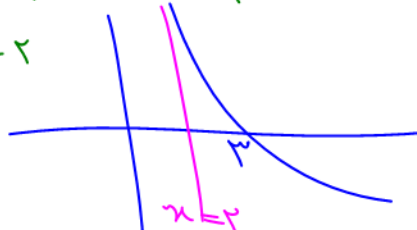
۱۱- اگر  $A(3, 2), B(-5, 4)$  دو سر یک پاره‌خط باشند، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط را بیابید.

$y = -\log(x-2)$

$-y = \log(x-2) \Rightarrow 2^{-y} = x-2$

$x = 2^{-y} + 2$

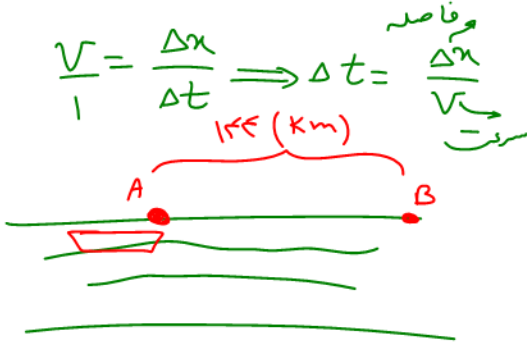
|   |    |   |     |
|---|----|---|-----|
| x | 5  | 3 | 1/3 |
| y | -1 | 0 | 1   |



Line segment AB with points A(3, 2) and B(-5, 4). The slope  $m_{AB} = \frac{4-2}{-5-3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$ . The perpendicular slope  $m = +4$ . The equation of the perpendicular bisector is  $y - 3 = 4(x - (-1))$ .



۱۲- فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از ۲ ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



$$\frac{144}{v} + \frac{144}{v+8} + 2 = 17$$

$$(144) \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v+8} \right) = 15 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{v+8} = \frac{15}{(v)(v+8)}$$

$$48(v+8) + 48v = 15v(v+8) \rightarrow$$

$$5v^2 + 40v - 96v + 8 \times 48 = 0$$

۱۳- معادله مقابل را حل کنید.

$$(4-x^2)^2 - 2(4-x^2) - 15 = 0$$

$$4-x^2 = -3, \quad 4-x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{3}, \quad -1 = x^2$$

غیرممکن

$$A^2 - 2A - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$(A-5)(A+3) = 0$$

A=5, A=-3

$$x = \pm\sqrt{v}$$

۱۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 4x - 2 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$  را به دست آورید.

$$\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1} = \frac{\beta^2 + \beta + \alpha^2 + \alpha}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha + \beta)}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1}$$

$$S = \frac{b}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5^2 - 2 \times (-2)$$

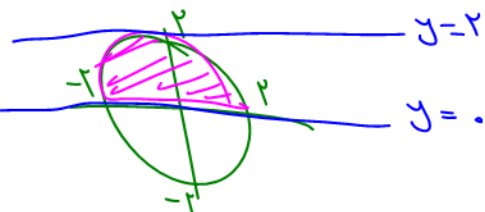
$$\frac{(5^2 - 2 \times (-2)) + 4}{-2 + 4 + 1} = \frac{24}{3} = 8$$

۱۵- برد تابع زیر را بیابید.

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$



$$y^2 - 4 = -x^2 \rightarrow y^2 - 4 \leq 0$$

$$y^2 \leq 4 \rightarrow |y| \leq 2$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 2$$

۱۶- الف) معادله  $x + [x] = ۲۰۲۰٫۶$  را حل کنید.

ب) به ازای چه مقادیری از  $a$  معادله زیر ریشه حقیقی دارد؟

$x + [x] = a$

$[x] + [x] = ۲۰۲۰$   
 $x + [x] = [۲۰۲۰٫۶]$   
 $۲[x] = ۲۰۲۰ \rightarrow [x] = ۱۰۱۰$

$x = ۱۰۱۰٫۶$

۱۷- اگر  $f(x) = \begin{cases} ۲x, & x > ۱ \\ x^2 - 1, & x \leq ۱ \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x - ۳, & x \geq ۳ \\ ۱ + x, & x < ۳ \end{cases}$ ، آنگاه تابع  $f - g$  را بیابید.

$\begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 1) - (1 + x)} & x < 1 \\ \frac{x - 1}{(2x) - (1 + x)} & 1 < x < 3 \\ \frac{(2x) - (x - 3)}{x + 3} & x > 3 \end{cases}$

$x = 1$   
 $x = 3$

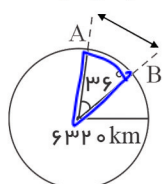
۱۸- تساوی تابع  $f(x) = 0$  و  $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  را بررسی کنید.

$g(x) = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1}$   
 $g(x) = \left[ 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right] = 1 + \frac{-1}{x^2 + 1} = 1 + (-1) = 0$

$D_f = \mathbb{R}$   
 $D_g = \mathbb{R} - \{ \} = \mathbb{R}$

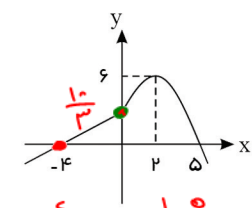
$0 < \frac{1}{x^2 + 1} < 1 \xrightarrow{x(-1)} \frac{-1}{x^2 + 1} > -1$

۱۹- فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  از کره زمین که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.



$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{5} = \frac{\widehat{AB}}{6370}$   
 $136^\circ \equiv \frac{1}{5} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$   
 $136^\circ \pi = \widehat{AB}$

۲۰- تابع  $f$  برای اعداد حقیقی نامنفی یک سهمی مطابق شکل مقابل است و برای اعداد حقیقی منفی خط راستی است که محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع می‌کند. الف) ضابطه  $f$  را بیابید. ب) حاصل  $f(5) - 2f(-3)$  را بیابید.



Handwritten solution for problem 20:

For  $x \geq 0$ , the parabola has vertex  $(2, 6)$  and x-intercepts  $(1, 0)$  and  $(5, 0)$ . The axis of symmetry is  $x = 2$ .

Using the vertex form:  $y = a(x-2)^2 + 6$

Using the point  $(1, 0)$ :  $0 = a(1-2)^2 + 6 \Rightarrow a = -6$

Using the point  $(5, 0)$ :  $0 = a(5-2)^2 + 6 \Rightarrow a = -6$

Therefore, the equation for  $x \geq 0$  is  $y = -6(x-2)^2 + 6$ .

For  $x < 0$ , the function is a straight line passing through  $(-4, 0)$  and  $(0, 6)$ .

The slope is  $m = \frac{6-0}{0-(-4)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .

The equation of the line is  $y - 0 = \frac{3}{2}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 6$ .

Handwritten derivation of the parabola equation:

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = y$$

$$a(x+1)(x-5) = y$$

Point  $(2, 6)$  is on the parabola.

$$6 = a(2+1)(2-5) = a(3)(-3) = -9a$$

$$a = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$A = \frac{3 \sin 375^\circ + 2 \sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - 2 \cos 255^\circ}$$

Handwritten trigonometric simplification:

$$\frac{3 \sin 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{\cos(180^\circ - 15^\circ) - 2 \cos(270^\circ - 15^\circ)}$$

$$\frac{3 \sin 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ}$$

۲۱- اگر  $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$  حاصل عبارت زیر را بیابید.

Handwritten trigonometric solution for problem 21:

Given  $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ .

Using the identity  $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$ , we have  $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ .

Therefore,  $\tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ .

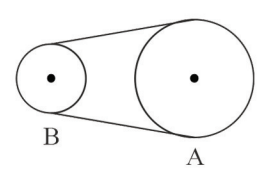
Rationalizing the denominator:  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$ .

Using the identity  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$  with  $\theta = 15^\circ$ :

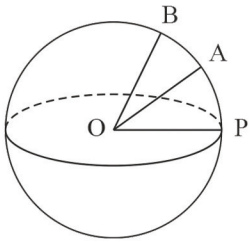
$$\tan 30^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2}$$

۲۲- در شکل مقابل دو قرقره توسط تسمه‌ای به هم متصل‌اند. وقتی قرقره A به شعاع ۵ سانتی‌متر،  $\frac{\pi}{3}$  رادیان بچرخد، قرقره B با شعاع ۳ سانتی‌متر چند رادیان می‌چرخد؟



۲۳- در شکل زیر روی کره زمین دو شهر  $A$  و  $B$  بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند. اگر  $\widehat{POA} = 43^\circ$ ،  $\widehat{POB} = 48^\circ$  و شعاع کره زمین  $6320 \text{ km}$  باشد، فاصله ژئودزیک دو شهر  $A$  و  $B$  را بیابید.



۲۴- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{(2 - \frac{\log x}{2})} = 100$$

۲۵- اگر  $\log_{12}^{27} = a$  باشد،  $\log_6^{16}$  را برحسب  $a$  بیابید.

۲۶- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$9^x - 7 \times 3^x = 18$$

۲۷- معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$$

۲۸- تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \log_7\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

۲۹- معادله‌ی مقابل را به روش هندسی حل کنید.

$$(x+1)^2 = x+2$$

۳۰- اگر  $\log_3 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x = -1$  باشد، آن‌گاه لگاریتم  $x\sqrt{x}$  در پایه‌ی ۹ را بیابید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$$

۳۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 2mx - 8 = 0$  مربع دیگری باشد،  $m$  را بیابید.

۳۳- حد زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$$

۳۴- نمودار زیر را رسم کنید.

$$y = x [x] \quad -2 < x < 2$$

۳۵- یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

۳۶- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$  باشد حاصل  $f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$  با شرط  $a < -1$  را به دست آورید.



۳۷- برد تابع زیر را بیابید.

$$y = 2 \sin x + \cos x$$

۳۸- در معادله  $2x^2 - 8x + m = 0$  اگر یکی از جواب‌ها ۲ واحد کم‌تر از جواب دیگر باشد،  $m$  را بدست آورید و هر دو جواب را پیدا کنید.

۳۹- اگر  $f(x) = 2^{x+1} - 5$  باشد، مقدار  $f^{-1}(27)$  بیابید.

۴۰- نقاط  $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $B \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  و  $C \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. طول میانه  $AM$  را بیابید.

۴۱- چه تعداد از معادلات زیر، تابع هستند؟

$$x = |y| - 1, \quad x - y^2 = 4, \quad y = |x| + 1, \quad x = 1$$

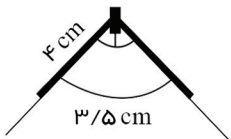
(۴) چهار مورد

(۳) سه مورد

(۲) دو مورد

(۱) یک مورد

۴۲- پرکاری تسمه فلزی خمیده‌ای به طول  $3.5$  سانتی‌متر دارد که به فاصله  $4$  سانتی‌متر از لولای پرگار ثابت شده است. زاویه مرکزی بین دو پایه پرگار وقتی پایه آن کامل باز شده، چند رادیان است؟



۴۳- حاصل عبارت زیر را بیابید.

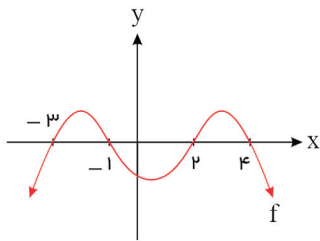
$$A = \frac{1}{\log_7^3} + \frac{1}{\log_{16}^9} - \frac{1}{\log_8^3}$$

۴۴- دامنه تابع  $f(x) = \log_{1-x}\left(\frac{x+1}{x}\right)$  را بیابید.

۴۵- تابع وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{5x-2} & x \geq 2 \\ x^3 - 12 & x < 2 \end{cases}$  را در صورت وجود بیابید.

۴۶- تابع وارون تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}$ ،  $x < 0$  را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۴۷- اگر  $f(x) = 4 - \sqrt{x-1}$ ، مجموعه جواب‌های معادله  $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$  را بیابید.



۴۸- نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{(3-x)f(x)}$  را بیابید.

۴۹- دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{4 - [x]}}{[2x - 1]}$  را بیابید.

۵۰- معادلات اضلاع مثلث  $ABC$  به صورت  $AC: x + y = 0$  ،  $BC: 3x - y = 1$  و  $AB: x - 2y + 3 = 0$  است. شیب میانه رأس  $C$  را بیابید.

۵۱- معادله  $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$  را حل کنید.

۵۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله  $x^2 + x - 3 = 0$  باشند، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}$  و  $\beta^2 + \frac{1}{\alpha}$  باشد؟

۵۳- معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{x+5}{x-1} - \frac{6}{x^2+x+1} - \frac{6(x^2+2)}{x^3-1} = x^2+1$$

۵۴- معادله  $x^2 - 4x = \sqrt{6x^2 - 24x + 7}$  را حل کنید:۵۵- در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله بوده و  $x_2 = kx_1$  آن‌گاه ثابت کنید.

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

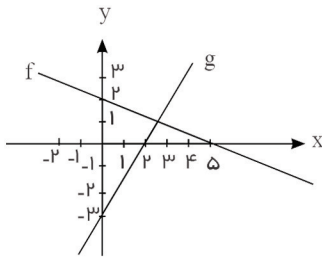
۵۶- حاصل  $(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$  را بیابید.

۵۷- شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط  $r = 6\text{cm}$  و ارتفاع آن  $h = 8\text{cm}$  می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

۵۸- طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه  $120^\circ$  طی می‌کند. (الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید. (ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

۵۹- نمودار دو تابع  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = 2^x$  را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.





۶۰- نمودار توابع  $f$  و  $g$  داده شده‌اند. ضابطه  $f + g$ ,  $f - g$  و  $f \cdot g$  را محاسبه کنید.

۶۱- با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع  $f(x) = \frac{x}{[x] - 2}$  در نقطه  $x = 2$  چه می‌توان گفت؟

۶۲-  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 2 & x > 1 \\ 4 & x = 1 \\ [-x] + bx & x < 1 \end{cases}$$

۶۳- پیوستگی تابع  $f(x) = x[-x] + 2$  را در بازه  $[2, 3]$  بررسی کنید.

۶۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x - 5} - 1} = 3$  آن‌گاه  $a$  را بیابید.

۶۵- اگر  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$  آن‌گاه  $a$  را بیابید.

۶۶- اگر تابع  $f$  در  $x = a$  دارای حد باشد و تابع  $g$  در  $x = a$  حد نداشته باشد، ثابت کنید تابع  $f - g$  در  $x = a$  حد ندارد.

۶۷- مقدار  $a$  را چنان بیابید که تابع مقابل در نقطه  $x = \frac{\pi}{2}$  حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a \cos 2x - 2 \sin x & x > \frac{\pi}{2} \\ \sin 2x + \sin x & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۶۸-  $m$  را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه  $x = 2$  حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} mx - [2x] & x < 2 \\ [-x] + x & x \geq 2 \end{cases}$$

۶۹- تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

الف) نمودار  $g$  را در فاصله  $[-4, 2]$  رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار  $g$  حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$$

۷۰- آیا توابع  $g(x) = \sin x$  و  $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  برابر هستند؟

کارنامه خرد

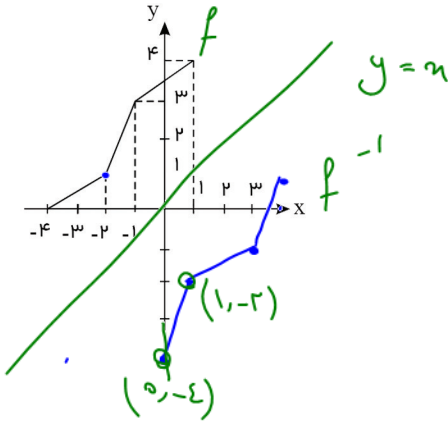
# جمع‌بندی ریاضی یازدهم

مدرس: استاد سهیل بابازاده

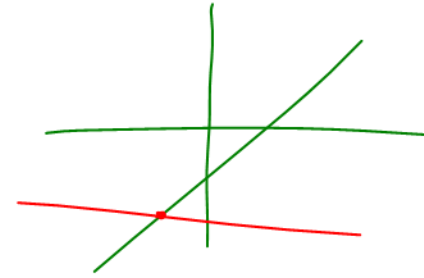
بهار، ۱۴۰۳

$$y = ax + b$$

۱- نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. در صورت وارون‌پذیر بودن، نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 4 & -1 < x < 0 \end{cases}$$



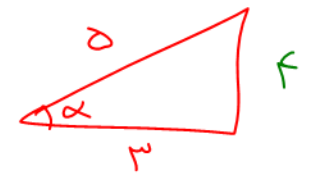
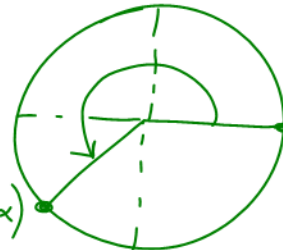
۲- اگر  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  در ناحیه سوم قرار داشته باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\cos(\alpha - \pi) + 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos(\pi - \alpha) + 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$-\cos \alpha + 2 \cot \alpha + \tan \alpha + \cos \alpha$$

$$2\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$



$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = +\frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = +\frac{3}{4}$$

۳- درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{1}{\sin(27^\circ - x)} + \frac{\sin(9^\circ - x)}{\sin(67^\circ - x)} \times \tan(27^\circ + x) = 1 - \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{-\cos x} + \frac{+\sin x}{-\cos x} \times (-\cot x) = \frac{-\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{-1}{\cos x} + 1 = 1 - \frac{1}{\cos x}$$

۴- حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف)  $\cos 317^\circ + \cos 223^\circ + \cos 162^\circ + \cos 18^\circ$

ب)  $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos 66^\circ \sin(-33^\circ)$

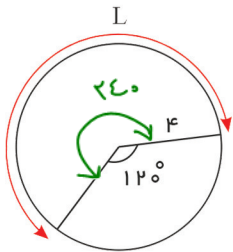
$$\cos(270 + 47) + \cos(270 - 47) + \cos(180 - 18) + \cos 18$$

$$+ \sin 47 - \sin 47 - \cos 18 + \cos 18 = \text{صفر}$$

ب)  $\sin(6^\circ) \cos(2^\circ) - \cos(36^\circ) \sin(3^\circ)$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

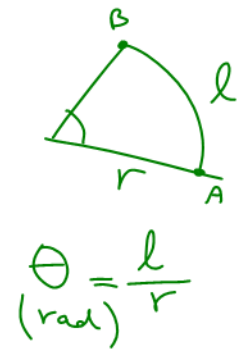
۵- در شکل مقابل، طول کمان  $L$  را بیابید.



$2\epsilon = \epsilon \times 90 = \frac{\epsilon \pi}{3}$

$\frac{4\pi}{3} = \frac{L}{r} \Rightarrow$

$\frac{4\pi}{3} = \frac{L}{r} \Rightarrow L = \frac{16\pi}{3}$



۶- چرخ در یک ساعت، ۴۰۰ دور می‌گردد، در یک ثانیه چند رادیان می‌گردد؟

|       |           |
|-------|-----------|
| ثانیه | ۴۰۰ × ۳۶۰ |
| ۱     | x         |

$360/x = 360 \times 400 \Rightarrow x = \epsilon \cdot \frac{\pi}{18} \rightarrow \frac{400\pi}{18} = \frac{200\pi}{9}$

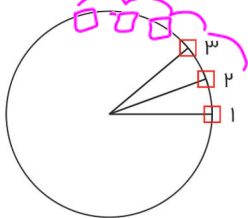
۷- اندازه زوایای مثلثی با اعداد ۳، ۷ و ۱۰ متناسب هستند، زوایای مثلث را بر حسب رادیان و درجه بیابید.

$3\alpha + 7\alpha + 10\alpha = 180$

$20\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 9$

$37^\circ \Rightarrow \frac{37\pi}{180} = \frac{37\pi}{20}$   
 $63^\circ \Rightarrow \frac{63\pi}{180} = \frac{7\pi}{20}$   
 $90^\circ \Rightarrow \frac{7\pi}{20}$

۸- فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که ۳۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره‌گذاری شده‌اند، اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما در کابین شماره ۲ نشسته باشید، بعد از  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟



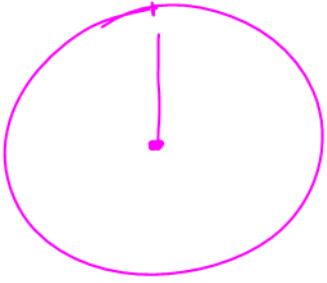
$\frac{360}{30} = 12$

$\frac{2\pi}{3} \equiv 120^\circ$

به موقعیت کابین ۹ رسیده‌ایم



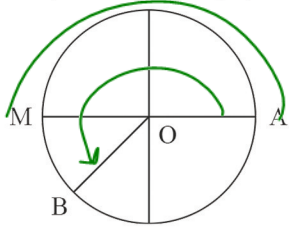
۹- چه مدت زمان طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار به اندازه  $\frac{15\pi}{2}$  رادیان را طی کند؟



$$\perp \text{ دقیقه} = \frac{1}{4} \times 360 = 90^\circ$$

$$\left( \frac{15\pi}{2} \right) = \frac{15 \times 90}{1} = 2250$$

۱۰- دوچرخه سواری در یک پیست دایره‌ای شکل به شعاع ۶۰ متر از نقطه A به صورت پادساعتگرد شروع به حرکت کرده و پس از آن که ۴ دور پیست را طی می‌کند، در نقطه B متوقف می‌شود، اگر زاویه  $\angle MOB = 5^\circ$  باشد، مطلوب است:



(الف) دوچرخه سواری چند درجه و چند رادیان طی کرده است؟  
(ب) مسافتی که دوچرخه سواری طی کرده است، چند متر است؟

$$4 \times 360^\circ + 18^\circ + 5^\circ = 1440^\circ + 23^\circ = 1463^\circ$$

$$\times \frac{\pi}{180} \rightarrow \frac{1463 \cdot \pi}{180} = \frac{1463\pi}{180}$$

$$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \frac{1463\pi}{180} = \frac{l}{60} \Rightarrow \frac{1463 \cdot \pi}{3} = l$$

۱۱- اندازه یک زاویه بر حسب رادیان از  $\frac{\pi}{45}$  برابر اندازه آن بر حسب درجه،  $\frac{\pi}{3}$  کمتر است، این زاویه را بر حسب درجه و رادیان بیابید.

$$\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{45} \alpha \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\alpha}{15}$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\alpha}{15} - \alpha = \frac{\alpha - 15\alpha}{15} = \frac{-14\alpha}{15}$$

$$\frac{\pi}{3} = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}$$

$$\alpha = 2^\circ$$

۱۲- دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x+2y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x-y} = 2^5 \\ 3^{x+2y} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{x^2} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5$$

$$x + 2(2x - 5) = 0 \Rightarrow x + 4x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$$

۱۳- معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\log_4 \log_5 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2}$

ب)  $\frac{\log(x+33)}{1+\log 3} = \frac{2}{1}$

$$\log_4 (\log_5 (\log_{\sqrt{5}} x)) = \frac{1}{2}$$

$$\log_5 (\log_{\sqrt{5}} x) = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x = 4 \Rightarrow (\sqrt{5})^4 = x \Rightarrow x = 25$$

$$2 + 2 \log_3 2 = \log(x+33)$$

$$2 + 2 \log 2 = \log(x+33)$$

$$\log 4 + \log 4 = \log(x+33)$$

$$\log 16 = \log(x+33)$$

$$16 = x+33 \Rightarrow x = 16 - 33 = -17$$

۱۴- دامنه‌ی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{\Delta x - x^r}{4}\right)}$$

$$\log_{1.}\left(\frac{\Delta x - x^r}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta x - x^r}{4} > 0 \cdot \frac{x^r}{x^r}$$

$$\log_{1.}\left(\frac{\Delta x - x^r}{4}\right) \geq \log_{1.} 1$$

$$\frac{\Delta x - x^r}{4} \geq 1 \cdot \frac{x^r}{x^r}$$

$\Delta x - x^r > 0$   
 $(x)(\Delta - x) > 0$   
 صخر  $x=0$   $\Delta - x = 0$   $\Delta = x$   
 $0 < x < \Delta$   
 $1 \leq x \leq 4$

$$\Delta x - x^r \geq 4 \rightarrow$$

$$0 \geq x^r - \Delta x + 4$$

$$0 \geq (x-1)(x-4)$$

$x=1$   $x=4$



۱۵- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{\log_x \sqrt{\Delta x}} \times \log_{\Delta}^x = -1 \Rightarrow \sqrt{\log(\Delta x)} \times \log_{\Delta} x = -1$$

$$\sqrt{\frac{1}{r} \log_{\Delta} \Delta x} = \frac{-1}{\log_{\Delta} x}$$

$$\sqrt{\frac{1}{r} (\log_{\Delta} \Delta + \log_{\Delta} x)} = -\log_{\Delta} x$$

$$\sqrt{\frac{1}{r} (t+1)} = -t \Rightarrow \frac{1}{r} t + \frac{1}{r} - t^r = x^r$$

$$t^r - t - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 2(1)(-1) = 2$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$t = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$   
 $\log_{\Delta} x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$   
 $x = \Delta^{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}}$

$$\log_{\sqrt{b}} ab^r = \log_{b^{1/2}} ab^r = \frac{1}{1/2} \log_b ab^r$$

$$= 2(\log_b ab^r) = 2(\log_b a + \log_b b^r)$$

$$2\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{1}\right) = \frac{2}{1} \times \frac{14}{3} = \frac{28}{3}$$

۱۶- اگر  $\log_b a = \frac{5}{3}$  باشد، مقدار  $\log_{\sqrt{b}} ab^r$  را بیابید.

۱۷- اگر  $\log 2 = a$ ,  $\log 3 = b$ ,  $\log 7 = c$  باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب  $a, b, c$  بیابید.

الف)  $\log \sqrt[3]{0.084}$

ب)  $\log \frac{1}{2100}$

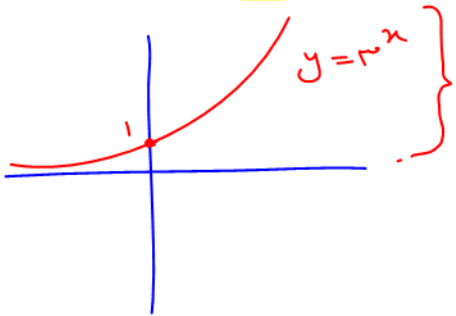
الف)  $\log \sqrt[3]{0.084} = \frac{1}{3} \log (0.084) = \frac{1}{3} \log \left( \frac{84}{1000} \right) = \frac{1}{3} (\log 84 - \log 1000)$

$$\begin{array}{r} 84 \\ 21 \\ 21 \\ 21 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

$\frac{1}{3} (\log (2^2 \times 3 \times 7) - 3)$   
 $\frac{1}{3} (2 \log 2 + \log 3 + \log 7 - 3)$   
 $\frac{1}{3} (2a + b + c - 3)$

۱۸- برد تابع  $y = \frac{3^x - 1}{3^x + 4}$  را بیابید.

$y = \frac{3^x + 3 - 4}{3^x + 4} = 1 - \frac{1}{3^x + 4}$



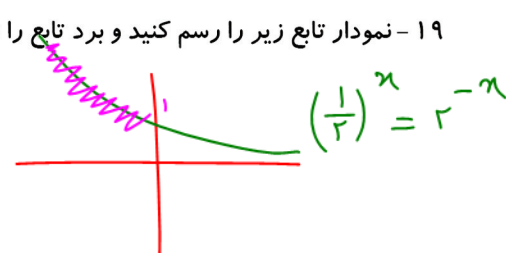
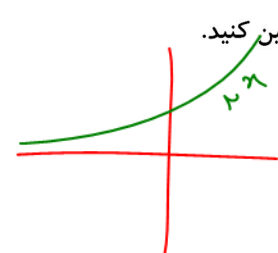
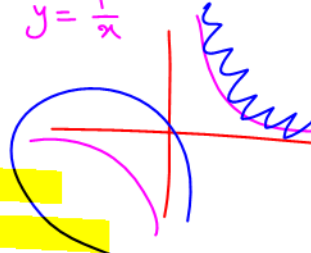
$3^x > 0 \xrightarrow{+4}$   
 $3^x + 4 > 4$  معکوس

$\frac{1}{3^x + 4} < \frac{1}{4} \xrightarrow{\times (-1)}$   
 $\frac{-1}{3^x + 4} > \frac{-1}{4}$

$\frac{-1}{3^x + 4} > \frac{-1}{4} \xrightarrow{+1}$   
 $1 - \frac{1}{3^x + 4} > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$y = \frac{1}{x}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 2^{-x} & x > 0 \end{cases}$

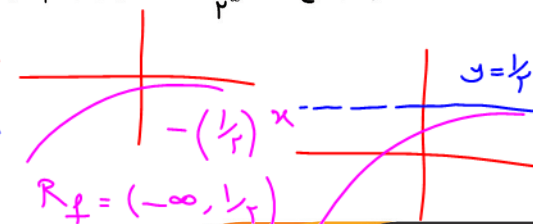
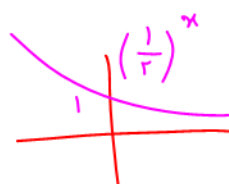


۱۹- نمودار تابع زیر را رسم کنید و برد تابع را تعیین کنید.

$(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$2^x \times 2^{-1}$

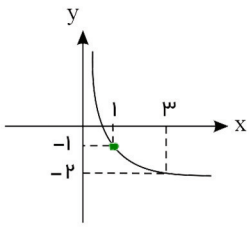
۲۰- نمودار تابع  $y = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x}$  را رسم کنید.



$\frac{1}{2} \times 2^x = 2^{x-1}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

۲۱- اگر نمودار تابع  $y = a + \log_b^x$  بصورت مقابل باشد، ضابطه‌ی تابع را بیابید.



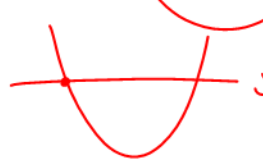
$$f(1) = -1 \Rightarrow \log_b 1 + a = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$f(3) = -2 \Rightarrow \log_b 3 - 1 = -2 \Rightarrow$$

$$\log_b 3 = -1 \Rightarrow b^{-1} = 3 \Rightarrow \frac{1}{b} = 3 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$3^x = \sqrt[5]{27} \Rightarrow 3^x = 3^{3/5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

۲۲- خط  $y = \sqrt[5]{27}$  نمودار تابع  $f(x) = 3^x$  را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟



۲۳- تابع وارون تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  را در صورت وجود بیابید.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow$$

$$\frac{2x_1 + 1}{x_1 - 3} = \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 3} \Rightarrow$$

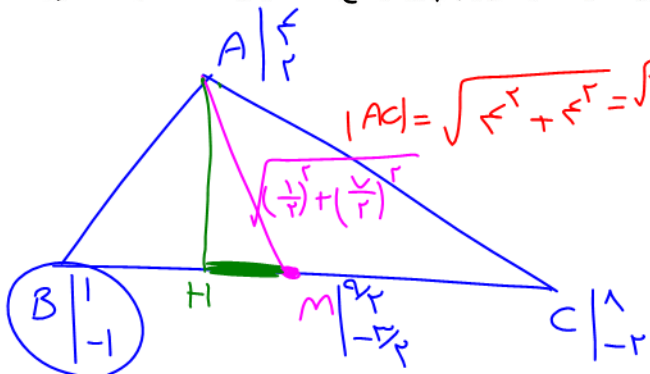
$$2x_1 x_2 - 6x_1 + x_2 - 3 = 2x_1 x_2 - 6x_2 + x_1 - 3 \Rightarrow \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{x}{1} = \frac{2y+1}{y-3} \Rightarrow$$

$$xy - 3x = 2y + 1 \Rightarrow xy - 2y = 3x + 1 \Rightarrow y(x-2) = 3x+1$$

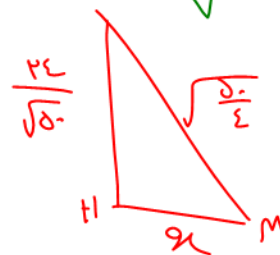
$$f^{-1}(x) = y = \frac{3x+1}{x-2}$$

۲۴- نقاط  $A(4, 2)$  و  $B(1, -1)$  و  $C(8, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. اگر  $H$  و  $M$  به ترتیب پای ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  باشند طول  $MH$  را بیابید.



$$|AC| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$|AH| = \frac{|4 + 7(-1) + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{24}{\sqrt{2}}$$



$$x^2 + \frac{24^2}{2} = \frac{50}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{50}{2} - \frac{24^2}{2}}$$

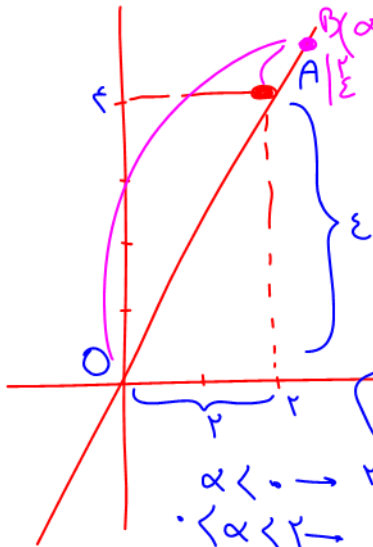
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - (-1)}{8 - 1} = -\frac{1}{7}$$

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow$$

$$y + 1 = -\frac{1}{7}(x - 1) \Rightarrow \text{معادله BC}$$

$$7y + 7 = -x + 1 \Rightarrow x + 7y + 6 = 0$$

۲۵- نقطه‌ای روی خط  $y = 2x$  تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه  $A(2, 4)$  برابر ۵ باشد.  $y = 2x$



$$|OA| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$|AB| + |OB| = 5$$

$$\sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 4)^2} + \sqrt{\alpha^2 + (2\alpha)^2} = 5$$

$$\sqrt{\Delta(\alpha - 2)^2} + \sqrt{\Delta\alpha^2} = \Delta$$

$$\sqrt{\Delta} |\alpha - 2| + \sqrt{\Delta} |\alpha| = \Delta \quad \div \sqrt{\Delta}$$

$$|\alpha - 2| + |\alpha| = \sqrt{\Delta}$$

$$\alpha = 2 \quad \alpha = 0$$

$$\frac{2 - \sqrt{\Delta}}{2} = \alpha$$

$$\alpha < 0 \rightarrow 2 - \alpha - \alpha = \sqrt{\Delta}$$

$$0 < \alpha < 2 \rightarrow 2 - \alpha + \alpha = \sqrt{\Delta}$$

$$2 < \alpha \rightarrow \alpha - 2 + \alpha = \sqrt{\Delta}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\Delta} + 2}{2}$$

۲۶- سه رأس مثلث  $ABC$ ،  $A(-11, -13)$ ،  $B(-3, 3)$  و  $C(3, 1)$  می‌باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس  $B$  بر میانه نظیر رأس  $C$  وارد می‌شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس  $D$  را چنان تعیین کنید که  $ABCD$  یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۷- اگر در یک مستطیل با طول  $L$  و عرض  $W$  داشته باشیم  $\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$  آن‌گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. اگر محیط

یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

۲۸- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد، طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



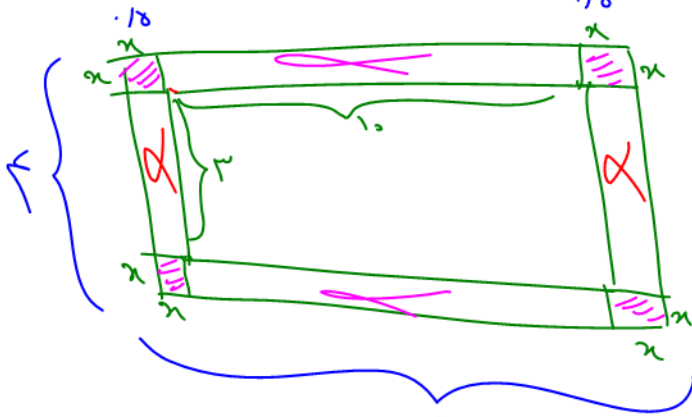
$$4x^2 + 2(10x) + 2(3x) = 14$$

$$4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$2x^2 + 13x - 7 = 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4(2)(-7) = 169 + 56 = 225$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{4}$$



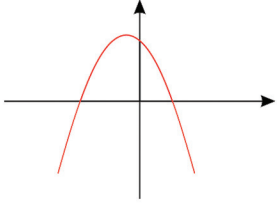
۲۹- تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله  $|x - 1| = x^2 - x - 1$  را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

۳۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$  را بیابید.

۳۱- نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$  را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.



۳۲- در شکل زیر سهمی به معادله  $p(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. علامت ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  و تعداد ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  را تعیین کنید.



۳۳- آیا توابع با ضابطه‌های  $f(x) = \tan x \cdot \cot x$  و  $g(x) = 1$  مساویند؟ (با ذکر دلیل)

۳۴- حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - 2 \cos 2x}}$$

۳۵- تابع  $f$  در همه شرایط زیر صدق می‌کند.  $f$  را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه  $f$  مجموعه اعداد حقیقی است و  $f(2) = 3$  و  $f(-5) = -2$

ب)  $f$  در بازه  $[0, 2]$  ثابت است.

پ) تابع  $f$  به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع  $f$  برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۳۶- دو تابع مانند  $f, g$  بسازید که دامنه هر دو برابر  $[۲, ۵]$  و برد هر دو  $[۰, ۴]$  و  $f$  یک به یک باشد ولی  $g$  یک به یک نباشد.

۳۷- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = ۲ \sin\left(x + \frac{\pi}{۶}\right)$$

۳۸- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = \sqrt{|x| - ۱}$$

۳۹- معادله زیر را حل کنید.

$$[x - ۱] = \left[ \frac{x + ۲}{۲} \right]$$

۴۰- معادله زیر را حل کنید.

$$[x] - [-x] = 5$$

۴۱- معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3}$$

۴۲- تابع  $y = x^2 - 4x + 5$  با دامنه‌ی  $[a, +\infty)$  یک به یک است. کمترین مقدار  $a$  چقدر است؟

۴۳- اگر  $f(x) = x^2 + 2x$  و  $f \circ g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$  باشد مطلوب است تعیین ضابطه‌ی  $g(x)$ .

۴۴- اگر  $D_f = [2, 5]$  و  $D_g = [4, 12]$  آنگاه دامنه‌ی  $f\left(\frac{x}{2}\right) + g(2x)$  را بدست آورید.

۴۵- اگر  $f(x) = \sqrt{[x] - 1}$  و  $g = \{(-2, 0), (5, 3), (0, 7), (2, 8)\}$  باشد در این صورت  $\frac{2f - 3g}{g}$  را به دست آورید.

۴۶- یک به یک بودن تابع  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  را به کمک نمودار تابع نشان دهید و در صورت وارون پذیری، وارون  $f$  را بدست آورید.

۴۷- تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = 0 \quad g(x) = \left[ \frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$$

۵۷- تابع وارون تابع  $f(x) = 1 + 2^{3^x}$  را بیابید.

۵۸- معادله زیر را حل کنید.

$$x^{\log_5 x} = 5^{100}$$

۵۹- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\log_9^{16} \times \log_7(\log_5^{125}) \times \log_{\sqrt{5}}^{49} \times \log_{\sqrt[3]{7}}^{25}$$

۶۰- اگر  $\log 5 = m$  باشد، حاصل  $\log_4^{25}$  را بر حسب  $m$  بیابید.

۶۱- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = 16^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \log_4^3 + 25^{\log_{125} 6}$$

۵۷- تابع وارون تابع  $f(x) = 1 + 2^{3^x}$  را بیابید.

۵۸- معادله زیر را حل کنید.

$$x^{\log_5 x} = 5^{100}$$

۵۹- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\log_9^{16} \times \log_7(\log_5^{125}) \times \log_{\sqrt{5}}^{49} \times \log_{\sqrt[3]{7}}^{25}$$

۶۰- اگر  $\log 5 = m$  باشد، حاصل  $\log_{10}^{25}$  را بر حسب  $m$  بیابید.

۶۱- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = 16^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2^3} + 25^{\log_{125}^6}$$

۶۲- معادله زیر را حل کنید:

$$x^{(2 - \frac{1}{2} \log_3 x)} = 9$$

۶۳- اگر  $\log_{\frac{27}{25}} = m$ ، آنگاه  $\log_6^{16}$  را بر حسب  $m$  بیابید.۶۴- معادله  $2^{|x|} - 1 = 3^x$  را به روش هندسی حل کنید.۶۵- برد تابع  $f(x) = \frac{3}{5 + 2^x}$  را بیابید.

۶۶- نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3^4 x - 1} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3^{2^2} + 2}$$

۶۷- در تابع نمایی  $f(x) = m \cdot a^x$  اگر  $f(2) = 2$ ،  $f(5) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه حاصل  $f(8) - f(0)$  را بیابید.

۶۸- دامنهٔ تابع  $f(x) = \sqrt{\log_{\circ, 3} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$  را بیابید.



۶۹- نمودار تابع  $y = |\log_{\frac{1}{2}}(x+3)| + 1$  را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۷۰- توابع  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 1 \\ 2x, & x \leq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} -x+1, & x \geq 2 \\ 3x, & x < 2 \end{cases}$  مفروضند، تابع  $f \circ g$  را بیابید.