

دایره

نمره در امتحان نهایی

هشت نمره

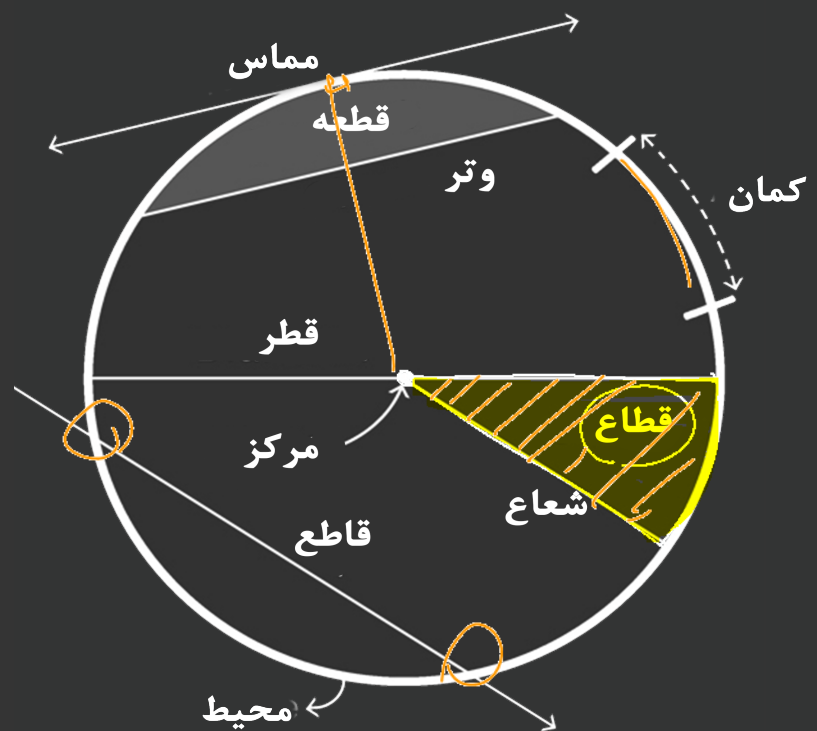
تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

زوایا سال هفتم

فصل ۱ هندسه دهم: همرسی های مثلث

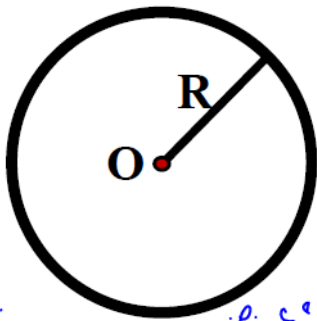


فصل یک هندسه یازدهم

زوایا
روابط طولی
محاطی - محیطی

دایره

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت هستند



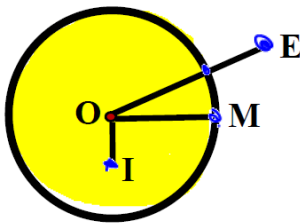
شعاع دایره $OI < R$
فاصله آرای های

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.

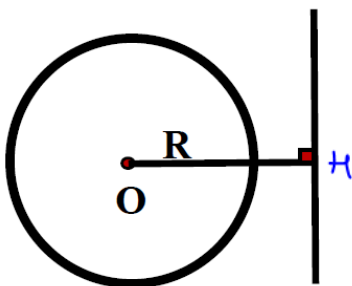
۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.

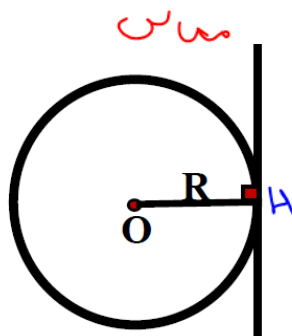


حالت های خط و دایره

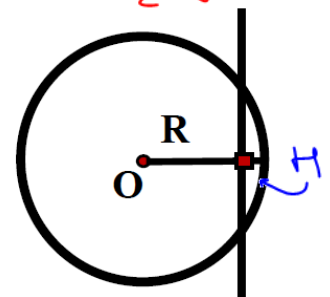
مماس



$OH > R$
بدون برخورد



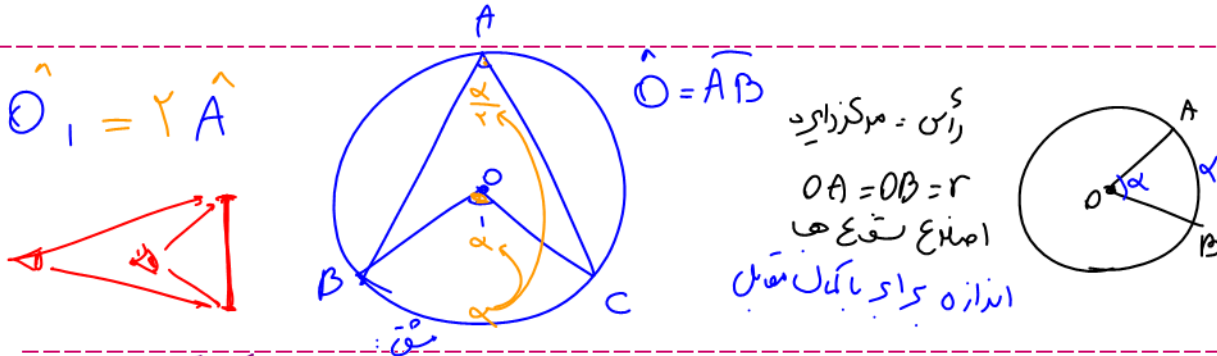
$OH = R$
یک نقطه برخورد



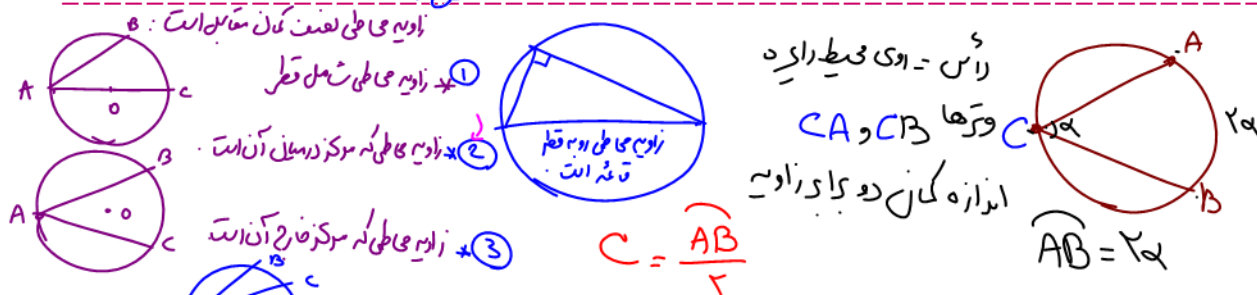
$OH < R$
دو نقطه برخورد

انواع زاویه در دایره

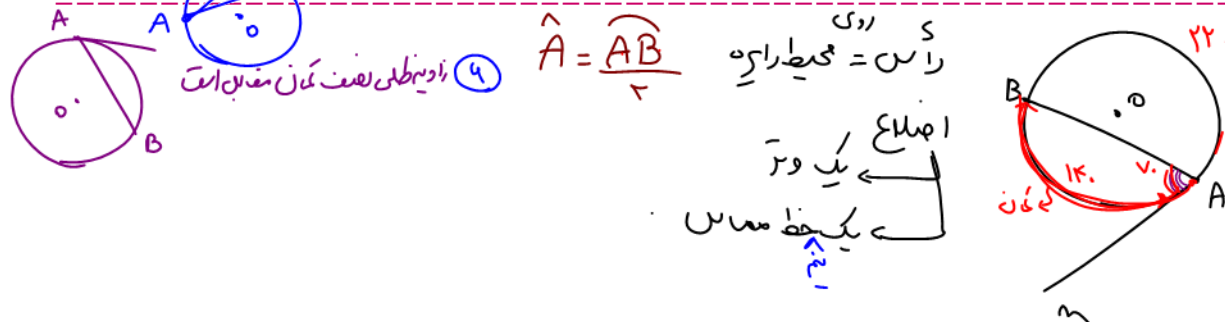
زاویه مرکزی



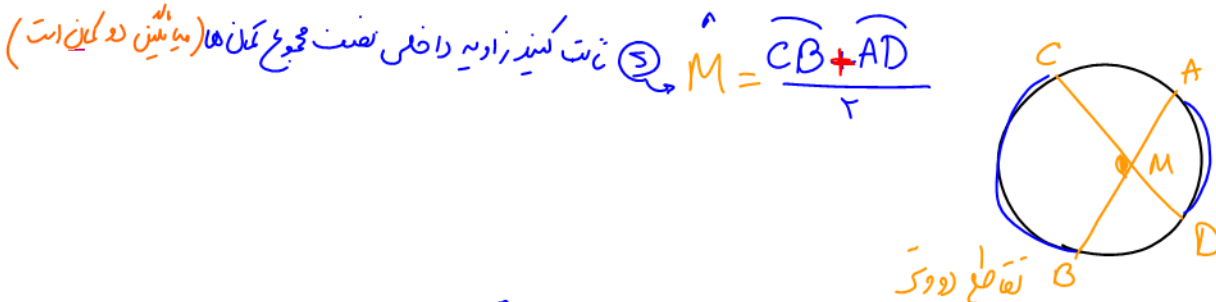
زاویه محاطی



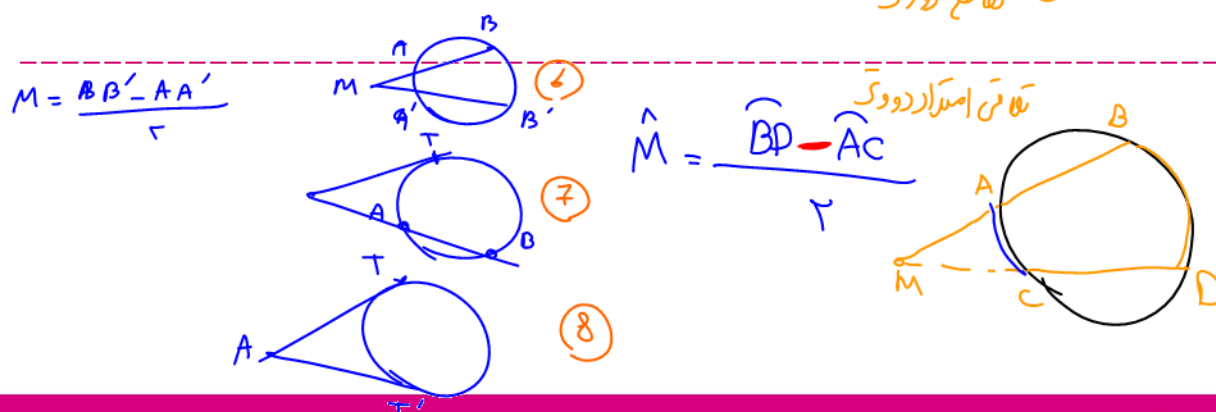
زاویه ظلی



زاویه داخلی



زاویه خارجی

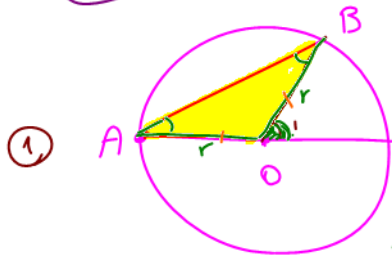


اثبات‌ها (بشترتویک با زاویه خارجی حل می‌شوند)



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2R}{\sin 180^\circ}$$

حلیم $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



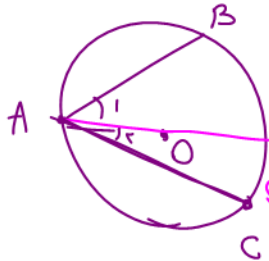
①

مرکزی $\hat{O} = \widehat{BC}$ *
خارجی $\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B}$
شکل $\widehat{OBA}$

① زاویه مرکزی من قطر

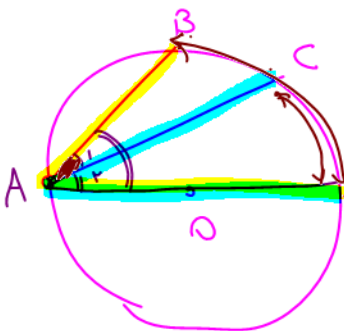
$O = 2\hat{A} \rightarrow 2\hat{A} = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

② مرکز بین زاویه



طبق قسمت ① $A_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$
طبق قسمت ② $A_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

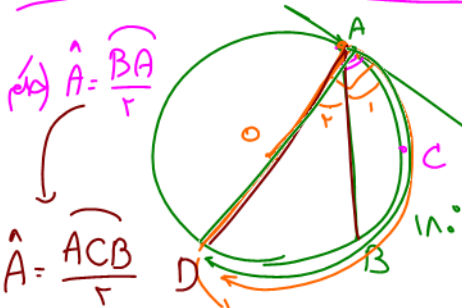
$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$
 $\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2}$
 $A_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

③ مرکز خارج از زاویه

$A_1 = A - A_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



حلیم $\hat{A} = \frac{\widehat{BA}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

خط مماس در نقطه A من به شعاع عمود است

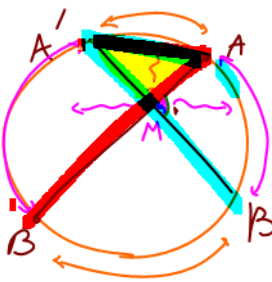
زاویه مرکزی $\hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2}$

$\widehat{AD} = 110^\circ$

$A_1 = 90^\circ - \hat{A}_2 = 90^\circ - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

اثبات ④ زاویه مرکزی نصف کمان محسوس است

اثبات ⑤ زاویه مرکزی حاصل از برخورد دو وتر را بره و از میانگین دو کمان محسوس است

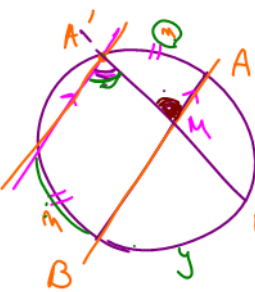


حلیم $M_1 = \frac{\widehat{AB'} + \widehat{A'B}}{2}$

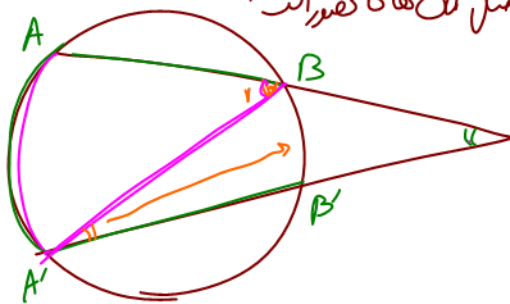
$M_1 = \hat{A} + \hat{A'}$
 $\hat{A} = \frac{\widehat{A'B}}{2}$

$A' = \frac{\widehat{AB'}}{2}$

$M_1 = \frac{\widehat{A'B}}{2} + \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{A'B} + \widehat{AB'}}{2}$



$\widehat{A'A} + \widehat{B'B} = \widehat{A} + \widehat{B}$
 $\hat{A} = \frac{\widehat{A'B}}{2}$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AA'} - \widehat{BB'}}{r}$$


$$\begin{aligned} \text{MBA' se } \hat{B}_1 &= \hat{M} + \hat{A}' \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{A}' \\ \text{MBA' se } \hat{B}_1 &= \frac{\widehat{AA'}}{r} \quad \text{II, I} \quad \frac{\widehat{AA'}}{r} - \frac{\widehat{BB'}}{r} \\ \text{MBA' se } \hat{A}' &= \frac{\widehat{BB'}}{r} \quad \hat{M} = \frac{\widehat{AA'} - \widehat{BB'}}{r} \end{aligned}$$

نقطه ۷) نسبت کینز را در این میان حفظ می‌کنیم و استرادیگ و تر هفت تا فصل یکان ^۵ محصور است.

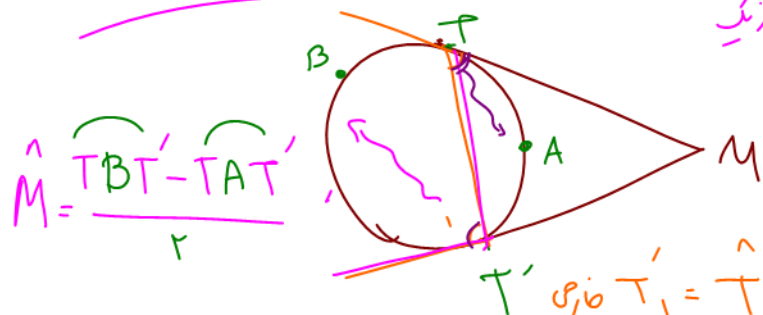


$$\hat{B}_{BMT} = \hat{T} + \hat{M} \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{T}$$

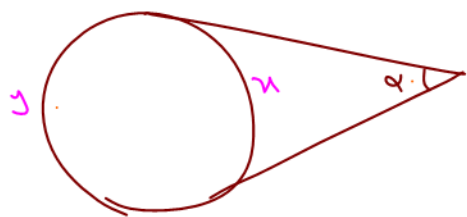
اثبات (۸) کینڈا را
 دو مسائل رسم کردہ
 نقطہ کاری لکھنا حاصل

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT}}{r} - \frac{\widehat{TB}}{r}$$

ابن قتیبه (۸) توبه کنید زاریم من
دو سال رسم زده از من
لعلم کبایه لعلف فاضل
(و کلام اکار سرگه است)



$$M = \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TAT'}}{y}$$



$$\hat{T}'_1 = \hat{T} + \hat{M}$$

$$\hat{M} = \hat{T}'_1 - \hat{T}$$

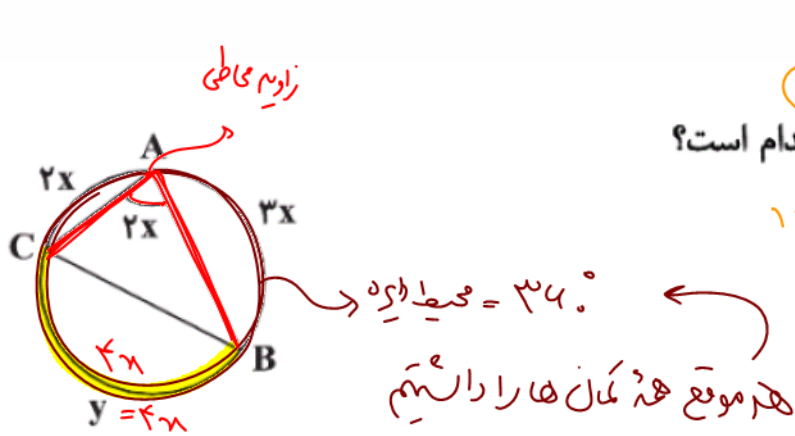
$$\frac{\hat{T} \hat{T}'_1}{\hat{T}} - \frac{\hat{T} \hat{T}'_1}{\hat{T}}$$

ی تون
دست
۵

$$\begin{cases} y - x = 2\alpha \\ y + x = 2\varphi \end{cases}$$

$$2y = 2\varphi + 2\alpha$$

$$y = n_0 + q$$
$$n = n_0 - q$$



۱) با توجه به شکل مقابل، حاصل $y - x$ کدام است؟

$$4x - x = 3x$$

$$120 - 40 = 80$$

$$3 \times 40 = 120$$

$$90^\circ (1)$$

$$150^\circ (2)$$

$$120^\circ (3)$$

$$135^\circ (4)$$

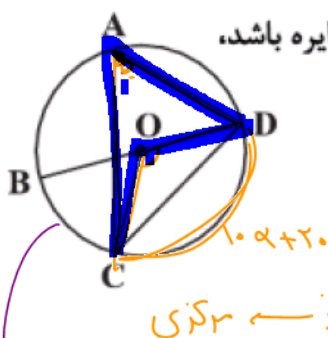
$$2x + 3x + y = 340$$

زاویه یاطی

$$2x + 3x + 4x = 340$$

$$9x = 340$$

$$x = 40$$



۲) در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A} = 7x - 10$ ، $\hat{COD} = 10x + 20$ و O مرکز دایره باشد،

کمان BC چند درجه است؟

$$\hat{A} = 7x - 10 \rightarrow \widehat{CD} = 2\hat{A} = 2(7x - 10)$$

$$\hat{COD} = 10x + 20 = \widehat{CD} = \widehat{CD} = 14x - 20$$

$$15 (1)$$

$$30 (2)$$

$$45 (3)$$

$$60 (4)$$

$$10x + 20 = 14x - 20$$

$$40 = 4x$$

$$10 = x$$

$$* 10x + 20 = 2(7x - 10)$$

دکتر رها مسیح



دوایم > وتری > وتری
قضایای مهم

فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

حکم $AH = HB$

$\widehat{AD} = \widehat{DB}$

شعاع در دایره یهفته است

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$OA = OB = r$

$OH = OH$

وتری

$\triangle OAH \cong \triangle OBH$

$\Rightarrow AH = HB$

فرض

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

مرکزی

$\widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

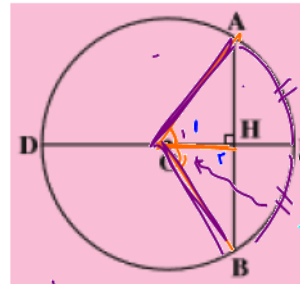
$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$



فرض $AH = HB$

حکم $\widehat{AE} = \widehat{EB}$

$AH = HB$

$OA = OB$

$OH = OH$

$\triangle OAH \cong \triangle OBH$

$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

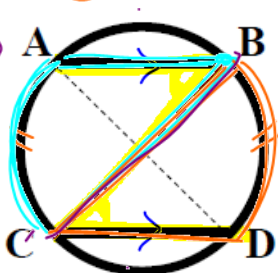
$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$



$\widehat{AB} \neq \widehat{CD}$
لزوماً برابر نیست!!



فرض $AB \parallel CD$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

ثابت کنید که کمان محدود بین دو خط موازی برابرند

فرض $AB \parallel CD$ / BC خطوط موازی
 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

حکم $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

ثابت کنید اگر کمان‌ها محدود بین دو خط موازی باشند، پس آن‌ها در نقطه موازی

فرض $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{B} = \widehat{C}$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

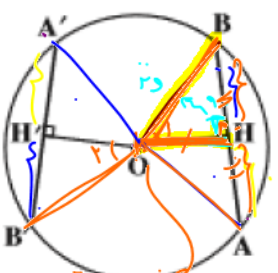
$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD$



فرض $OH = OH'$

$OH = OH'$

$H = H' = 90^\circ$

$OB = OB'$

$\triangle OBH \cong \triangle OB'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

$\Rightarrow BH = B'H$

حکم $AB = A'B'$

$OB = OH + BH$

$OB' = OH' + B'H$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$OB = OH + BH$

$OB' = OH' + B'H$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$OB = OH + BH$

$OB' = OH' + B'H$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

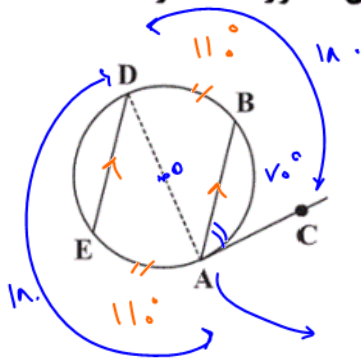
$AB = A'B'$

$AB = A'B'$

<

۳

در شکل روبه‌رو $AB \parallel DE$ ، مماس بر دایره و AC مماس بر دایره و $\widehat{AE} = 110^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه $\widehat{BAC}$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)



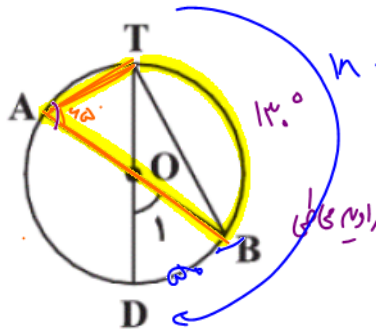
نصف کمان مقابل = خطی

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BA}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

(۱) 35° (۲) 70° (۳) 40° (۴) 45°

۴

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه $\widehat{O_1}$ کدام است؟



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2}$$

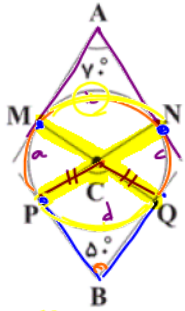
$$65^\circ = \frac{\widehat{TB}}{2} \rightarrow \widehat{TB} = 130^\circ$$

(۱) 65° (۲) 60° (۳) 50° (۴) 45°

دکترها مسیح

$$C = \frac{d+b}{2} = \frac{240}{2} = 120^\circ$$

۵ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟



$$180^\circ - A = \frac{a+d+c-b}{2}$$

$$140^\circ = \frac{a+d+c-b}{2} \Rightarrow 280^\circ = a+d+c-b$$

$$100^\circ = \frac{a+b+c-d}{2} \Rightarrow 200^\circ = a+b+c-d$$

$$120^\circ = a+c$$

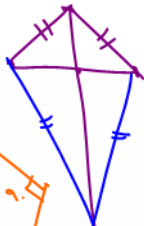
- (1) 100°
- (2) 120°
- (3) 180°
- (4) 140°

$$a+b+c+d = 360^\circ$$

$$120^\circ$$

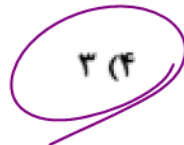
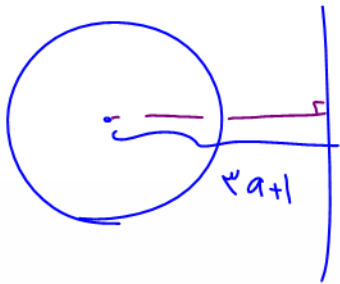
$$b+d = 240^\circ$$

شع در نقطه مماس بر خط مماس مماس



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

۶ دایره $C(O, r)$ و خط ℓ به فاصله $3a+1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۱)

مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$\frac{3}{2} (2) \quad 1/5$$

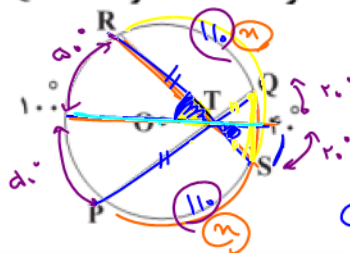
$$3a+1 > r$$

$$3a > 6 \rightarrow a > 2$$

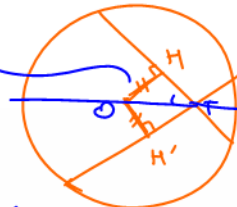
۷ در دایره $C(O, r)$ وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

$$\widehat{RQ} = \frac{40^\circ + 100^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

- (1) 70°
- (2) 35°
- (3) 30°
- (4) 40°



دو وتر دایره را در مرکز هم فاصله اند



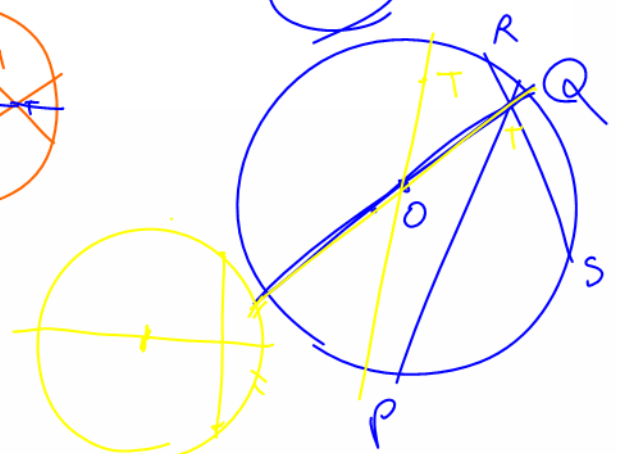
$$RS = PQ \Rightarrow \widehat{RS} = \widehat{PQ}$$

دو وتر برابرند

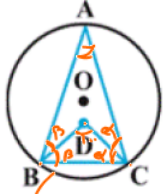
$$\widehat{RQ} + \widehat{QS} = \widehat{PS} + \widehat{QP}$$

$$2n + 140^\circ + 100^\circ = 360^\circ$$

$$2n = 120^\circ \Rightarrow n = 60^\circ$$



۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آنگاه کمان BC چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۸۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

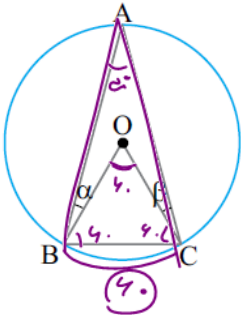
$$\widehat{BDC}: \beta + \alpha + 100 = 180$$

$$\beta + \alpha = 80$$

$$2\beta + 2\alpha = 160 \Rightarrow A = 180 - 160 = 20$$

$$\widehat{BC} = 2\hat{A} = 40$$

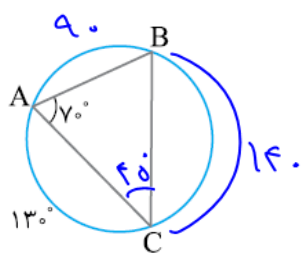
۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)

(۱) 10° (۲) 20° (۳) 30° (۴) 40°

$$30 + \alpha + 60 + \beta + 60 = 180$$

$$\alpha + \beta = 30$$

۱۰ در شکل مقابل اندازهی زاویهی C کدام است؟

(۱) 70° (۲) 60° (۳) 65° (۴) 45° 

$$130 + 140 = 270$$

$$360 - 270 = 90$$

دایره

۱۱

دایره‌ی $C(O, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

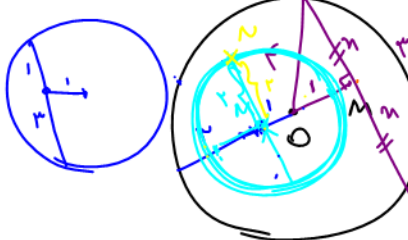
و از M بگذرد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

بی‌شمار (۴) بی‌شمار



وتر عمود بر قطر

وتر عمود بر قطر
از یک نقطه داخل دایره
بنابراین دو عدد

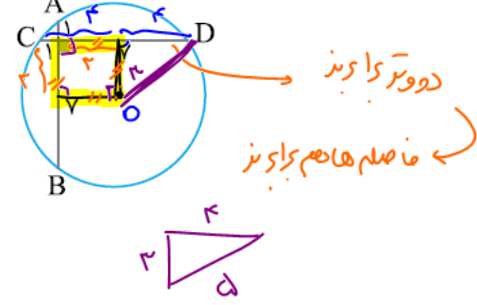
قطر

هیچ وتر
در وتر
وتر عمود = وتر عمود
قطر = قطر
وتر عمود = قطر
قطر = قطر

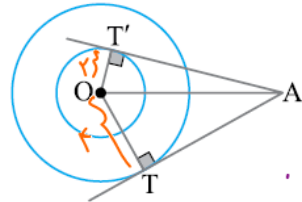
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

۱۲ مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)



۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰



۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

۱۲ (۲)
۲۰ (۴)

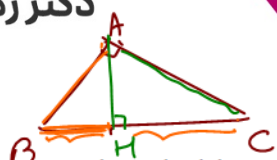
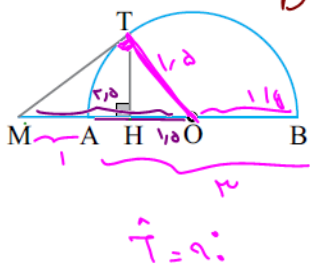
$AT^2 - AT'^2$

۱۰ (۱)
۱۶ (۳)

$$\begin{aligned} 4^2 + AT'^2 &= OA^2 \\ 2^2 + AT^2 &= OA^2 \\ \hline 16 - 4 &= AT'^2 - AT^2 \\ 12 & \end{aligned}$$

دکترها مسیح

روابط طولی در مثلث
مخرج الزاویه



در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

۱۴

$$1/6 \quad (2)$$

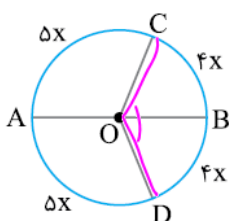
$$1/8 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (1)$$

$$1/4 \quad (3)$$



$$m^2 = 2.15^2 - 1.5^2 = (2.15 - 1.5)(2.15 + 1.5) \rightarrow m = 2$$



در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

۱۵

$$150^\circ \quad (2)$$

$$130^\circ \quad (4)$$

$$160^\circ \quad (1)$$

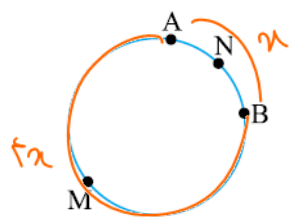
$$140^\circ \quad (3)$$

$$\widehat{COD} = 180^\circ = 180^\circ \times 2$$

$$5n + 6n + 2n + 4n = 360$$

$$18n = 360$$

$$n = 20$$



در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

۱۶

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

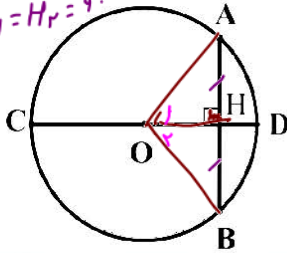
$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$ds = 5n$$

1	$\widehat{ANB}$
4	$\widehat{AMB}$
5	$\widehat{AMB}$

در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB را نصف می کند. خرداد ۱۴۰۳

۱/۵ نمره
فرض $H_1 = H_2 = 90^\circ$



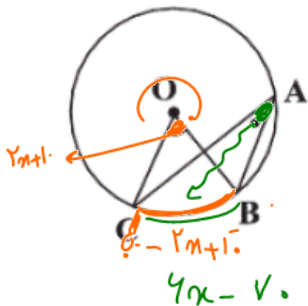
حکم $AH = HB$ / $\widehat{AD} = \widehat{DB}$

مشترک OH
 $OA = OB = r$
 $H_1 = H_2 = 90^\circ$

و ض $\rightarrow \widehat{OAH} \cong \widehat{OHB} \rightarrow AH = HB$

$\rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \xrightarrow{\text{مترکبی}} \widehat{AD} = \widehat{DB}$

دایره $(O, 6)$ مفروض است. اگر $\widehat{A} = (3x - 25)^\circ$ و $\widehat{O} = (2x + 10)^\circ$ باشد، طول کمان BC کدام است؟



$$\frac{\alpha}{360} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{s}{\pi r^2}$$

$$2x + 10 = 4x - 70$$

$$10 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$2x + 10 = 2 \times 20 + 10 = 50$$

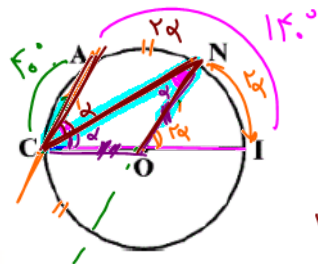
$$\frac{50}{360} = \frac{l}{2\pi \times 6}$$

$$l = \frac{5\pi}{3}$$

- (۱) $\frac{5\pi}{3}$ ✓
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{8\pi}{3}$
- (۴) $\frac{10\pi}{3}$

۱۷

در شکل مقابل، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$. اگر $\widehat{AC} = 40^\circ$ باشد، آن گاه اندازه زاویه CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است).



$$140 = 4\alpha$$

$$\frac{140}{4} = \alpha$$

$$35^\circ = \frac{70}{2} = \alpha$$

(۱) $27/5^\circ$

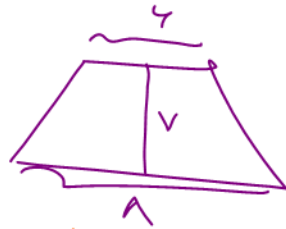
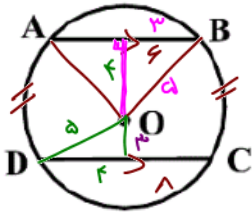
(۲) 30°

(۳) 35° ✓

(۴) $22/5^\circ$

۱۸

۱۹ مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = ۶$ و $CD = ۸$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟



$$S = \frac{(6+8) \times 7}{2} = 29$$

۵۶ (۱)

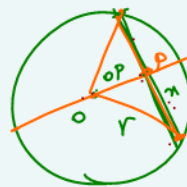
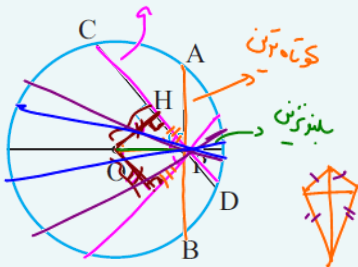
۴۹ (۲) ✓

۴۲ (۳)

۳۵ (۴)

دو از این دو دایره

۲۰ نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



$$x^2 = r^2 - op^2$$

$$2x = 2\sqrt{r^2 - op^2}$$

کوچک‌ترین وتر

قطر = $2r$

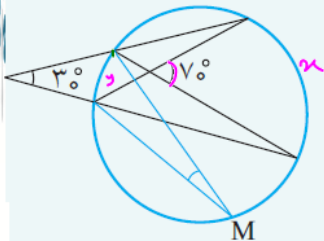
بزرگ‌ترین $2r < \text{طول وتر}$

$\perp$ و بزرگ‌ترین $\text{طول وتر} = 2r$

$\perp$ و بزرگ‌ترین $\text{طول وتر} > 2r$ * (قطر)

$\perp$ و بزرگ‌ترین $\text{طول وتر} = \text{قطر}$

۲۱ زاویه M را به دست آورید.



$$\frac{x+y}{2} = 70 \rightarrow x+y = 140$$

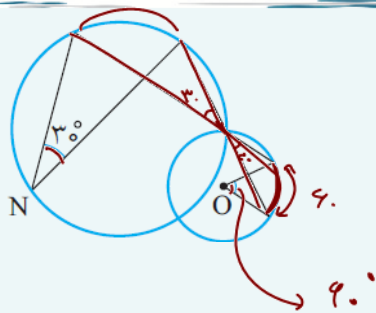
$$\frac{x-y}{2} = 20 \rightarrow x-y = 40$$

$$\frac{y}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

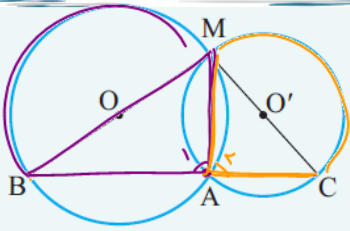
$$2x = 20 \rightarrow x = 10$$

$$y = 40$$

۲۲ زاویه O را به دست آورید.



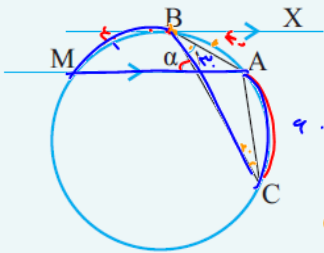
سرمشق:



۲۳ نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BM}}{2} = 9^\circ \\ \hat{A}_2 = \frac{\widehat{CM}}{2} = 9^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 18^\circ \rightarrow \text{زاویه منفرجه} \rightarrow A, B, C \text{ سه نقطه هم‌خط هستند}$$



۲۴ $\hat{B}_1 = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 20^\circ$ و $BX \parallel MA$ زاویه α را به دست آورید.

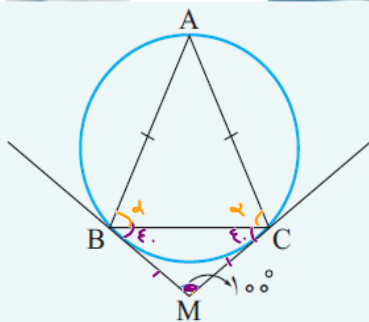
مکان‌های محصور بین دو خط موازی برابرند

$$BX \parallel MA \rightarrow \widehat{BA} = \widehat{BM}$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BA}}{2} \rightarrow \widehat{BA} = 40^\circ$$

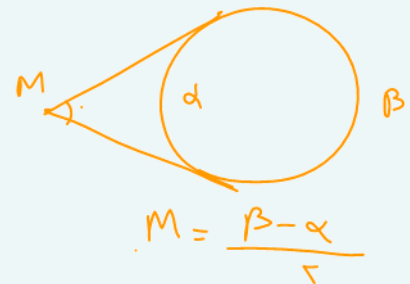
$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 40^\circ$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BM}}{2} = \frac{40^\circ + 40^\circ}{2} = 40^\circ$$



۲۵ MC و MB مماس بر دایره هستند و $AB = AC$ زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



$$M = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\alpha + \beta = 140^\circ$$

$$M = \frac{\widehat{CAB} - \widehat{BC}}{2} = 100^\circ$$

$$\widehat{CAB} - \widehat{BC} = 200^\circ$$

$$\widehat{CAB} + \widehat{BC} = 140^\circ$$

$$2\widehat{CAB} = 340^\circ$$

$$\widehat{CAB} = 170^\circ$$

$$\widehat{BC} = 180^\circ$$

در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC = CD$ و $AD = DE$ ، اندازه زاویه A چند درجه

۲۶

است؟

۲۴° (۱)

۳۰° (۲)

۳۶° (۳) ✓

۴۲° (۴)

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{CB}}{2}$$

$$2\alpha = 180 - 5\alpha$$

$$5\alpha = 180$$

$$\alpha = 36$$

$$\alpha = \frac{180 - 2\alpha - \alpha}{2}$$

در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\widehat{C} = 110^\circ$ ، اندازه زاویه P چند درجه است؟

۲۷

۵۰° (۱) ✓

۶۰° (۲)

۴۵° (۳)

۵۵° (۴)

$$P = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{120 - 40}{2} = 40$$

در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازه زاویه CBD چند درجه است؟

۲۸

۱۵° (۱)

۲۰° (۲) ✓

۲۵° (۳)

۳۰° (۴)

$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{C} = 180 \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180 \end{cases}$$

در چهارضلعی ABDC مجموع درونی متقابل ۱۸۰ است

در شکل روبه‌رو، CD بر دایره کوچک مماس است. اگر $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه BEC چند درجه است؟

۲۹

۸۰° (۱)

۱۰۰° (۲) ✓

۴۰° (۳)

۵۰° (۴)

در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه AOD برابر کدام است؟

۳۰

OBC (۱)

CAD (۲)

OAC (۳)

ADO (۴) ✓

$$\begin{cases} \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180 \\ \widehat{O_1} + \widehat{C} = 180 \end{cases} \rightarrow \widehat{C} = \widehat{O_2}$$

$$\widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{AOB}$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{C} = \widehat{D}$$

مکمل ارتفاع = ارتفاع

دو ارتفاع در یک مثلث هم‌خطند

مثلث متساوی الساقین

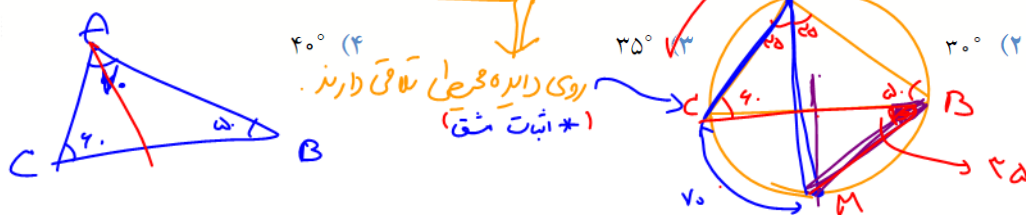
راه حل اول

$$\alpha + \beta = 180$$

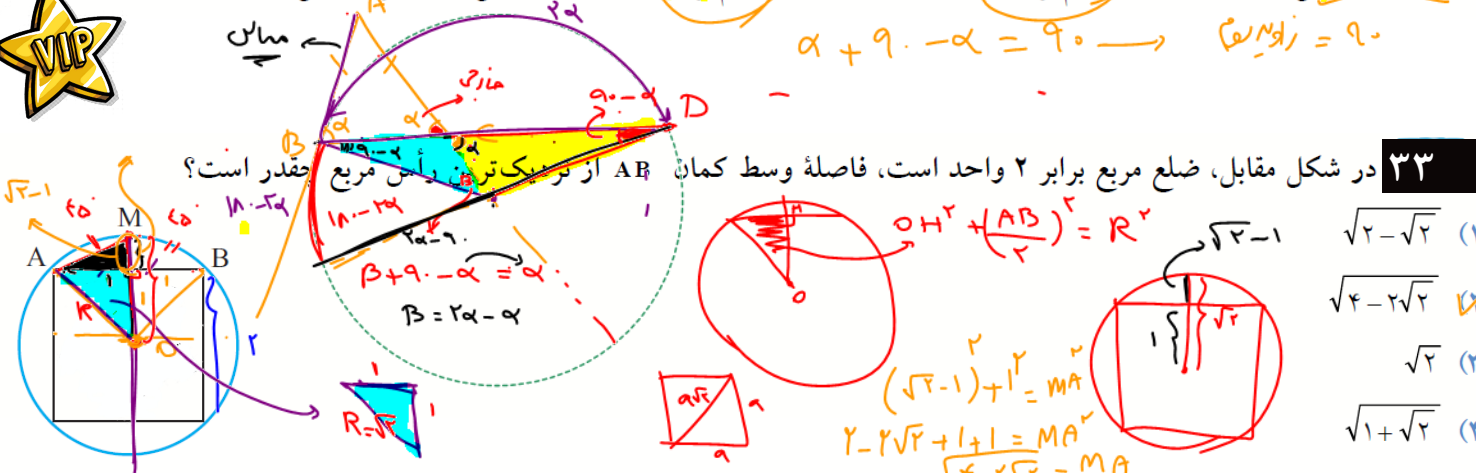
دکترها مسیح



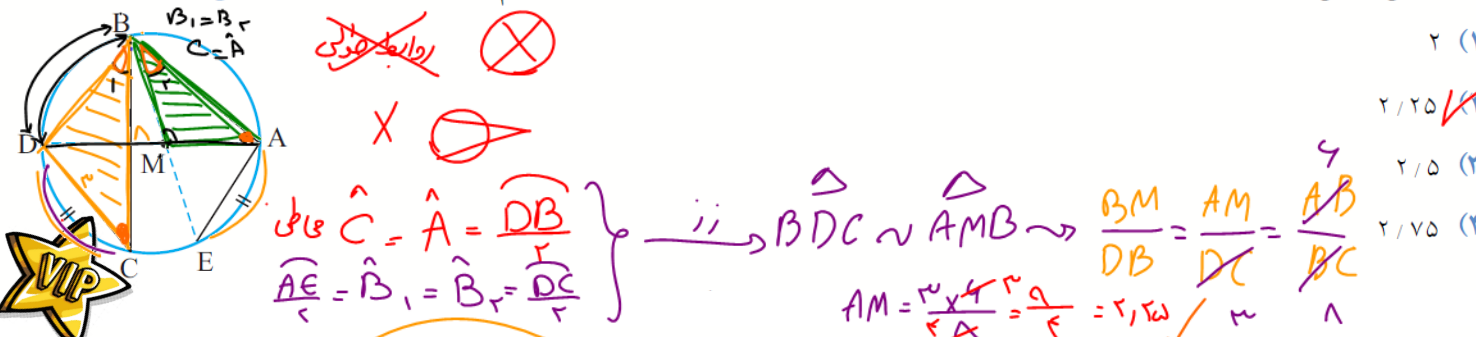
۳۱ در مثلث ABC، داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع اند. زاویه MBC چند درجه است؟



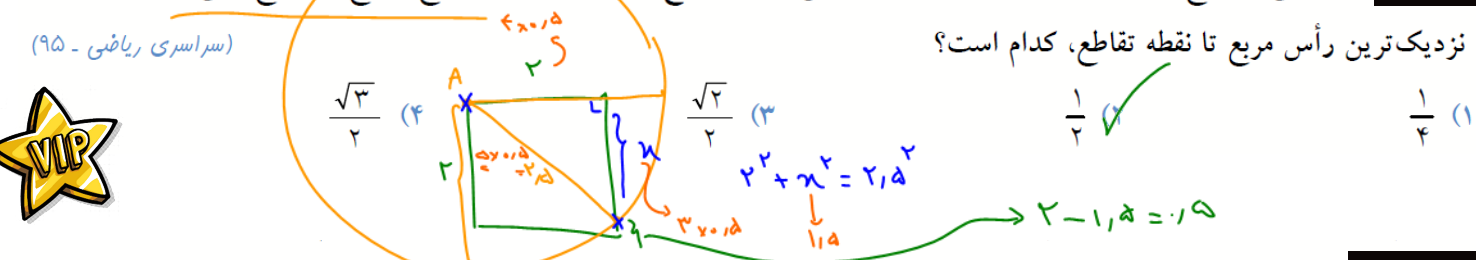
۳۲ در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC، مرکز دایره ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟



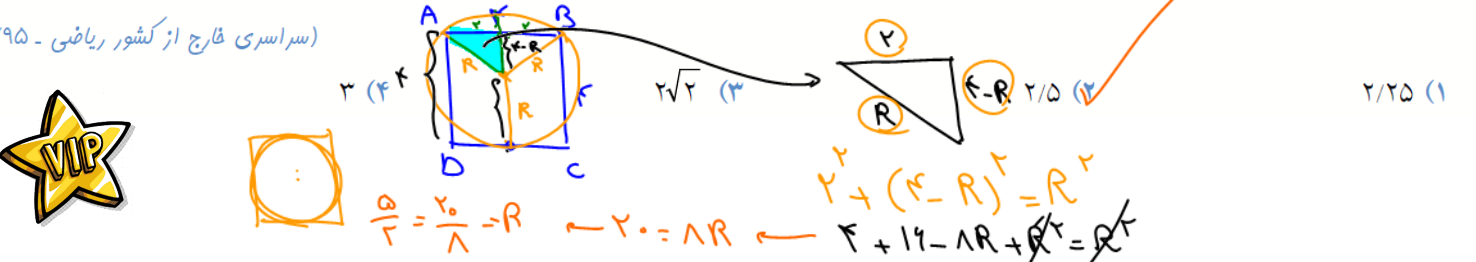
۳۳ در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله وسط کمان AB از نزدیک ترین رأس مربع چقدر است؟



۳۴ در شکل مقابل، اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 2$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، آن گاه اندازه AM کدام است؟



۳۵ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند. فاصله نزدیک ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟



۳۶ مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟



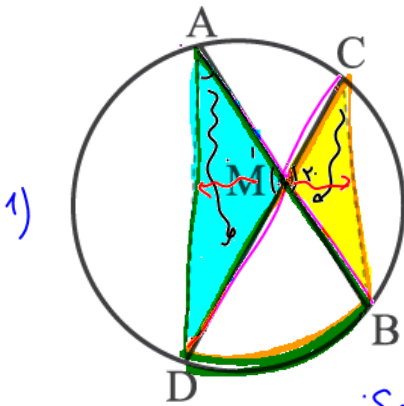
دکترها مسیح

مسیح
* تست ۲۳ تا ۳۴ مسیح
زاویه داخلی = زاویه خارجی
+ اینها ۵ تا ۱۵ مسیح
+ اینها ۳ تا ۱۵ مسیح

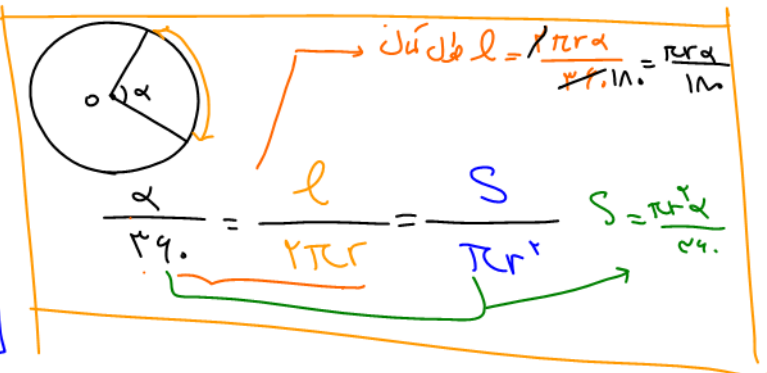
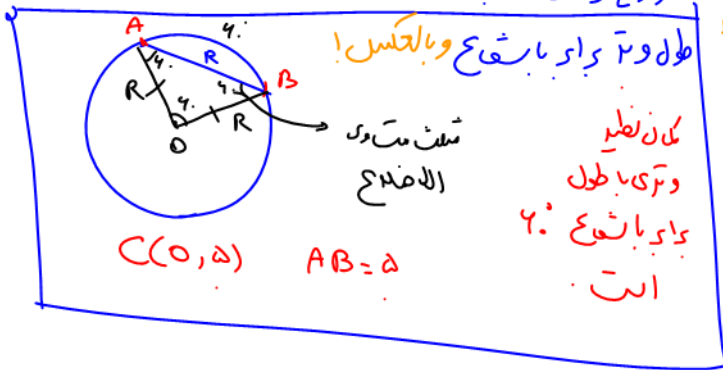
روابط طولی در دایره مسیح

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \leftarrow \widehat{AMD} = \widehat{BMC}$$

مختص

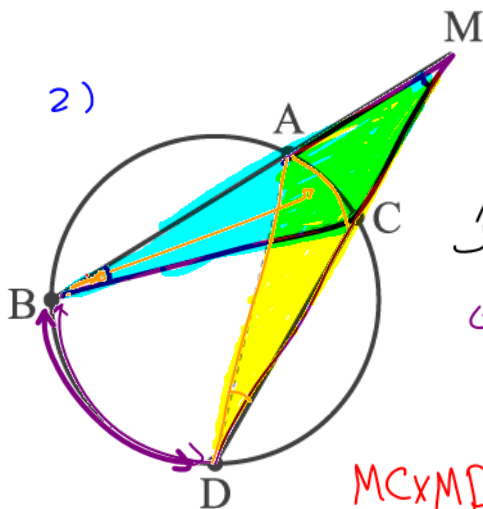


1) $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$
 $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{BD}$
 $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle BMC$
 $\frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB} = \frac{AM}{CM}$
 $AM \times MB = CM \times MD$



$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \leftarrow \widehat{ADM} = \widehat{CBM}$$

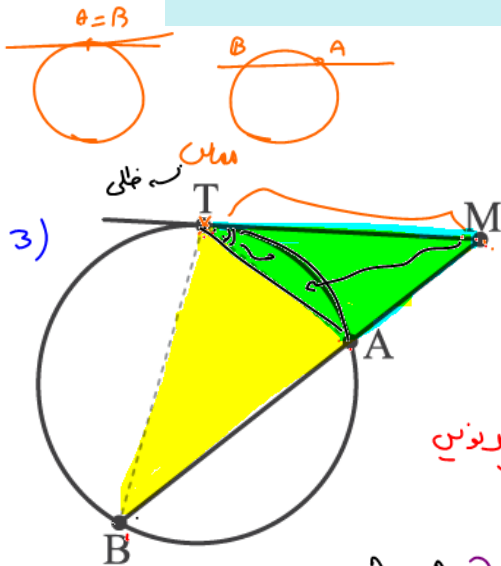


2) $\widehat{M} = \widehat{M}$
 $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{AC}$
 $\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle BMC$
 $\frac{MC}{AM} = \frac{BC}{AD} = \frac{BM}{MD}$
 $MC \times MD = BM \times AM$

از اینرو، هر سه این قضایا دارای طرح کلی یکسانی می باشند:

نقطه دایره $\cdot$ نقطه دایره = نقطه دایره $\cdot$ نقطه دایره

(vertex to circle) $\cdot$ (vertex to circle) = (vertex to circle) $\cdot$ (vertex to circle)



نقطه دایره $\cdot$ نقطه دایره

$$MT \times MT = MA \times MB$$

خط مماس و وتر هینسی

$$MT^2 = MA \times MB$$

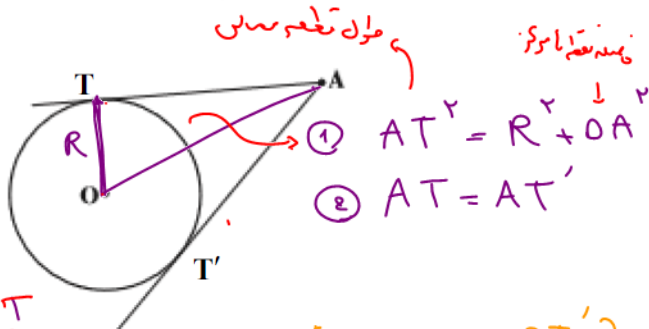
میان لایحه ای ریشه اوی دوک

$$\frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \sim \triangle ATM \sim \triangle MBT$$

خط مماس و وتر هینسی

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AM}{MT} = \frac{MT}{BT}$$

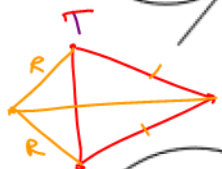
$$MT^2 = AM \times MB$$



خط مماس بر دایره

$$AT^2 = R^2 + OA^2$$

$$AT = AT'$$



فاصله O تا وتر زاویه ای است

$$OT = OT'$$

روی تیراز

$$MT = MT'$$

③ OM نیمساز O و نیمساز M است.

OM عمود منصف TT' است.

$OH \times OM = R^2$

$TT'^2 = 4OH \times MH$

$TT' \times OM = 2R \times MT$

$MT = MT'$

$(\frac{TT'}{2})^2 = OH \times HM$

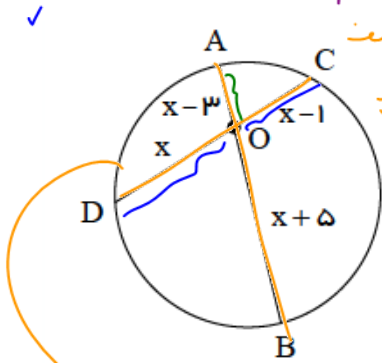
$R^2 = OH \times OM$

$S = R \times TM = \frac{TT'}{2} \times OM$

$2R \times TM = TT' \times OM$

دکترها مسیح

تفاوت = نسبت ۳۵ - ۴۱
+ صفحه ۲۳ جزوه
+ اثبات میز عمود منته
+ بهترین درس! کتاب محل



۳۷ در شکل مقابل x برابر است با:

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۸ (۳)

گزینه های ۱، ۲ و ۳

$$(x-1) \times x = (x-3)(x+5)$$

$$x^2 - x = x^2 + 2x - 15$$

$$15 = 3x \rightarrow x = 5 \checkmark$$

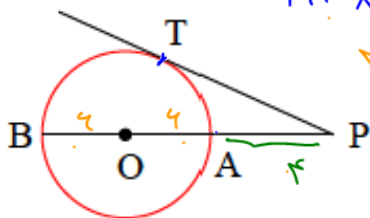
۳۸ در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و قطر AB و $PA = 4$ می باشد، طول مماس PT کدام است؟

۸ (۱)

۱۴ (۲)

$5\sqrt{2}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۴)



$$PA \times PB = PT^2$$

$$4 \times 12 = PT^2$$

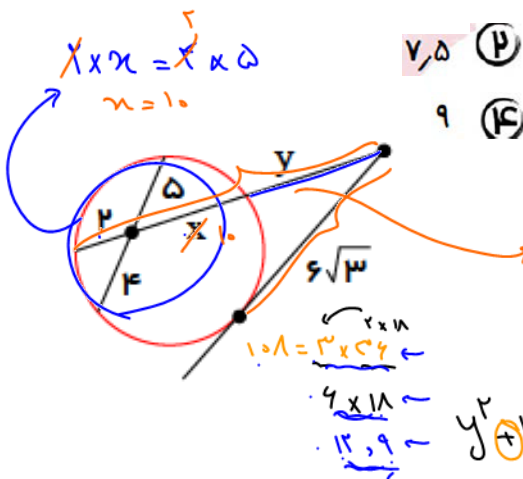
$$2 \times 4 = PT$$

$$8 = PT$$

۳۹ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟

۶ (۱)

۸ (۲)



$$y \times (y+12) = (4\sqrt{3})^2$$

$$y^2 + 12y = 48 \times 3$$

$$y^2 + 12y - 144 = 0 \rightarrow (y+12)(y-12) = 0$$

$$y = 12$$

✓

۴۰. در شکل، مماس و کمان های $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$ ، زاویه A چند درجه است؟

$$72^\circ \text{ (پ)}$$

$$144^\circ \text{ (ک)}$$

$$18^\circ \text{ (۱)}$$

$$36^\circ \text{ (۳)}$$

$$\hat{A} = \frac{2n - n}{2} = \frac{n}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

$$2n + 2n + n = 360$$

$$5n = 360$$

$$n = \frac{360}{5} = 72$$

۴۱. در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $MT = \frac{1}{3}MT'$ باشد، حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ کدام است؟

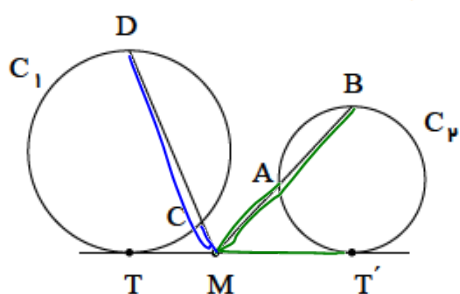
$$3 \text{ (پ)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (ک)}$$

$$4 \text{ (۱)}$$

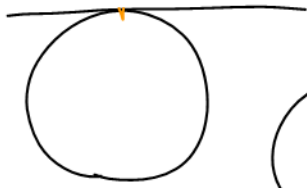
$$9 \text{ (۳)}$$

$$\frac{MT'^2}{MT^2} = \frac{(MT')^2}{(\frac{1}{3}MT')^2} = \frac{\frac{1}{1}MT'^2}{\frac{1}{9}MT'^2} = \frac{9}{1}$$



$$MA \times MB = MT'^2$$

$$MC \times MD = MT^2$$



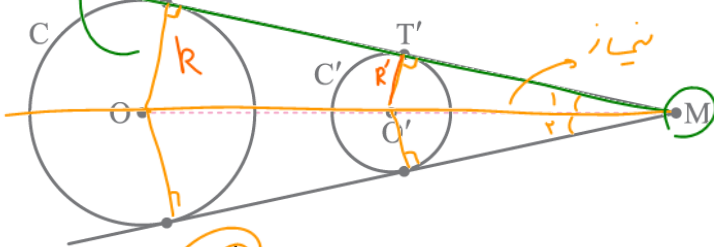
مماس مشترک = خطی است که بر دو دایره مماس است.

مماس مشترک داخلی = خطی که بر دو دایره مماس است و دو دایره در دو طرف خط قرار دارند.

مماس مشترک خارجی = خطی که بر دو دایره مماس است و هر دایره در یک سمت خط قرار دارد.

تالس / ت

$$\frac{MT'}{MT} = \frac{MO'}{MO} = \frac{R'}{R}$$



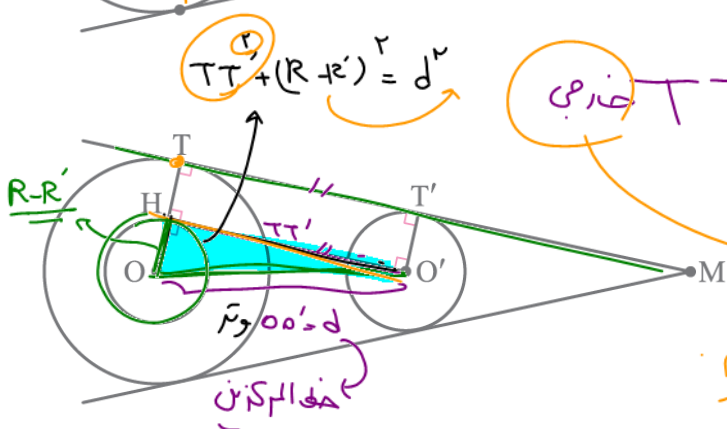
مماس مشترک خارجی

(۱) به مرکز O دایره ای به شعاع $R-R'$ رسم می کنیم

(۲) از O' به دایره هم مماس رسم می کنیم

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

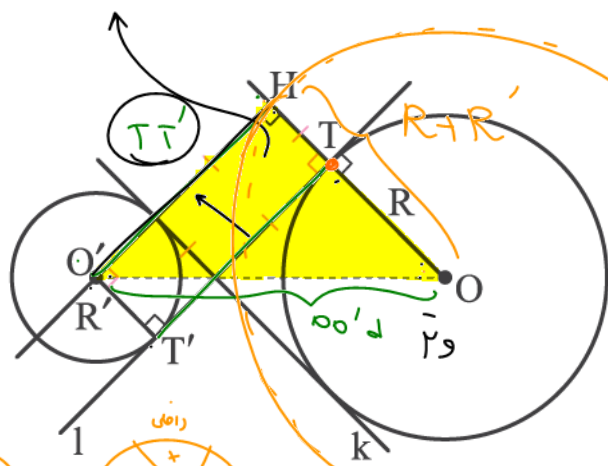
دایره ای به قطر OO' کشیده و محل تقاطع آن با دایره نقطه تماس است (شعاع دایره مماس)



(۳) از O به محل مماس (H) رسم کرده و ادامه می دهیم تا دایره اولیه را در T قطع کند.

(۴) از T به موازات OH مماس مشترک خارجی را رسم می کنیم.

$$OO'^2 = (R+R')^2 + TT'^2$$



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

شعاع دایره مماس

(۱) دایره ای به مرکز O و شعاع $R+R'$ رسم می کنیم

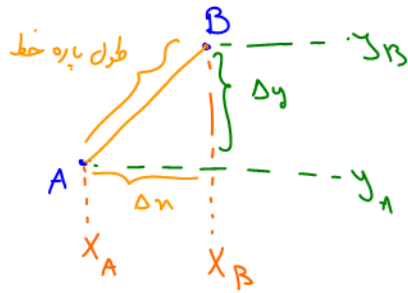
(۲) از O' مماس OH را رسم می کنیم (تقاطع دایره به دایره ای به قطر OO' است)

(۳) شعاع OH را رسم نموده و تقاطع آن با دایره اولیه را T می نامیم

(۴) از T به موازات OH مماس مشترک داخلی را رسم می کنیم.

فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ باشد، از رابطه ی

زیر به دست می آید:



$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$OO' = d = \sqrt{(x_O - x_{O'})^2 + (y_O - y_{O'})^2}$$

خط المکزین

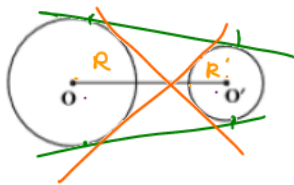
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

خارجی

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

داخلی

۲ مماس خارجی
۲ مماس داخلی
۴ مماس مشترک



$$R + R' < OO'$$

«متخارج»:

$$OO' = R + R'$$

«مماس خارج»:

$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

تقاطع

«مقاطع»:

$$|R - R'| = OO'$$

تangent داخلي

«مماس داخل»:

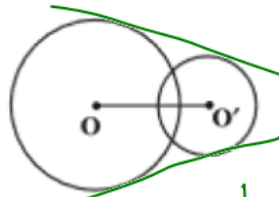
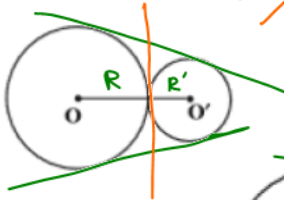
$$OO' < |R - R'|$$

«متداخل»:

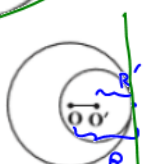
$$OO' = 0$$

«هم مرکز»:

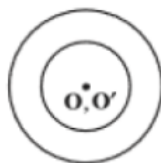
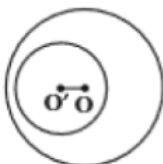
۲ مماس خارجی
۱ مماس داخلی
۳ مماس مشترک



۱ مماس خارجی
۱ مماس داخلی
۱ مماس مشترک



۰ مماس خارجی
۰ مماس داخلی
۰ مماس مشترک



اگر دو دایره را به مراکز $O(2, -3)$ و $O'(1, 4)$ داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی

۴۲

$$OO' = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$R + R' = 2 + 3 = 5$$

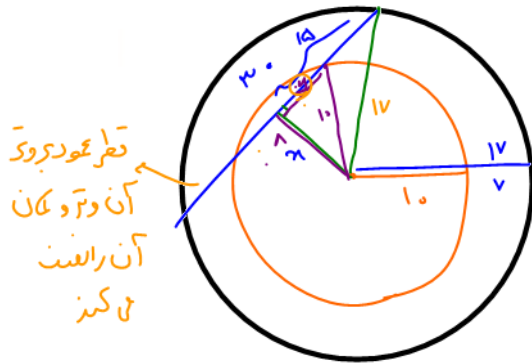
$$5\sqrt{2} > 5 \quad OO' > R + R' \rightarrow \text{متخارج}$$

$$|R - R'| = |3 - 2| = 1$$

۴۳

دو دایره $C(0, 17)$ و $C'(0, 10)$ مفروضند. خط قاطع d که در دایره C وترى به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایره C' وترى با کدام طول پدید می‌آورد؟

۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)



$$17^2 - 15^2 = r^2 \rightarrow (17-15)(17+15) = r^2$$

$$4 \times 32 = r^2 \rightarrow r = 2 \times 4$$

$$r = 8$$

$$6 \times 8 = 48$$

قطر عمود بر وتر
آن وتر و مکان
آن را نصف
می‌کند

۴۴

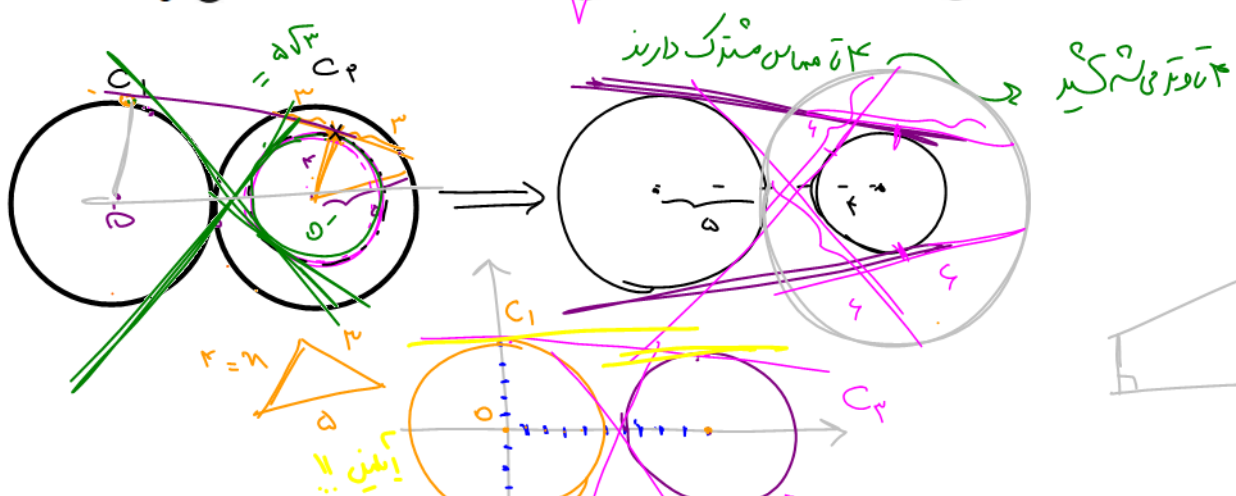
کند؟

① صفر

② ۲

③ ۴

④ بی شمار



۴۵

هم چقدر است؟

① ۲۰

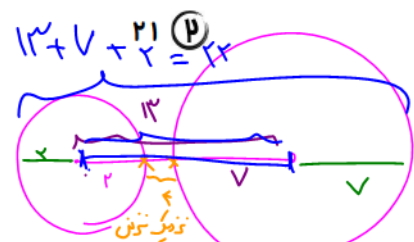
② ۲۲

③ ۲۳

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$12 = \sqrt{d^2 - (17 - 10)^2}$$

$$144 = d^2 - 49 \rightarrow 193 = d^2 \rightarrow d = 13$$



$$13 - 9 = 4 \rightarrow \text{Min فاصله نقاط دایره}$$

$$13 + 9 = 22 \rightarrow \text{Max فاصله نقاط دایره}$$

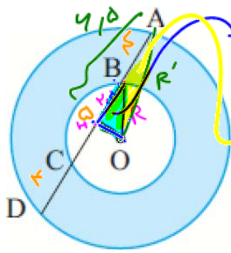

$$y = x$$

دکترها مسیح

$\frac{a}{r} = \frac{15}{R}$

۴۷

در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB = 4$ و $BC = 5$ ، آنگاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



$S = \pi R^2 - \pi R'^2$
 $= \pi (R^2 - R'^2)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$9.5^2 - 2.5^2 = R^2 - R'^2$
 $(9.5 + 2.5)(9.5 - 2.5) = 4 \times 9 = 36$

36π (۲)

20π (۱)

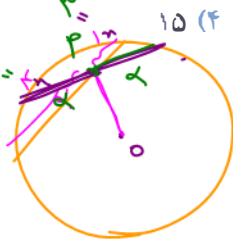
20π (۴)

16π (۳)

۴۸

نقطه P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه P کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۲)

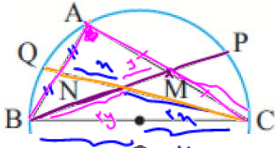


$\alpha \times \alpha = 1 \times 4$
 $\alpha^2 = 4$
 $\alpha = 2$

م وسط وتر از مرکز آن عبور می‌کند.

۴۹

در شکل روبه‌رو، $BC = 6$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$ برابر با کدام است؟

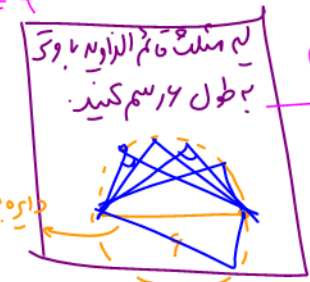


$BM \cdot MP + NQ \cdot CN = \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2 + AC^2}{4} = \frac{BC^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$

$BM \cdot MP = MC \cdot AM = AM = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$NQ \cdot CN = AN \cdot NB = AN^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$

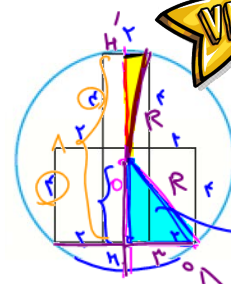
$\hat{A} = 90^\circ$
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$



- ۴ (۱)
- ۹ (۲)
- ۱۶ (۳)
- ۳۶ (۴)

۵۰

چهار تا مستطیل 2×4 مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟



$OH + OH' = 1$

$\sqrt{15}$ (۲)

$\sqrt{14}$ (۱)

$\sqrt{17}$ (۴)

$\sqrt{16}$ (۳)

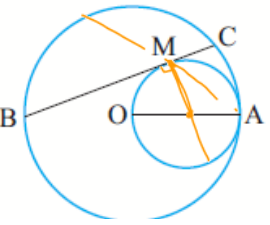
$OH' - OH = 1$
 $(OH' + OH)(OH' - OH) = 1$
 $2OH' = 9 \rightarrow OH' = \frac{9}{2}$

$R^2 = 1 + \frac{15}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{19}}{2} \times 2 = \sqrt{19}$

۵۱

در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار MB.MC برابر کدام است؟

(سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۴)



MO^2 (۱)

MA^2 (۲)

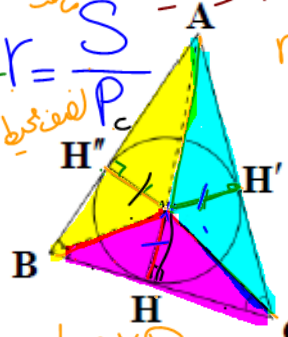
OA^2 (۳)

$MA \cdot MO$ (۴)

دکتر رها مسیح

دایره محیطی / مثلث محیطی

دایره محیطی: دایره‌ای که از رئوس آن می‌گذرد.
 مثلث محیطی: مثلثی که در دایره محیطی قرار دارد.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.



$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{r \times a}{2} + \frac{r \times b}{2} + \frac{r \times c}{2}$$

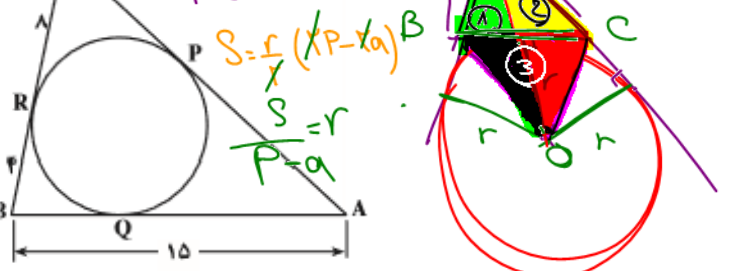
$$S = \frac{r}{2} (a+b+c) \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$



$$S = \frac{c \times r}{2} + \frac{b \times r}{2} + \frac{a \times r}{2}$$

$$S = \frac{r}{2} (c+b+a)$$

$$S = \frac{r}{2} (2P) \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

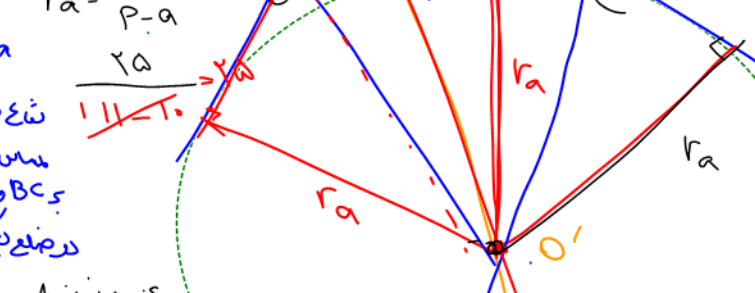


$$r = \frac{S}{P}$$

$$r = \frac{25}{11} \approx 2.27$$

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$r_a = \frac{25}{11-5} = \frac{25}{6}$$

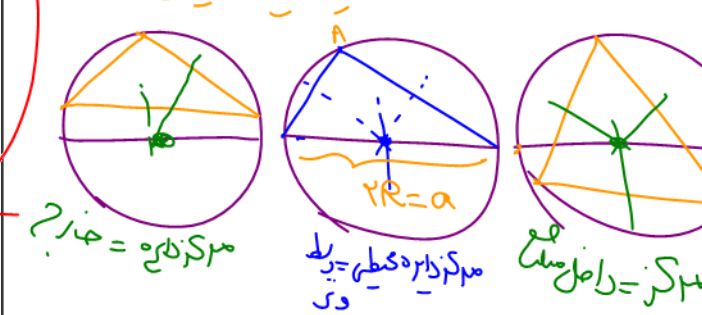


دایره محیطی / مثلث محیطی

دایره محیطی: دایره‌ای که از رئوس آن می‌گذرد.
 مثلث محیطی: مثلثی که در دایره محیطی قرار دارد.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.

دایره محیطی: دایره‌ای که از رئوس آن می‌گذرد.
 مثلث محیطی: مثلثی که در دایره محیطی قرار دارد.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.

دایره محیطی: دایره‌ای که از رئوس آن می‌گذرد.
 مثلث محیطی: مثلثی که در دایره محیطی قرار دارد.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.
 مرکز دایره محیطی: نقطه‌ای که از مرکز دایره محیطی به رئوس آن وصل می‌شود.



$$S = \frac{c \times r}{2} + \frac{b \times r}{2} + \frac{a \times r}{2}$$

$$S = \frac{r}{2} (c+b+a)$$

$$S = \frac{r}{2} (2P) \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$



$$r = \frac{S}{P}$$

$$r = \frac{25}{11} \approx 2.27$$

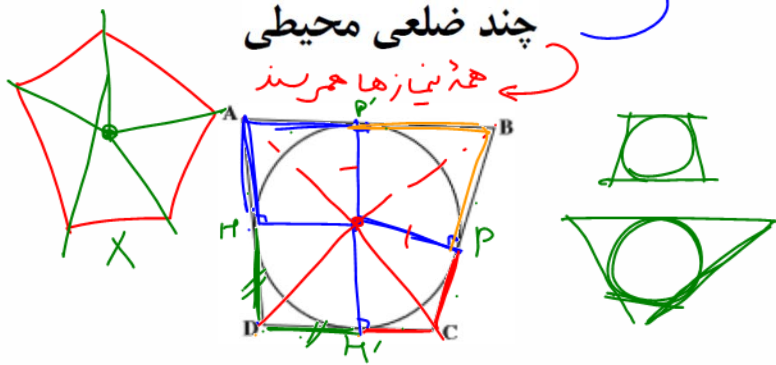
$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$r_a = \frac{25}{11-5} = \frac{25}{6}$$



دکترها مسیح

چند ضلعی که همه اضلاع آن یک‌پارچه هستند



چند ضلعی محیطی

همه زینها هم‌رنگند

مجموع دو ضلع مقابل با هم برابرند
 $AB + DC = AD + BC$

در مثلث $D \rightarrow DH = DH'$

در مثلث $C \rightarrow CP = CH'$

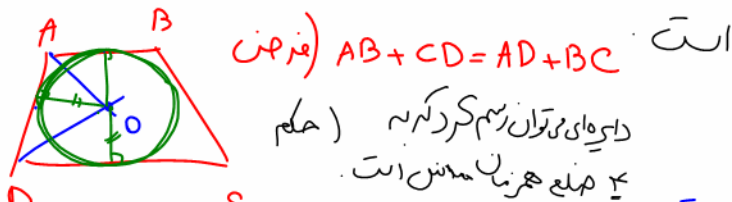
در مثلث $A \rightarrow AH = AP'$

در مثلث $B \rightarrow BP = BP'$

$$CP + BP + DH + AH = DH' + CH' + AP' + BP'$$

$$CD + AD = DC + AB$$

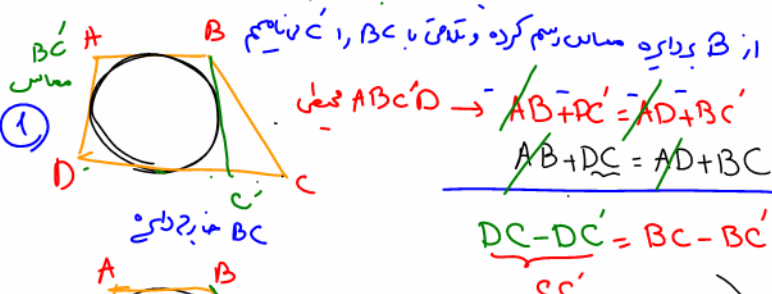
ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی مجموع دو ضلع برابر با مجموع دو ضلع دیگر باشد



است $AB + CD = AD + BC$ (فرض)

دایره‌ای بر آن رسم کردیم (حکم)
 ۳ ضلع هر یک متساوی است

دایره‌ای بر آن رسم کردیم و A و P را رسم می‌کنیم به بیضی AB، AD، DC و BC



$$AB + DC = AD + BC$$

$$AB + DC = AD + BC$$

$$DC - DC' = BC - BC'$$

$$CC' + BC' = BC$$

$$CC' + BC' > BC$$

$$AB + DC' = AD + BC'$$

$$AB + DC = AD + BC$$

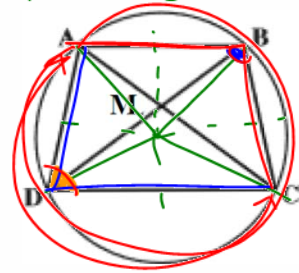
$$DC' - DC = BC' - BC$$

$$CC' + BC = BC'$$

$$DC' - DC = BC' - BC$$

چند ضلعی که رئوس آن روی یک دایره قرار دارند

چند ضلعی محاطی
 عمود مسافت همه اضلاع آن هم‌رنگند



مجموع زوایای مقابل ۱۸۰°
 زوایای مقابل متساوی

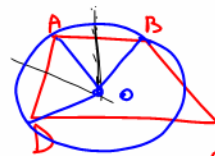
$$\hat{D} = \frac{ABC}{2}$$

$$\hat{B} = \frac{ADC}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{240}{2} = 120^\circ$$

به طوری که در مقابل یک دایره
 دیگر هم آنرا کرد $A + C = 180^\circ$

اگر در یک چهار ضلعی زوایای مقابل یکی باشند آن‌ها چهار ضلعی محاطی است

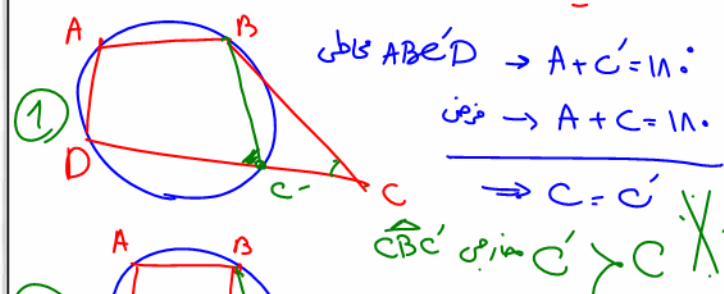


$$A + C = 180^\circ$$

$$B + D = 180^\circ$$

دایره‌ای بر آن رسم کردیم و A و P را رسم می‌کنیم

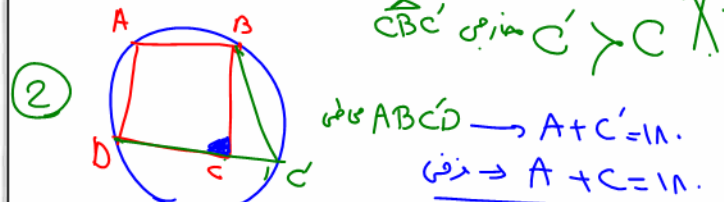
دایره‌ای بر آن رسم کردیم و A و P را رسم می‌کنیم



$$A + C' = 180^\circ$$

$$\rightarrow A + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow C = C'$$



$$A + C' = 180^\circ$$

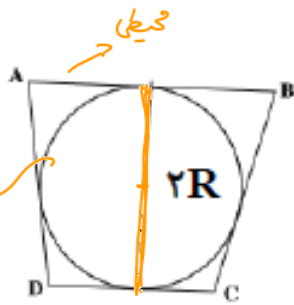
$$\rightarrow A + C = 180^\circ$$

زاویه خارجی $\hat{C} > \hat{C}'$

$$C = C'$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکترها مسیح



$$(2R)^2 = AB \times CD$$

ارتفاع

دوزنقه

مستوی الساقین $\leftrightarrow$ محیط

$$a + b = 2c$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

میانگین دو پایه = ساق

$$2R = \text{ارتفاع}$$

$$\text{ارتفاع هندسی دوزنقه} = \text{ارتفاع}$$

اثبات

+ تریگنومتری و کتاب

+ نسبت های پیمانه در

+ ارامه نسبت کند

باینده

۵۲ یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۳

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۵۴

یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۵

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ ، طول خط المکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۵۶ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $4/8$ (۲) ۵ (۳) $9/6$ (۴) ۱۰

۵۷ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۵۸

اگر در یک مثلث قائم الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

$$(1) \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \quad (2) \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \quad (3) \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad (4) \frac{5-\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$$

۵۹

در مثلث ABC اگر $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 40$ باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

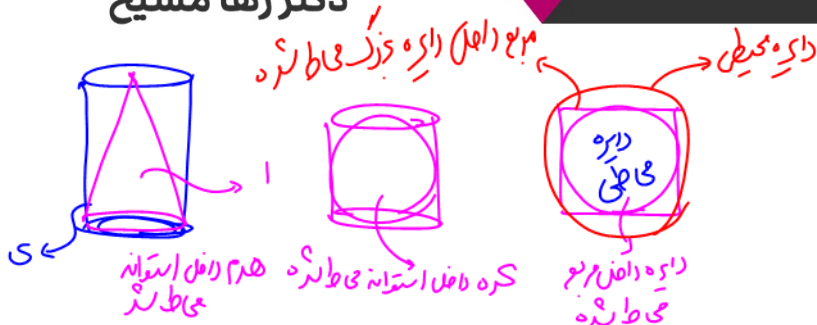
$$(1) 1 \quad (2) 4 \quad (3) \sqrt{5} \quad (4) \sqrt{3}$$

	متوازی السطوح	لوزی	مستطیل	مربع	کتاب	فرد
محاطی	X	X	✓	✓	در صورتی محاطی که دور آن را می‌توانیم	فقط اگر متوازی السطوح باشد
محیطی	X	✓	X	✓	✓	$a+b=c+d$

نمره ۱/۲۵

در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید. خرداد ۱۴۰۳

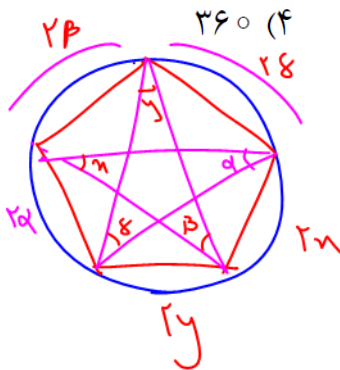
دکترها مسیح



جاست تست
دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم
زوایا و تعاریف و قضایای اولیه

۱ یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

تیر ماه ۱۴۰۲



$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 2\epsilon = 360$$

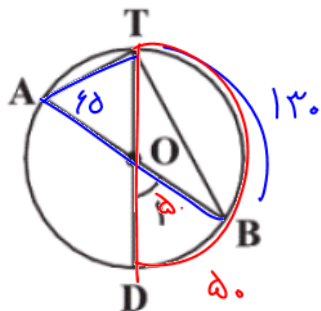
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 180$$

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲) ✓

۵۴۰ (۱)

۲ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه O_۱ کدام است؟



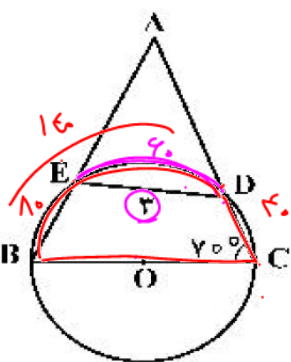
۶۵° (۱)

۶۰° (۲)

۵۰° (۳) ✓

۴۵° (۴)

سراسری ریاضی ۱۴۰۰



- $\Delta = (1$
 $9 = (2$
 $100 = (3$ ✓
 $12 = (4$

- $$F_0^\circ (F) \quad 3_0^\circ (3) \quad 3\Delta^\circ (3) \quad 7_0^\circ (1)$$

$$\frac{d_0 + r_0}{r} = \alpha$$

Spontane; از دو طرف جای جای!

مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

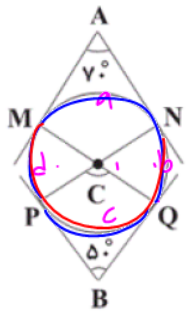
- $$r_{a+1} > v \quad r(f) \quad r(r) \quad \frac{r}{r}(r) \quad 1(1)$$

$$\mu_{a+1} > v$$

$$\mu_a > 4$$

$a > 5$

دکترها مسیح



در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

۱۰۰° (۱)

۱۸۰ - ۴۵ = ۱۳۵° (۲) ✓

۸۰° (۳)

۱۴۰° (۴)

$$a + b + d - c = 100$$

$$b + c + d - a = 140$$

$$2(b + d) = 240$$

$$b + d = 120 \rightarrow c = 40$$

در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 40^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر $\widehat{BME} = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه ABD چند درجه است؟

تیرماه ۱۴۰۱

$$240 - 210 = 30$$

$$x + y = 150$$

$$x + y = 150$$

$$x + y = 25$$

$$\frac{x + 15 - y}{2} = 20$$

$$2y = 125$$

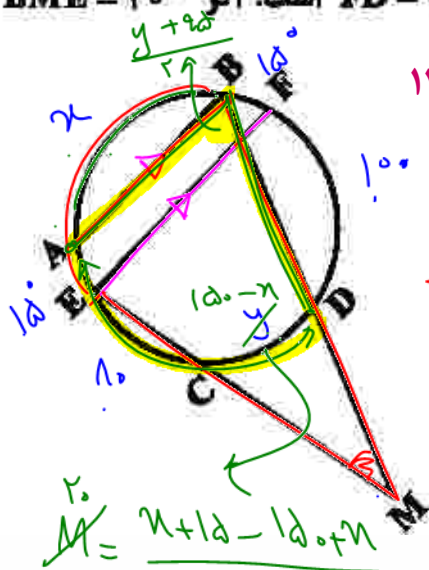
$$y = 62.5$$

۷۱، ۷۵ (۱)

۷۴ (۲)

۷۵ (۳)

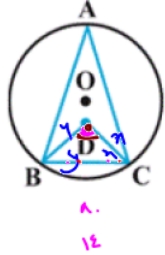
۷۸، ۷۵ (۴) ✓



$$150 = 2x - 125 \rightarrow 2x = 175$$

$$\widehat{ABD} = \frac{42.5 + 95}{2} = \frac{137.5}{2} = 68.75$$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\hat{BDC} = 100^\circ$ ، آن گاه کمان BC چند درجه است؟



$$2x + 2y + A = 180$$

$$2(x + y) = 180 - A$$

$$x + y = 90 - \frac{A}{2}$$

زاویه منفرجه

$$D = 180 - (x + y) = 180 - 90 + \frac{A}{2}$$

$$\frac{A}{2} + 90$$

$$100 = 90 + \frac{A}{2}$$

$$\frac{A}{2} = 10$$

$$A = 20$$

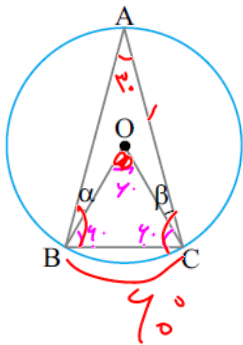
۲۰ (۱)

۸۰ (۲)

۶۰ (۳)

۴۰ (۴)

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



$$30 + \alpha + 40 + \beta + 40 = 180$$

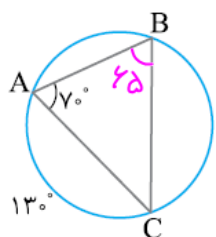
۱۰° (۱)

۲۰° (۲)

۳۰° (۳)

۴۰° (۴)

۱۰ در شکل مقابل اندازهی زاویهی C کدام است؟



$$\frac{180}{130} = 45$$

۷۰° (۱)

۶۰° (۲)

۶۵° (۳)

۴۵° (۴)

۱۱) دایره‌ی $C(O, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد؟

و از M بگذرد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

کوته‌ترین < طول وتر
کوته‌ترین = طول وتر
طول < طول < کوته‌ترین
قطر = طول < کوته‌ترین
طول > کوته‌ترین

$x^2 + 1^2 = 4^2 \rightarrow x^2 = 15 \rightarrow x = \sqrt{15}$
 $2x = 2\sqrt{15} \approx 6.92 > 2$ X
 کوته‌ترین ۳، ...

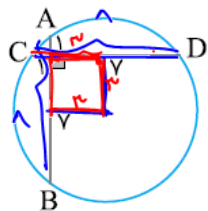
۱۲) مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۵

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۶



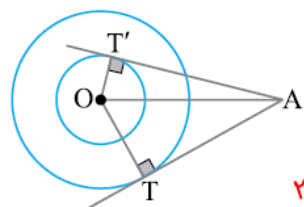
۱۳) مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۴) ۲۰

(۱) ۱۰

(۳) ۱۶



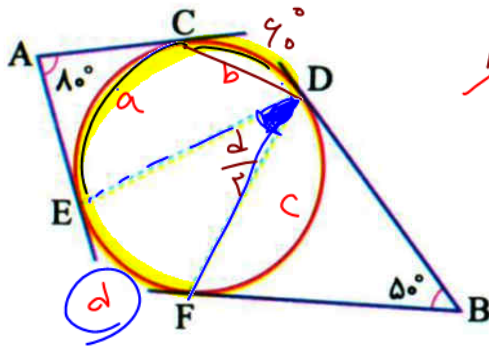
$$AT^2 + 4^2 = OA^2$$

$$AT'^2 + 2^2 = OA^2$$

$$AT'^2 + 16 = AT'^2 + 4$$

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه EDF چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



$$\frac{140}{180} = \frac{90 + c + d - a}{180}$$

$$\frac{100}{180} = \frac{90 + a + d - c}{180}$$

$$\begin{aligned} c + d - a &= 100 \\ a + d - c &= 20 \end{aligned}$$

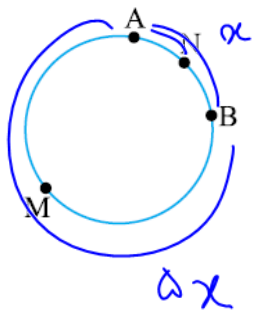
$$2d = 120 \rightarrow d = \frac{120}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

۲۵ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)



۱۵. در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

$\frac{1}{3}$ (۲)

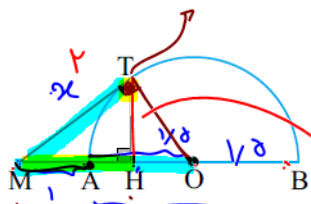
$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۳)

دکترها مسیح

مماس عمود!



در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

۱۶

(۱) $1/5$

(۳) $1/4$

(۲) $1/6$

(۴) $1/8$

$$MT^2 = MA \times MB$$

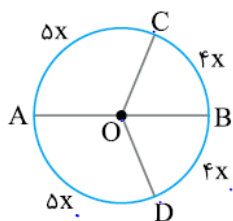
$$MT^2 = 1 \times 3$$

$$MT = \sqrt{3}$$

$$MT^2 = MH \times MO$$

$$3 = MH \times 1.5$$

$$1.9 = \frac{1.4}{1.5} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{5} = MH$$



در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

۱۷

(۲) 150°

(۴) 130°

(۱) 160°

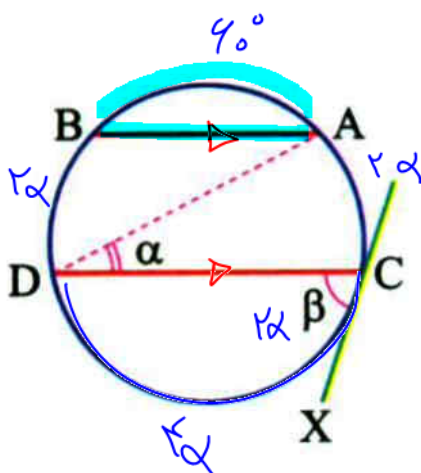
(۳) 140°

$$18x = 90^\circ$$

$$x = 5^\circ$$

در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان BD چند درجه است؟

۱۸



سراسری ۹۸

(۱) 50°

(۲) 60°

(۳) 70°

(۴) 75°

$$2\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 40^\circ = 180^\circ$$

$$8\alpha = 140^\circ$$

$$\alpha = 17.5^\circ$$

در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره معاطی

۱۹

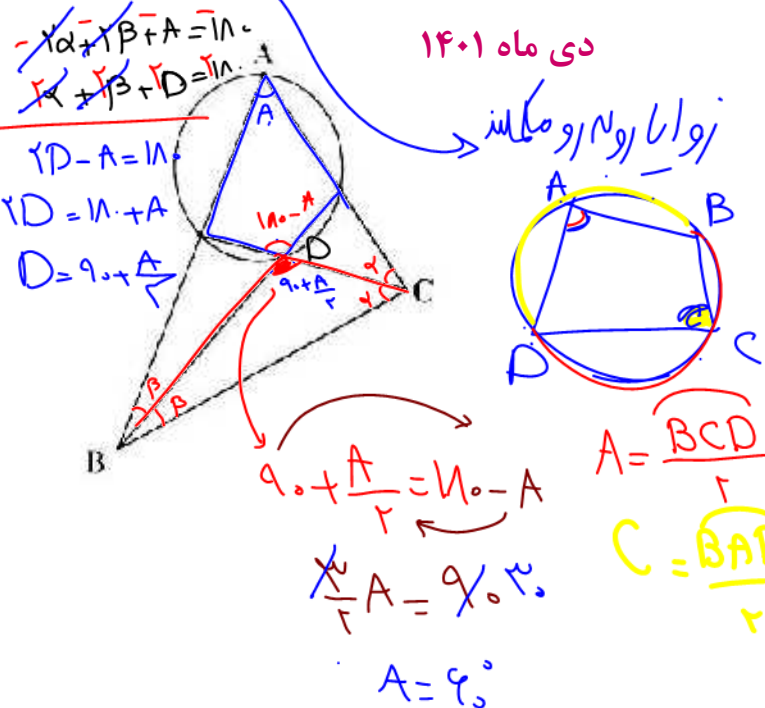
باشد، زاویه A چند درجه است؟

۹۰ (۱)

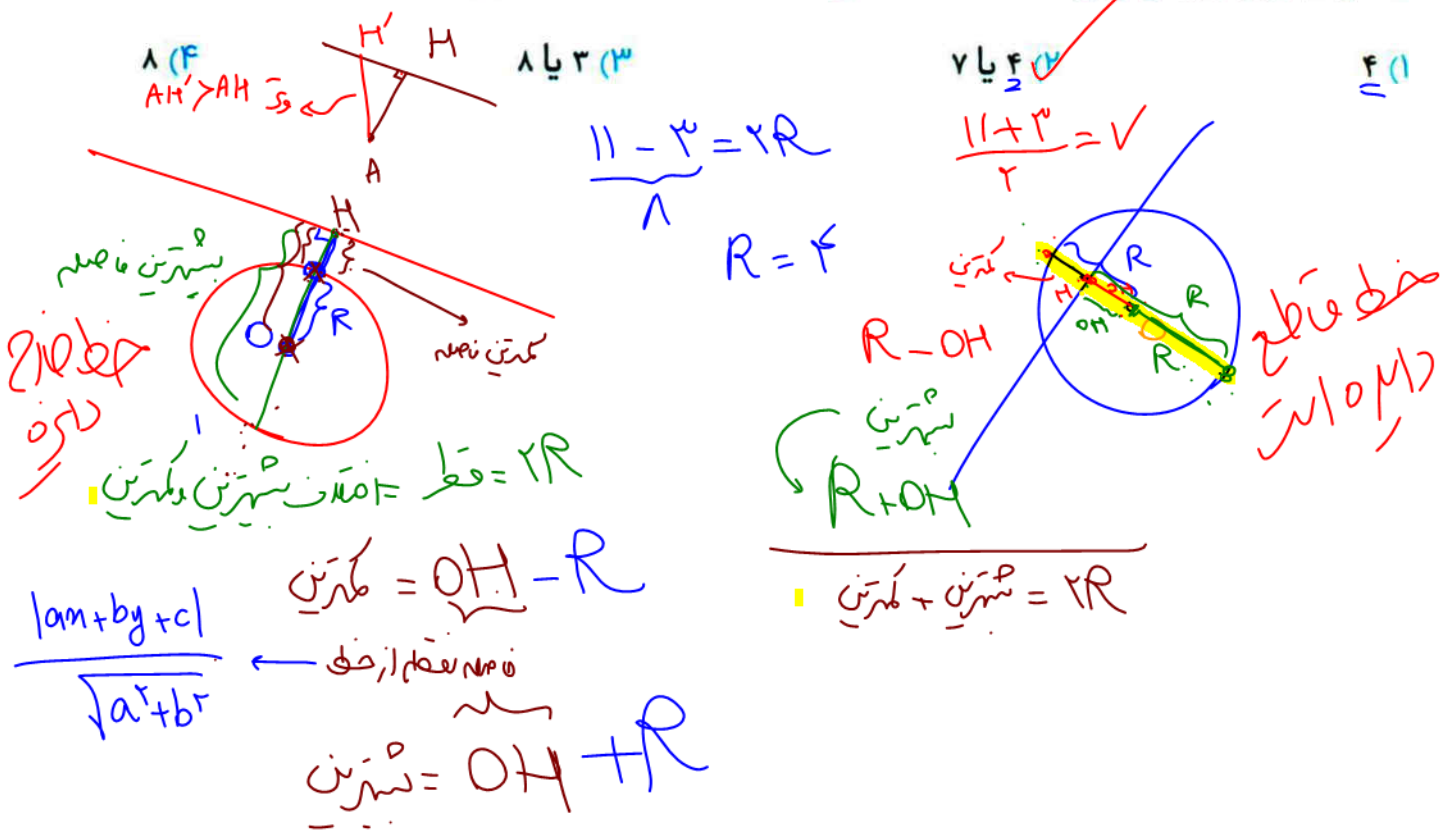
۷۵ (۲)

۶۰ (۳)

۴۵ (۴)



۲۰. اگر کمترین و بیشترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟



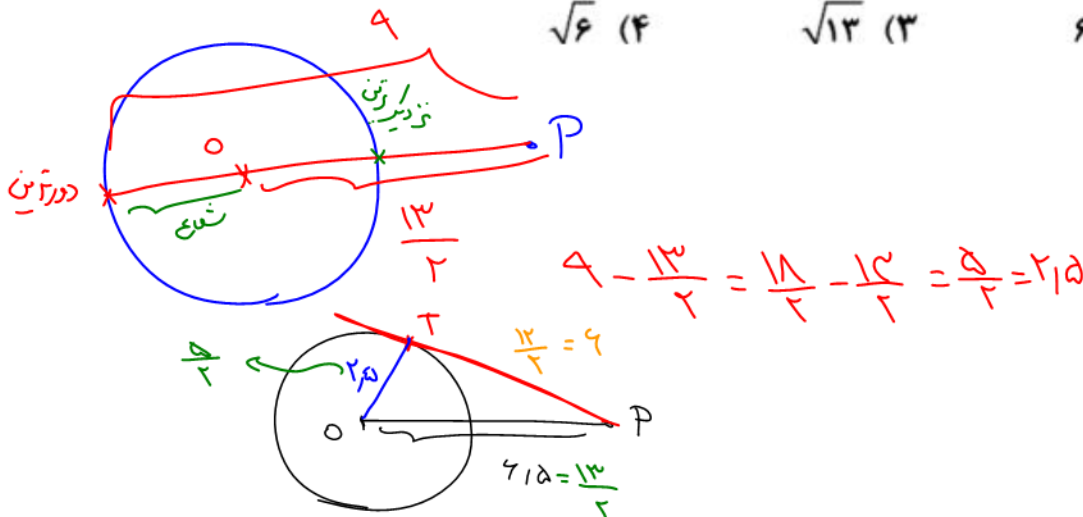
جاست تست

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم ✓ تأهفنه تدبر و نمول ۲۰ بلیره!

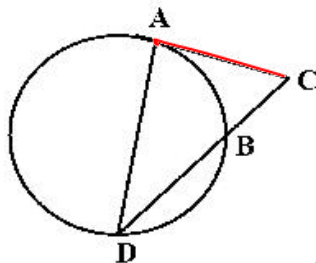
زوایا و روابط طولی در دایره

۱ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$



۲ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟



$$AC = \sqrt{3} BC$$

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۳

$$AC^2 = CB \times CD$$

$$3BC^2 = BC (BC + BD)$$

$$3BC = BC + BD$$

$$\frac{2BC}{BC} = \frac{BD}{BC}$$

سراسری ۱۴۰۰

۳ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ است. خط‌المرکزین دو دایره چند واحد است؟

$$7\sqrt{6} \text{ (F)}$$

17 (3)

1λ (Y)

$$12\sqrt{2} \text{ (1)}$$

سراسری ریاضی ۱۳۹۱

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R' - R)^2}$$

$$|a\rangle = \sqrt{d^r - (1)^r}$$

$$22\Delta + 2K = d^2$$

$$d^r = 219 \longrightarrow d = 1V$$

$$\begin{array}{r} 1V \\ 1V \quad \times \\ \hline 119 \\ 1V \\ \hline 219 \end{array}$$

$$\frac{\alpha}{\psi\psi_0} = \frac{l}{r\pi r} = \frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{\pi t}$$

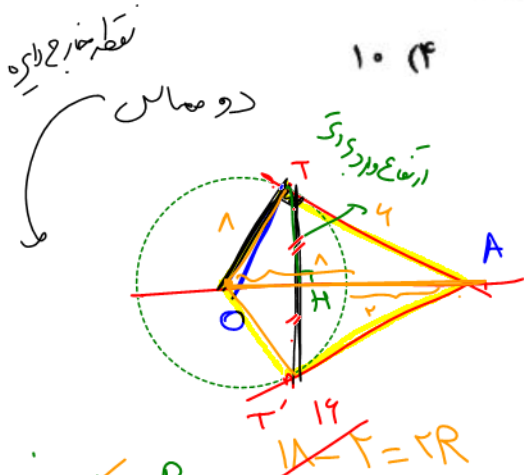
کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

10. (F)

9/6 (Y)

Δ (2)

F/A (1)

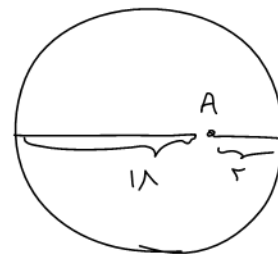


$$TH = OH \times AH$$

$$\underline{TH} \times \cancel{OA} = \cancel{OT} \times \underline{TA}$$

$$T_H = \frac{K_A}{1.0}$$

$$\gamma_{TH} = \frac{94}{1} = 9,4$$

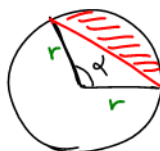


منہاں حاصل
کرد

$$\begin{aligned} Y_0 &= YR \\ 1_0 &= R \end{aligned}$$

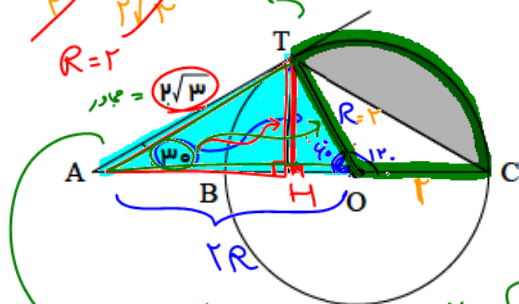
$$\cancel{\tan \theta} = \frac{R}{r \sqrt{r}}$$

$$R = \wedge$$



$$S_D - S_A = \frac{r r \alpha}{\pi q} - \frac{r \times \sin \alpha}{r} = \frac{r}{r} (\frac{r \alpha}{\ln} - \sin \alpha)$$

۵ در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشورخورده چقدر است؟



$$\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

५

$$FR^T = R^T + IY$$

$$wR^2 = 19$$

$$R^Y = Y \rightarrow R = Y$$



$$\frac{r\pi}{r} = \sqrt{r} \quad (1)$$

$$\frac{r\pi}{r} - \frac{\sqrt{r}}{r} \quad (\mu)$$

$$\frac{1\%}{10\%} = \frac{S}{10\%} \quad \frac{1\%}{10\%} = S$$

$$S = \underline{R}$$

$$S = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

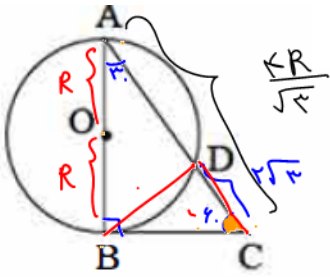
۶ در شکل روبرو پاره خط BC مماس بر دایره، زاویه $\widehat{C} = 60^\circ$ و اندازه CD برابر $2\sqrt{3}$ واحد می باشد. مساحت دایره چقدر است؟

۲۴π ۵

$$f \circ \pi \in \mathbb{C}$$

۳۶π (✓)

1Aπ (μ)



$$CD \times CA = \underbrace{BC^T}$$

$$\sqrt{r} \times \frac{r}{\sqrt{r}} = CA^T - AB^T$$

$$\cancel{\sqrt{F}} \times \frac{\cancel{FR}}{\cancel{\sqrt{F}}} = \left(\frac{FR}{\sqrt{F}}\right)^Y - (FR)^Y$$

$$\cancel{r}AR = \frac{\cancel{r}R^T}{\cancel{r}} - \cancel{r}R^T$$

$$r = \frac{K}{K} R \cdot \frac{K}{K} R = \frac{1}{K} R \rightarrow R = 9$$

$$\frac{\sqrt{r}}{r} \sin \gamma = \frac{rR}{CA}$$

$$CA = \frac{FR}{\sqrt{r}}$$

۷ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان $\widehat{AC}$ برابر $\frac{4\pi}{3}$ است.

است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

$$MC \times MD \quad \swarrow \quad \searrow \quad \begin{matrix} \lambda(1) \\ \lambda(2) \end{matrix}$$

$$MA \times MB = MC \times MD$$

$$MD = \frac{\sqrt{K}}{r} \times K = \sqrt{K}$$

$$D_C = \frac{\sqrt{r}}{r} \times 1 = \sqrt{r}$$

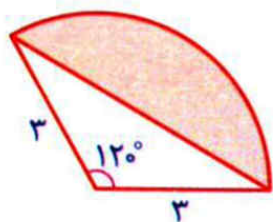
$$MC = PC - MP = 1\sqrt{x} - 1\sqrt{x} = 1\sqrt{x}$$



$$\frac{\alpha}{\cancel{14.}} = \frac{\cancel{1} \cancel{4}}{\cancel{1} \times \cancel{4} \times 4}$$

$\alpha = 4^\circ$

۸ مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

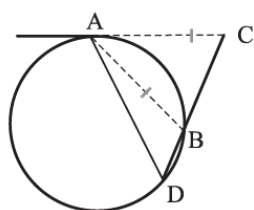
۹. اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, ۱۳)$ و $C'(O', ۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۱۰. در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی

باشد، زاویه A چند درجه است؟

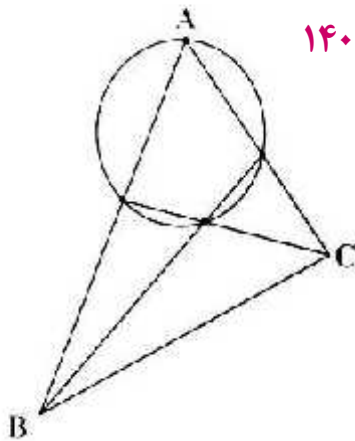
(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

دی ماه ۱۴۰۱



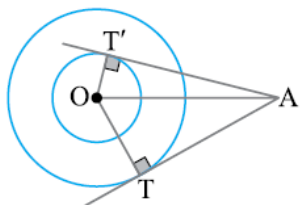
۱۲ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

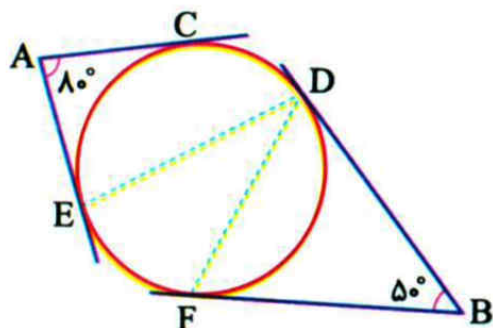
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



(۱) ۲۵

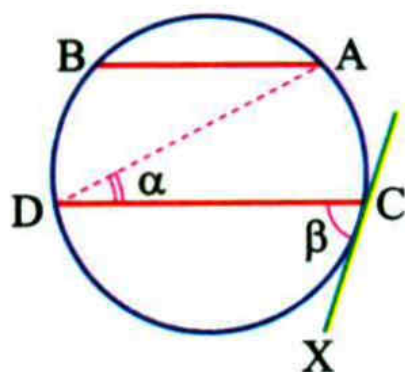
(۲) ۳۰

(۳) ۳۵

(۴) ۴۰

۱۵. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸

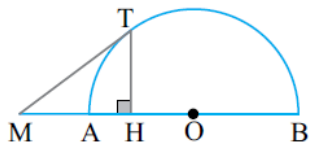


(۱) ۵۰

(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵



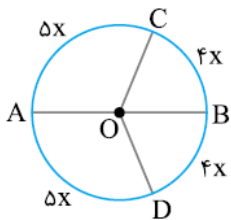
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$



۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۸ فرض کنید خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهای یک دایره و خط $4x+3y+5=0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

(۴) $\sqrt{5}-2$

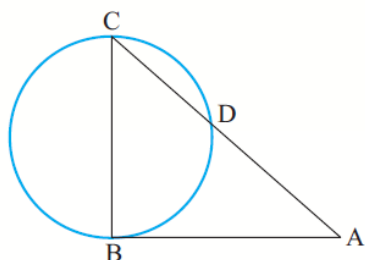
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}-1$

سراسری ۱۴۰۰

۹ خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = 6$ مماس است. اگر $CD = 4$ ، طول پاره خط AD کدام است؟



(۱) ۳

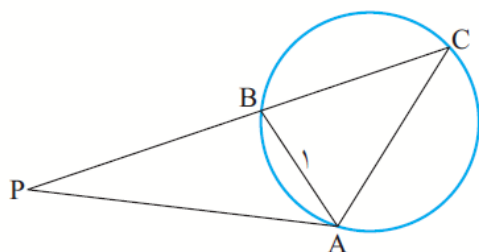
(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹



۲۰ در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(۴) ۲

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی و چند ضلعی محاطی و محیطی

۱ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

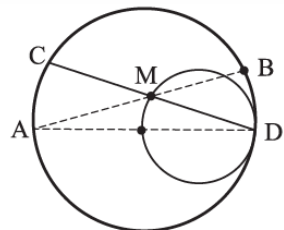
۸ (۱)

۹ (۲)

سراسری
ریاضی ۹۹

۱۲ (۴)

۶ (۳)



۲ فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های $6a - 1$ و $a^2 - 2$ ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

۳ (۱)

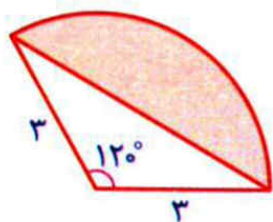
 $\frac{13}{3}$ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

سراسری ۱۴۰۰

۳ مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

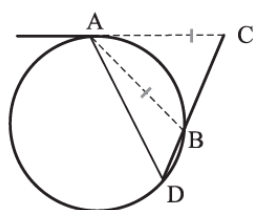
۴ اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, ۱۳)$ و $C'(O', ۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۵ - در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

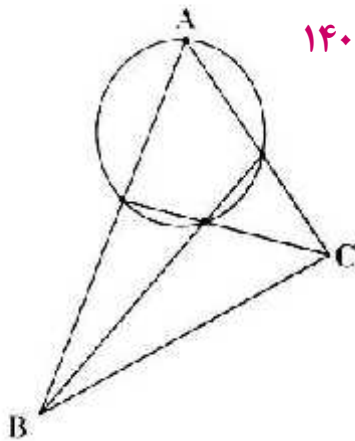
$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۶ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

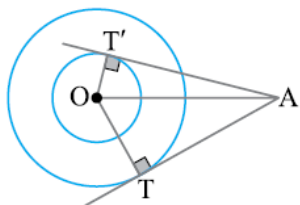
۷ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۸ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

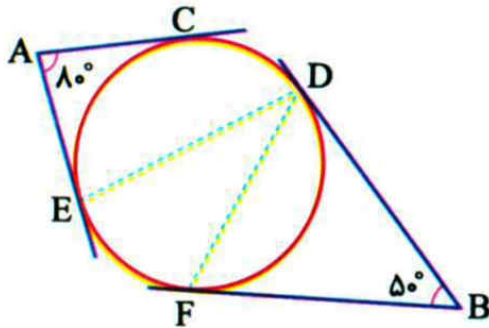
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۹. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

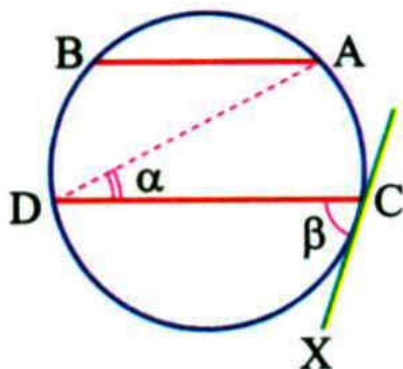
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۰. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸



۵۰ (۱)

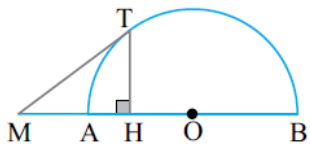
۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)

۱۱

در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



(۲) $\frac{1}{6}$

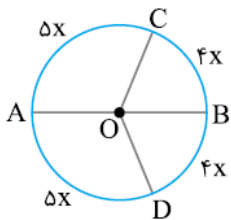
(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۱۲

در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۳

یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های ۸ و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت 15π محیط است. مقدار h کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) $\frac{32}{3}$

(۲) ۸

(۱) $\frac{25}{3}$

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

۱۴ طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها $2\frac{1}{2}\pi$ سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

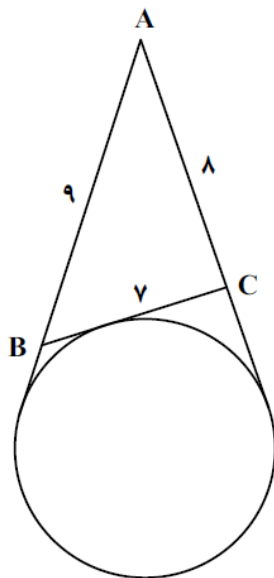
(۴) $2\frac{1}{2}$

(۳) $2\frac{2}{5}$

(۲) $1\frac{1}{2}$

(۱) $1\frac{1}{2}$

۱۵ در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

(۱) $7\sqrt{2}$

(۲) $4\sqrt{5}$

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{5}$

۱۶

یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

(۱) 540°

(۲) 180°

(۳) 720°

(۴) 360°

سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

۱۷

یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه 60° درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۱) $\frac{12}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

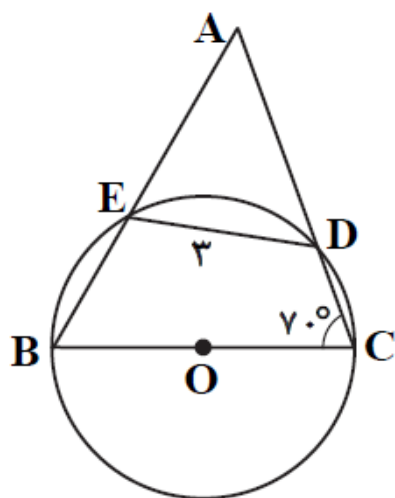
(۳) $\frac{24}{\sqrt{3}}$

(۴) $\frac{32}{\sqrt{3}}$

سراسری
دی ماه ۱۴۰۱

۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) ۸۰

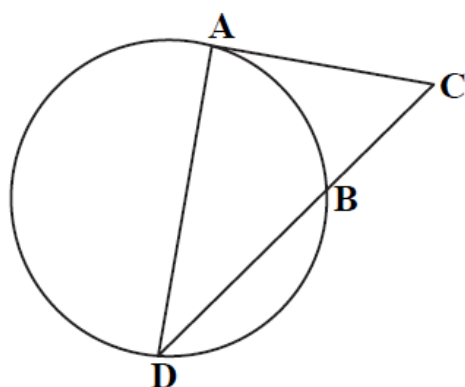
(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۱۹ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) $\sqrt{2}$

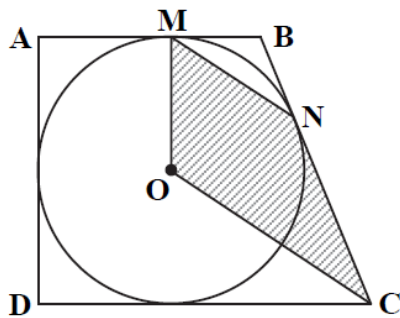
(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۰. مطابق شکل زیر ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است.

اگر زاویه $\hat{MBN} = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی $OMNC$ کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

(۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

(۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

(۴) $۹\sqrt{۳}$

نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آزمون اول هندسه یازدهم - زوایا و روابط طولی در دایره

پایه تحصیلی :

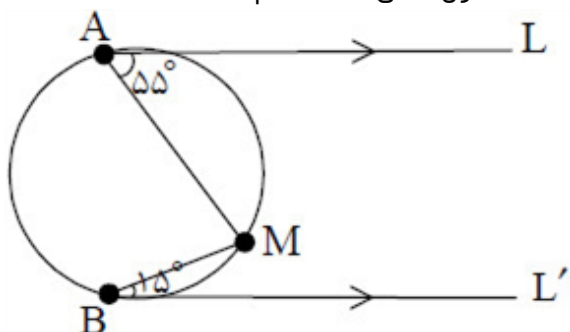
زمان آزمون :

نام دبیر : رها مسیح

تاریخ برگزاری

کارنامه خرد

۱ در شکل مقابل $L \parallel L'$ و شعاع دایره برابر 30° واحد است. با فرض $\pi = 3$ ، طول کمان $\widehat{AB}$ کدام است؟



۶۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

۲ در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ طول مماس مشترک خارجی 12 و طول مماس مشترک داخلی $2\sqrt{15}$ و اندازه خط مرکزین $4\sqrt{10}$ است. اختلاف مساحت دو دایره C و C' ، کدام است؟

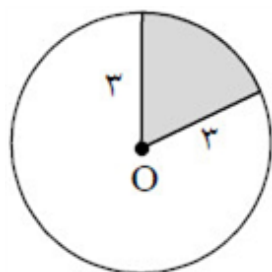
50π (۴)

40π (۳)

30π (۲)

20π (۱)

۳ اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، محیط قسمت سایه خورده کدام است؟ (در محاسبه نهایی محیط π را 3 فرض کنید.)



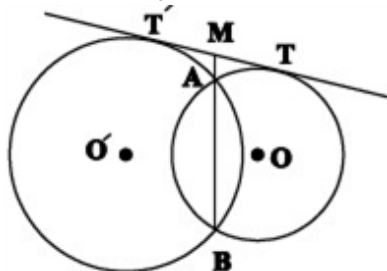
۷ (۴)

۶ (۳)

$10/5$ (۲)

$7/5$ (۱)

۴ در شکل مقابل فاصله مراکز دو دایره متقاطع برابر $OO' = 9$ است. وتر مشترک $AB = 5$ را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در نقطه M قطع کند. اگر $AM = 2$ باشد، اختلاف اندازه شعاع‌های دو دایره کدام است؟



$4\sqrt{2}$ (۴)

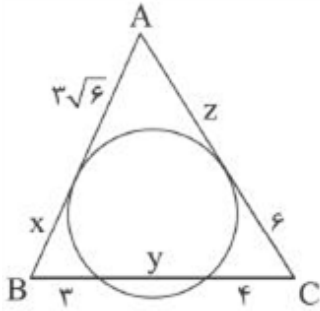
۵ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۱)

۵

در دایره شکل زیر، دو ضلع AB و AC از مثلث ABC بر دایره مماس‌اند. حاصل $x + y + z$ برابر کدام است؟



۴ $5 + 8\sqrt{6}$

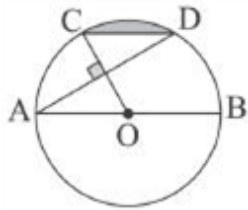
۳ $8\sqrt{6}$

۲ $5\sqrt{6}$

۱ $5 + 5\sqrt{6}$

۶

در دایره به مرکز O و شعاع ۶، دو وتر AB و CD موازی‌اند. مساحت قطعه رنگ‌شده برابر کدام است؟



۴ $6\pi - 9\sqrt{3}$

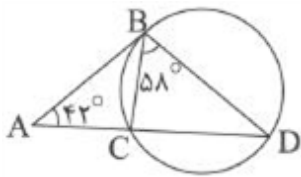
۳ $6\pi - 6\sqrt{3}$

۲ $8\pi - 8\sqrt{3}$

۱ $8\pi - 4\sqrt{3}$

۷

در شکل زیر اندازه زاویه ظلی $\widehat{ABC}$ برابر کدام است؟



۴ 29°

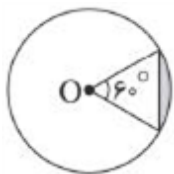
۳ 21°

۲ 36°

۱ 40°

۸

در شکل زیر مساحت قطعه رنگی برابر $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ است. مساحت دایره کدام است؟



۴ π

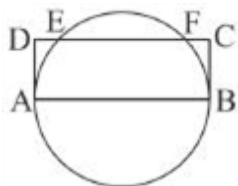
۳ 4π

۲ 6π

۱ 9π

۹

در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF برابر کدام است؟



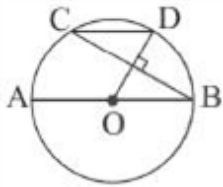
۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

۱۰ در دایره $C(O, 3)$ $CD \parallel AB$ است. طول کمان $\widehat{CD}$ کدام است؟



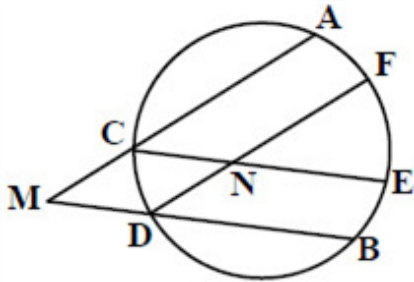
π (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{3\pi}{2}$ (۲)

2π (۱)

۱۱ در شکل مقابل، $BD \parallel CE$ ، $AC \parallel DF$ ، $\widehat{AC} = 85^\circ$ و $\widehat{BD} = 75^\circ$ است. اگر $\widehat{CNF} = 135^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{EF}$ چند درجه است؟



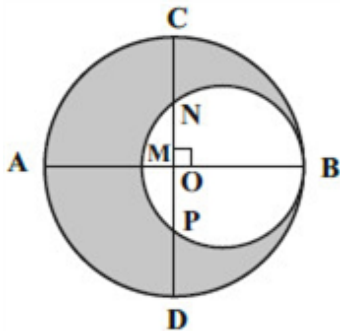
30 (۴)

35 (۳)

40 (۲)

45 (۱)

۱۲ در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = 8$ و $CN = 6$ باشد، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟



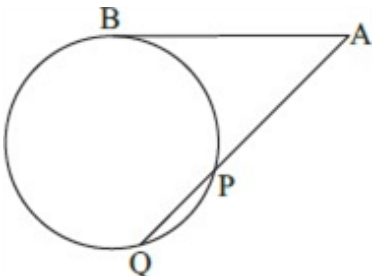
66π (۴)

64π (۳)

56π (۲)

54π (۱)

۱۳ در دایره $C(O, 5)$ پاره خط AB در نقطه B بر دایره مماس است. اگر $AB = 6$ و $AP = 4$ باشند، آنگاه طول کمان PQ برابر کدام است؟



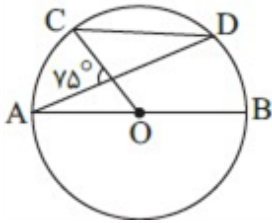
$\frac{5}{6}\pi$ (۴)

$\frac{6}{5}\pi$ (۳)

$\frac{4}{3}\pi$ (۲)

$\frac{5}{3}\pi$ (۱)

۱۴ در شکل مقابل وتر CD با قطر AB موازی است. زاویه $\widehat{DBA}$ چند درجه است؟



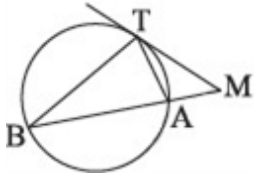
۶۰ (۴)

۶۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۵ در شکل، MT بر دایره مماس است. اگر $AT = ۲$ ، $BT = ۴$ و $MA = ۱/۵$ باشند، آنگاه اندازه AB کدام است؟



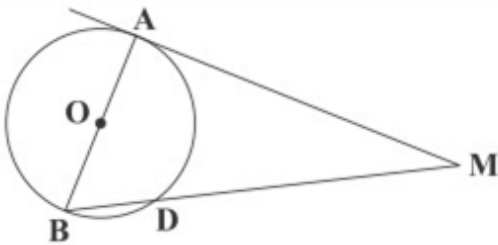
۴ (۴)

۴/۵ (۳)

۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۱۶ در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع آن ۴ واحد است. اگر $BD = ۴$ باشد، طول مماس MA کدام است؟



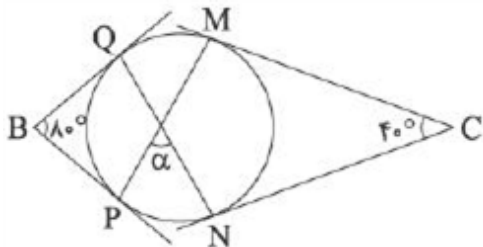
$۱۶\sqrt{۳}$ (۴)

$\sqrt{۳}$ (۳)

$۴\sqrt{۳}$ (۲)

$۸\sqrt{۳}$ (۱)

۱۷ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه α چند درجه است؟



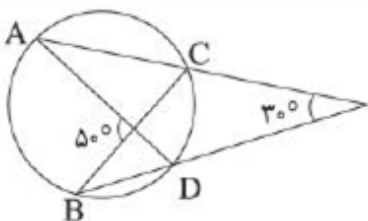
۳۰° (۴)

۵۰° (۳)

۶۰° (۲)

۴۵° (۱)

۱۸ در دایره $C(O, ۶)$ ، طول کمان AB برابر کدام است؟



۳π (۴)

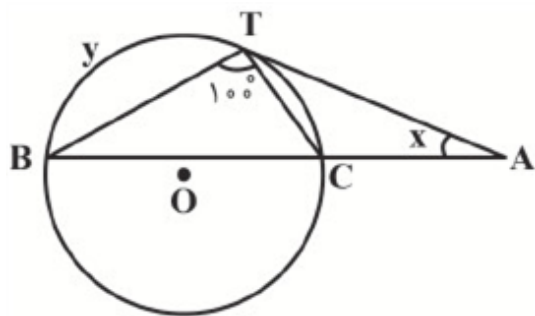
$\frac{۸}{۳}\pi$ (۳)

$\frac{۳}{۲}\pi$ (۲)

۶π (۱)

۱۹

در شکل مقابل، $\widehat{A} = x$ و $\widehat{BT} = y$ است. اگر $\widehat{B} = 2\widehat{A}$ و AT در نقطه‌ی T بر دایره مماس باشد، حاصل $y - x$ کدام است؟



۸۰° (۴)

۹۰° (۳)

۶۰° (۲)

۵۰° (۱)

در دایره‌ای به قطر AB، وتر AC با قطر AB زاویه‌ی 64° می‌سازد. نقطه‌ی D را روی کمان BC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC = CD$ ، زاویه‌ی BAD چند درجه است؟

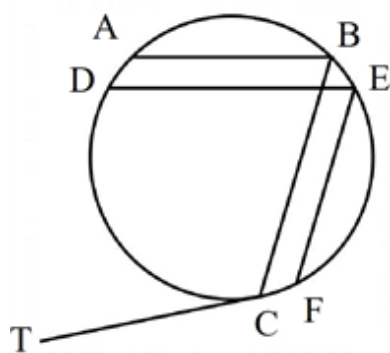
۳۵ (۴)

۳۶ (۳)

۳۷ (۲)

۳۸ (۱)

در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ و $AB \parallel DE$ است. اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 100^\circ$ و $\widehat{EF} = 80^\circ$ باشد، اندازه $\widehat{BCT}$ چند درجه است؟



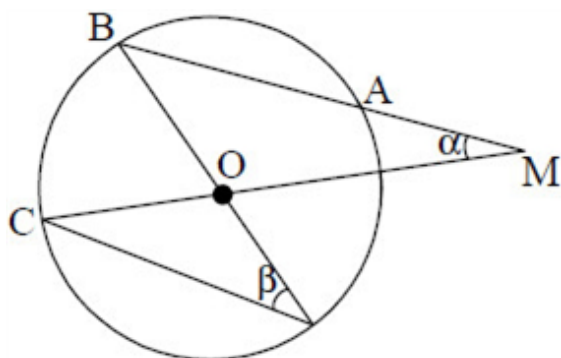
۱۱۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۹۵ (۲)

۹۰ (۱)

از نقطه‌ی M خارج دایره $C(O, R)$ ، خطی چنان رسم شده است که دایره را در نقاط A و B قطع کرده و $MA = R$ است. اگر $\alpha = 22^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه β کدام است؟



۲۲° (۴)

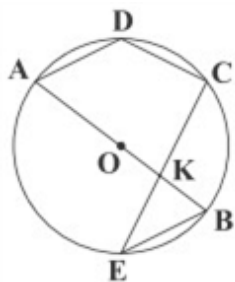
۲۷° (۳)

۳۰° (۲)

۳۳° (۱)

۲۳

در شکل زیر O مرکز و AB قطر دایره و $AD = DC = BE$ می‌باشد. اگر $\widehat{AKE} = 75^\circ$ باشد، زاویه ADC چند درجه است؟



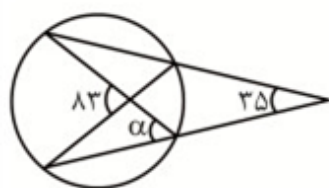
۱۰۰ (۴)

۱۰۵ (۳)

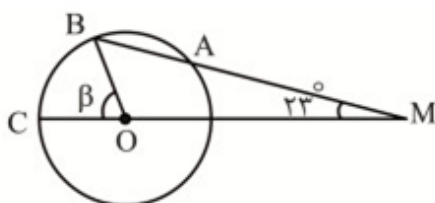
۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

۲۴ با فرض $MA = R$ (R شعاع دایره) در شکل‌های زیر، اندازه $\alpha + \beta$ کدام است؟



۱۳۲ (۴)

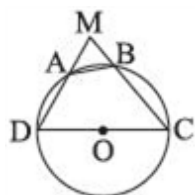


۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۱۸ (۱)

۲۵ در شکل زیر O مرکز دایره است و $CD = 2AD$. اگر $\widehat{BCD} = 50^\circ$ باشد، زاویه M چند درجه است؟



۷۰° (۴)

۶۰° (۳)

۵۰° (۲)

۴۵° (۱)

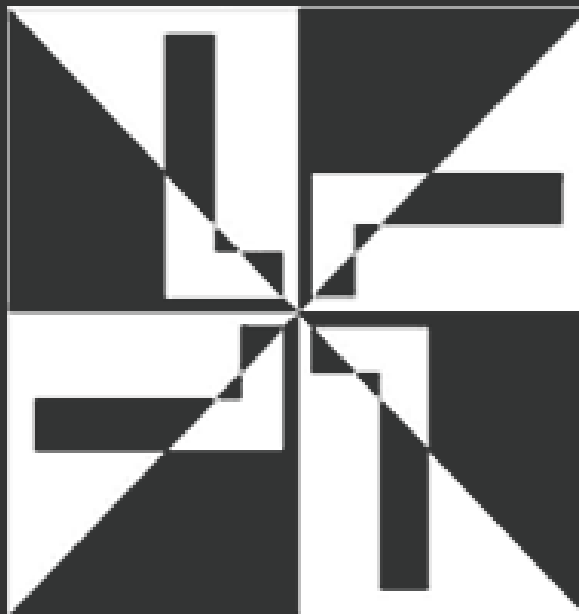
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴

تبدیلات هندسی

نمره در امتحان نهایی
شش نمره

تعداد تست
یک تست

پیش نیاز
تبدیلات هفتم



فصل دو هندسه یازدهم

انتقال، بازتاب ،
دوران و تجانس

تبدیل هندسی

انتقال

بازتاب

دوران

تجانس

$$f(x, y) = (x + y, x - 3y)$$

۱ کدام یک از تبدیلهای زیر یک انتقال است؟

$$T(x, y) = (y + 2, x - 1) \quad (۲)$$

$$T(x, y) = (x + 1, 1 - y) \quad (۱)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x + 1}{2}, \frac{3y + 5}{3} \right) \quad (۴)$$

$$T(x, y) = (2x + 1, 1 + y) \quad (۳)$$

۲ تصویر خط $2x - 3y = 1$ را تحت تبدیل $T(x, y) = (1 - y, 2x + 2)$ به دست آورید.

حفظ شیب	ایزومتري	نقطه ثابت
		انتقال
		بازتاب
		دوران
		تجانس

۵	سه خط دوجه دو ناموازی L_1 و L_2 و L_3 داریم. توضیح دهید که چگونه می توان پاره خطی به طول ۵ واحد رسم کرد که دو سر آن روی L_1 و L_2 باشند و موازی L_3 باشد.	۲
۶	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ واحد باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.	۲
۷	نقطه B تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AB = ۱۶$ و نقطه O روی خط L باشد و $OA = ۱۰$ ، فاصله نقطه A از خط OB را بیابید.	۱/۵
۸	فقط درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) تجانس همواره اندازه زاویه را حفظ می کند. ب) بازتاب همواره شیب خط را حفظ می کند.	۱

۲ یکی از نقاط تلاقی دو دایره C و C' نقطه A می باشد برای رسم خطی از نقطه A گذشته به طوری که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به کار می رود؟

(۱) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز دایره ی کوچک تر.

(۲) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز A .

(۳) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز دایره ی بزرگ تر.

(۴) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز وسط خط الممرکزین دو دایره.

۳ دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ و نقطه A بیرون آن ها مفروضند برای رسم مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین به رأس A بطوریکه دو رأس بعدی در دایره C و C' قرار داشته باشند کدام تبدیل به کار می رود؟

(۱) انتقال (۲) دوران (۳) تجانس (۴) بازتاب

۴ دوران یافته ی خط $3x - y = 2$ به مرکز مبدأ و زاویه ی -90° کدام است؟

(۱) $3y - x = 2$ (۲) $3y + x = 2$ (۳) $3y - x + 2 = 0$ (۴) $3y + x + 2 = 0$

۵

در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی

بزرگ‌تر کدام است؟

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

۶

تحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص

است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

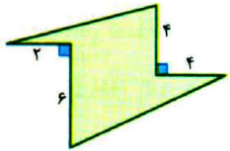
(۱) تجانس (۲) دوران

(۳) بازتاب نسبت به نقطه (۴) بازتاب نسبت به خط

کاربرد تبدیل هم پیرامونی

هرون

۷ زمینی به شکل زیر حصار کشی شده است و مساحت آن ۶۰ مترمربع است اگر بخواهیم بدون تغییر محیط زمین و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، حصارها را طوری جابه‌جا کنیم تا مساحت زمین بیش‌ترین مقدار ممکن شود، در این صورت حداکثر مساحت زمین چند مترمربع است؟



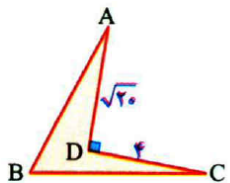
۸۸ (۴)

۸۶ (۳)

۸۴ (۲)

۸۲ (۱)

۸ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟



$8\sqrt{5}$ (۲)

$4\sqrt{5}$ (۱)

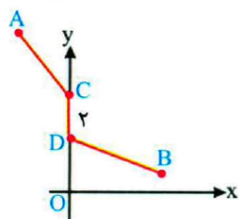
$16\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

۹ دو نقطه $A|-4$ و $B|4$ در طرفین محور y ها قرار دارند، دو نقطه C و D به فاصله دو واحد از هم روی محور y ها قرار دارند، حداقل طول خط

(مشابه داخل - ۹۹)

شکسته $ACDB$ کدام است؟



۹ (۱)

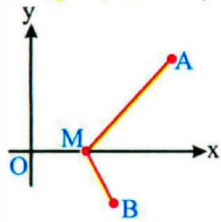
۱۰ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)

دکترها مسیح

۱۰) نقاط $A(4, 6)$ و $B(1, -2)$ در طرفین محور x ها قرار گرفته اند و نقطه M روی محور x هاست. حداکثر $|MA - MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



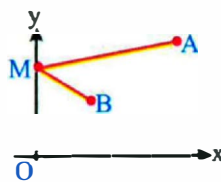
۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۱۱) نقاط $A(5, 7)$ و $B(1, 4)$ در یک طرف محور y ها قرار گرفته اند و نقطه M روی محور y هاست. حداکثر $|MA - MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۴ (۴)

دکتررها مسیح

انتقال

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

حفظ شیب

ویژگی:

حفظ جهت

بازتاب

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

حفظ شیب

ویژگی:

حفظ جهت

دوران

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

حفظ شیب

ویژگی:

حفظ جهت

تجانس

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

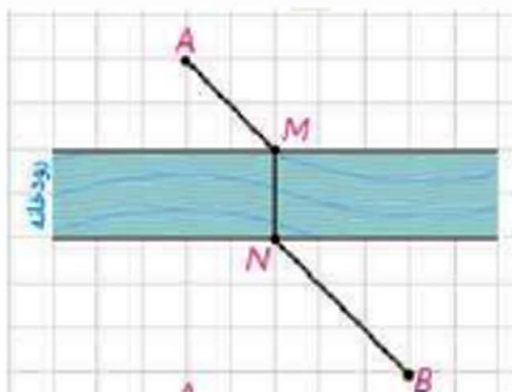
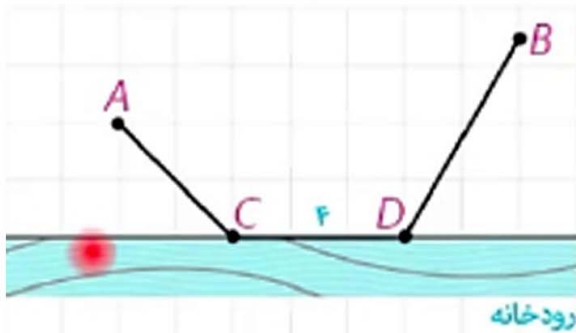
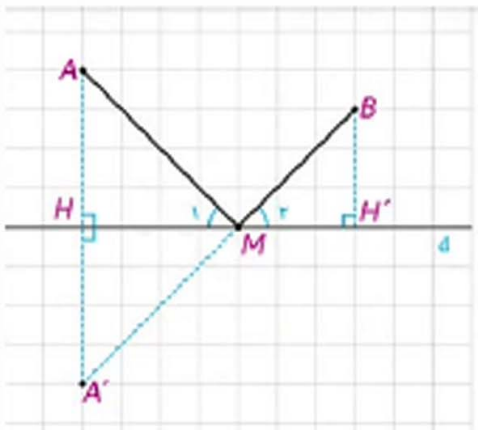
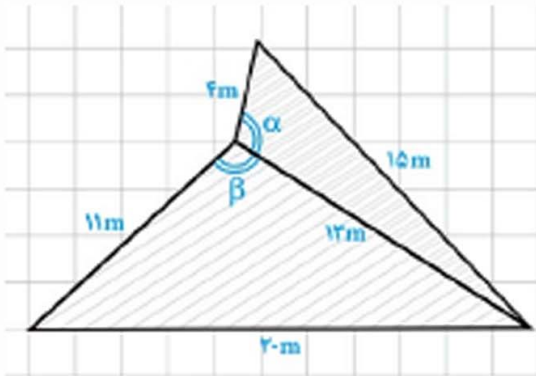
حفظ شیب

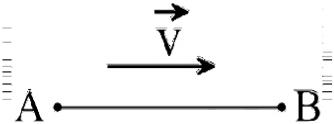
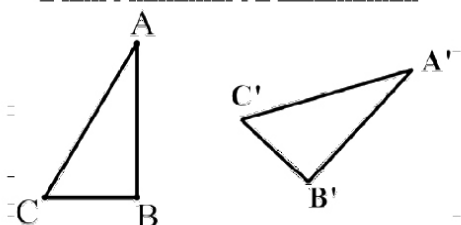
ویژگی:

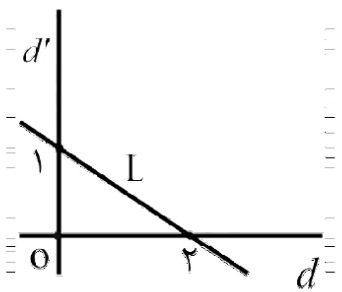
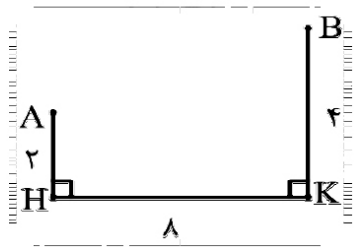
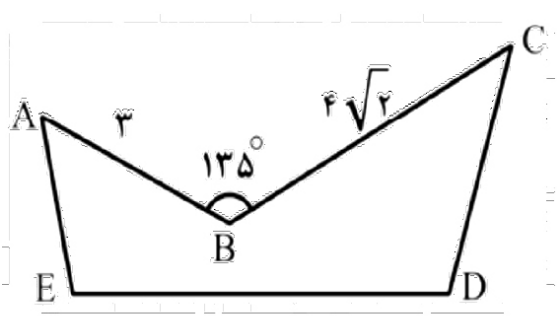
حفظ جهت

تبدیل ها

کاربرد تبدیل ها



ردیف	۱۴۰۳ خرداد	سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	۱۴۰۳ خرداد	نمره										
۷	۰.۷۵	سؤالات فصل ۲ برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است). <table border="1"> <thead> <tr> <th>گروه A</th><th>گروه B</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:</td><td>دوران</td></tr> <tr> <td>ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:</td><td>همانی</td></tr> <tr> <td>پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:</td><td>بازتاب</td></tr> <tr> <td></td><td>انتقال</td></tr> </tbody> </table>	گروه A	گروه B	الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران	ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی	پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب		انتقال		
گروه A	گروه B													
الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران													
ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی													
پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب													
	انتقال													
۸	۱	با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند. ($\vec{V} \parallel AB$ و اندازه $\vec{V}$ از اندازه پاره خط AB کوچک تر است). 												
۹	۰.۵	نقاط A'، B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید. 												

۱.۵	در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟ 	۱۰
۱.۲۵	با توجه به شکل، نقطه M روی پاره‌خط $HK=8$ را به گونه‌ای بیابید که: الف) مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد. ب) کمترین مقدار عددی $AM+MB$ را محاسبه کنید. 	۱۱
۱	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید. 	۱۲

روابط طولی

نمره در امتحان نهایی

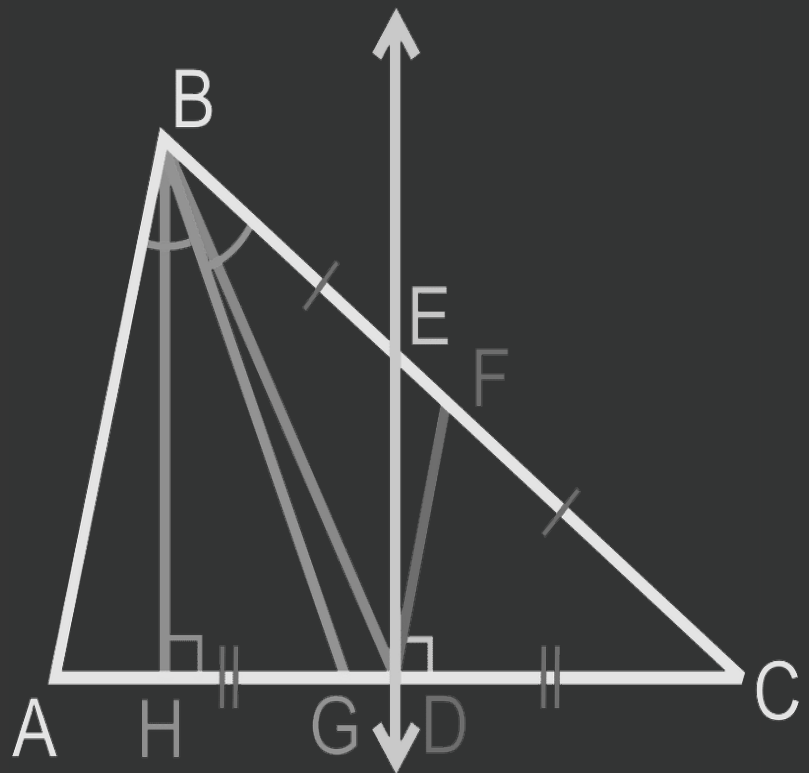
نش نمره

تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

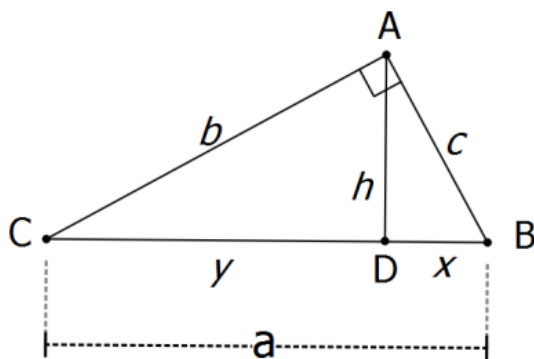
نسبت های مثلثاتی فصل ۲ ریاضی دهم
هندسه دهم فصل ۱



فصل سوم هندسه یازدهم

قضیه سینوس و کسینوس
قضیه نیمساز
قضیه هرون

مثلث قائم الزاویه



$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

قضیه کسینوس ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

۱ در مثلث ABC، زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و $b = a\sqrt{2}$ ، زاویه C چند درجه است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۲۰

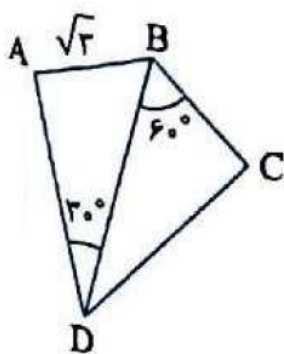
۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD محاطی است. طول ضلع CD کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



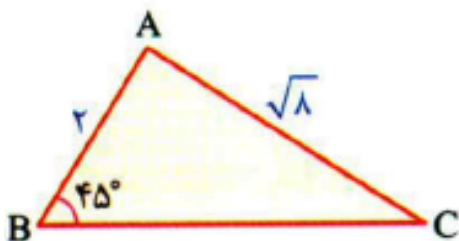
۳ در شکل مقابل اندازه زاویه A چقدر است؟

(۱) 135°

(۳) 75°

(۲) 105°

(۴) 60°



۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ اندازه شعاع دایره محیطی کدام است؟

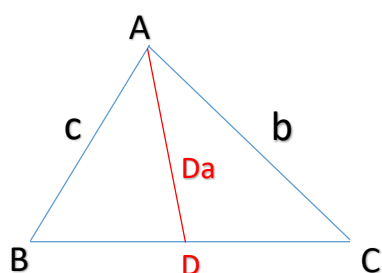
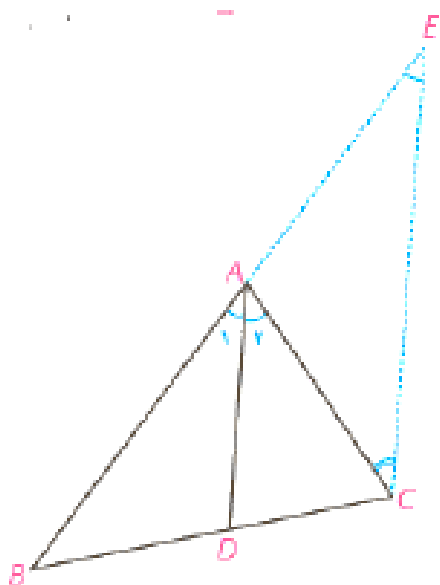
(۱) $8/5$

(۲) $7/5$

(۳) $9/5$

(۴) ۹

قضیه نیمساز و روابط مرتبط با آن



$$da = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

رابطه های میانه

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2ma^2$$

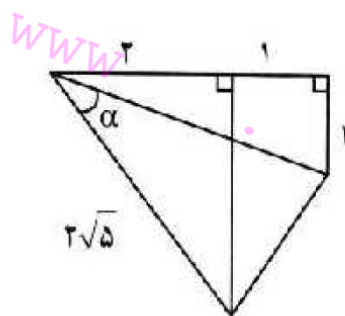
$$ma^2 = b^4 - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

قضیه هرون

در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟ سراسری دی ۱۴۰۱

۵

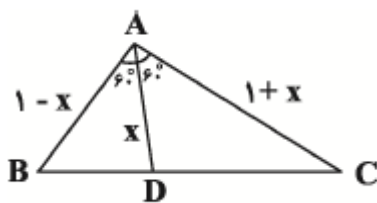


sanjesh

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{10}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

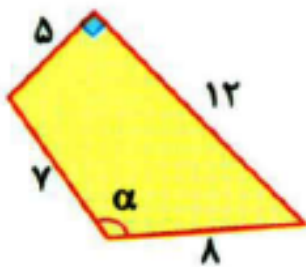
۶ در شکل مقابل، اندازه x کدام است؟

۶



۱. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳. $2 - 1$
۴. $3 - 1$

۷ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع برهم عمودند، $\sin \alpha$ کدام است؟ خارج کشور ۹۸



$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

۸ در مثلث ABC، حاصل $b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \sin^2 \hat{B}$ برابر با کدام است؟

a^2 (۱)

b^2 (۲)

c^2 (۳)

bc (۴)

۹ در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

سراسری ۹۵

$2/8$ (۲)

$2/1\sqrt{2}$ (۴)

$1/4\sqrt{2}$ (۱)

$2/1$ (۳)

۱۰ مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹، ۱۲ کدام است؟

$14\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

$14\sqrt{3}$ (۲)

$15\sqrt{2}$ (۱)

دکترها مسیح

۱۱ در مثلثی با اضلاع x ، 5 ، $2x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{2}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

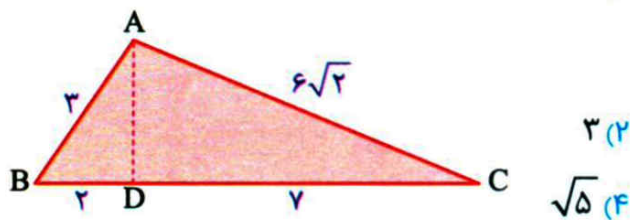
۱۵ (۲)

۱۷ (۱)

۱۲ در مثلثی با اضلاع 7 ، 10 ، 13 طول میانه وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

 $3\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{21}$ (۱)

۱۳ در شکل مقابل طول AD چقدر است؟

۳ (۲)

 $2\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۳)

۱۴ در مثلث ABC اگر $BC=10$ و میانه‌های $BM=12$ و $CN=9$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱۰۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۳۶ (۱)

۱۵ در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۳ و ۴ و زاویه بین آن‌ها 150° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

 $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

سوالات فصل ۳

خرداد ۱۴۰۳

◀ در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟ $0/5$ نمره

الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

◀ در مثلث ABC که $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $1/5$ نمره

◀ مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید. 1 نمره

◀ در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه C را محاسبه کنید. $1/5$ نمره

◀ در مثلث ABC که $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 8$ ، نقطه M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را به دست آورید. $1/5$ نمره