

دایره

نمره در امتحان نهایی

هشت نمره

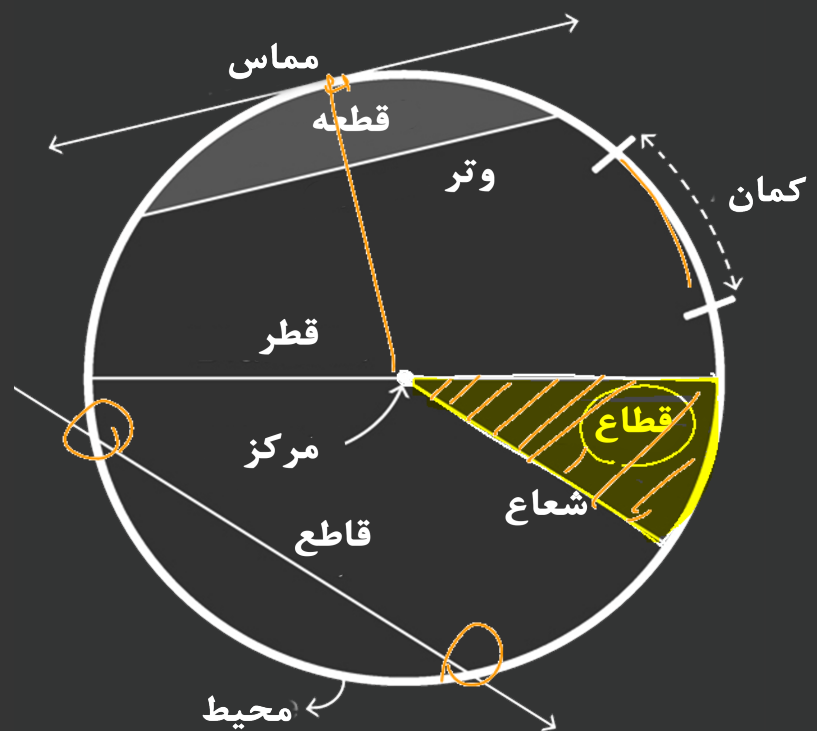
تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

زوایا سال هفتم

فصل ۱ هندسه دهم: هم‌رسانی های مثلث

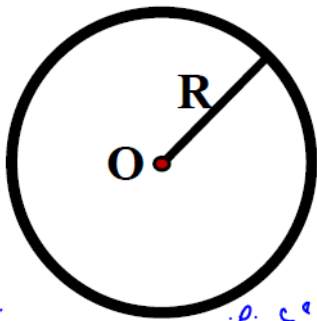


فصل یک هندسه یازدهم

زوایا
روابط طولی
محاطی - محیطی

دایره

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت هستند



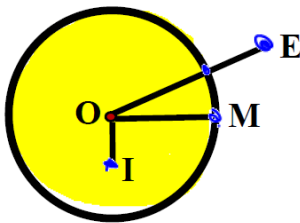
شعاع دایره $OI < R$
فاصله آرای های

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.

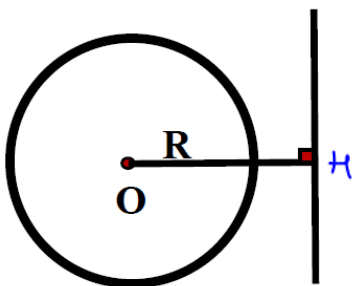
۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.

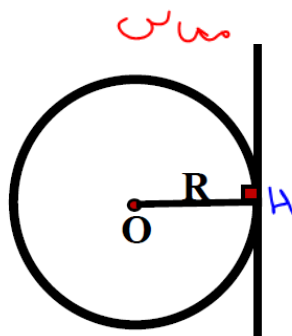


حالت های خط و دایره

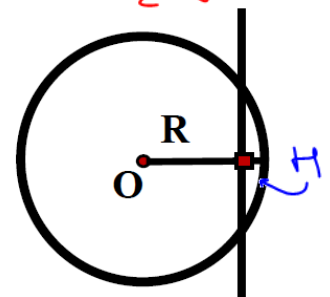
مماس



$OH > R$
بدون برخورد



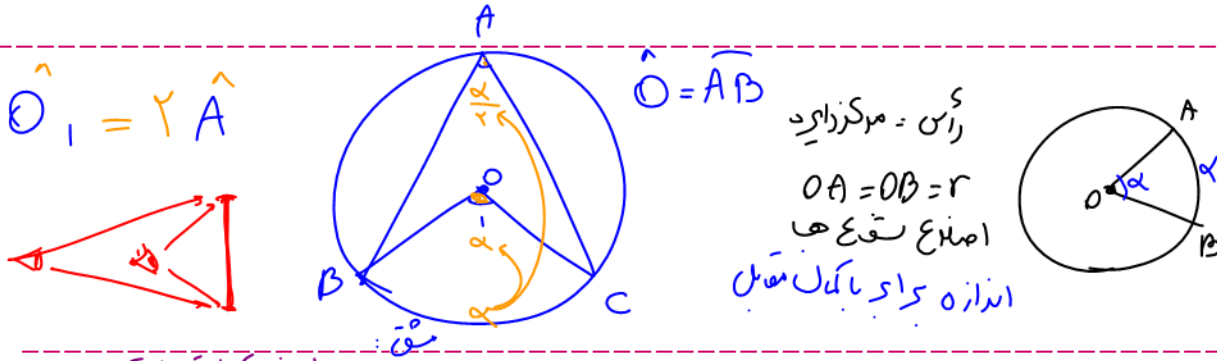
$OH = R$
یک نقطه برخورد



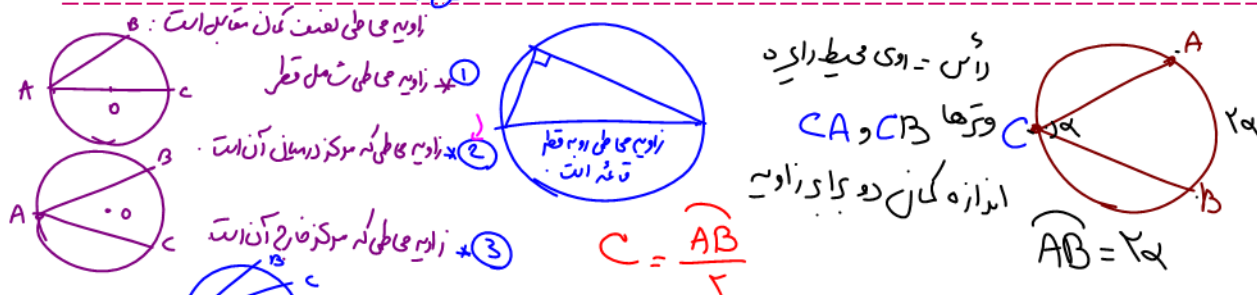
$OH < R$
دو نقطه برخورد

انواع زاویه در دایره

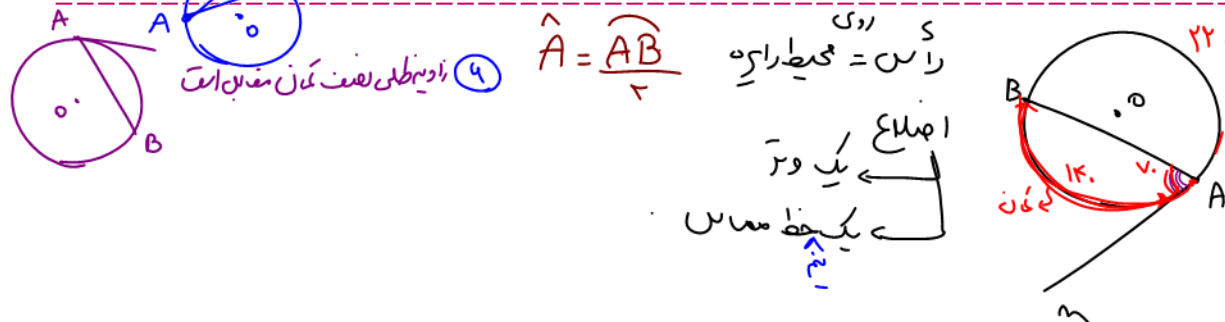
زاویه مرکزی



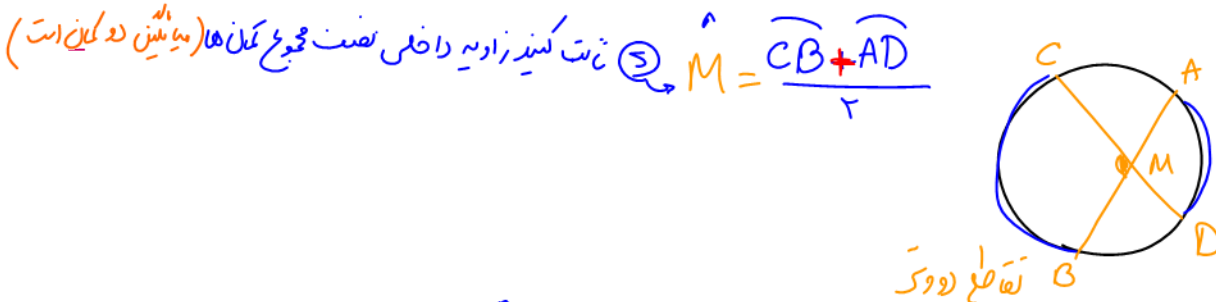
زاویه محاطی



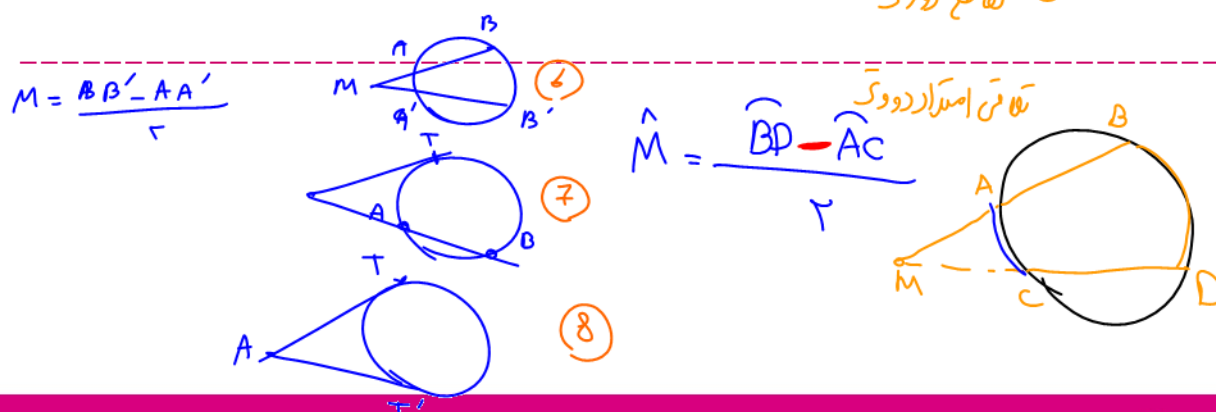
زاویه ظلّی



زاویه داخلی



زاویه خارجی



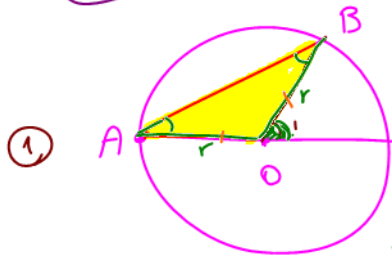
اثبات‌ها (بشترتویک بازایه ضربی حل می‌شوند)



$$\frac{a}{c} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

نهایت (۱) زاویه کبیذ زاویه محاطی نصف کمان مقابل آن است

(حکم) $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



①

نقطه O₁ = BC

نقطه O₁ = A + B

شکل O₁BA

OA = OB = r

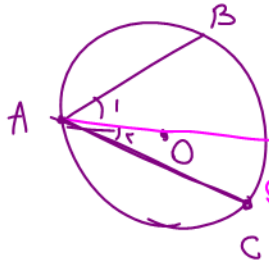
شکل مثلث O₁AB

$\hat{A} = \hat{B}$

① زاویه محاطی از منظر

$O = 2\hat{A} \rightarrow 2\hat{A} = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

② مرکز بین زاویه



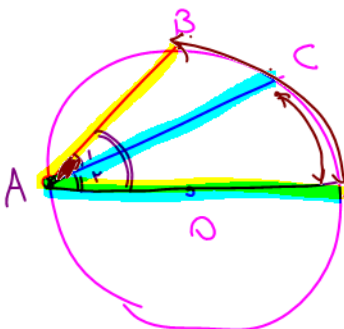
طبق قضیه

$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$

طبق قضیه

$\hat{A}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

$\rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$

$\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

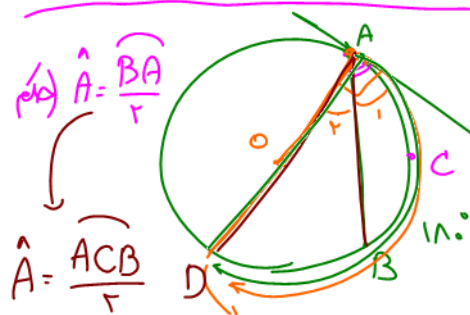
$\hat{A} = \frac{\widehat{DC}}{2}$

$\hat{A}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

$\hat{A}_1 = \hat{A} - \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

③ مرکز خارج از زاویه

$\hat{A}_1 = \hat{A} - \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



(حکم) $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

خط مماس در نقطه A بر شعاع عمود است

$\hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2}$

$\hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{A}_2 = 90^\circ - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BD}}{2}$

$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

اثبات (۴) زاویه محاطی نصف کمان محصور است

$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

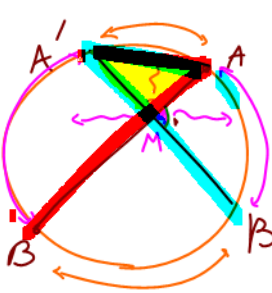
$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

اثبات (۵) زاویه کبیذ زاویه حاصل از برخورد دو وتر را بره و یا می‌توان دو کمان محصور است



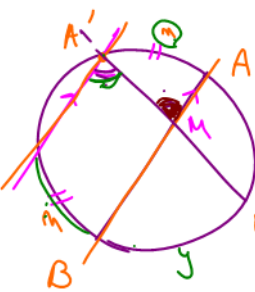
(حکم) $\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AB'} + \widehat{A'B}}{2}$

$\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{A'}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{A'B}}{2}$

$\hat{A'} = \frac{\widehat{AB'}}{2}$

$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{A'B}}{2} + \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{A'B} + \widehat{AB'}}{2}$



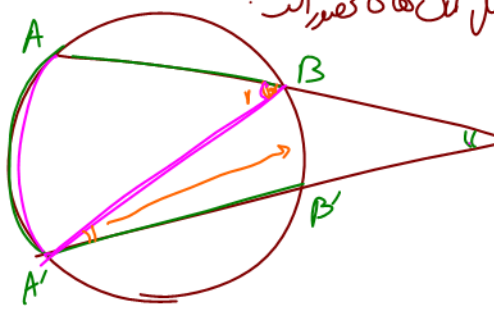
$\hat{A} = \frac{\widehat{A'B}}{2}$

$\hat{A'} = \frac{\widehat{AB'}}{2}$

۱) جهت کینز زاویه حاصل از بردار دو وتر برای لفظ تفاضل کین های معصوم است.

حل

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AA'} - \widehat{BB'}}{2}$$



$$MBA' \text{ خارجی } \hat{B}_1 = \hat{M} + \hat{A'} \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{A'}$$

$$\xrightarrow{II, I} \frac{\widehat{AA'}}{2} - \frac{\widehat{BB'}}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AA'} - \widehat{BB'}}{2}$$

$$B_1 = \frac{\widehat{AA'}}{2} \text{ زاویه مماسی} \quad \text{①}$$

$$A' = \frac{\widehat{BB'}}{2} \text{ مماسی} \quad \text{②}$$

۲) جهت کینز زاویه میان خط مماس و استرادیک وتر لفظ تفاضل کین های معصوم است.

$$\frac{\widehat{TA} - \widehat{TB}}{2} = M$$



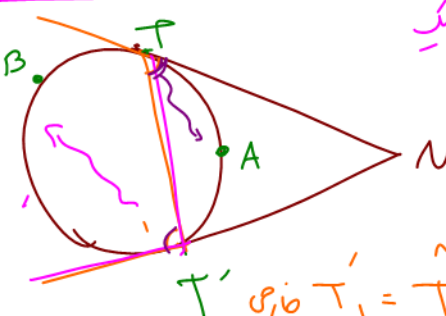
$$BMT \text{ خارجی } \hat{B}_1 = \hat{T} + \hat{M} \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{T}$$

$$\xrightarrow{\text{مماسی}} \frac{\widehat{AT}}{2} - \frac{\widehat{TB}}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{TB}}{2}$$

اثبات ۸) جهت کینز زاویه بین دو مماس رسم شده از یک نقطه برای لفظ تفاضل دو کین استرادیک

$$\hat{M} = \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TAT'}}{2}$$

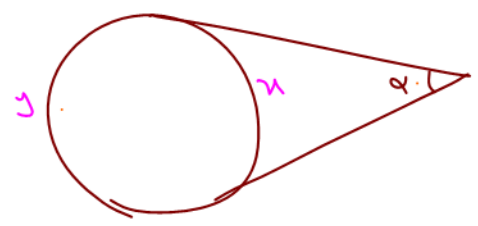


$$T' \text{ خارجی } \hat{T}'_1 = \hat{T} + \hat{M}$$

$$\hat{M} = \hat{T}'_1 - \hat{T}$$

$$\xrightarrow{\text{مماسی}} \frac{\widehat{TBT'}}{2} - \frac{\widehat{TAT'}}{2}$$

$$M = \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TAT'}}{2}$$



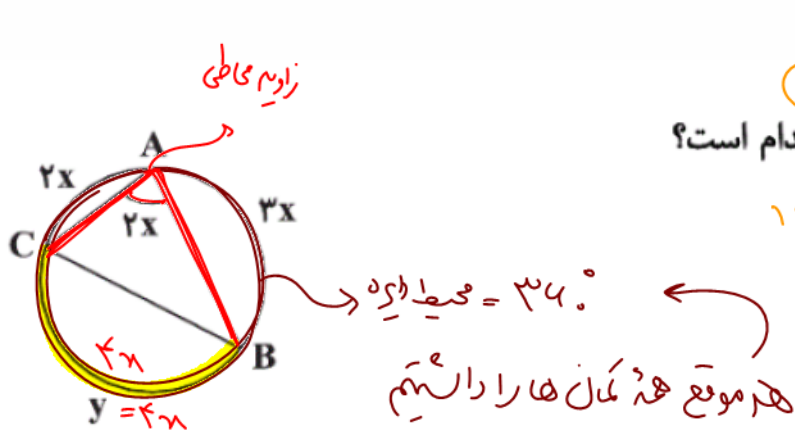
ی توین
 مسئله
 ۱۵

$$\begin{cases} y - n = 2\alpha \\ y + n = 3\alpha \end{cases}$$

$$2y = 240 + 2\alpha$$

$$y = 120 + \alpha$$

$$n = 120 - \alpha$$



۱) با توجه به شکل مقابل، حاصل $y - x$ کدام است؟

$$4x - x = 3x$$

$$140 - 40 = 100$$

$$3 \times 40 = 120$$

$$90^\circ \quad (1)$$

$$150^\circ \quad (2)$$

$$120^\circ \quad (3)$$

$$135^\circ \quad (4)$$

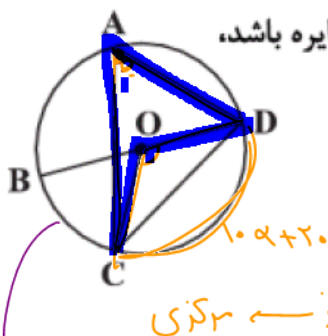
$$2x + 3x + y = 340$$

زاویه یاطی

$$2x + 3x + 4x = 340$$

$$9x = 340$$

$$x = 40$$



۲) در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A} = 7x - 10$ ، $\hat{COD} = 10x + 20$ و O مرکز دایره باشد،

کمان BC چند درجه است؟

$$\hat{A} = 7x - 10 \rightarrow \widehat{CD} = 2\hat{A} = 2(7x - 10)$$

$$\hat{COD} = 10x + 20 = \widehat{CD} = \widehat{CD} = 14x - 20$$

$$15 \quad (1)$$

$$30 \quad (2)$$

$$45 \quad (3)$$

$$60 \quad (4)$$

$$10x + 20 = 14x - 20$$

$$40 = 4x$$

$$10 = x$$

$$* 10x + 20 = 2(7x - 10)$$

دکتر رها مسیح



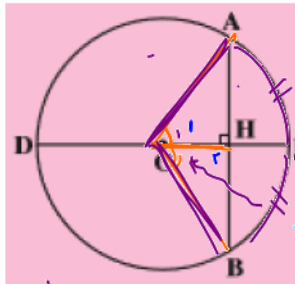
دوایم > وتری > وتری
قضایای مهم

فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

حکم $AH = HB$
 $\widehat{AD} = \widehat{DB}$

فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$
وتری $OA = OB = r$
فرض $OH = OH$

فرض $\triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow AH = HB$
 $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$



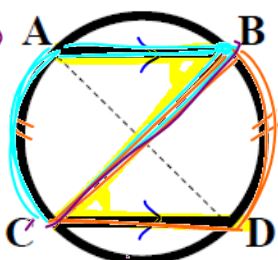
فرض $AH = HB$
حکم $\widehat{AE} = \widehat{EB}$

فرض $\triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$
فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$
فرض $OA = OB = r$
فرض $OH = OH$
فرض $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$

فرض $AH = HB$
فرض $OA = OB$
فرض $OH = OH$
فرض $\triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$
فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$



فرض $\widehat{AB} \neq \widehat{CD}$
لزوماً برابر نیست!!



فرض $AB \parallel CD / BC$
فرض $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$
فرض $\frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

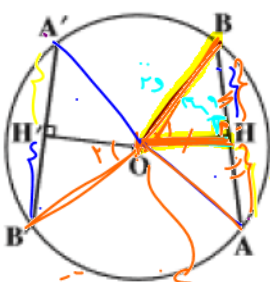
حکم $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

ثابت کنید اگر گون‌ها محدود بین دو خط موازی قرار دارند

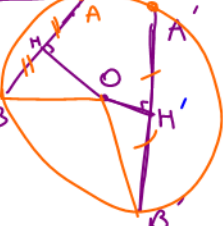
فرض $\widehat{AC} = \widehat{BD}$
فرض $\hat{B} = \hat{C}$
فرض $AB \parallel CD$

چون وترهای دو دایره



فرض $OH = OH'$
فرض $AB = A'B'$
فرض $OB = OB'$
فرض $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
فرض $\triangle OBH \cong \triangle OB'H' \Rightarrow BH = B'H'$
فرض $AB = A'B' \leftarrow \begin{matrix} BH \\ B'H' \end{matrix} \times r$

فرض $OB^2 = OH^2 + BH^2$
فرض $OB'^2 = OH'^2 + B'H'^2$
فرض $AB < A'B'$
فرض $OH < OH'$



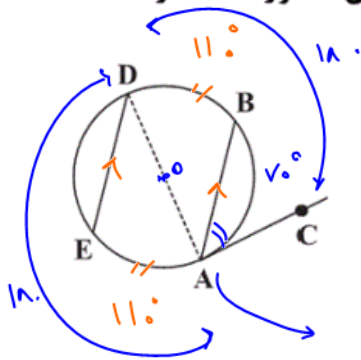
فرض $OH > OH'$
حکم $AB < A'B'$

فرض $BH < B'H'$
فرض $AB < A'B'$
فرض $OH' + BH' = OH + B'H$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۳

در شکل روبه‌رو $AB \parallel DE$ ، مماس بر دایره و AC مماس بر دایره و $\widehat{AE} = 110^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه $\widehat{BAC}$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)



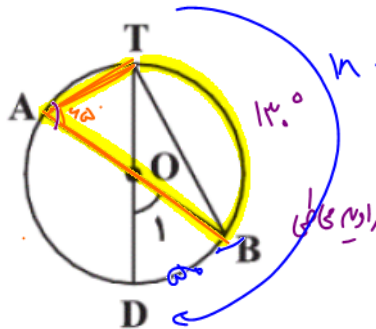
نصف کمان مقابل = خطی

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BA}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

(۱) 35° (۲) 70° (۳) 40° (۴) 45°

۴

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه $\widehat{O_1}$ کدام است؟



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2}$$

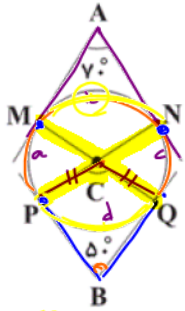
$$65^\circ = \frac{\widehat{TB}}{2} \rightarrow \widehat{TB} = 130^\circ$$

(۱) 65° (۲) 60° (۳) 50° (۴) 45°

دکترها مسیح

$$C = \frac{d+b}{2} = \frac{240}{2} = 120^\circ$$

۵ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟



$$70^\circ A = \frac{a+d+c-b}{2}$$

$$140 = a+d+c-b \Rightarrow 140 = 2a+2c$$

$$100 = a+b+c-d \Rightarrow 120 = a+c$$

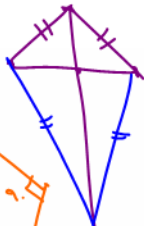
- (1) 100°
- (2) 120° ✓
- (3) 80°
- (4) 140°

$$a+b+c+d=320^\circ$$

$$120$$

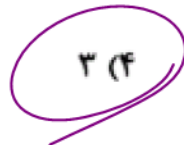
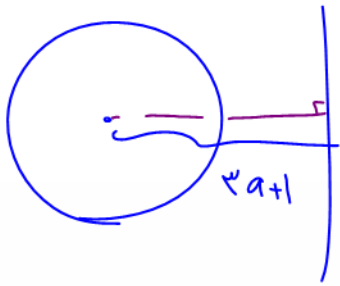
$$b+d=240$$

شع در نقطه مماس بر خط مماس مماس



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

۶ دایره $C(O, r)$ و خط l به فاصله $3a+1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۱)

مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$\frac{3}{2} (2) 1/5$$

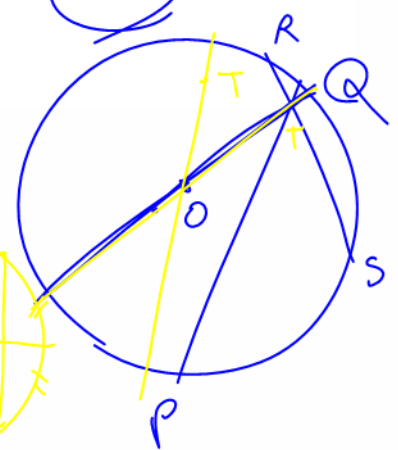
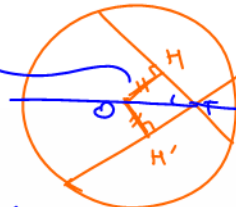
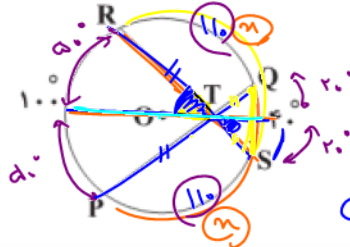
$$3a+1 > r$$

$$3a > 6 \rightarrow a > 2$$

۷ در دایره $C(O, r)$ وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

$$\widehat{RQ} = \frac{40+120}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ$$

- (1) 70°
- (2) 35° ✓
- (3) 30°
- (4) 40°



$$RS = PQ \Rightarrow \widehat{RS} = \widehat{PQ}$$

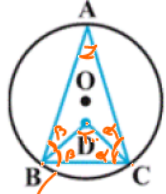
دو وتر برابرند

$$\widehat{RQ} + \widehat{QS} = \widehat{PS} + \widehat{QS}$$

$$2n + 40 + 100 = 360$$

$$2n = 220 \Rightarrow n = 110$$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آنگاه کمان BC چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۸۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

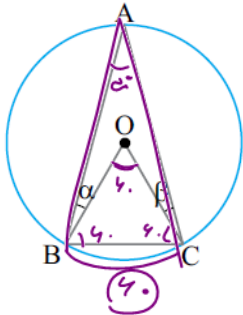
$$\widehat{BDC}: \beta + \alpha + 100 = 180$$

$$\beta + \alpha = 80$$

$$2\beta + 2\alpha = 160 \Rightarrow A = 180 - 160 = 20$$

$$\widehat{BC} = 2\hat{A} = 40$$

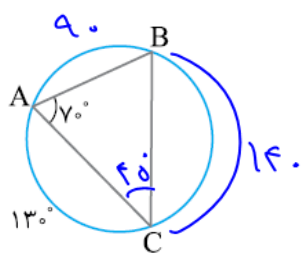
۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)

(۱) 10° (۲) 20° (۳) 30° (۴) 40°

$$30 + \alpha + 60 + \beta + 60 = 180$$

$$\alpha + \beta = 30$$

۱۰ در شکل مقابل اندازهی زاویهی C کدام است؟

(۱) 70° (۲) 60° (۳) 65° (۴) 45° 

$$130 + 140 = 270$$

$$360 - 270 = 90$$

וועג

11

دایره‌ی $C(\bar{O}, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

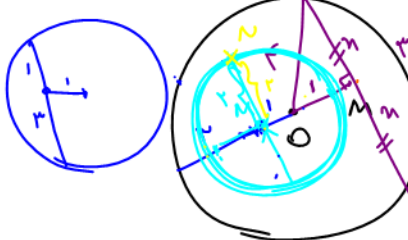
1 (1)

2. (2)

۳) صفر

(۴) بی شمار

کتابہ ترین و تر مکتب سے رہنمائی و رہنمائی



٢٧١٥
وَمِنْ مَحْذُورٍ
رَقَرٍ

وَبَرَّاهِمُ نَدْرًا
إِذْ نَفَعْنَا رَاغِلًا
رَاغِلًا
بَيْنَ يَدَيْهِ
لَهُ دَوْرَةٌ

قطر

पुनर्वि

هیچ و تر → و تر محو < اندازه

۱. وتر $\Rightarrow$ وتر عود = اندازه / قطر
۲. وتر $\Rightarrow$ قطر < اندازه < وتر عود

مستتر $\Rightarrow$ قدر اندازه

12

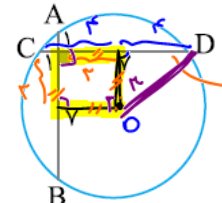
مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

$$\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

5 ✓

$$r\sqrt{r} \quad (3)$$

9 (f)



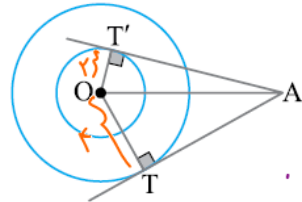
→ دوویترایزید

← فاصله ها هم رایج



ابن سينا

مربع الفاصلة $(AT - AT')^2$



مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

13

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

$$\begin{array}{r} 12 \text{ (Y)} \\ 20 \text{ (F)} \end{array}$$
$$A^T - A^T$$
 $\gamma = 0.1$

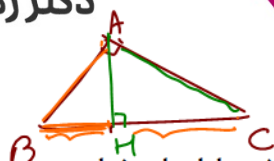
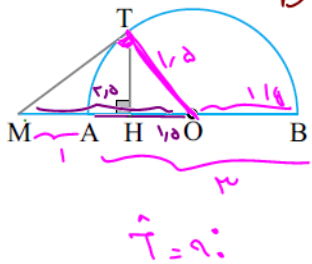
15 (3)

$$\frac{\begin{array}{l} \cancel{r^r + AT^r = QA^r} \\ \cancel{y^r + AT^r = QA^r} \end{array}}{19 - 7 = 12} = AT^r - AT^r$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکترها مسیح

روابط طولی در مثلث
مخرج الزاویه



در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

۱۴

$$1/6 \quad (2)$$

$$1/8 \quad (4)$$

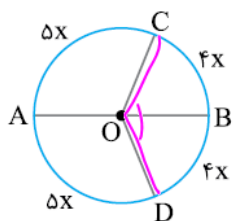
$$1/5 \quad (1)$$

$$1/4 \quad (3)$$

$$2^2 = y \times 2.5$$

$$\frac{4}{2.5} = y = \frac{1 \times 2^2}{5 \times 2} = \frac{14}{10} = 1.4$$

$$m^2 = 2.5^2 - 1.4^2 = (2.5 - 1.4)(2.5 + 1.4) \rightarrow m = 2$$



در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

۱۵

$$150^\circ \quad (2)$$

$$130^\circ \quad (4)$$

$$160^\circ \quad (1)$$

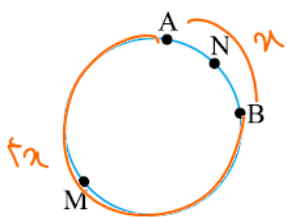
$$140^\circ \quad (3)$$

$$\widehat{COD} = 180^\circ = 180 \times 2^\circ$$

$$5m + 6m + 2m + 4m = 180$$

$$18m = 180$$

$$m = 10$$



در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

۱۶

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

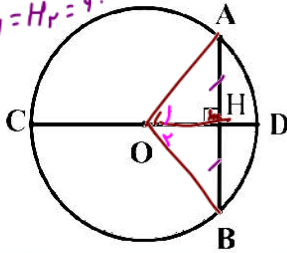
$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$ds = 5m$$

1	$\widehat{ANB}$
4	$\widehat{AMB}$
5	$\widehat{ANB}$

در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB را نصف می کند. خرداد ۱۴۰۳

۱/۵ نمره
(فرض) $H_1 = H_2 = 90^\circ$

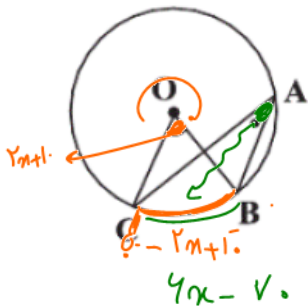


(حکم) $AH = HB$ / $\widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\left. \begin{array}{l} OH = \text{مترک} \\ OA = OB = r \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضی}} \widehat{OAH} \cong \widehat{OHB} \rightarrow AH = HB$

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \xrightarrow{\text{قضی}} \widehat{AD} = \widehat{DB}$

دایره (O, ۶) مفروض است. اگر $\hat{A} = (3x - 25)^\circ$ و $\hat{O} = (2x + 10)^\circ$ باشد، طول کمان BC کدام است؟



$$\frac{\alpha}{360} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{s}{\pi r^2}$$

$$2x + 10 = 4x - 70$$

$$10 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$2x + 10 = 2 \times 20 + 10 = 50$$

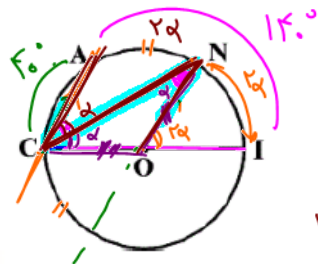
$$\frac{50}{360} = \frac{l}{2\pi \times 6}$$

$$l = \frac{5\pi}{3}$$

- (۱) $\frac{5\pi}{3}$ ✓
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{8\pi}{3}$
- (۴) $\frac{10\pi}{3}$

۱۷

در شکل مقابل، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$. اگر $\widehat{AC} = 40^\circ$ باشد، آن گاه اندازه زاویه CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است).



$$140 = 4\alpha$$

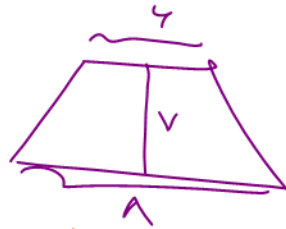
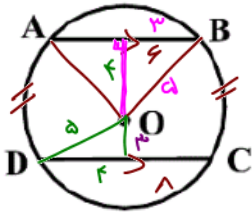
$$\frac{140}{4} = \alpha$$

$$35 = \frac{70}{2} = \alpha$$

- (۱) $27/5^\circ$
- (۲) 30°
- (۳) 35° ✓
- (۴) $22/5^\circ$

۱۸

۱۹ مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = ۶$ و $CD = ۸$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟



$$S = \frac{(6+8) \times 7}{2} = 29$$

۵۶ (۱)

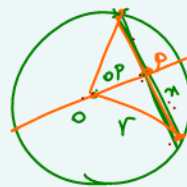
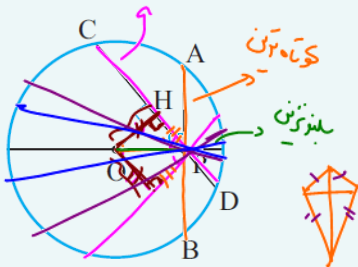
۴۹ (۲) ✓

۴۲ (۳)

۳۵ (۴)

دو از اینها و دو تا دیگه

۲۰ نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



$$x^2 = r^2 - op^2$$

$$2x = 2\sqrt{r^2 - op^2}$$

کوچک‌ترین وتر

قطر = $2r$

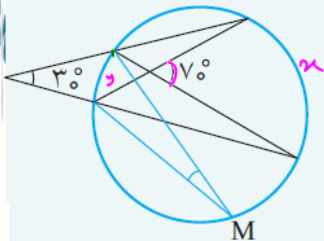
بزرگ‌ترین $2r < \text{طول وتر}$

کوچک‌ترین $\perp \text{وتر}$ $\text{طول وتر} = 2x$

* $\text{قطر} > \text{طول وتر} > 2x$

$\perp \text{وتر}$ $\text{طول وتر} = \text{قطر}$

۲۱ زاویه M را به دست آورید.



$$\frac{x+y}{2} = 70 \rightarrow x+y = 140$$

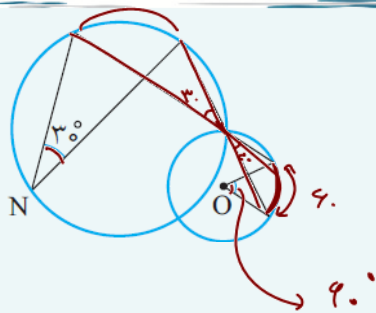
$$\frac{x-y}{2} = 20 \rightarrow x-y = 40$$

$$\frac{y}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

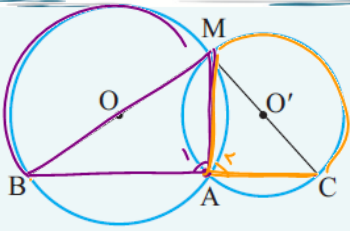
$$2x = 20 \rightarrow x = 10$$

$$y = 40$$

۲۲ زاویه O را به دست آورید.



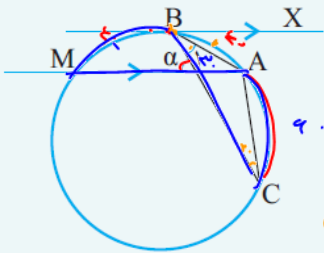
سرمشق:



۲۳ نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BM}}{2} = 9^\circ \\ \hat{A}_2 = \frac{\widehat{CM}}{2} = 9^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 18^\circ \rightarrow \text{زاویه منفرجه} \rightarrow A, B, C \text{ سه نقطه هم‌خط هستند}$$



۲۴ $\hat{B}_1 = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 20^\circ$ و $BX \parallel MA$ زاویه α را به دست آورید.

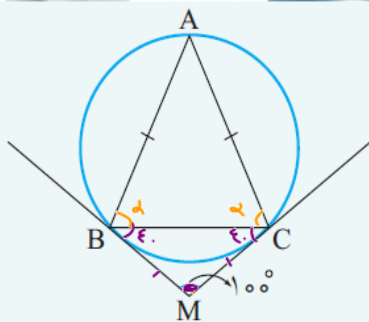
مکان‌های محصور بین دو خط موازی برابرند

$$BX \parallel MA \rightarrow \widehat{BA} = \widehat{BM}$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BA}}{2} \rightarrow \widehat{BA} = 40^\circ$$

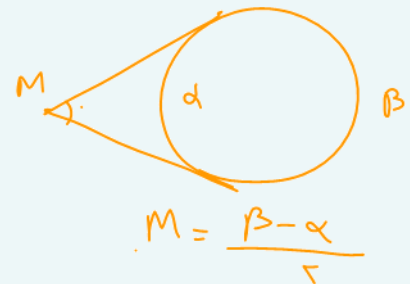
$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 40^\circ$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BM}}{2} = \frac{40^\circ + 40^\circ}{2} = 40^\circ$$



۲۵ MC و MB مماس بر دایره هستند و $AB = AC$ زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



$$M = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\alpha + \beta = 140^\circ$$

$$M = \frac{\widehat{CAB} - \widehat{BC}}{2} = 100^\circ$$

$$\widehat{CAB} - \widehat{BC} = 200^\circ$$

$$\widehat{CAB} + \widehat{BC} = 140^\circ$$

$$2\widehat{CAB} = 340^\circ$$

$$\widehat{CAB} = 170^\circ$$

$$\widehat{BC} = 180^\circ$$

در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC = CD$ و $AD = DE$ ، اندازه زاویه A چند درجه

۲۶

است؟

۲۴° (۱)

۳۰° (۲)

۳۶° (۳) ✓

۴۲° (۴)

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{CB}}{2}$$

$$2\alpha = 180 - 5\alpha$$

$$5\alpha = 180$$

$$\alpha = 36$$

$$\alpha = \frac{180 - 2\alpha - \alpha}{2}$$

در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\widehat{C} = 110^\circ$ ، اندازه زاویه P چند درجه است؟

۲۷

۵۰° (۱) ✓

۶۰° (۲)

۴۵° (۳)

۵۵° (۴)

$$P = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{120 - 40}{2} = 40$$

در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازه زاویه CBD چند درجه است؟

۲۸

۱۵° (۱)

۲۰° (۲) ✓

۲۵° (۳)

۳۰° (۴)

$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{C} = 180 \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180 \end{cases}$$

در چهارضلعی ABDC مجموع درونی متقابل ۱۸۰ است

در شکل روبه‌رو، CD بر دایره کوچک مماس است. اگر $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه BEC چند درجه است؟

۲۹

۸۰° (۱)

۱۰۰° (۲) ✓

۴۰° (۳)

۵۰° (۴)

در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه AOD برابر کدام است؟

۳۰

OBC (۱)

CAD (۲)

OAC (۳)

ADO (۴) ✓

$$\begin{cases} \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180 \\ \widehat{O_1} + \widehat{C} = 180 \end{cases} \rightarrow \widehat{C} = \widehat{O_2}$$

$$\widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{AOB}$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{C} = \widehat{D}$$

مکمل ارتفاع = ارتفاع

دو ارتفاع در یک مثلث مکمل هستند

مثلث متساوی الساقین

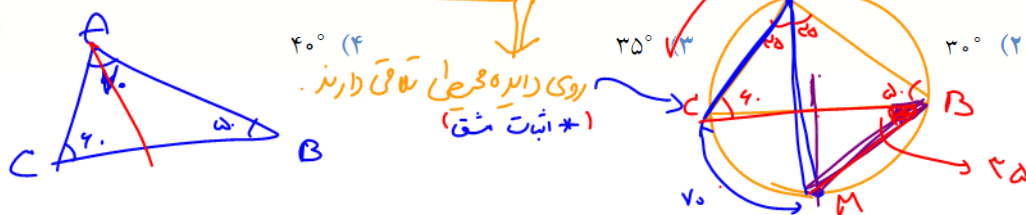
راه حل اول

$$\alpha + \beta = 180$$

دکترها مسیح



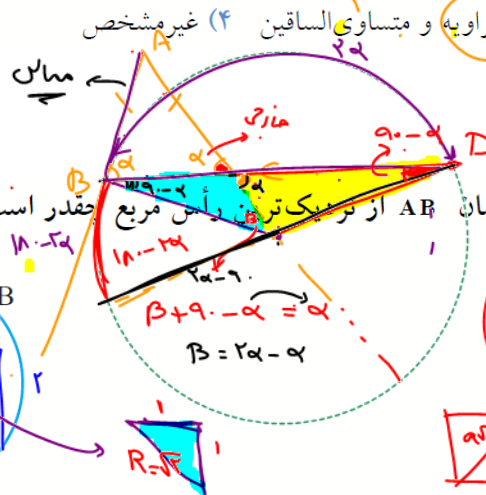
۳۱ در مثلث ABC ، داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع اند. زاویه $\hat{MBC}$ چند درجه است؟



(۱) 25°

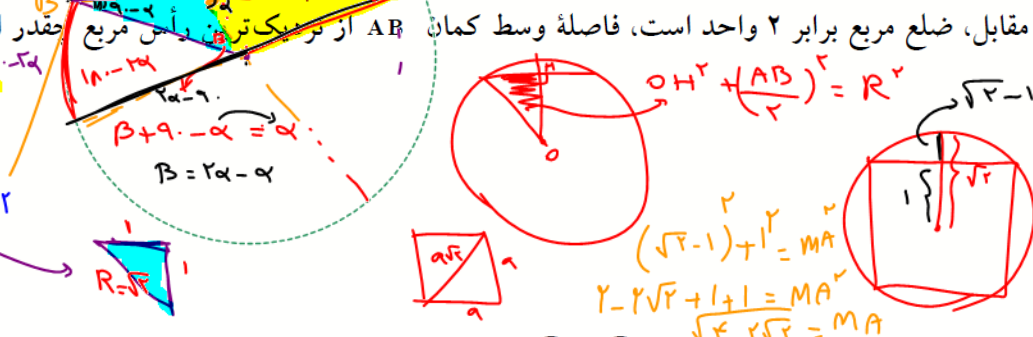
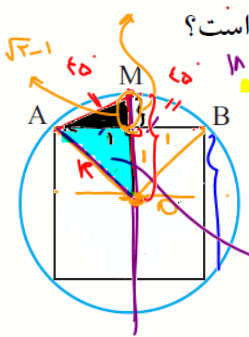


۳۲ در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC ، مرکز دایره ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟



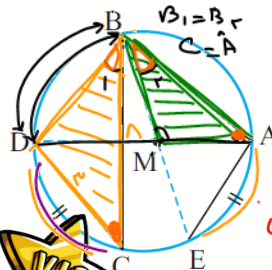
(۱) متساوی الساقین
(۲) قائم الزاویه
(۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین
(۴) غیر مشخص

$\alpha + 90 - \alpha = 90 \rightarrow \text{زاویه قائم}$



- ۳۳ در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله وسط کمان AB از نزدیک ترین رأس مربع چقدر است؟
- (۱) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{4} - 2\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{1} + \sqrt{2}$

۳۴ در شکل مقابل، اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 2$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، آن گاه اندازه AM کدام است؟

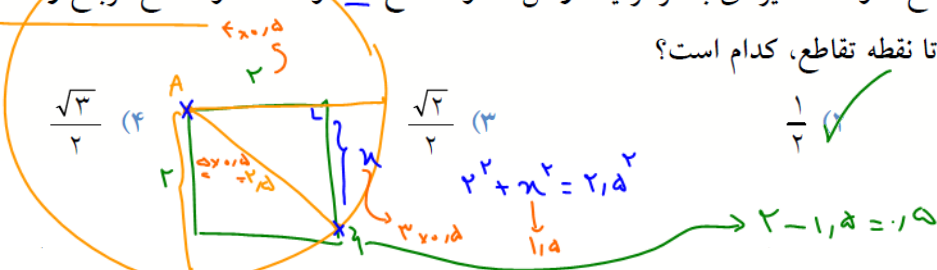


$\widehat{AE} = \widehat{CD} \Rightarrow \angle A = \angle C \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE$
 $\frac{AB}{CE} = \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{CD}$
 $\frac{6}{CE} = \frac{BE}{2} = \frac{AE}{2}$
 $AE = BE = 2$
 $AM = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$

- (۱) ۲
(۲) ۲/۲۵
(۳) ۲/۵
(۴) ۲/۷۵



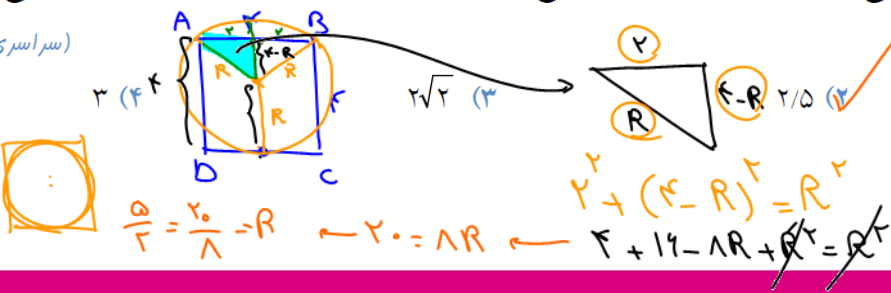
۳۵ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند. فاصله نزدیک ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$



۳۶ مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{25}$



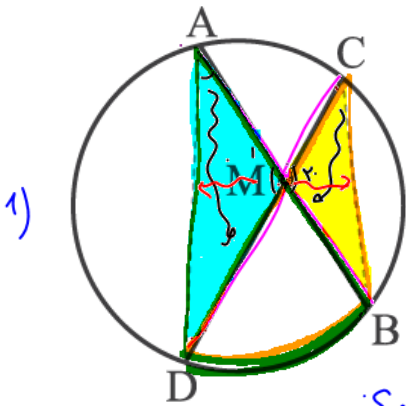
دکترها مسیح

مسیح
* تست ۲۳ تا ۳۴ مسیح
زاویه داخلی = زاویه خارجی
+ این است که ۵ تا ۱۵ مسیح با هم
+ این است که ۳ تا ۱۳ مسیح

روابط طولی در دایره مسیح

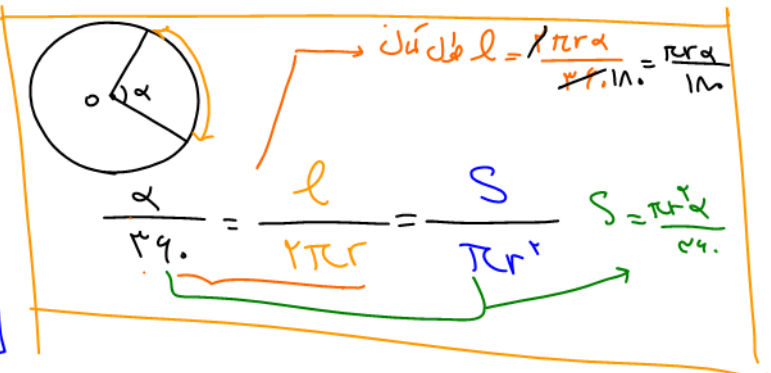
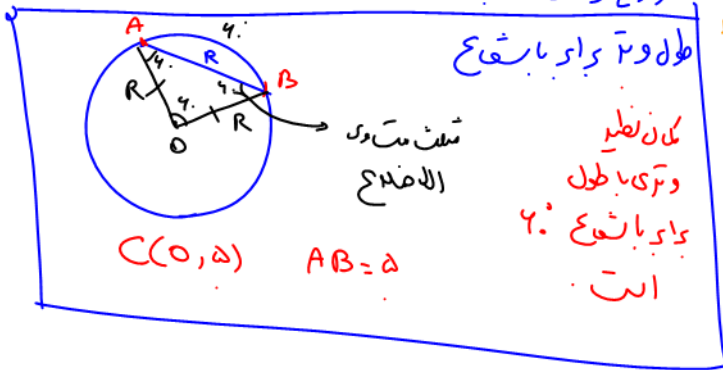
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \leftarrow \begin{matrix} \widehat{AMD} \\ \widehat{BMC} \end{matrix}$$

مختص



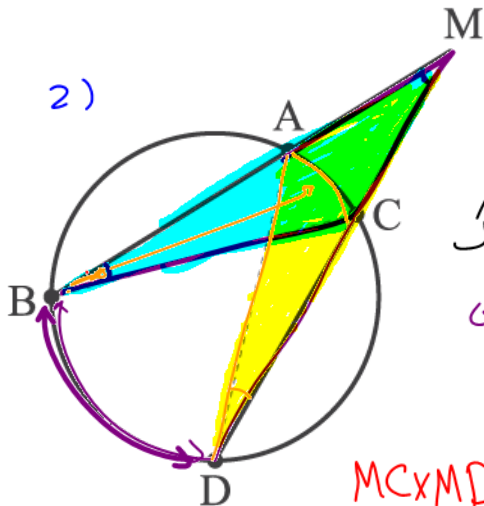
$$\left. \begin{matrix} \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ \widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{BD} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle BMC \rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB} = \frac{AM}{CM}$$

$$AM \times MB = CM \times MD$$



$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \leftarrow \begin{matrix} \widehat{ADM} \\ \widehat{CBM} \end{matrix}$$



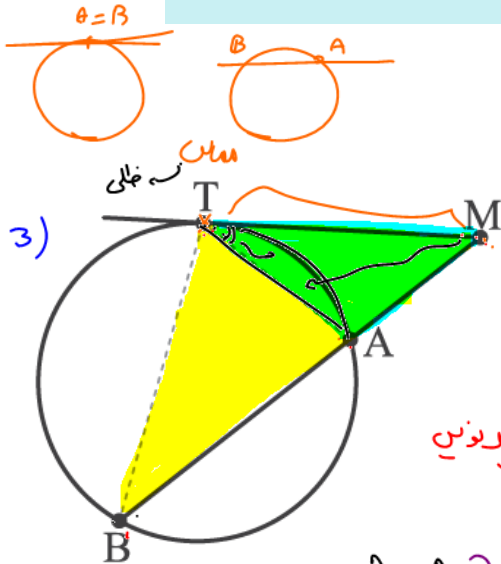
$$\left. \begin{matrix} \widehat{M} = \widehat{M} \\ \widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{AC} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle BMC \rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{BC}{AD} = \frac{BM}{MD}$$

$$MC \times MD = BM \times AM$$

از اینرو، هر سه این قضایا دارای طرح کلی یکسانی می باشند:

نقطه دایره = نقطه دایره = نقطه دایره

(vertex to circle) · (vertex to circle) = (vertex to circle) · (vertex to circle)



نقطه دایره نقطه دایره

$$MT \times MT = MA \times MB$$

خط مماس و لایحه هینسی

$$MT^2 = MA \times MB$$

میان لایحه

$$\frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \sim \triangle ATM \sim \triangle MBT$$

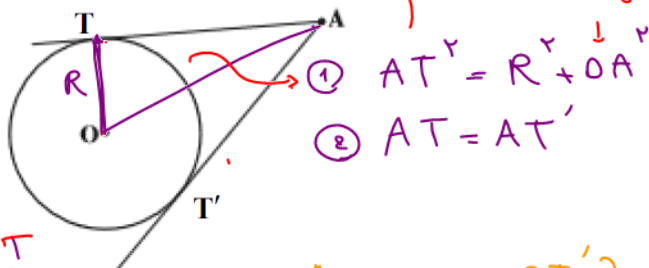
ای ریشه اوی وک
صلبت

مستند نقطه دایره

میان نقطه دایره

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AM}{MT} = \frac{MT}{BT}$$

$$MT^2 = AM \times MB$$



نقطه دایره

$$AT^2 = R^2 + OA^2$$

$$AT = AT'$$

خط مماس بر دایره

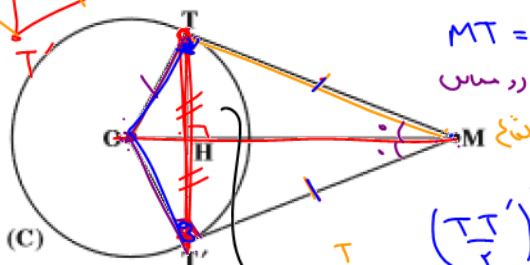


فاصله. O تا دایره را در این است

روی نیار

$$MT = MT'$$

③ OM نیمساز O و نیمساز M است.



OM عمود منصف TT' است.

OH × OM = R^2

TT'^2 = 4OH × MH

TT' × OM = 2R × MT

MT = MT'

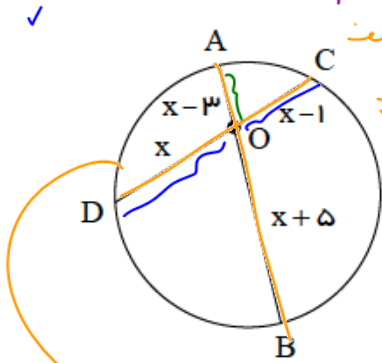
④

$$S = R \times TM = \frac{TT'}{2} \times OM$$

$$2R \times TM = TT' \times OM$$

دکترها مسیح

تفاوت = نسبت ۳۵ - ۴۱
+ صفحه ۲۳ جزوه
+ اثبات میز عمودسخت
+ بهترین درس! کتاب محل



۳۷ در شکل مقابل x برابر است با:

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۸ (۳)

گزینه های ۱، ۲ و ۳

$$(x-1) \times x = (x-3)(x+5)$$

$$x^2 - x = x^2 + 2x - 15$$

$$15 = 3x \rightarrow x = 5 \checkmark$$

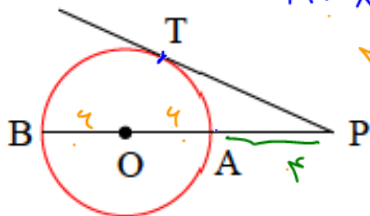
۳۸ در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و AB قطر و $PA = 4$ می باشد، طول مماس PT کدام است؟

۸ (۱)

۱۴ (۲)

$5\sqrt{2}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۴)



$$PA \times PB = PT^2$$

$$4 \times 14 = PT^2$$

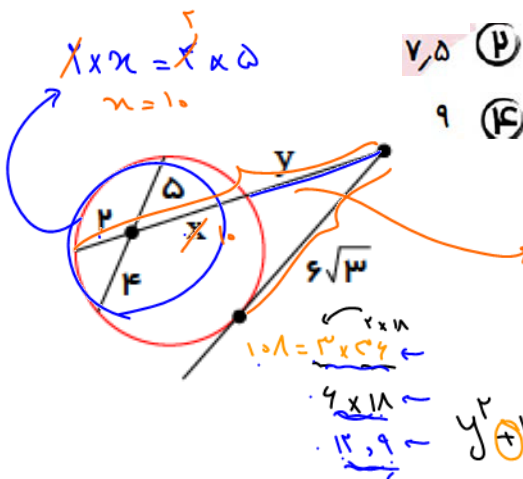
$$2 \times 4 = PT$$

$$8 = PT$$

۳۹ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟

۶ (۱)

۸ (۲)



۷, ۵ (۳)

۹ (۴)

$$y \times (y+12) = (4\sqrt{3})^2$$

$$y^2 + 12y = 36 \times 3$$

$$y^2 + 12y - 108 = 0 \rightarrow (y+18)(y-6) = 0$$

$$y = 6$$

✓

۴۰. در شکل، مماس و کمان های $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$ ، زاویه A چند درجه است؟

$$72^\circ \text{ (پ)}$$

$$144^\circ \text{ (ک)}$$

$$18^\circ \text{ (۱)}$$

$$36^\circ \text{ (۳)}$$

$$\hat{A} = \frac{2n - n}{2} = \frac{n}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

$$2n + 2n + n = 360$$

$$5n = 360$$

$$n = \frac{360}{5} = 72$$

۴۱. در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $MT = \frac{1}{3}MT'$ باشد، حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ کدام است؟

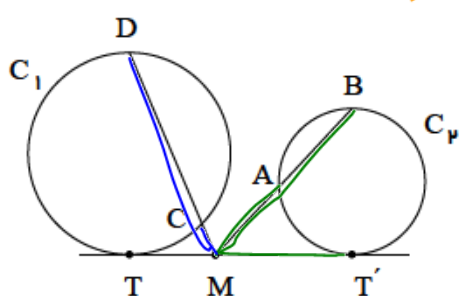
$$3 \text{ (پ)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (ک)}$$

$$4 \text{ (۱)}$$

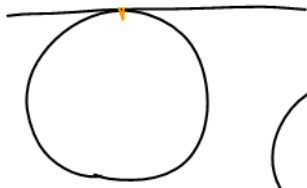
$$9 \text{ (۳)}$$

$$\frac{MT'^2}{MT^2} = \frac{(MT')^2}{(\frac{1}{3}MT')^2} = \frac{\frac{1}{1}MT'^2}{\frac{1}{9}MT'^2} = \frac{9}{1}$$



$$MA \times MB = MT'^2$$

$$MC \times MD = MT^2$$



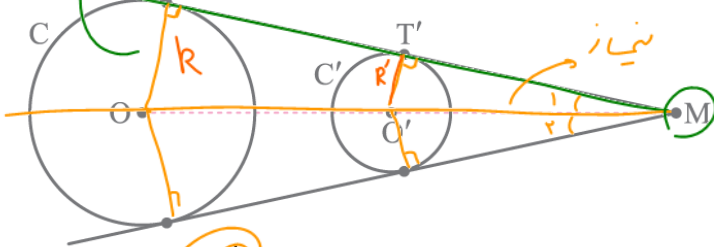
مماس مشترک = خطی است که بر دو دایره مماس است.

مماس مشترک داخلی = خطی که بر دو دایره مماس است و دو دایره در دو طرف خط قرار دارند.

مماس مشترک خارجی = خطی که بر دو دایره مماس است و هر دایره در یک سمت خط قرار دارد.

نسبت / ت به

$$\frac{MT'}{MT} = \frac{MO'}{MO} = \frac{R'}{R}$$



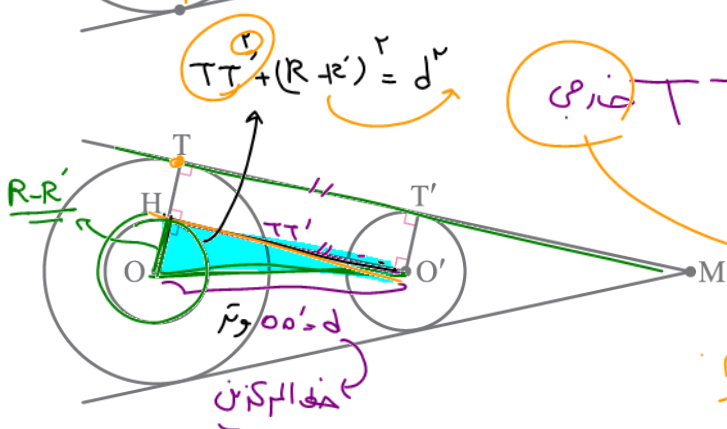
مماس مشترک خارجی

(۱) به مرکز O دایره ای به شعاع $R-R'$ رسم می کنیم

(۲) از O' به دایره هم مماس رسم می کنیم

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

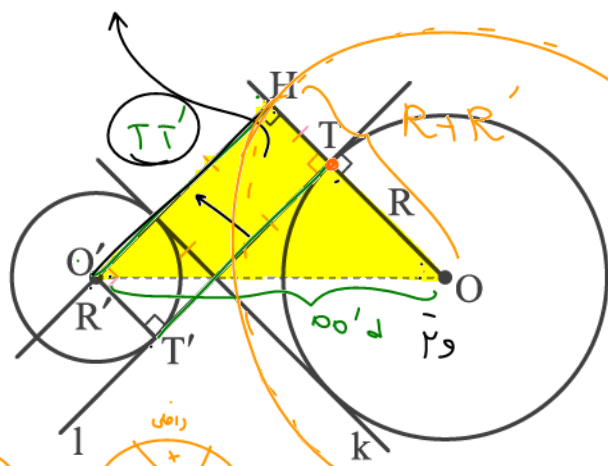
دایره ای به قطر OO' کشیده و محل تقاطع آن با دایره نقطه تماس است



(۳) از O به محل مماس (H) رسم کرده و ادامه می دهیم تا دایره اولیه را در T قطع کند.

(۴) از T به موازات OH مماس مشترک خارجی را رسم می کنیم.

$$OO'^2 = (R+R')^2 + (TT')^2$$



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

شعاع دایره کلی

(۱) دایره ای به مرکز O و شعاع $R+R'$ رسم می کنیم

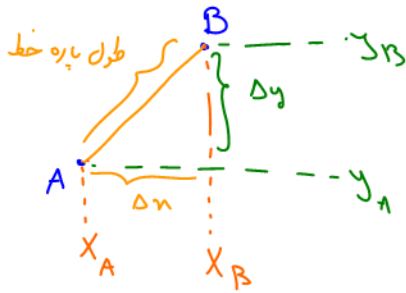
(۲) از O' مماس OH را رسم می کنیم (تقاطع دایره با دایره ای به قطر OO' است)

(۳) شعاع OH را رسم نموده و تقاطع آن با دایره اولیه را T می نامیم

(۴) از T به موازات OH مماس مشترک داخلی را رسم می کنیم.

فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ باشد، از رابطه ی

زیر به دست می آید:



$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$OO' = d = \sqrt{(x_O - x_{O'})^2 + (y_O - y_{O'})^2}$$

خط المکزی

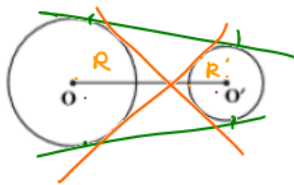
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

خارجی

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

داخلی

۲ مماس خارجی
۲ مماس داخلی
۴ مماس مشترک



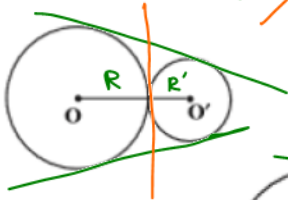
$$R + R' < OO'$$

«متخارج»:

۲ مماس خارجی

۱ مماس داخلی

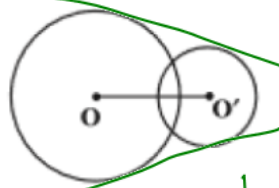
۳ مماس مشترک



$$OO' = R + R'$$

«مماس خارج»:

۲ مماس خارجی
۱ مماس داخلی
۲ مماس مشترک



$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

«مقاطع»:

۱ مماس خارجی
۱ مماس داخلی
۱ مماس مشترک

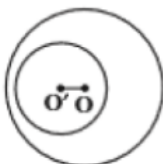


$$|R - R'| = OO'$$

تفاضل شعاع

«مماس داخل»:

۱ مماس خارجی
۱ مماس داخلی
۱ مماس مشترک



$$OO' < |R - R'|$$

«متداخل»:

$$OO' = 0$$

«هم مرکز»:

اگر دو دایره را به مراکز $O(2, -3)$ و $O'(1, 4)$ داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی

۴۲

$$OO' = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$R + R' = 2 + 3 = 5$$

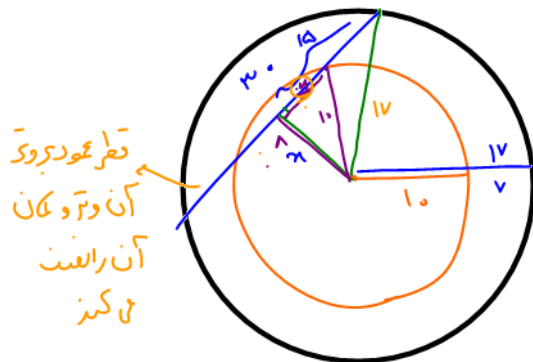
$$5\sqrt{2} > 5 \quad OO' > R + R' \rightarrow \text{متخارج}$$

$$|R - R'| = |3 - 2| = 1$$

۴۳

دو دایره $C(O, 17)$ و $C'(O', 10)$ مفروضند. خط قاطع d که در دایره C وترى به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایره C' وترى با کدام طول پدید می‌آورد؟

۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)



$$17^2 - 15^2 = r^2 \rightarrow (17-15)(17+15) = r^2$$

$$4 \times 32 = r^2 \rightarrow r = 2 \times 4$$

$$r = 8$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$10 \times 8 = 80$$

قطر عمود بر وتر
آن وتر و مکان
آن را نصف
می‌کند

۴۴

کند؟

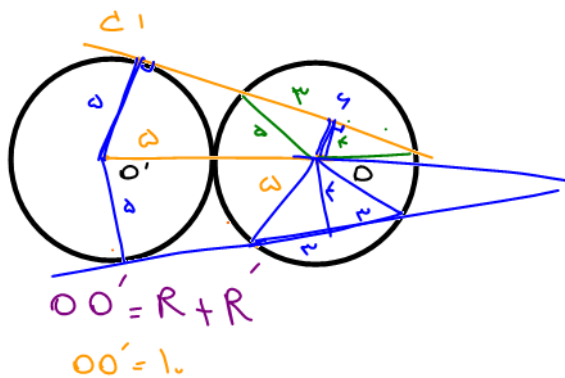
دو دایره C_1 و C_2 به شعاع ۵ مماس خارجند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره C_1 مماس باشد و در دایره C_2 وترى به طول ۶ جدا کند؟

۱۴ بی شمار

۳ ۴

۶ ۲

۱ صفر



$$O_1O_2 = R + R$$

$$O_1O_2 = 10$$

۴۵

هم چقدر است؟

دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۲ مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۱۲ واحد باشد، بیش‌ترین فاصله بین نقاط روی دو دایره از

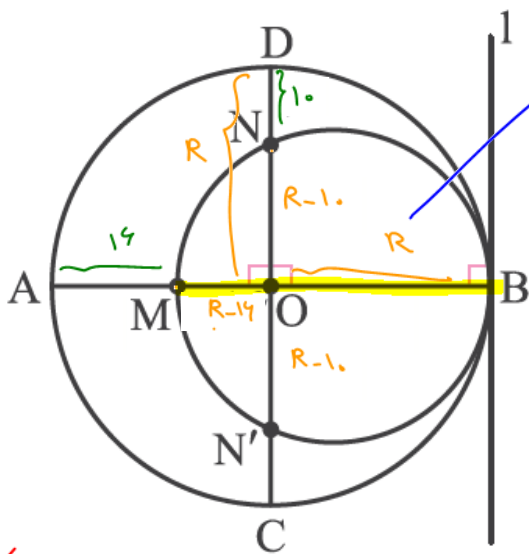
۲۳ ۱۴

۲۲ ۱۳

۲۱ ۱۵

۲۰ ۱۱

۴۶ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



$$(R-10) \times (R-10) = R(R-14)$$

$$R^2 - 20R + 100 = R^2 - 14R$$

$$100 = 6R \rightarrow R = 25$$

$$R - 14 + R = 2R'$$

$$2R - 14 = 2R'$$

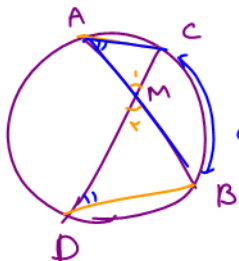
$$25 - 14 = 11 = R'$$

ثابت کنید هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: خرداد ۱۴۰۳

نمره ۱/۵

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$$



$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad \text{منتهی‌المرکز}$$

$$\hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{CB}}{2}$$

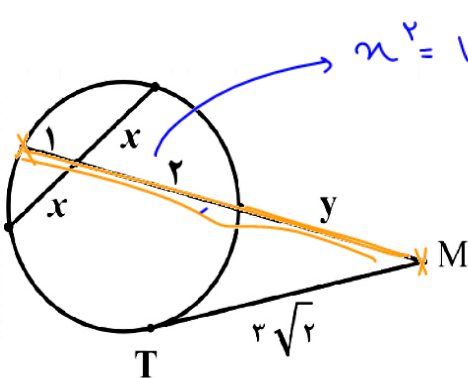
$$\therefore \triangle MBD \sim \triangle MAC \rightarrow \frac{AC}{DB} = \frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MD}$$

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

خرداد ۱۴۰۳

نمره ۱/۲۵

در شکل زیر MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید.



$$x^2 = 1 \times 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y \times (y + 3) = (3\sqrt{2})^2$$

$$y^2 + 3y = 18$$

$$y^2 + 3y - 18 = 0$$

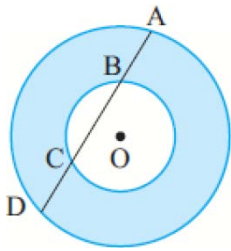
$$(y+6)(y-3) = 0$$

$$y = 3$$

دکترها مسیح



۴۷ در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB = 4$ و



$BC = 5$ ، آنگاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۲) 6π (۱) 20π (۴) 25π (۳) 16π

۴۸ نقطه P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۴ تقسیم کرده است.

(سراسری ریاضی - ۸۲)

طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه P کدام است؟

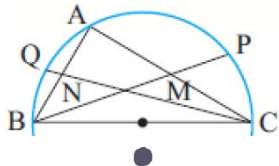
(۴) ۱۵

(۳) ۱

(۲) ۹



۴۹ در شکل روبه‌رو، $BC = 6$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$ برابر با کدام است؟



(۱) ۴

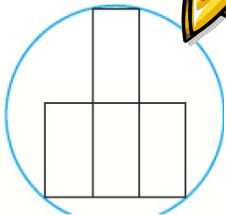
(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶

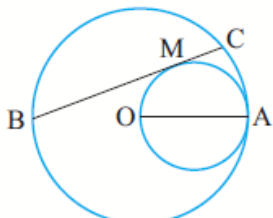


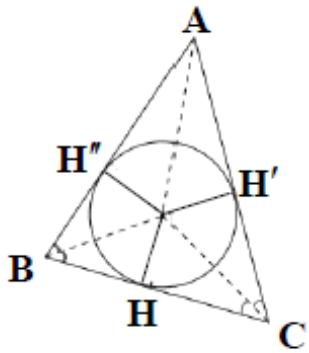
۵۰ چهار تا مستطیل 2×4 مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟

(۲) $\sqrt{15}$ (۱) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{17}$ (۳) $\sqrt{16}$

۵۱ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \cdot MC$ برابر کدام است؟

(سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۴)

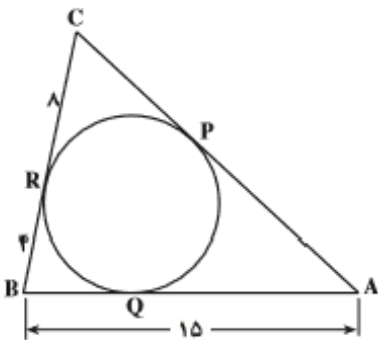
(۱) MO^2 (۲) MA^2 (۳) OA^2 (۴) $MA \cdot MO$



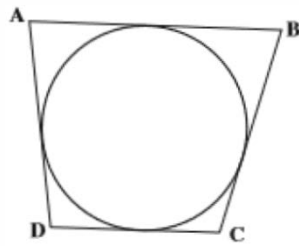
$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$r_b = \frac{S}{P-b}$$

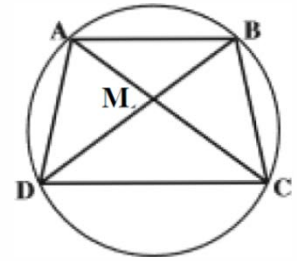
$$r_c = \frac{S}{P-c}$$

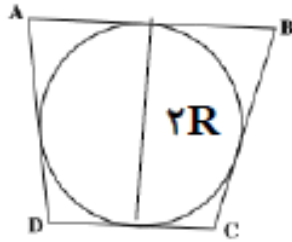


چند ضلعی محیطی



چند ضلعی محاطی





$$(2R)^2 = AB \times CD$$

ارتفاع

۵۲ یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۳

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۵۴

یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۵

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ ، طول خط المکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۵۶ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $4/8$ (۲) ۵ (۳) $9/6$ (۴) ۱۰

۵۷ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۵۸

اگر در یک مثلث قائم الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

$$(۱) \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \quad (۲) \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \quad (۳) \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad (۴) \frac{5-\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$$

۵۹

در مثلث ABC اگر $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 40$ باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

$$(۱) 1 \quad (۲) 4 \quad (۳) \sqrt{5} \quad (۴) \sqrt{3}$$

نمره ۱/۲۵

در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید. **خرداد ۱۴۰۳**

جاست تست

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و تعاریف و قضایای اولیه

۱ یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

تیر ماه ۱۴۰۲

۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

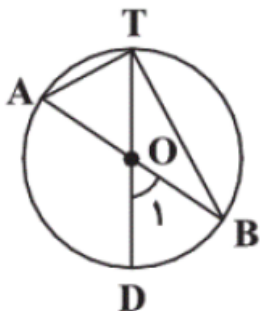
۲ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه O_1 کدام است؟

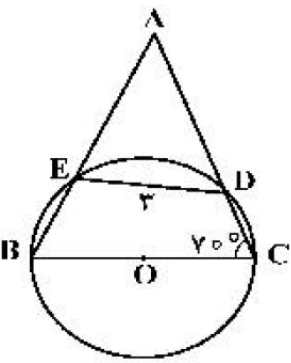
۶۵° (۱)

۶۰° (۲)

۵۰° (۳)

۴۵° (۴)





۳ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ریاضی ۱۴۰۰

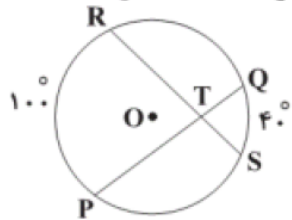
(۱) ۸۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۴ در دایره $C(O, r)$ وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

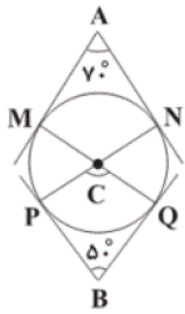


(۱) 70° (۲) 35° (۳) 30° (۴) 40°

۵ دایره $C(O, r)$ و خط ℓ به فاصله $ra + 1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

دکترها مسیح

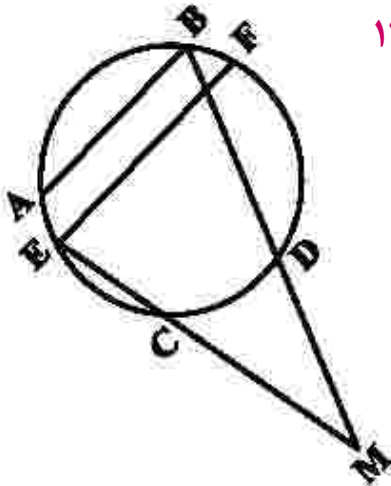


۶ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

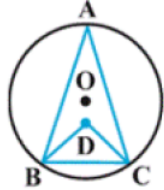
(۱) 100° (۲) 120° (۳) 80° (۴) 140°

۷ در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 80^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر $\angle BME = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\angle ABD$ چند درجه است؟

تیرماه ۱۴۰۱

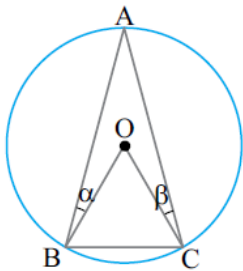
(۱) $71, 25$ (۲) 74 (۳) 75 (۴) $78, 75$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\hat{BDC} = 100^\circ$ ، آن گاه کمان BC چند درجه است؟



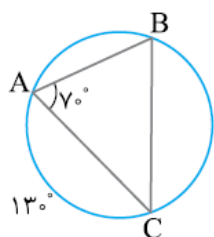
- (۱) ۲۰
(۲) ۸۰
(۳) ۶۰
(۴) ۴۰

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



- (۱) 10°
(۲) 20°
(۳) 30°
(۴) 40°

۱۰ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟



- (۱) 70°
(۲) 60°
(۳) 65°
(۴) 45°

۱۱ دایره‌ی $C(O, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

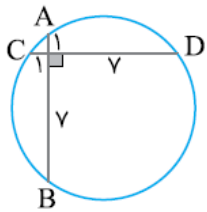
۱۲ مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۵

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۶



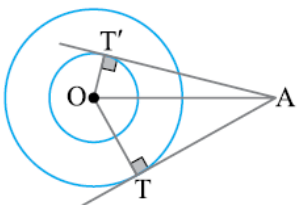
۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

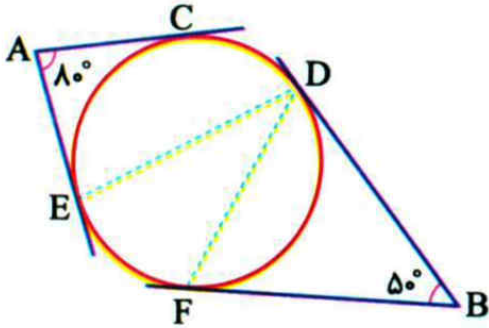
(۴) ۲۰

(۳) ۱۶



۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه EDF چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

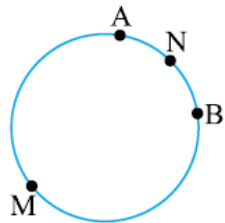
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵

در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

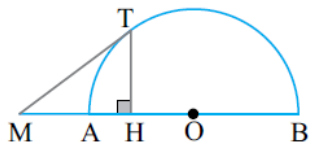


$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۳)



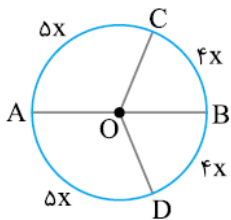
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $1/6$

(۱) $1/5$

(۴) $1/8$

(۳) $1/4$



۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

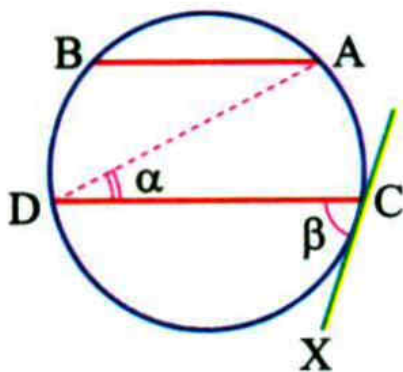
(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۸ در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟



سراسری ۹۸

(۱) ۵۰

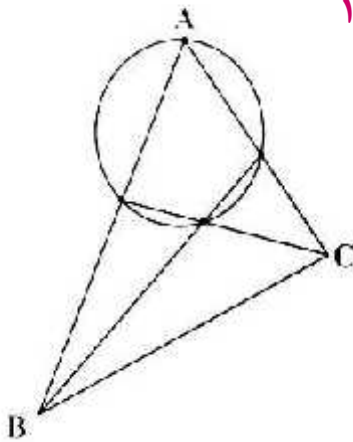
(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵

۱۹ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره معاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

۲۰ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴

جاست تست

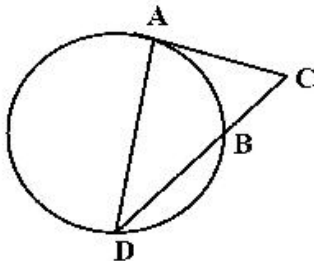
دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی در دایره

۱ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۲ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

سراسری ۱۴۰۰

۳ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ است. خط‌المركزین دو دایره چند واحد است؟

$$7\sqrt{6} \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$12\sqrt{2} \quad (1)$$

سراسری ریاضی ۱۳۹۱

۴ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

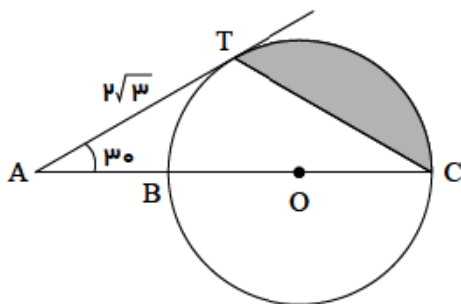
$$10 \quad (4)$$

$$9/6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4/8 \quad (1)$$

۵ در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشورخورده چقدر است؟



$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (p)$$

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \quad (k)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

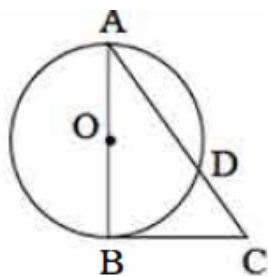
۶ در شکل روبه‌رو پاره‌خط BC مماس بر دایره، زاویه $\hat{C} = 60^\circ$ و اندازه CD برابر $2\sqrt{3}$ واحد می‌باشند. مساحت دایره چقدر است؟

۲۴π (۲)

۳۶π (۱)

۴۰π (۴)

۱۸π (۳)



۷ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$

است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

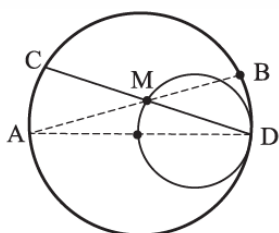
۸ (۱)

۹ (۲)

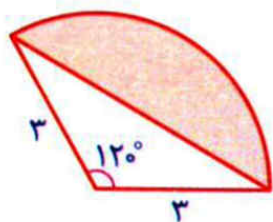
۶ (۳)

۱۲ (۴)

سراسری
ریاضی ۹۹



۸. مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (2)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

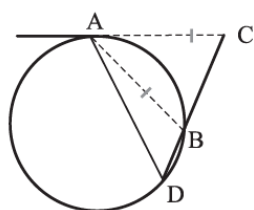
۹. اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, 13)$ و $C'(O', 3)$ برابر 60° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$24 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$



۱۰. در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (1)$$

$$BD = AC \quad (2)$$

$$BC = BD \quad (3)$$

$$DA = DC \quad (4)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی

باشد، زاویه A چند درجه است؟

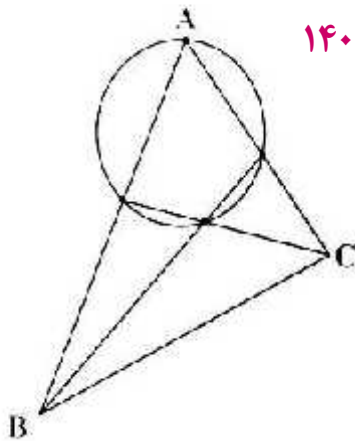
(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

دی ماه ۱۴۰۱



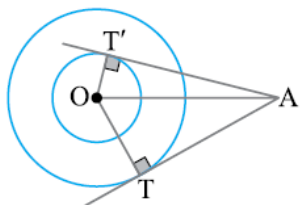
۱۲ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

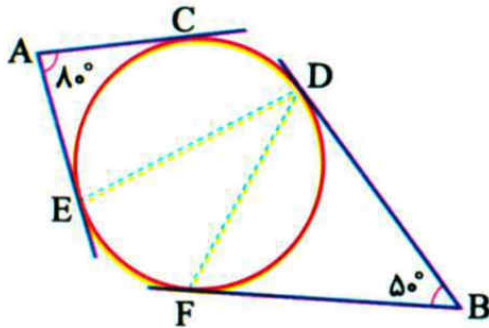
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

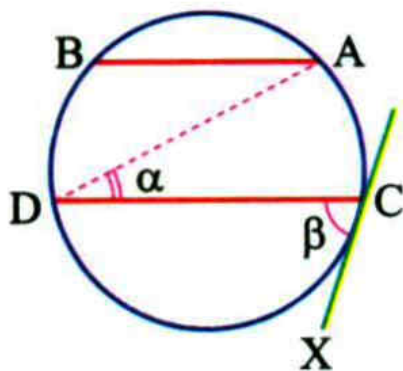
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸

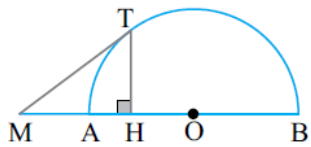


۵۰ (۱)

۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)



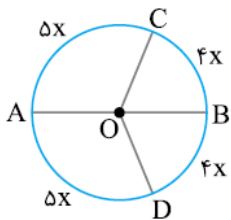
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$



۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۸ فرض کنید خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهای یک دایره و خط $4x+3y+5=0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

(۴) $\sqrt{5}-2$

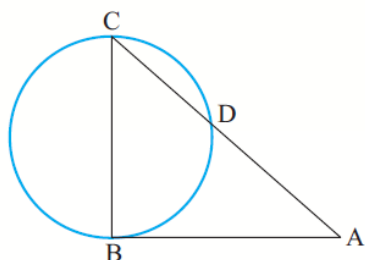
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}-1$

سراسری ۱۴۰۰

۹ خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = 6$ مماس است. اگر $CD = 4$ ، طول پاره خط AD کدام است؟



(۱) ۳

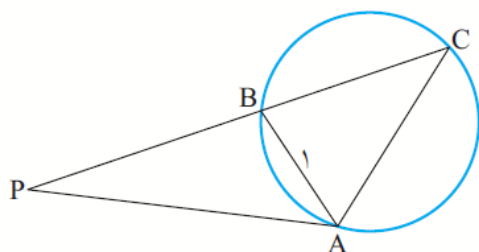
(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹



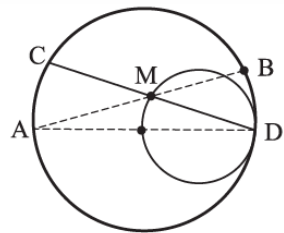
۲۰ در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(۴) ۲

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی و چند ضلعی محاطی و محیطی



۱ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

سراسری
ریاضی ۹۹

۹ (۲)

۱۲ (۴)

۸ (۱)

۶ (۳)

۲ فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های $a-1$ و a^2-2 ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰

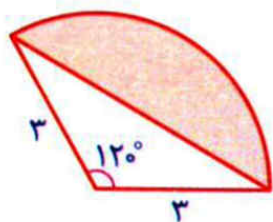
۷ (۴)

۶ (۳)

 $\frac{13}{3}$ (۲)

۳ (۱)

۳ مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

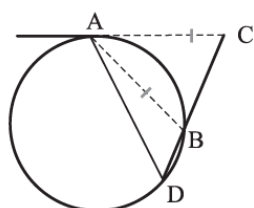
۴ اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, ۱۳)$ و $C'(O', ۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۵ - در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

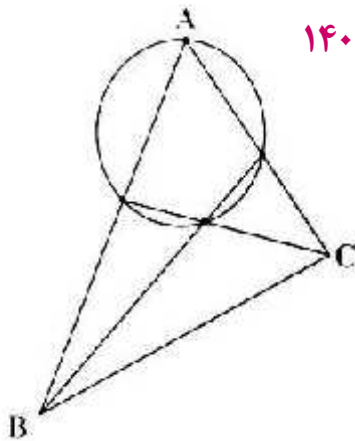
$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۶ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

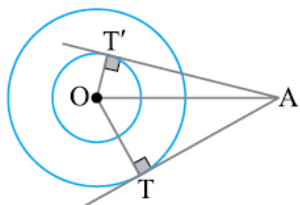
۷ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۸ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

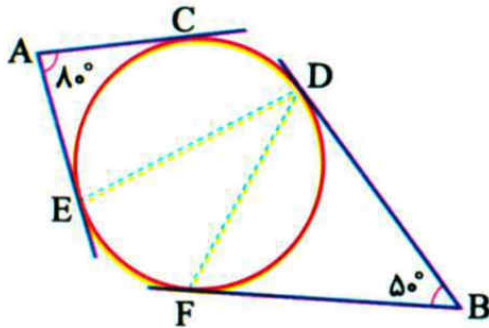
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۹. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

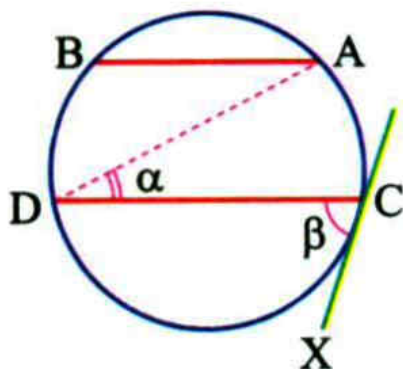
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۰. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸



۵۰ (۱)

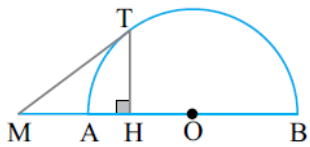
۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)

۱۱

در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



(۲) $\frac{1}{6}$

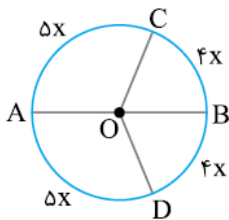
(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۱۲

در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۳

یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های ۸ و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت 15π محیط است. مقدار h کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) $\frac{32}{3}$

(۲) ۸

(۱) $\frac{25}{3}$

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

۱۴

طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

(۴) 2.75

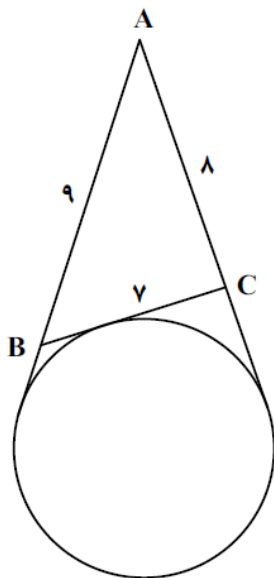
(۳) 2.25

(۲) 1.75

(۱) 1.25

۱۵

در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

(۱) $7.2\sqrt{2}$

(۲) $4.8\sqrt{5}$

(۳) $3.6\sqrt{2}$

(۴) $2.4\sqrt{5}$

۱۶

یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

(۱) ۵۴۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۳۶۰

سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

۱۷

یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۱) $\frac{12}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

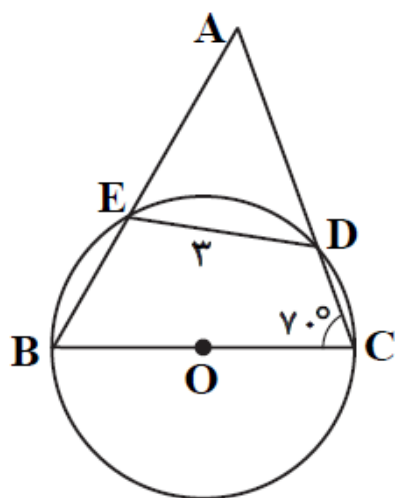
(۳) $\frac{24}{\sqrt{3}}$

(۴) $\frac{32}{\sqrt{3}}$

سراسری
دی ماه ۱۴۰۱

۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) ۸۰

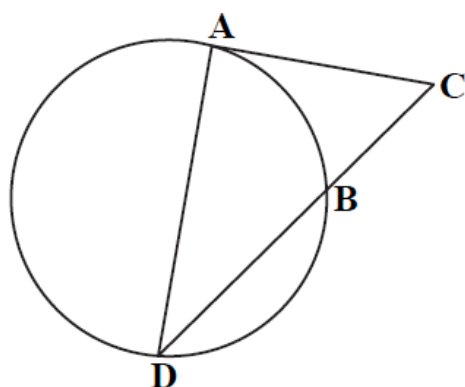
(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۱۹ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) $\sqrt{2}$

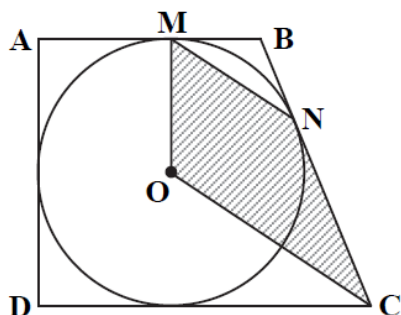
(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۰. مطابق شکل زیر ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است.

اگر زاویه $\hat{MBN} = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی $OMNC$ کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

(۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

(۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

(۴) $۹\sqrt{۳}$

نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آزمون اول هندسه یازدهم - زوایا و روابط طولی در دایره

پایه تحصیلی :

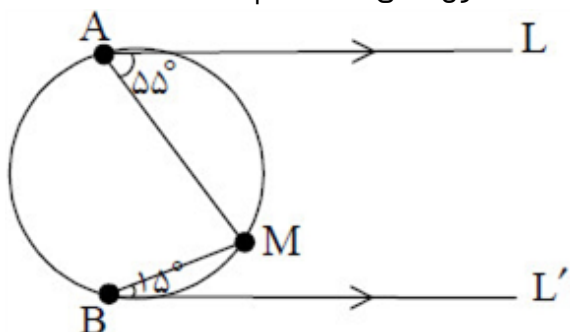
زمان آزمون :

کارنامه خرد

نام دبیر : رها مسیح

تاریخ برگزاری

۱ در شکل مقابل $L \parallel L'$ و شعاع دایره برابر 30° واحد است. با فرض $\pi = 3$ ، طول کمان $\widehat{AB}$ کدام است؟



۶۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

۲ در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ طول مماس مشترک خارجی 12 و طول مماس مشترک داخلی $2\sqrt{15}$ و اندازه خط مرکزین $4\sqrt{10}$ است. اختلاف مساحت دو دایره C و C' ، کدام است؟

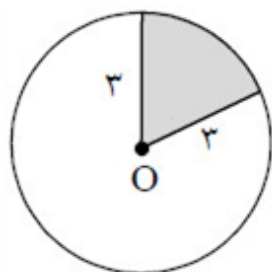
50π (۴)

40π (۳)

30π (۲)

20π (۱)

۳ اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، محیط قسمت سایه خورده کدام است؟ (در محاسبه نهایی محیط π را 3 فرض کنید.)



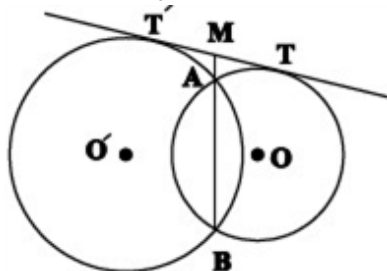
۷ (۴)

۶ (۳)

$10/5$ (۲)

$7/5$ (۱)

۴ در شکل مقابل فاصله مراکز دو دایره متقاطع برابر $OO' = 9$ است. وتر مشترک $AB = 5$ را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در نقطه M قطع کند. اگر $AM = 2$ باشد، اختلاف اندازه شعاع‌های دو دایره کدام است؟



$4\sqrt{2}$ (۴)

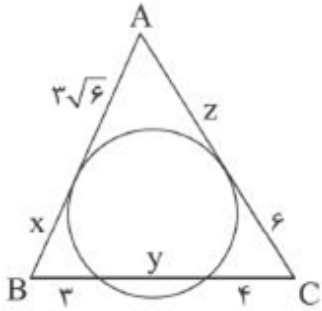
۵ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۱)

۵

در دایره شکل زیر، دو ضلع AB و AC از مثلث ABC بر دایره مماس‌اند. حاصل $x + y + z$ برابر کدام است؟



۴ $5 + 8\sqrt{6}$

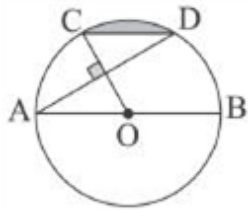
۳ $8\sqrt{6}$

۲ $5\sqrt{6}$

۱ $5 + 5\sqrt{6}$

۶

در دایره به مرکز O و شعاع ۶، دو وتر AB و CD موازی‌اند. مساحت قطعه رنگ‌شده برابر کدام است؟



۴ $6\pi - 9\sqrt{3}$

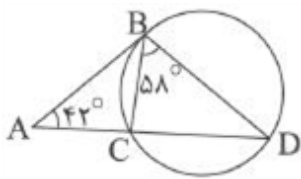
۳ $6\pi - 6\sqrt{3}$

۲ $8\pi - 8\sqrt{3}$

۱ $8\pi - 4\sqrt{3}$

۷

در شکل زیر اندازه زاویه ظلی $\widehat{ABC}$ برابر کدام است؟



۴ 29°

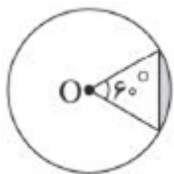
۳ 21°

۲ 36°

۱ 40°

۸

در شکل زیر مساحت قطعه رنگی برابر $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ است. مساحت دایره کدام است؟



۴ π

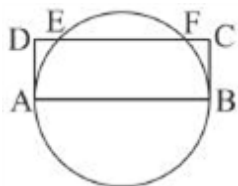
۳ 4π

۲ 6π

۱ 9π

۹

در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF کدام است؟



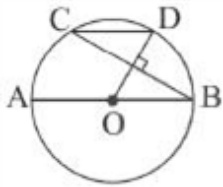
۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

۱۰ در دایره $C(O, 3)$ $CD \parallel AB$ است. طول کمان $\widehat{CD}$ کدام است؟



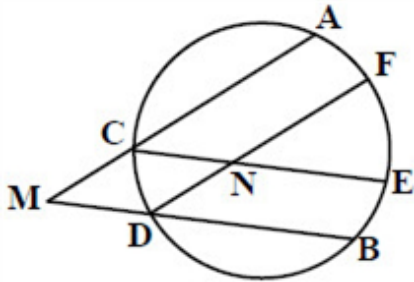
π (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{3\pi}{2}$ (۲)

2π (۱)

۱۱ در شکل مقابل، $BD \parallel CE$ ، $AC \parallel DF$ ، $\widehat{AC} = 85^\circ$ و $\widehat{BD} = 75^\circ$ است. اگر $\widehat{CNF} = 135^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{EF}$ چند درجه است؟



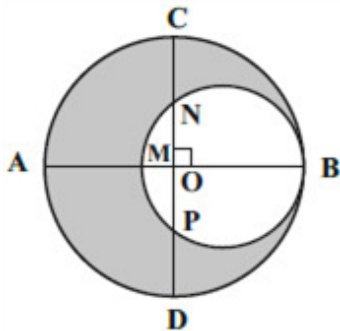
30 (۴)

35 (۳)

40 (۲)

45 (۱)

۱۲ در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = 8$ و $CN = 6$ باشد، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟



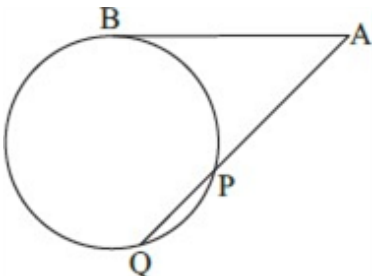
66π (۴)

64π (۳)

56π (۲)

54π (۱)

۱۳ در دایره $C(O, 5)$ پاره خط AB در نقطه B بر دایره مماس است. اگر $AB = 6$ و $AP = 4$ باشند، آنگاه طول کمان PQ برابر کدام است؟



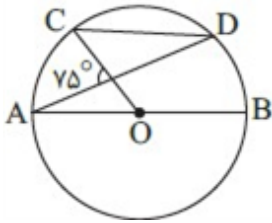
$\frac{5}{6}\pi$ (۴)

$\frac{6}{5}\pi$ (۳)

$\frac{4}{3}\pi$ (۲)

$\frac{5}{3}\pi$ (۱)

۱۴ در شکل مقابل وتر CD با قطر AB موازی است. زاویه $\widehat{DBA}$ چند درجه است؟



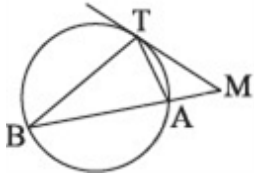
۶۰ (۴)

۶۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۵ در شکل، MT بر دایره مماس است. اگر $AT = ۲$ ، $BT = ۴$ و $MA = ۱/۵$ باشند، آنگاه اندازه AB کدام است؟



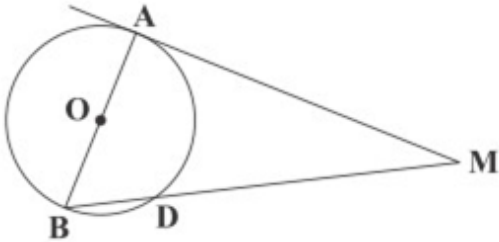
۴ (۴)

۴/۵ (۳)

۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۱۶ در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع آن ۴ واحد است. اگر $BD = ۴$ باشد، طول مماس MA کدام است؟



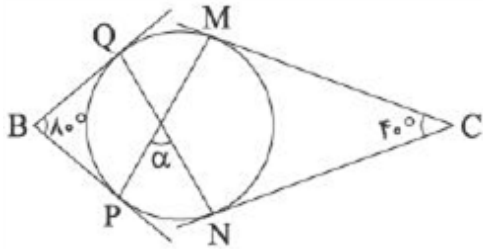
$۱۶\sqrt{۳}$ (۴)

$\sqrt{۳}$ (۳)

$۴\sqrt{۳}$ (۲)

$۸\sqrt{۳}$ (۱)

۱۷ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه α چند درجه است؟



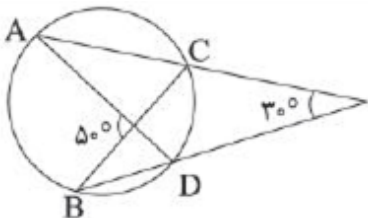
۳۰° (۴)

۵۰° (۳)

۶۰° (۲)

۴۵° (۱)

۱۸ در دایره $C(O, ۶)$ ، طول کمان AB برابر کدام است؟



۳π (۴)

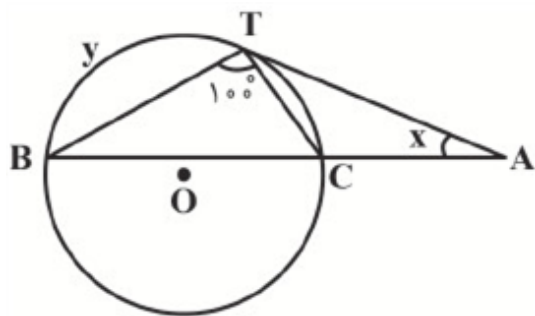
$\frac{۸}{۳}\pi$ (۳)

$\frac{۳}{۲}\pi$ (۲)

۶π (۱)

۱۹

در شکل مقابل، $\widehat{A} = x$ و $\widehat{BT} = y$ است. اگر $\widehat{B} = 2\widehat{A}$ و AT در نقطه‌ی T بر دایره مماس باشد، حاصل $y - x$ کدام است؟



۸۰° (۴)

۹۰° (۳)

۶۰° (۲)

۵۰° (۱)

در دایره‌ای به قطر AB، وتر AC با قطر AB زاویه‌ی 64° می‌سازد. نقطه‌ی D را روی کمان BC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC = CD$ ، زاویه‌ی BAD چند درجه است؟

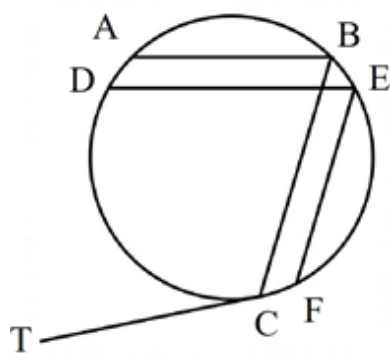
۳۵ (۴)

۳۶ (۳)

۳۷ (۲)

۳۸ (۱)

در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ و $AB \parallel DE$ است. اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 100^\circ$ و $\widehat{EF} = 80^\circ$ باشد، اندازه $\widehat{BCT}$ چند درجه است؟



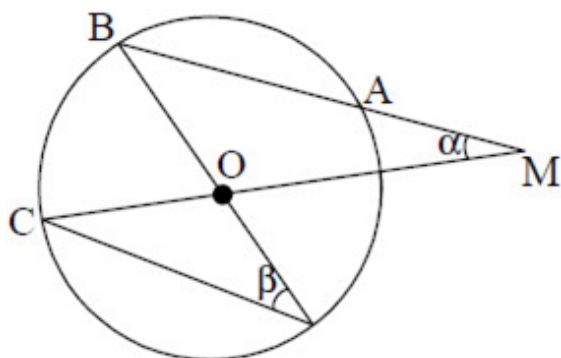
۱۱۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۹۵ (۲)

۹۰ (۱)

از نقطه‌ی M خارج دایره $C(O, R)$ ، خطی چنان رسم شده است که دایره را در نقاط A و B قطع کرده و $MA = R$ است. اگر $\alpha = 22^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه β کدام است؟



۲۲° (۴)

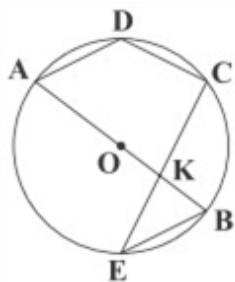
۲۷° (۳)

۳۰° (۲)

۳۳° (۱)

۲۳

در شکل زیر O مرکز و AB قطر دایره و $AD = DC = BE$ می‌باشد. اگر $\widehat{AKE} = 75^\circ$ باشد، زاویه ADC چند درجه است؟



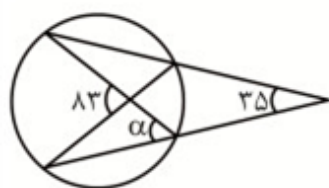
۱۰۰ (۴)

۱۰۵ (۳)

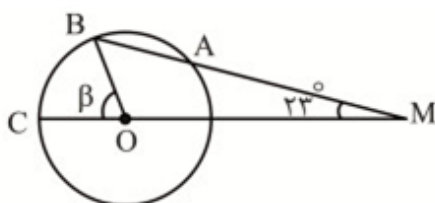
۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

۲۴ با فرض $MA = R$ (R شعاع دایره) در شکل‌های زیر، اندازه $\alpha + \beta$ کدام است؟



۱۳۲ (۴)

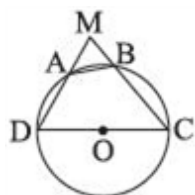


۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۱۸ (۱)

۲۵ در شکل زیر O مرکز دایره است و $CD = 2AD$. اگر $\widehat{BCD} = 50^\circ$ باشد، زاویه M چند درجه است؟



۷۰° (۴)

۶۰° (۳)

۵۰° (۲)

۴۵° (۱)

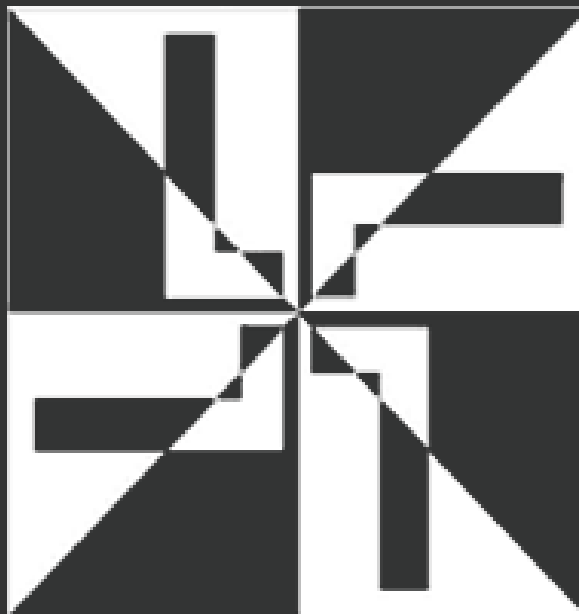
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴

تبدیلات هندسی

نمره در امتحان نهایی
شش نمره

تعداد تست
یک تست

پیش نیاز
تبدیلات هفتم



فصل دو هندسه یازدهم

انتقال، بازتاب،
دوران و تجانس

تبدیل هندسی

انتقال

بازتاب

دوران

تجانس

$$f(x, y) = (x + y, x - 3y)$$

۱ کدام یک از تبدیلهای زیر یک انتقال است؟

$$T(x, y) = (y + 2, x - 1) \quad (2)$$

$$T(x, y) = (x + 1, 1 - y) \quad (1)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x + 1}{2}, \frac{3y + 5}{3} \right) \quad (4)$$

$$T(x, y) = (2x + 1, 1 + y) \quad (3)$$

۲ تصویر خط $2x - 3y = 1$ را تحت تبدیل $T(x, y) = (1 - y, 2x + 2)$ به دست آورید.

حفظ شیب	ایزومتري	نقطه ثابت
		انتقال
		بازتاب
		دوران
		تجانس

۵	سه خط دوجه دو ناموازی L_1 و L_2 و L_3 داریم. توضیح دهید که چگونه می توان پاره خطی به طول ۵ واحد رسم کرد که دو سر آن روی L_1 و L_2 باشند و موازی L_3 باشد.	۲
۶	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ واحد باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.	۲
۷	نقطه B تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AB = 16$ و نقطه O روی خط L باشد و $OA = 10$ ، فاصله نقطه A از خط OB را بیابید.	۱/۵
۸	فقط درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) تجانس همواره اندازه زاویه را حفظ می کند. ب) بازتاب همواره شیب خط را حفظ می کند.	۱

۲ یکی از نقاط تلاقی دو دایره C و C' نقطه‌ی A می‌باشد برای رسم خطی از نقطه‌ی A گذشته به‌طوری‌که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی کوچک‌تر.
 (۲) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز A .
 (۳) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر.
 (۴) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز وسط خط‌المركزین دو دایره.

۳ دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ و نقطه‌ی A بیرون آن‌ها مفروضند برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به رأس A بطوریکه دو رأس بعدی در دایره C و C' قرار داشته باشند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) انتقال (۲) دوران (۳) تجانس (۴) بازتاب

۴ دوران یافته‌ی خط $3x - y = 2$ به مرکز مبدأ و زاویه‌ی -90° کدام است؟

(۱) $3y - x = 2$ (۲) $3y + x = 2$ (۳) $3y - x + 2 = 0$ (۴) $3y + x + 2 = 0$

۵

در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی

بزرگ‌تر کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۶

تحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص

است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

(۳) بازتاب نسبت به نقطه (۴) بازتاب نسبت به خط

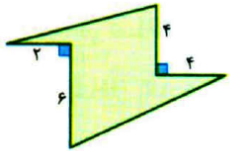
(۲) دوران

(۱) تجانس

کاربرد تبدیل هم پیرامونی

هرون

۷ زمینی به شکل زیر حصار کشی شده است و مساحت آن ۶۰ مترمربع است اگر بخواهیم بدون تغییر محیط زمین و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، حصارها را طوری جابه‌جا کنیم تا مساحت زمین بیش‌ترین مقدار ممکن شود، در این صورت حداکثر مساحت زمین چند مترمربع است؟



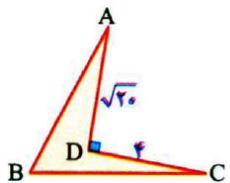
۸۸ (۴)

۸۶ (۳)

۸۴ (۲)

۸۲ (۱)

۸ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟



$8\sqrt{5}$ (۲)

$4\sqrt{5}$ (۱)

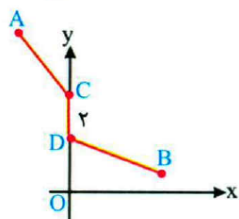
$16\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

۹ دو نقطه $A|-4$ و $B|4$ در طرفین محور yها قرار دارند، دو نقطه C و D به فاصله دو واحد از هم روی محور yها قرار دارند، حداقل طول خط

(مشابه داخل - ۹۹)

شکسته ACDB کدام است؟



۹ (۱)

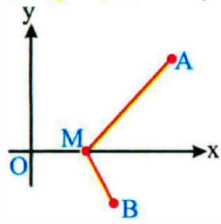
۱۰ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)

دکترها مسیح

۱۰. نقاط $A(4, 6)$ و $B(1, -2)$ در طرفین محور x ها قرار گرفته اند و نقطه M روی محور x ها می لغزد، حداکثر $|MA - MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



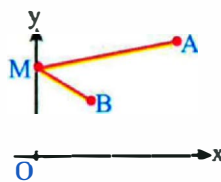
۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۱۱. نقاط $A(5, 7)$ و $B(1, 4)$ در یک طرف محور y ها قرار گرفته اند و نقطه M روی محور y ها می لغزد، حداکثر $|MA - MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۴ (۴)

دکتررها مسیح

انتقال

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

همانی:

حفظ جهت

ویژگی:

بازتاب

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

همانی:

حفظ جهت

ویژگی:

دوران

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

همانی:

حفظ جهت

ویژگی:

تجانس

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

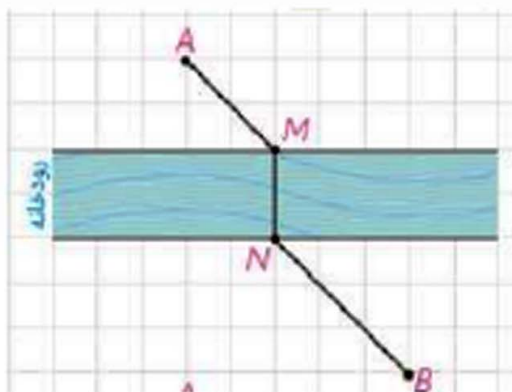
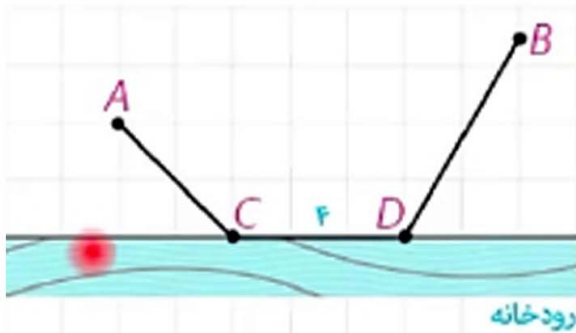
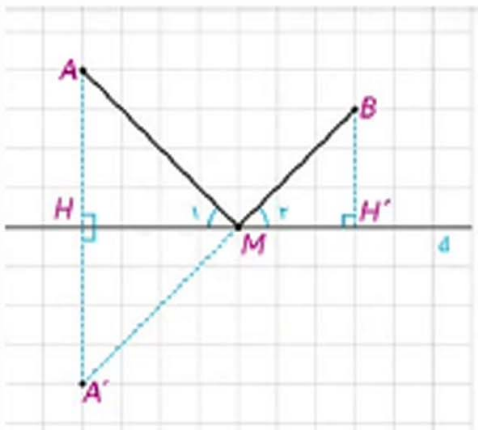
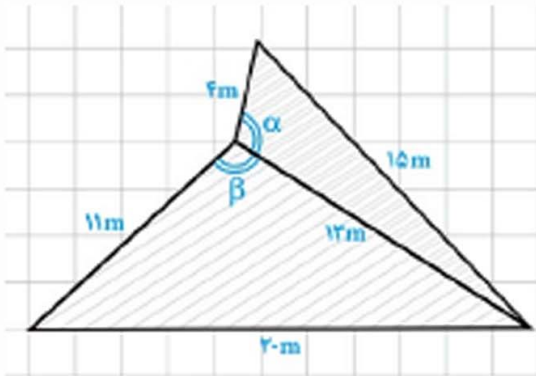
همانی:

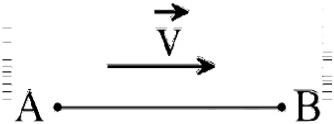
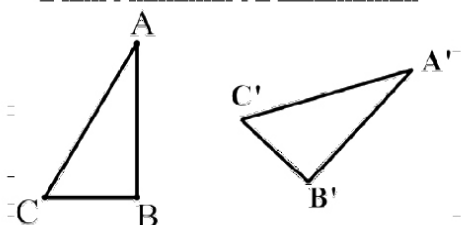
حفظ جهت

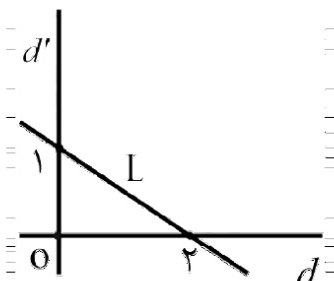
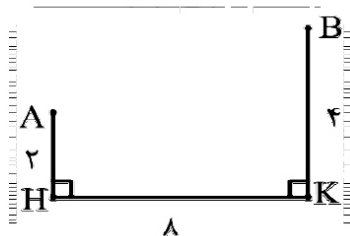
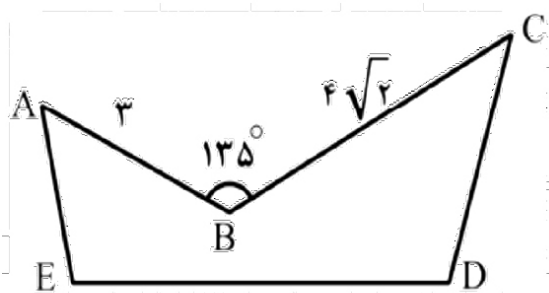
ویژگی:

تبدیل ها

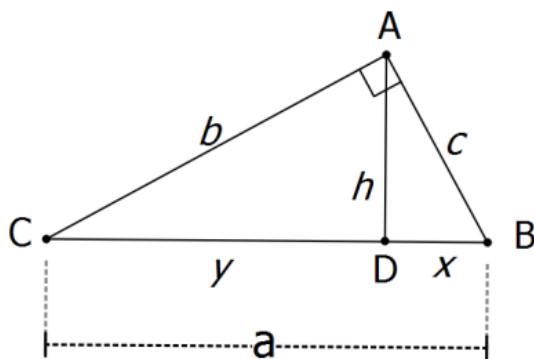
کاربرد تبدیل ها



ردیف	خرداد ۱۴۰۳	سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	خرداد ۱۴۰۳	نمره										
۷	۰.۷۵	سؤالات فصل ۲ برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است). <table border="1"> <thead> <tr> <th>گروه A</th> <th>گروه B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:</td> <td>دوران</td> </tr> <tr> <td>ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:</td> <td>همانی</td> </tr> <tr> <td>پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:</td> <td>بازتاب</td> </tr> <tr> <td></td> <td>انتقال</td> </tr> </tbody> </table>	گروه A	گروه B	الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران	ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی	پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب		انتقال		
گروه A	گروه B													
الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران													
ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی													
پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب													
	انتقال													
۸	۱	با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند. ($\vec{V} \parallel AB$ و اندازه $\vec{V}$ از اندازه پاره خط AB کوچک تر است). 												
۹	۰.۵	نقاط A'، B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید. 												

۱.۵	در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟ 	۱۰
۱.۲۵	با توجه به شکل، نقطه M روی پاره‌خط $HK=8$ را به گونه‌ای بیابید که: الف) مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد. ب) کمترین مقدار عددی $AM+MB$ را محاسبه کنید. 	۱۱
۱	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید. 	۱۲

مثلث قائم الزاویه



$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

قضیه کسینوس ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

۱ در مثلث ABC، زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و $b = a\sqrt{2}$ ، زاویه C چند درجه است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۲۰

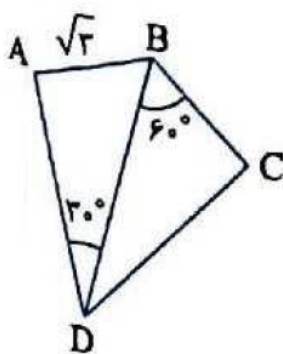
۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD محاطی است. طول ضلع CD کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



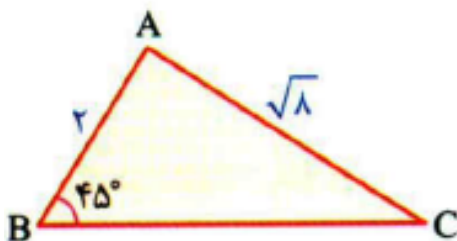
۳ در شکل مقابل اندازه زاویه A چقدر است؟

(۱) 135°

(۳) 75°

(۲) 105°

(۴) 60°



۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ اندازه شعاع دایره محیطی کدام است؟

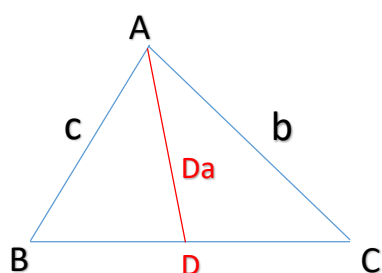
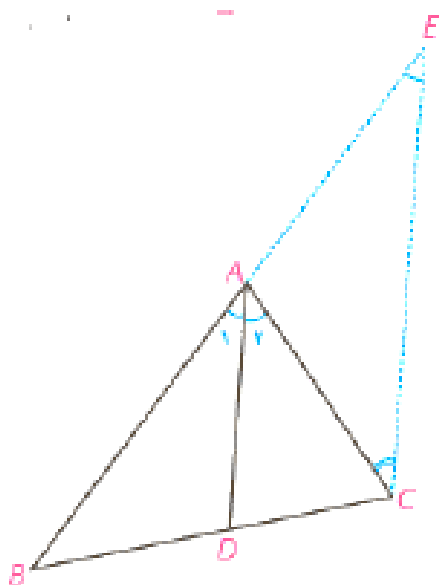
(۱) $8/5$

(۲) $7/5$

(۳) $9/5$

(۴) ۹

قضیه نیمساز و روابط مرتبط با آن



$$da = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

رابطه های میانه

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2ma^2$$

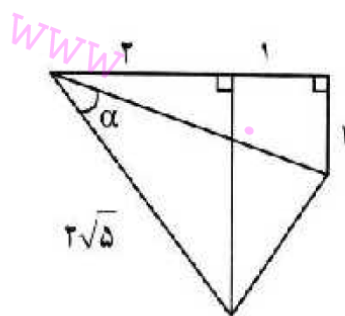
$$ma^2 = b^4 - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^r + m_b^r + m_c^r = \frac{r}{4} (a^r + b^r + c^r)$$

قضیه هرون

در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟ سراسری دی ۱۴۰۱

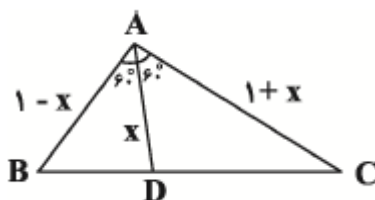
۵



sanjesh

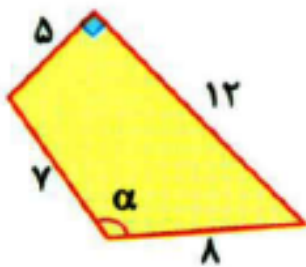
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{10}$
 (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

۶ در شکل مقابل، اندازه x کدام است؟



۱. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ۲. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ۳. $2 - 1$
 ۴. $3 - 1$

۷ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع برهم عمودند، $\sin \alpha$ کدام است؟ خارج کشور ۹۸



$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

۸ در مثلث ABC، حاصل $b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \sin^2 \hat{B}$ برابر با کدام است؟

a^2 (۱)

b^2 (۲)

c^2 (۳)

bc (۴)

۹ در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

سراسری ۹۵

$2/8$ (۲)

$2/1\sqrt{2}$ (۴)

$1/4\sqrt{2}$ (۱)

$2/1$ (۳)

۱۰ مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹، ۱۲ کدام است؟

$14\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

$14\sqrt{3}$ (۲)

$15\sqrt{2}$ (۱)

دکترها مسیح

۱۱ در مثلثی با اضلاع x ، 5 ، $2x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{2}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

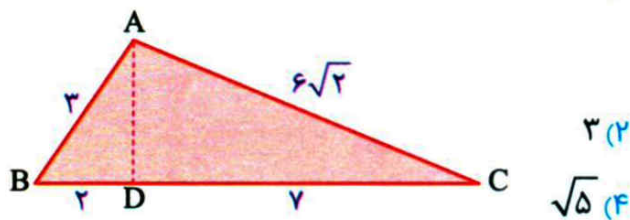
۱۵ (۲)

۱۷ (۱)

۱۲ در مثلثی با اضلاع 7 ، 10 ، 13 طول میانه وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

 $3\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{21}$ (۱)

۱۳ در شکل مقابل طول AD چقدر است؟

۳ (۲)

 $2\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۳)

۱۴ در مثلث ABC اگر $BC=10$ و میانه‌های $BM=12$ و $CN=9$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱۰۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۳۶ (۱)

۱۵ در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۳ و ۴ و زاویه بین آن‌ها 150° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

 $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

سوالات فصل ۳

خرداد ۱۴۰۳

◀ در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟ $0/5$ نمره
الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

◀ در مثلث ABC که $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $1/5$ نمره

◀ مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید. 1 نمره

◀ در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه C را محاسبه کنید. $1/5$ نمره

◀ در مثلث ABC که $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 8$ ، نقطه M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را به دست آورید. $1/5$ نمره