

# دایره

نمره در امتحان نهایی

هشت نمره

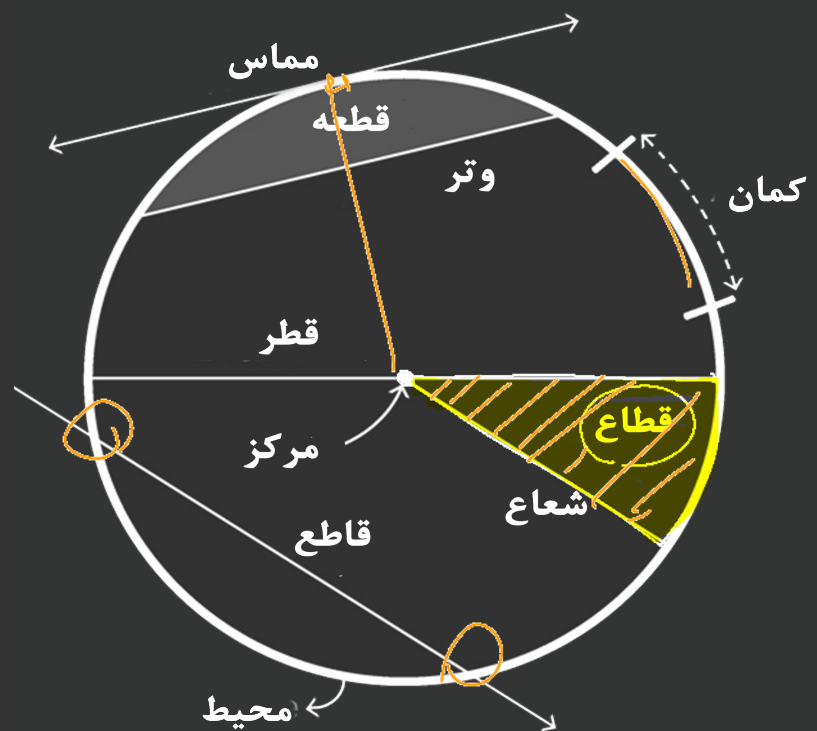
تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

زوایا سال هفتم

فصل ۱ هندسه دهم: هم‌رسانی های مثلث

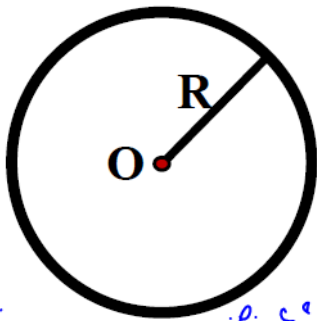


فصل یک هندسه یازدهم

زوایا  
روابط طولی  
محاطی - محیطی

دایره

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت هستند



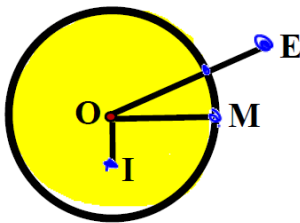
شعاع دایره  $OI < R$   
فاصله آرای های

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.

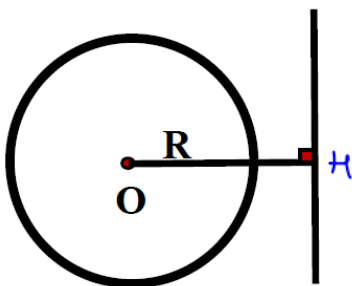
۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.

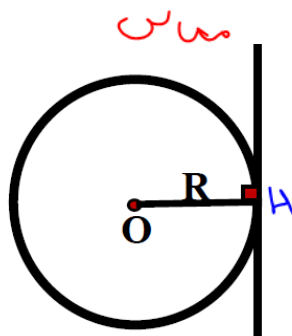


حالت های خط و دایره

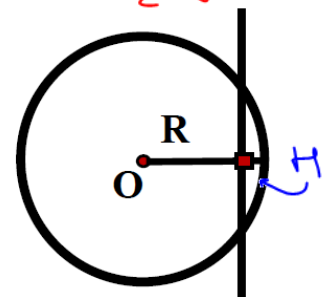
مماس



$OH > R$   
بدون برخورد



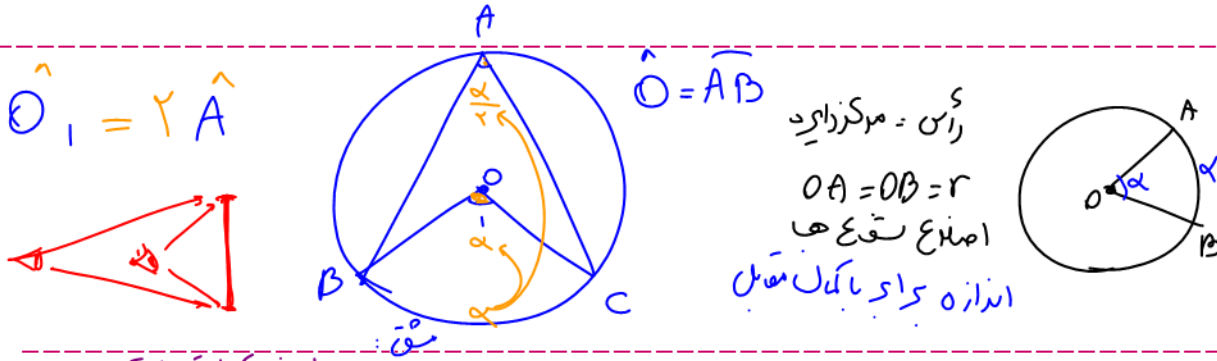
$OH = R$   
یک نقطه برخورد



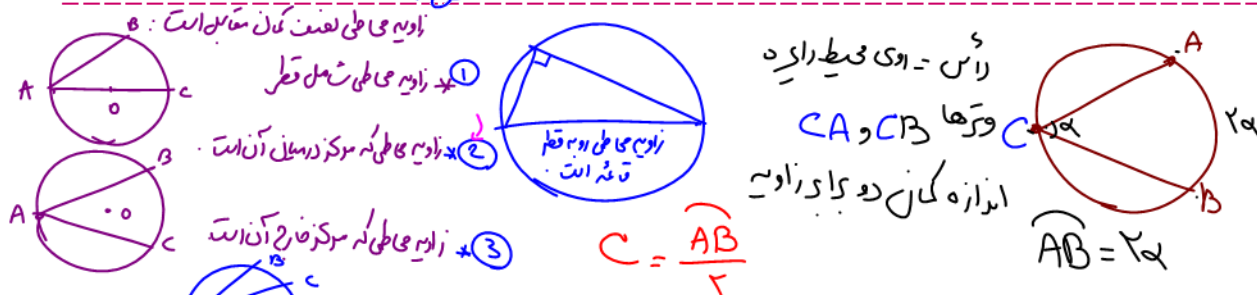
$OH < R$   
دو نقطه برخورد

انواع زاویه در دایره

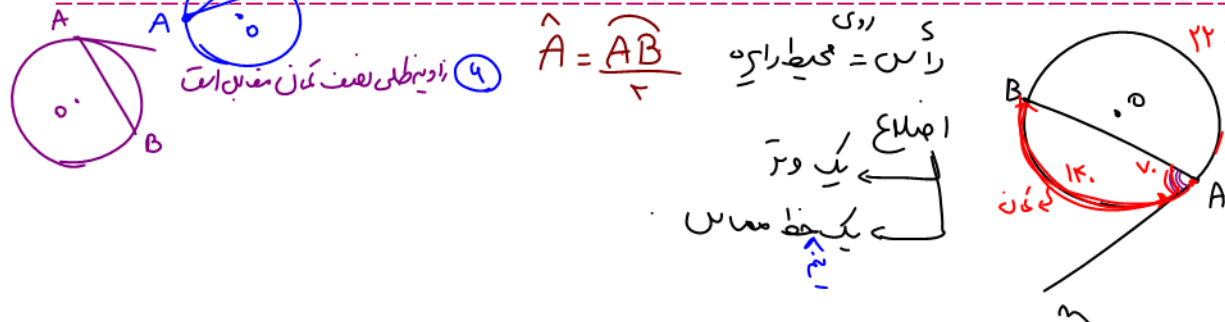
زاویه مرکزی



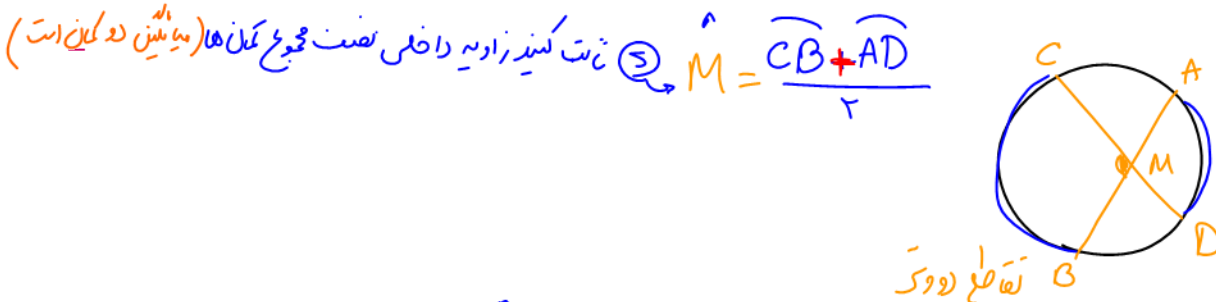
زاویه محاطی



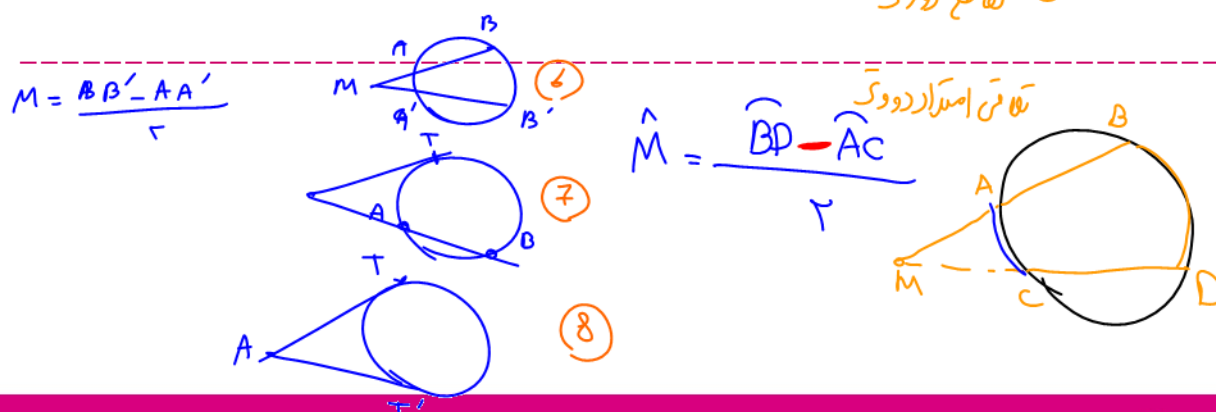
زاویه ظلّی



زاویه داخلی



زاویه خارجی



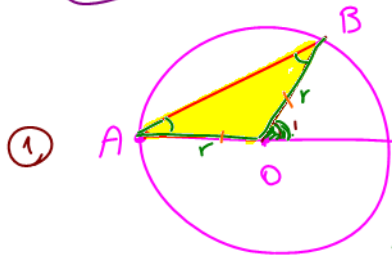
اثبات‌ها (بشترتویک بازایه ضربی صوری شوند)



$$\frac{a}{c} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{s}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

نهایت (۱) زاویه کند زاویه محاطی نصف کمان مقابل آن است

حکم  $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



①

مهری  $\hat{O}_1 = \widehat{BC}$  \*

خارجی  $\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B}$

شکل  $\widehat{OBA}$

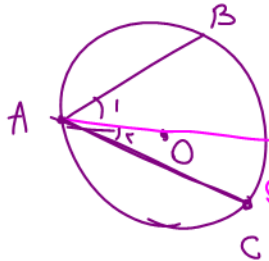
$OA = OB = r$

شکل‌های ال‌مین  $\hat{A} = \hat{B}$

① زاویه محاطی ش من قطر

$O = 2\hat{A} \rightarrow 2A = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

② مرکز بین زاویه



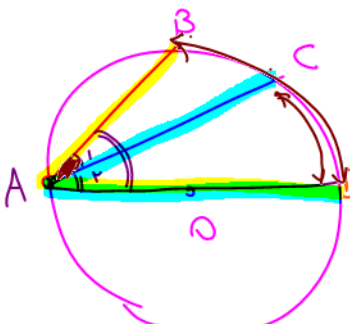
طبق قسمت ①

$A_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$

طبق قسمت ②

$A_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



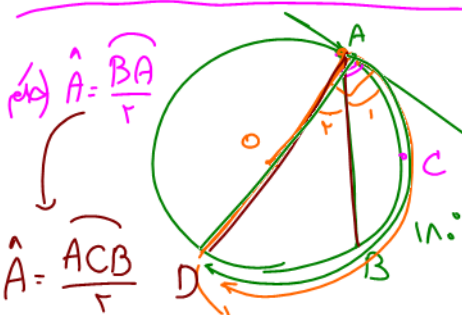
$A_1 + A_2$

$\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

$A_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

③ مرکز خارج از زاویه

$A_1 = A - A_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$



حکم  $\hat{A} = \frac{\widehat{BA}}{2}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

اثبات (۴) زاویه محاطی نصف کمان محسوس است

محاطی  $\hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2}$

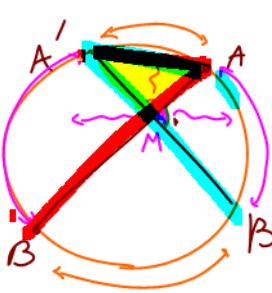
$A_1 = 90^\circ - \hat{A}_2 = 90^\circ - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BD}}{2}$

$\widehat{AD} = 180^\circ$

$\rightarrow A_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

خط مماس در نقطه A بر شعاع عمود است

اثبات (۵) زاویه کند زاویه حاصل از برخورد دو وتر را بره و یا بر میانگین دو کمان محسوس است



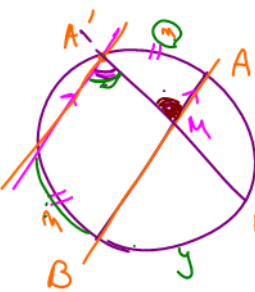
حکم  $M_1 = \frac{\widehat{AB'} + \widehat{A'B}}{2}$

$M_1 = \hat{A} + \hat{A'}$

$\hat{A} = \frac{\widehat{A'B}}{2}$

$A' = \frac{\widehat{AB'}}{2}$

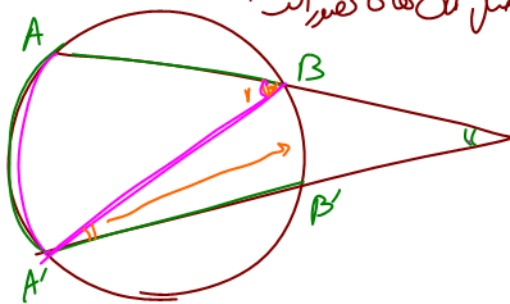
$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{A'B}}{2} + \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{A'B} + \widehat{AB'}}{2}$



$\widehat{AA'} + \widehat{BB'}$

$\hat{A} = \frac{x+y}{2}$



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AA'} - \widehat{BB'}}{r}$$


$$\begin{aligned} \text{MBA' } \text{في } \hat{B}_1 &= \hat{M} + \hat{A}' \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{A}' \\ \text{في } \hat{B}_1 &= \frac{\hat{A}\hat{A}'}{r} \quad \text{II, I} \Rightarrow \frac{\hat{A}\hat{A}'}{r} - \frac{\hat{B}\hat{B}'}{r} \\ \text{في } \hat{A}' &= \frac{\hat{B}\hat{B}'}{r} \quad \hat{M} = \frac{\hat{A}\hat{A}' - \hat{B}\hat{B}'}{r} \end{aligned}$$

نقطه ۷) نسبت کینز را در این میان حفظ می‌کنیم و استر را یک وتر هفت تا ضلع یکان <sup>۵</sup> محصور است.

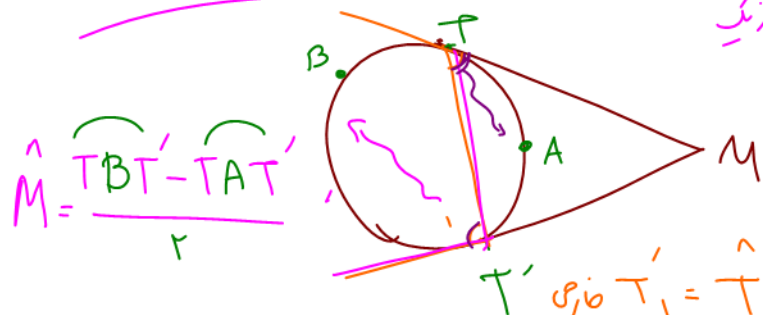


$$\hat{B}_1 = \hat{T} + \hat{M} \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{T}$$

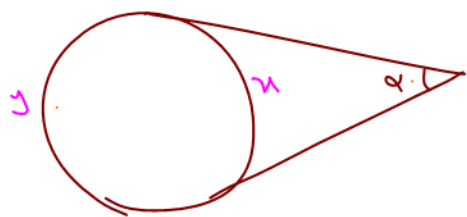
(اثبات ۸) به کمک رگرسیون  
 دو متغیر رسم کرده است  
 فقط برای این متغیر

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{TB}}{r}$$

ابن قتیبه (۸) توبه کنید زاریم من  
دو سال رسم زده از من  
لعلم کبایه لعلف قاض  
(و کلام اکار سرگه است)



$$M = \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TAT'}}{Y}$$

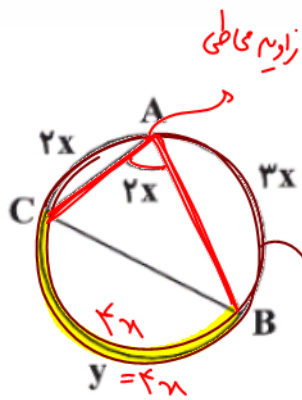


$$\hat{M} = \hat{T} - \hat{T}$$

$$\begin{cases} y - x = 2\alpha \\ y + x = 2\varphi_0 \end{cases}$$

$$2y = 2\varphi_0 + 2\alpha$$

$$y = 11.0 + \alpha$$
$$u = 11.0 - \alpha$$



۱ با توجه به شکل مقابل، حاصل  $y - x$  کدام است؟

$$\rightarrow F_n - \lambda = P_n$$

$$140 - 50 = 12.$$

9.° (1)

15. (2)

१२.° (५)

135° (F)

$$\mu_x f_0 = 120$$

$$\angle \text{ميدان} = 34^\circ$$

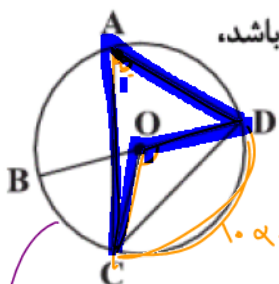
هذه موقع هذه مكانها را را رسم

$$\gamma_n + \mu_n + \cancel{\gamma} = \mu\gamma_0$$

$$Y_n + W_n + K_n = W_0$$

$9x = 740$

$$n = K_0$$



۲ در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر  $\hat{A} = 7\alpha - 10^\circ$ ،  $\text{C}\hat{\text{O}}\text{D} = 10\alpha + 20^\circ$  و O مرکز دایره باشد،

کمان  $\widehat{BC}$  چند درجه است؟

15 (1)

30 (2

45 (T)

१० (५

$$\hat{A} = V\alpha - 1_0 \longrightarrow \hat{C}D = \hat{V}\hat{A} = \hat{V}(V\alpha - 1_0)$$

$$\text{COP} = \frac{1}{15} \alpha + \gamma_0 = \widehat{\text{CD}} = \widehat{\text{CD}} = 15\alpha - \gamma_0$$

مرکز — مرکز

$$10\alpha + 20 = 11\alpha - 20$$

$$K_0 = K_\infty$$

$$1. = \alpha$$

$$* 10\alpha + \gamma_0 = \gamma(\nu\alpha - 1_0)$$

دکتر رها مسیح



دوایم > وتری > وتری  
قضایای مهم

فرض  $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

حکم  $AH = HB$

$\widehat{AD} = \widehat{DB}$

شعاع در دایره یهفته است

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$OA = OB = r$

$OH = OH$

$\triangle OAH \cong \triangle OBH$

$\Rightarrow AH = HB$

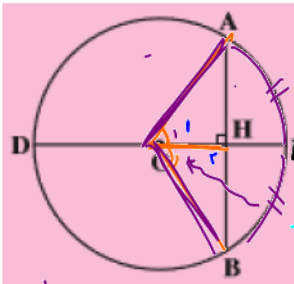
$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$

فرض

مرکزی

$\widehat{AD} = \widehat{DB}$



فرض  $AH = HB$

حکم  $\widehat{AE} = \widehat{EB}$

$AH = HB$

$OA = OB$

$OH = OH$

$\triangle OAH \cong \triangle OBH$

$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$

فرض

مرکزی

$\widehat{AE} = \widehat{EB}$

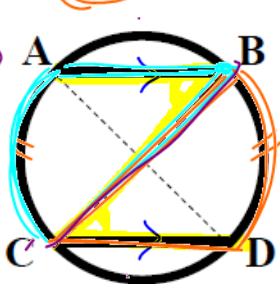
$\hat{H}_1 = \hat{H}_2$

$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$

مکمل



$\widehat{AB} \neq \widehat{CD}$   
لزوماً برابر نیست!!



فرض  $AB \parallel CD$

$\xrightarrow[\text{موازی برابر}]{\text{خطوط}} BC$

$\hat{ABC} = \hat{BCD}$

$\xrightarrow{\text{مقابل}} \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

حکم

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

ثابت کنید اگر گره ها محدود بین دو خط موازی باشند

فرض  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\xrightarrow{\text{مقابل}} \hat{B} = \hat{C}$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

حکم

$AB \parallel CD$

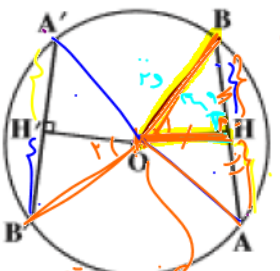
$\xrightarrow{\text{عکس خط موازی}} AB \parallel CD$

موازی

$AB \parallel CD$

$AB \parallel CD$

$AB \parallel CD$



فرض  $OH = OH'$

$AB = A'B'$

حکم

$OH = OH'$

$H = H' = 90^\circ$

$OB = OB'$

$\triangle OBH \cong \triangle OB'H'$

$\Rightarrow BH = B'H'$

$AB = A'B' \leftarrow BH + A'H'$

$\times r$

$OB^2 = OH^2 + BH^2$

$OB'^2 = OH'^2 + B'H'^2$

$AB = A'B' \times r$

$OH < OH'$

$BH < B'H'$

$AB < A'B'$

فرض

حکم

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

فرض

حکم

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

فرض

حکم

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

فرض

حکم

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

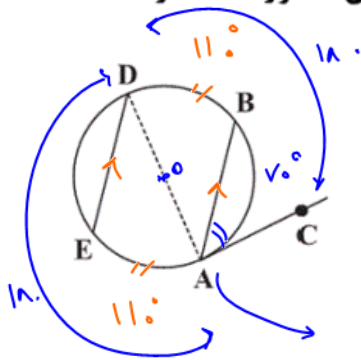
$OH > OH'$

$AB < A'B'$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۳

در شکل روبه‌رو  $AC$  مماس بر دایره و  $AB \parallel DE$ ،  $\widehat{AE} = 110^\circ$  می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه  $\widehat{BAC}$  کدام است؟ (  $AD$  قطر دایره است.)



نسبت کمان مقابل = خطی

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BA}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

(۱)  $35^\circ$

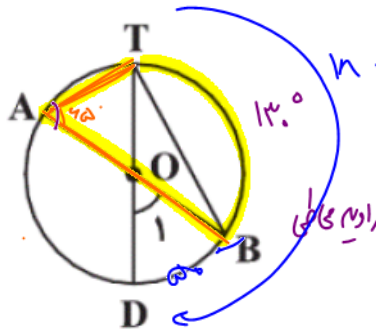
(۲)  $70^\circ$

(۳)  $40^\circ$

(۴)  $45^\circ$

۴

در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و  $\widehat{A} = 65^\circ$  است. اندازه زاویه  $\widehat{O_1}$  کدام است؟



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2}$$

$$65^\circ = \frac{\widehat{TB}}{2} \rightarrow \widehat{TB} = 130^\circ$$

(۱)  $65^\circ$

(۲)  $60^\circ$

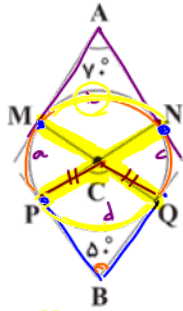
(۳)  $50^\circ$

(۴)  $45^\circ$

دکترها مسیح

$$C = \frac{d+b}{2} = \frac{240}{2} = 120^\circ$$

۵ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟



$$70^\circ A = \frac{a+d+c-b}{2}$$

$$140 = a+d+c-b \Rightarrow 140 = 2a+2c$$

$$100 = a+b+c-d \Rightarrow 120 = a+c$$

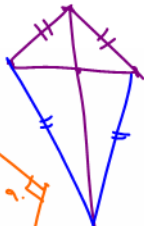
- (1)  $100^\circ$
- (2)  $120^\circ$
- (3)  $80^\circ$
- (4)  $140^\circ$

$$a+b+c+d=320^\circ$$

$$120$$

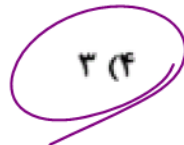
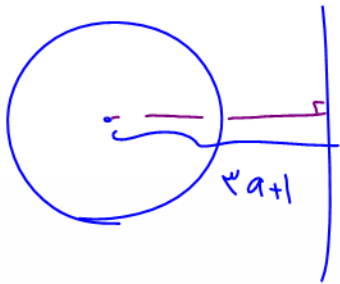
$$b+d=240$$

شع در نقطه مماس بر خط مماس مماس



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

۶ دایره  $C(O, r)$  و خط  $\ell$  به فاصله  $3a+1$  از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار  $a$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۱)

مقدار  $a$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$\frac{3}{2} (2) \quad 1/5$$

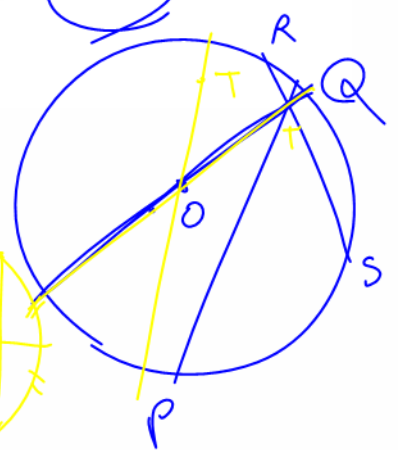
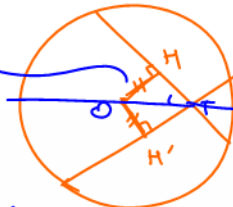
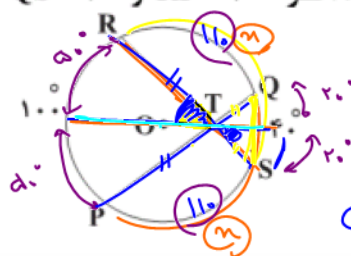
$$3a+1 > r$$

$$3a > 6 \rightarrow a > 2$$

۷ در دایره  $C(O, r)$  وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر  $\widehat{RP} = 100^\circ$  و  $\widehat{QS} = 40^\circ$  باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

$$\widehat{RQ} = \frac{40+120}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ$$

- (1)  $70^\circ$
- (2)  $35^\circ$
- (3)  $30^\circ$
- (4)  $40^\circ$



$$RS = PQ \Rightarrow \widehat{RS} = \widehat{PQ}$$

دو وتر برابرند

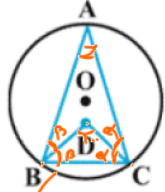
$$\widehat{RQ} + \widehat{QS} = \widehat{PS} + \widehat{QP}$$

$$2n + 40 + 100 = 360$$

$$2n = 220 \Rightarrow n = 110$$



۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر  $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آنگاه کمان BC چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۸۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

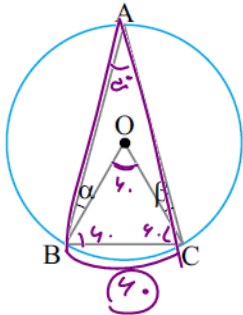
$$\widehat{BDC}: \beta + \alpha + 100 = 180$$

$$\beta + \alpha = 80$$

$$2\beta + 2\alpha = 160 \Rightarrow A = 180 - 160 = 20$$

$$\widehat{BC} = 2\hat{A} = 40$$

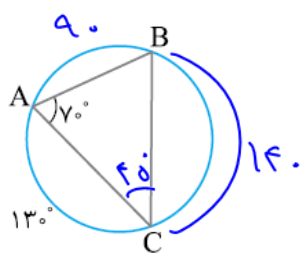
۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل  $\alpha + \beta$  کدام است؟ (O مرکز دایره)

(۱)  $10^\circ$ (۲)  $20^\circ$ (۳)  $30^\circ$ (۴)  $40^\circ$ 

$$30 + \alpha + 40 + \beta + 40 = 180$$

$$\alpha + \beta = 30$$

۱۰ در شکل مقابل اندازهی زاویهی C کدام است؟

(۱)  $70^\circ$ (۲)  $60^\circ$ (۳)  $65^\circ$ (۴)  $45^\circ$ 

$$130^\circ + 140^\circ = 270$$

$$360 - 270 = 90$$



וועג

11

دایره‌ی  $C(\bar{O}, 4)$  و نقطه‌ی  $M$  به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

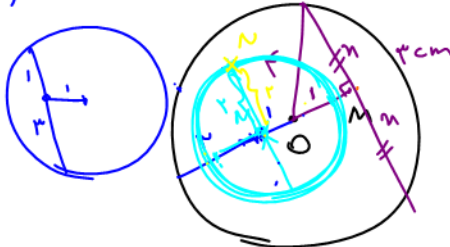
1 (1)

2. (2)

۳) صفر

(۴) بی شمار

کتابہ ترین و تر مکتب سے رہنمائی و رہنمائی



٢٧١٥  
وَمِنْ مَحْذُورٍ  
رَقَرٍ

ویرایم ند  
زین نعم راض  
دایره

قطر

प्रा. वि.

هیچ وتر → وتر مجوز < اندازه

۱. وتر  $\Rightarrow$  وتر عمود = اندازه قطر

$$I_2 \Rightarrow \text{قطر} < \text{اندازه} < \text{وسعت محور}$$

هسته  $\Rightarrow$  قطر اندازه

12

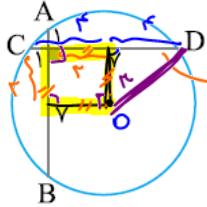
مطابق شکل مقابل، دو وتر  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

$$\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

Δ (✓)

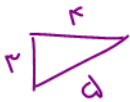
$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

٩ (٢



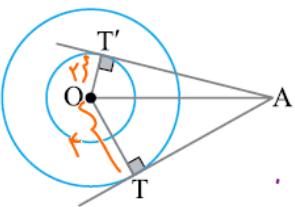
→ دوویترای بند

← فاصله ها هم برای من



ابنِ علیؑ

مربع تناقصات  $(AT - AT')^2$



مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

13

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

12 (2)

 $\gamma \circ (f$ 

10 (1)

١٤ (٣)

AT - AT

$$\begin{aligned} \vec{r} + A\vec{t} &= Q\vec{a} \\ \vec{y} + A\vec{t}' &= Q\vec{a} \end{aligned}$$

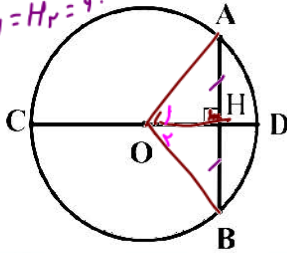
$$\underbrace{14 - 7}_{17} = A^T{}^T - A^T{}^T$$

## آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید



در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB را نصف می کند. خرداد ۱۴۰۳

۱/۵ نمره  
فرض  $H_1 = H_2 = 90^\circ$

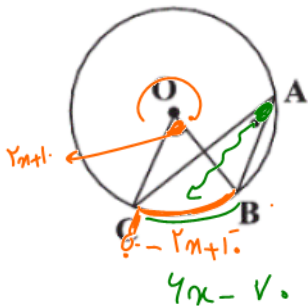


حکم  $AH = HB$  /  $\widehat{AD} = \widehat{DB}$

$\left. \begin{array}{l} OH = \text{مترک} \\ OA = OB = r \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضی}} \widehat{OAH} \cong \widehat{OHB} \rightarrow AH = HB$

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \xrightarrow{\text{قضی}} \widehat{AD} = \widehat{DB}$

دایره (O, ۶) مفروض است. اگر  $\hat{A} = (3x - 25)^\circ$  و  $\hat{O} = (2x + 10)^\circ$  باشد، طول کمان BC کدام است؟



$$\frac{\alpha}{360} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{s}{\pi r^2}$$

$$2x + 10 = 4x - 70$$

$$10 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$2x + 10 = 2 \times 20 + 10 = 50$$

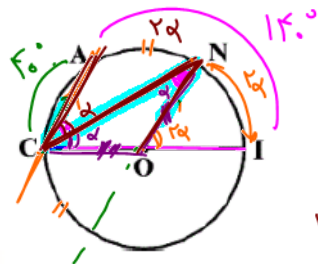
$$\frac{50}{360} = \frac{l}{\pi r^2}$$

$$l = \frac{5\pi}{3}$$

- (۱)  $\frac{5\pi}{3}$  ✓
- (۲)  $2\pi$
- (۳)  $\frac{8\pi}{3}$
- (۴)  $\frac{10\pi}{3}$

۱۷

در شکل مقابل، CI قطر دایره و  $CA \parallel ON$ . اگر  $\widehat{AC} = 40^\circ$  باشد، آن گاه اندازه زاویه CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است).



$$140 = 4\alpha$$

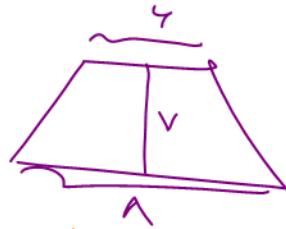
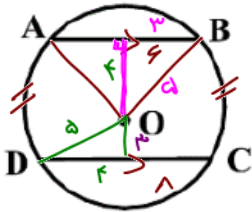
$$\frac{140}{4} = \alpha$$

$$35 = \frac{70}{2} = \alpha$$

- (۱)  $27/5^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $35^\circ$  ✓
- (۴)  $22/5^\circ$

۱۸

۱۹ مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی  $AB = ۶$  و  $CD = ۸$  در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟



$$S = \frac{(6+8) \times 7}{2} = 29$$

۵۶ (۱)

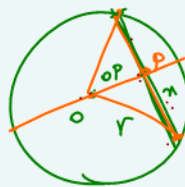
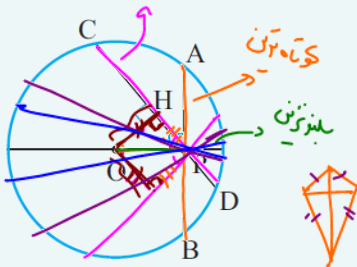
۴۹ (۲) ✓

۴۲ (۳)

۳۵ (۴)

دو از اینها و دو تا دیگه

۲۰ نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



$$x^2 = r^2 - op^2$$

$$2x = 2\sqrt{r^2 - op^2}$$

کوچک‌ترین وتر

قطر =  $2r$

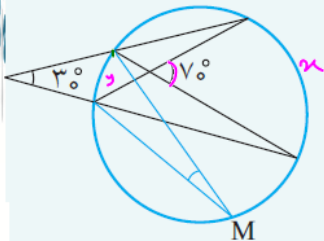
بزرگ‌ترین  $2r < \text{طول وتر}$

کوچک‌ترین  $\perp \text{وتر}$   $\text{طول وتر} = 2x$

\*  $\text{قطر} > \text{طول وتر} > 2x$

$\perp \text{وتر}$   $\text{قطر} = \text{طول وتر}$

۲۱ زاویه M را به دست آورید.



$$\frac{x+y}{2} = 70 \rightarrow x+y = 140$$

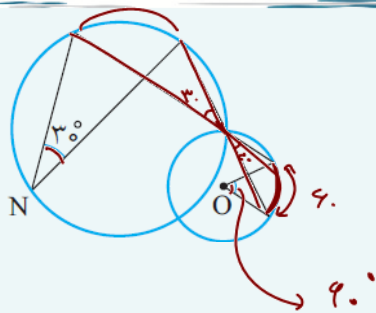
$$\frac{x-y}{2} = 20 \rightarrow x-y = 40$$

$$\frac{y}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$2x = 20 \rightarrow x = 10$$

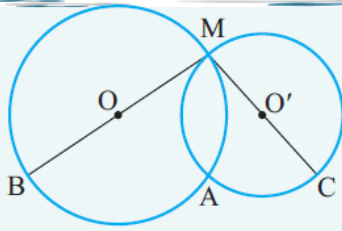
$$y = 40$$

۲۲ زاویه O را به دست آورید.

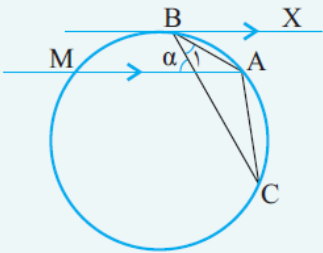


سرمشق:

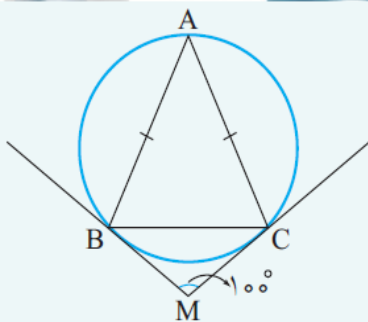
## دکترها مسیح



۲۳ نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



۲۴  $\hat{B}_1 = 30^\circ$ ،  $\hat{C} = 20^\circ$  و  $BX \parallel MA$ . زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.



۲۵ MB و MC مماس بر دایره هستند و  $AB = AC$ . زاویه  $\hat{A}$  را به دست آورید.

در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر  $AB$  رسم شده است. اگر  $BC = CD$  و  $AD = DE$ ، اندازه زاویه  $A$  چند درجه

۲۶

است؟

(۱)  $24^\circ$ (۲)  $30^\circ$ (۳)  $36^\circ$ (۴)  $42^\circ$ 

در شکل روبه‌رو،  $AB$  قطر دایره است،  $PD$  بر دایره مماس است و  $\widehat{C} = 110^\circ$ ، اندازه زاویه  $P$  چند درجه است؟

۲۷

(۱)  $50^\circ$ (۲)  $60^\circ$ (۳)  $45^\circ$ (۴)  $55^\circ$ 

در شکل روبه‌رو،  $AE$  بر دایره مماس است و  $OD$  با  $AC$  موازی است. اندازه زاویه  $\widehat{CBD}$  چند درجه است؟

۲۸

(۱)  $15^\circ$ (۲)  $20^\circ$ (۳)  $25^\circ$ (۴)  $30^\circ$ 

در شکل روبه‌رو،  $CD$  بر دایره کوچک مماس است. اگر  $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه  $\widehat{BEC}$  چند درجه است؟

۲۹

(۱)  $80^\circ$ (۲)  $100^\circ$ (۳)  $40^\circ$ (۴)  $50^\circ$ 

در شکل روبه‌رو،  $O$  محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث  $ABC$  است. زاویه  $\widehat{AOD}$  برابر کدام است؟

۳۰

(۱)  $\widehat{OBC}$ (۲)  $\widehat{CAD}$ (۳)  $\widehat{OAC}$ (۴)  $\widehat{ADO}$



دکترها مسیح

۳۱

در مثلث  $ABC$ ، داریم  $\hat{B} = 50^\circ$  و  $\hat{C} = 60^\circ$  نیمساز داخلی زاویه  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  در نقطه  $M$  متقاطع اند. زاویه  $MBC$  چند درجه است؟

(۴)  $40^\circ$

(۳)  $35^\circ$

(۲)  $30^\circ$

(۱)  $25^\circ$

۳۲

در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) نقطه  $O$  در امتداد  $AC$ ، مرکز دایره ای است که در نقطه  $B$  بر ضلع  $AB$  مماس است. امتداد  $BC$  این دایره را در  $D$  قطع کرده است. مثلث  $OCD$  چگونه است؟  
(۱) متساوی الساقین (۲) قائم الزاویه (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین (۴) غیر مشخص

۳۳

در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله وسط کمان  $AB$  از نزدیک ترین رأس مربع چقدر است؟

(۱)  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۲)  $\sqrt{4} - 2\sqrt{2}$

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{1} + \sqrt{2}$

۳۴

در شکل مقابل، اگر  $AB = 6$ ،  $BC = 8$ ،  $CD = 3$  و  $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، آنگاه اندازه  $AM$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲)  $2/25$

(۳)  $2/5$

(۴)  $2/75$

۳۵

در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک رأس آن و شعاع  $2/5$  واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند. فاصله نزدیک ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۱)  $\frac{1}{4}$

۳۶

مربع  $ABCD$  به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس  $A$  و  $B$  و مماس بر ضلع  $CD$  کدام است؟

(۴) ۳

(۳)  $2\sqrt{2}$

(۲)  $2/5$

(۱)  $2/25$

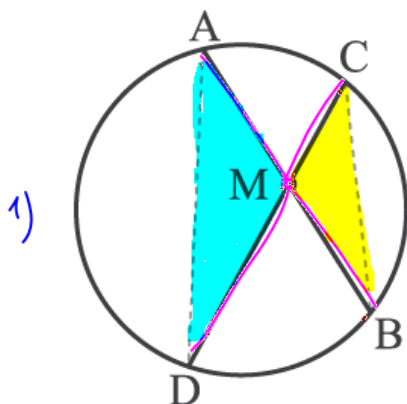
دکترها مسیح

مسیح

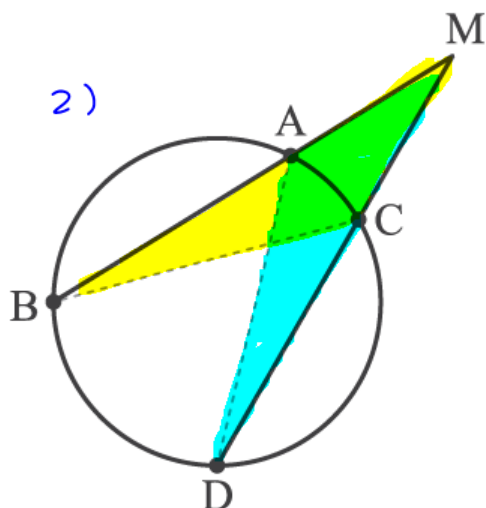
\* تست ۲۳ تا ۳۴ مسیح  
 زاپادانی = زاپادانی  
 + ۲ انبار ۵ تا ۱۰ علقی با موزی  
 + ۱ انبار ۳ تا ۳ موزی

روابط طولی در دایره

$$\underline{AM} \cdot \underline{BM} = \underline{CM} \cdot \underline{DM} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



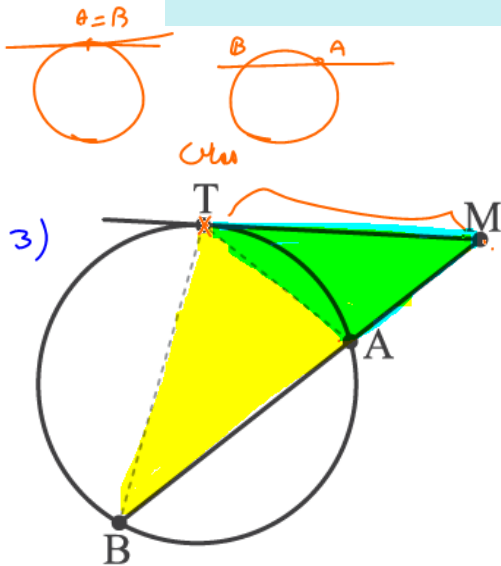
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



از اینرو، هر سه این قضایا دارای طرح کلی یکسانی می باشند:

نقطه دایره = نقطه دایره = نقطه دایره

(vertex to circle) · (vertex to circle) = (vertex to circle) · (vertex to circle)



نقطه دایره نقطه دایره

$$MT \times MT = MA \times MB$$

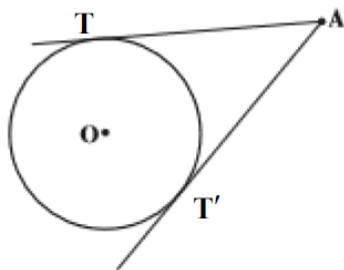
خط مماس و لایحه هینزی

میان دو قطاع

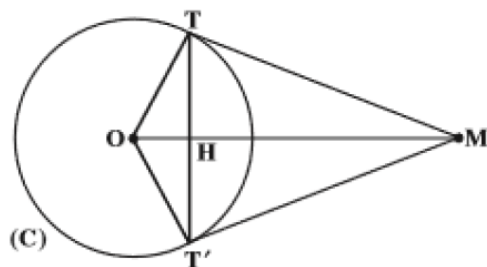
ای ریشه اوی وک

صلتند

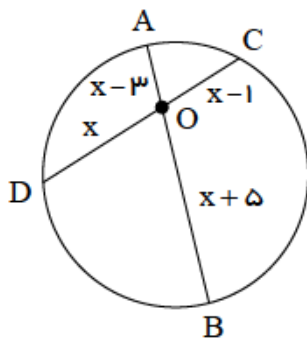
$$MT^2 = MA \times MB$$



خط مماس بر دایره



- OM نیمساز  $\hat{O}$  و نیمساز  $\hat{M}$  است.
- OM عمود منصف  $TT'$  است.
- $OH \times OM = R^2$ .
- $TT'^2 = 4OH \times MH$ .
- $TT' \times OM = 2R \times MT$ .
- $MT = MT'$ .

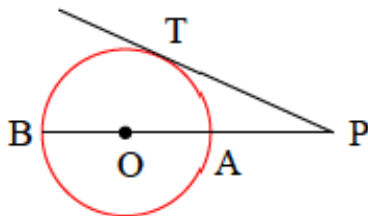


۳۷ در شکل مقابل  $x$  برابر است با:

- ۱) ۵  
 ۲) ۱۰  
 ۳) ۸  
 ۴) گزینه های ۱ و ۲

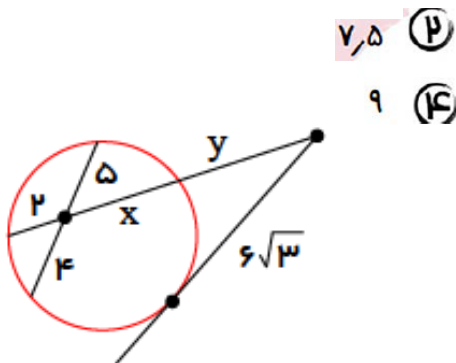
۳۸ در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و  $AB$  قطر و  $PA = ۴$  می باشد، طول مماس  $PT$  کدام است؟

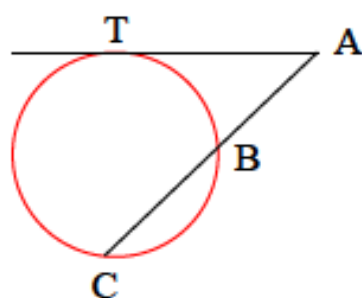
- ۱)  $۴\sqrt{۳}$   
 ۲)  $۵\sqrt{۲}$   
 ۳) ۱۴  
 ۴) ۸



۳۹ در شکل مقابل مقدار  $y$  کدام است؟

- ۱) ۶  
 ۳) ۸





۴۰. در شکل،  $AT$  مماس و کمان های  $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$  زاویه  $A$  چند درجه است؟

۷۲° (۵)

۱۸° (۱)

۱۴۴° (۴)

۳۶° (۳)

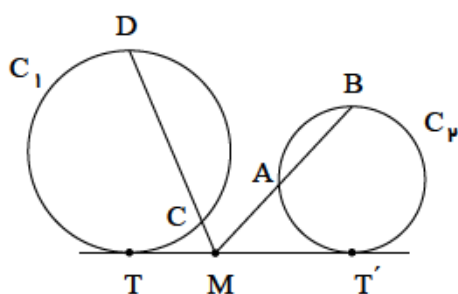
۴۱. در شکل مقابل  $T$  و  $T'$  نقاط تماس هستند. اگر  $MT = \frac{1}{3}MT'$  باشد، حاصل  $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$  کدام است؟

۳ (۵)

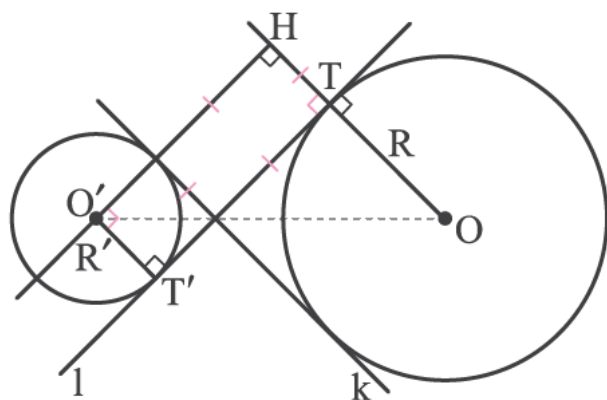
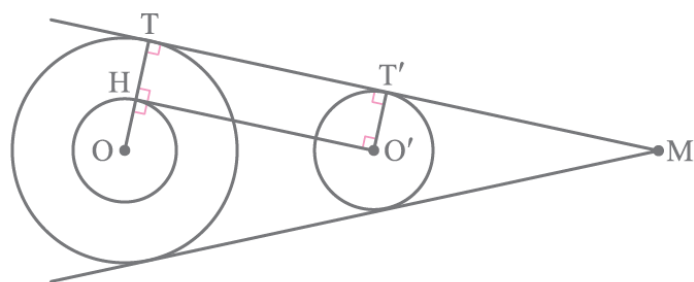
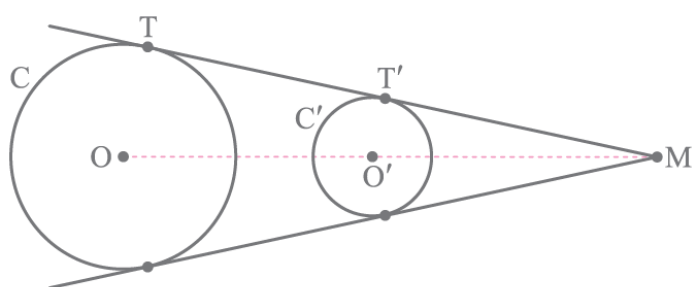
۴ (۱)

$\frac{1}{9}$  (۴)

۹ (۳)

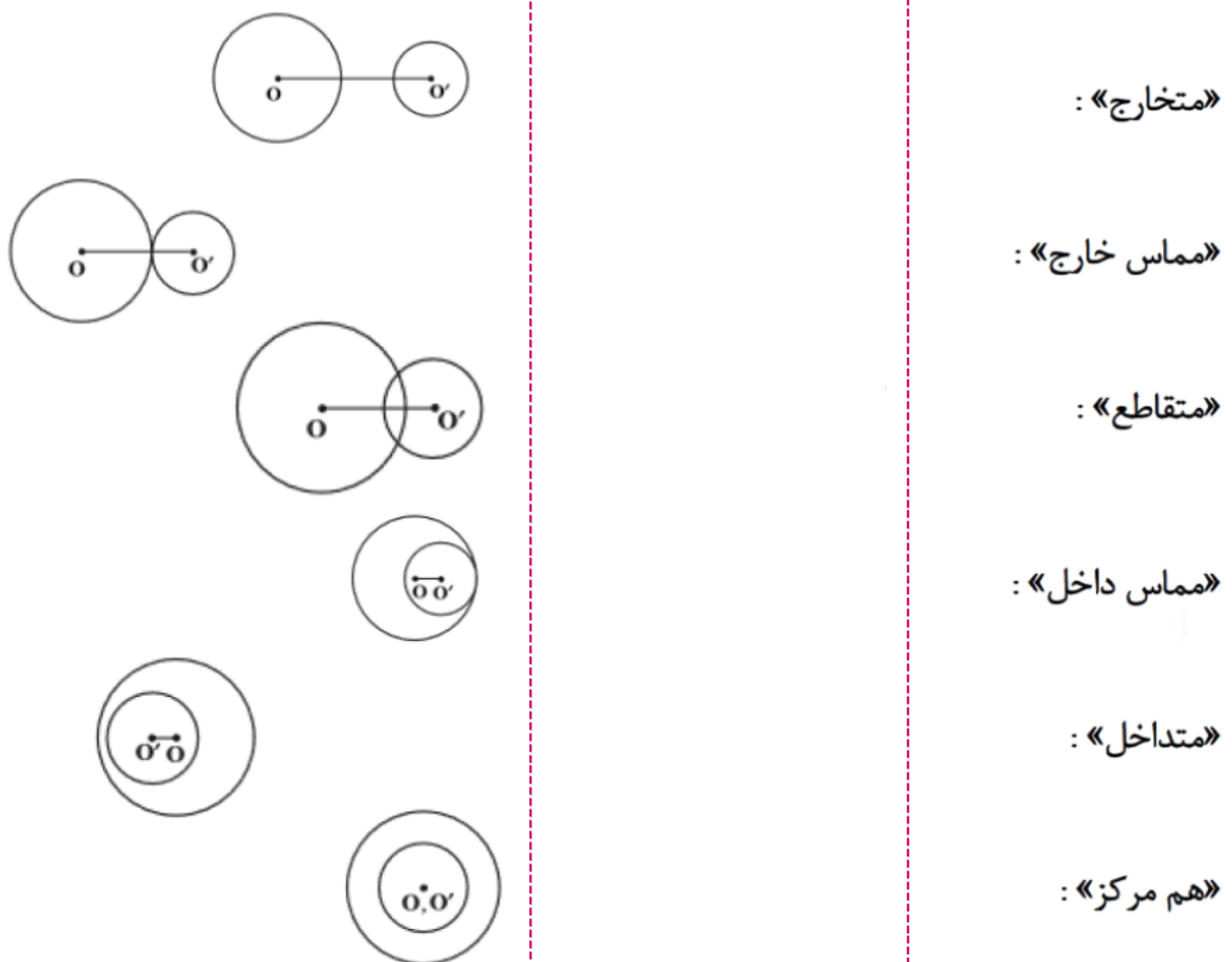


مماس مشترک





فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:



۴۲ اگر دو دایره را به مراکز  $O(2, -3)$  و  $O'(1, 4)$  داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی دوم ۳ باشد، دو دایره در چه وضعیتی نسبت به هم قرار دارند؟

۴۳

دو دایره  $C(O, 17)$  و  $C'(O, 10)$  مفروضند. خط قاطع  $d$  که در دایره  $C$  وترى به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایره  $C'$  وترى با کدام طول پدید می‌آورد؟  
 ۱۵ (۱)      ۱۲ (۲)      ۱۰ (۳)      ۸ (۴)

۴۴

دو دایره  $C_1$  و  $C_2$  به شعاع ۵ مماس خارجند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره  $C_1$  مماس باشد و در دایره  $C_2$  وترى به طول ۶ جدا کند؟

۱۴ بی شمار

۳ ۴

۶ ۲

۱ صفر

۴۵

دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۲ مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۱۲ واحد باشد، بیش‌ترین فاصله بین نقاط روی دو دایره از هم چقدر است؟

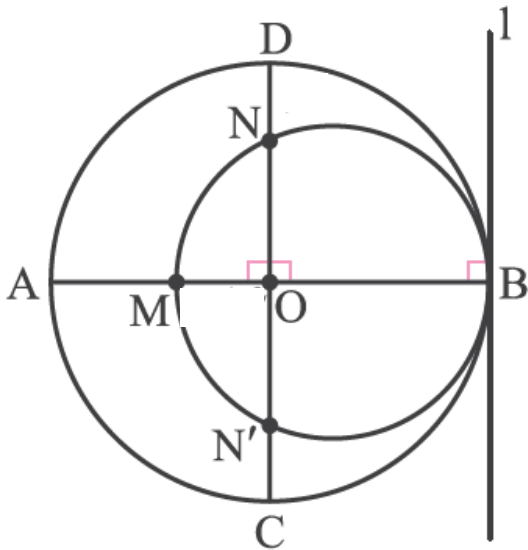
۲۳ ۱۴

۲۲ ۳

۲۱ ۵

۲۰ ۱

۴۶ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر  $AB$  و  $CD$  از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر  $AM = ۱۶$  و  $ND = ۱۰$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

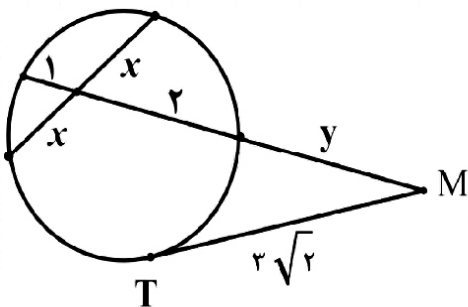


ثابت کنید هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه  $AB$  و  $CD$  در نقطه‌ای مانند  $M$  (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: خرداد ۱۴۰۳

۱/۵ نمره  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

در شکل زیر  $MT$  به طول  $۳\sqrt{۲}$  مماس بر دایره است. مقادیر عددی  $x$  و  $y$  را به دست آورید. خرداد ۱۴۰۳

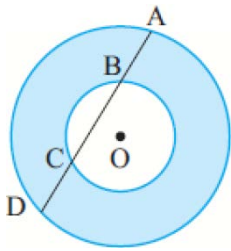
۱/۲۵ نمره



## دکترها مسیح



۴۷ در شکل روبه‌رو، وتر  $AD$  از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط  $C$  و  $B$  قطع کرده است. اگر  $AB = 4$  و



$BC = 5$ ، آنگاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۲)  $6\pi$ (۱)  $20\pi$ (۴)  $25\pi$ (۳)  $16\pi$ 

۴۸ نقطه  $P$  به روی وتر  $AB$  به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۴ تقسیم کرده است.

(سراسری ریاضی - ۸۲)

طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه  $P$  کدام است؟

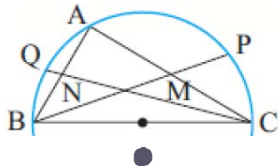
(۴) ۱۵

(۳) ۱

(۲) ۹



۴۹ در شکل روبه‌رو،  $BC = 6$  قطر دایره و میانه‌های  $BM$  و  $CN$  در مثلث  $ABC$  امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط  $P$  و  $Q$  قطع کنند. مقدار  $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$  برابر با کدام است؟



(۱) ۴

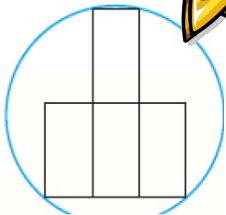
(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶

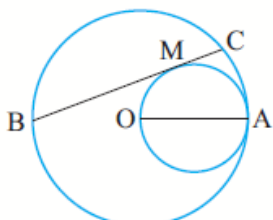


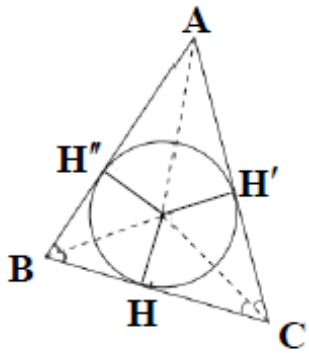
۵۰ چهار تا مستطیل  $2 \times 4$  مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟

(۲)  $\sqrt{15}$ (۱)  $\sqrt{14}$ (۴)  $\sqrt{17}$ (۳)  $\sqrt{16}$ 

۵۱ در دایره‌ای به شعاع  $OA$  وتر  $BC$  مماس بر دایره‌ای به قطر  $OA$  رسم شده است. مقدار  $MB \cdot MC$  برابر کدام است؟

(سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۴)

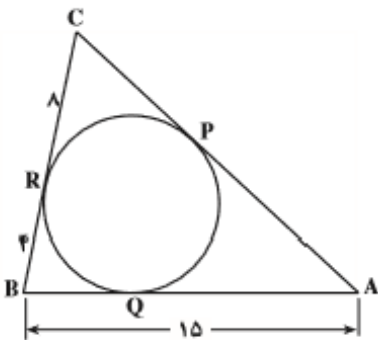
(۱)  $MO^2$ (۲)  $MA^2$ (۳)  $OA^2$ (۴)  $MA \cdot MO$



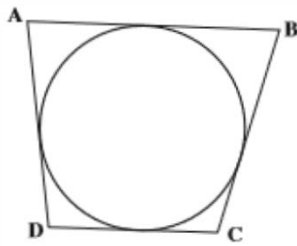
$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$r_b = \frac{S}{P-b}$$

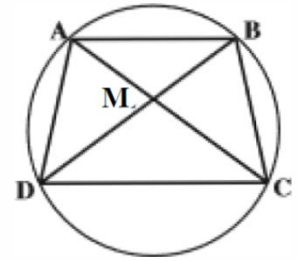
$$r_c = \frac{S}{P-c}$$



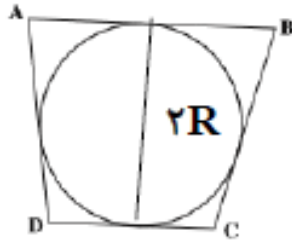
چند ضلعی محیطی



چند ضلعی محاطی







$$(2R)^2 = AB \times CD$$

ارتفاع

۵۲ یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۳

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$       (۲) ۳      (۳)  $2\sqrt{3}$       (۴)  $3\sqrt{3}$

۵۴

یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۵

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $\sqrt{3}$  ، طول خط المکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۵۶ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه  $M$  تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

- (۱)  $4/8$  (۲) ۵ (۳)  $9/6$  (۴) ۱۰

۵۷ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه  $P$  برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله  $P$  تا مرکز این دایره  $\frac{13}{2}$  سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه  $P$  بر این دایره کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{2}$  (۲) ۶ (۳)  $\sqrt{13}$  (۴)  $\sqrt{6}$

۵۸

اگر در یک مثلث قائم الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

$$(۱) \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \quad (۲) \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \quad (۳) \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad (۴) \frac{5-\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$$

۵۹

در مثلث ABC اگر  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$  و  $a^2 + b^2 + c^2 = 40$  باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

$$(۱) 1 \quad (۲) 4 \quad (۳) \sqrt{5} \quad (۴) \sqrt{3}$$

نمره ۱/۲۵

در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید. **خرداد ۱۴۰۳**

## جاست تست

## دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

## زوایا و تعاریف و قضایای اولیه

۱ یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

تیر ماه ۱۴۰۲

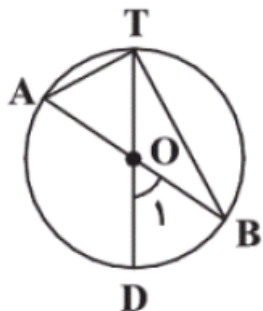
۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

۲ در شکل مقابل، O مرکز دایره و  $\hat{A} = 65^\circ$  است. اندازه زاویه  $O_1$  کدام است؟

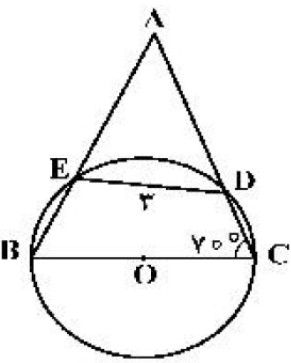


۶۵° (۱)

۶۰° (۲)

۵۰° (۳)

۴۵° (۴)



۳ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان  $\widehat{EDC}$  به درجه، کدام است؟

سراسری ریاضی ۱۴۰۰

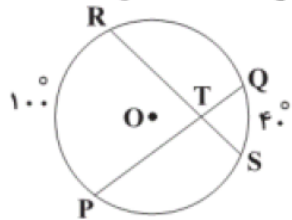
(۱) ۸۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۴ در دایره  $C(O, r)$ ، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر  $\widehat{RP} = 100^\circ$  و  $\widehat{QS} = 40^\circ$  باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

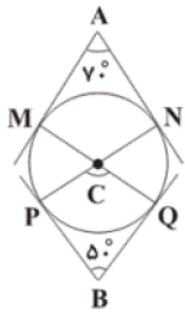


(۱)  $70^\circ$  (۲)  $35^\circ$  (۳)  $30^\circ$  (۴)  $40^\circ$

۵ دایره  $C(O, r)$  و خط  $\ell$  به فاصله  $ra + 1$  از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴) ۳

## دکترها مسیح

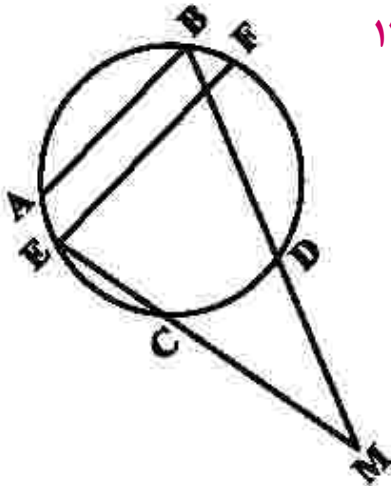


۶ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

(۱)  $100^\circ$ (۲)  $120^\circ$ (۳)  $80^\circ$ (۴)  $140^\circ$ 

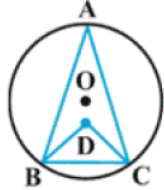
۷ در شکل زیر،  $AB \parallel EF$  و اندازه کمان‌های  $\widehat{AE} = 15^\circ$ ،  $\widehat{EC} = 80^\circ$  و  $\widehat{FD} = 100^\circ$  است. اگر  $\angle BME = 20^\circ$  باشد، اندازه زاویه  $\angle ABD$  چند درجه است؟

تیرماه ۱۴۰۱

(۱)  $71, 25$ (۲)  $74$ (۳)  $75$ (۴)  $78, 75$

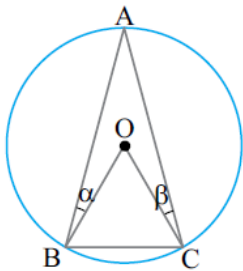


۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر  $\hat{BDC} = 100^\circ$ ، آن گاه کمان BC چند درجه است؟



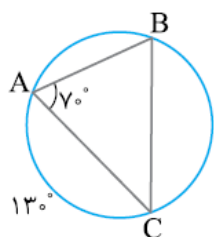
- (۱) ۲۰  
(۲) ۸۰  
(۳) ۶۰  
(۴) ۴۰

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل  $\alpha + \beta$  کدام است؟ (O مرکز دایره)



- (۱)  $10^\circ$   
(۲)  $20^\circ$   
(۳)  $30^\circ$   
(۴)  $40^\circ$

۱۰ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟



- (۱)  $70^\circ$   
(۲)  $60^\circ$   
(۳)  $65^\circ$   
(۴)  $45^\circ$

۱۱) دایره‌ی  $C(O, 4)$  و نقطه‌ی  $M$  به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از  $M$  بگذرد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

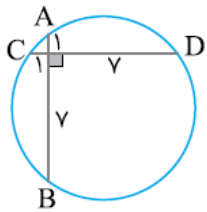
۱۲) مطابق شکل مقابل، دو وتر  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

(۱)  $3\sqrt{2}$

(۲) ۵

(۳)  $4\sqrt{2}$

(۴) ۶



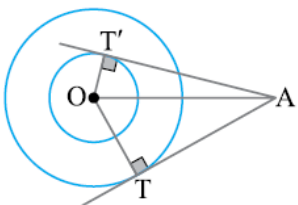
۱۳) مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی  $A$  دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

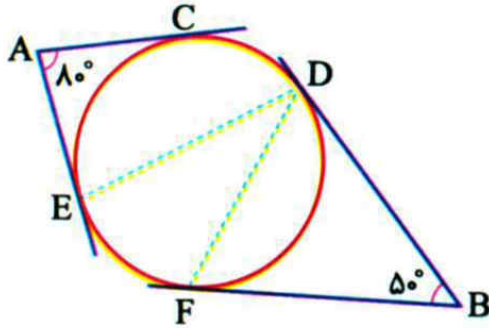
(۴) ۲۰

(۳) ۱۶



۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه EDF چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

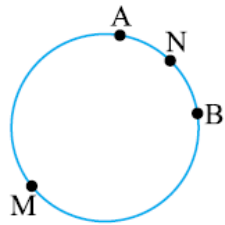
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵

در شکل مقابل اگر  $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

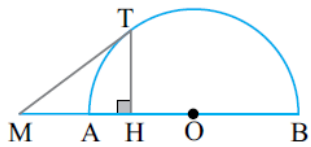


$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{5}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۱)

$\frac{1}{6}$  (۳)



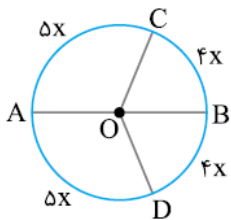
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل  $AB=3$  و  $AM=1$ . اگر  $MT$  بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط  $MH$  چقدر است؟

(۲)  $1/6$

(۱)  $1/5$

(۴)  $1/8$

(۳)  $1/4$



۱۷ در شکل مقابل  $AB$  قطر دایره و  $O$  مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی  $COD$  کدام است؟

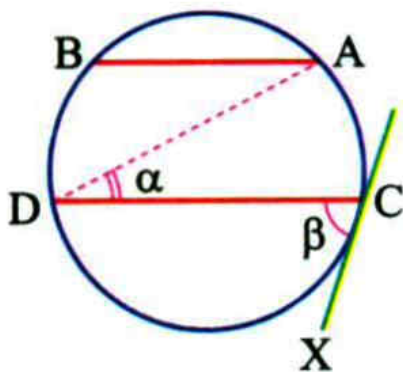
(۲)  $150^\circ$

(۱)  $160^\circ$

(۴)  $130^\circ$

(۳)  $140^\circ$

۱۸ در شکل زیر وتر  $AB$  برابر شعاع دایره و  $AB \parallel CD$  و زاویه  $\beta = 2\alpha$  و  $CX$  مماس بر دایره است. کمان  $\widehat{BD}$  چند درجه است؟



سراسری ۹۸

(۱) ۵۰

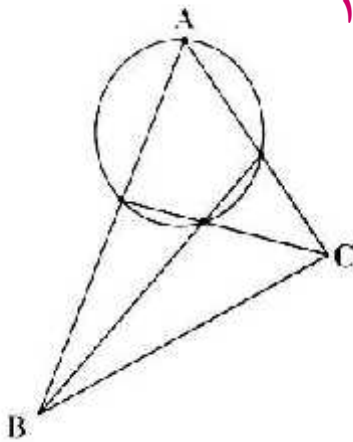
(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵

۱۹ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های  $B$  و  $C$  در مثلث  $ABC$  رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره معاطی باشد، زاویه  $A$  چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

۲۰ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره  $C(O, r)$  تا خط  $d$  برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴

## جاست تست

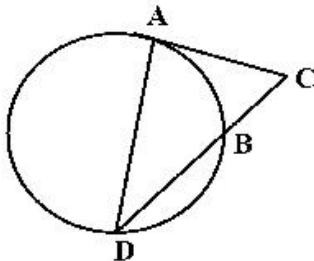
## دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی در دایره

۱ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه  $P$  برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله  $P$  تا مرکز این دایره  $\frac{13}{2}$  سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه  $P$  بر این دایره کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{2}$  (۲) ۶ (۳)  $\sqrt{13}$  (۴)  $\sqrt{6}$

۲ در شکل زیر پاره خط  $AC$  بر دایره مماس است. اگر  $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت  $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



- (۱)  $\sqrt{2}$   
(۲)  $\sqrt{3}$   
(۳) ۲  
(۴) ۳

سراسری ۱۴۰۰

۳ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ است. خط‌المركزین دو دایره چند واحد است؟

$$7\sqrt{6} \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$12\sqrt{2} \quad (1)$$

سراسری ریاضی ۱۳۹۱

۴ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

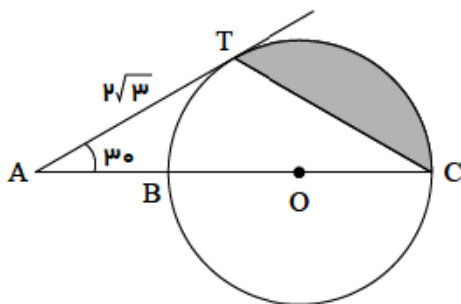
$$10 \quad (4)$$

$$9/6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4/8 \quad (1)$$

۵ در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشورخورده چقدر است؟



$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (p)$$

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \quad (k)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$



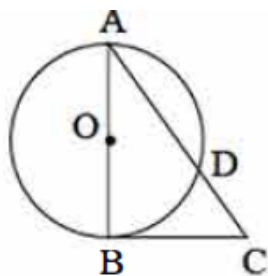
۶ در شکل روبه‌رو پاره‌خط  $BC$  مماس بر دایره، زاویه  $\hat{C} = 60^\circ$  و اندازه  $CD$  برابر  $2\sqrt{3}$  واحد می‌باشند. مساحت دایره چقدر است؟

۲۴π (۲)

۳۶π (۱)

۴۰π (۴)

۱۸π (۳)



۷ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان  $AC$  برابر  $\frac{4\pi}{3}$

است. حاصل  $MA \times MB$ ، کدام است؟

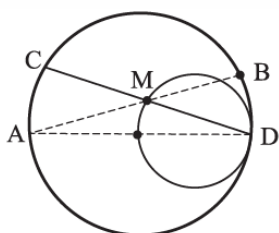
۸ (۱)

۹ (۲)

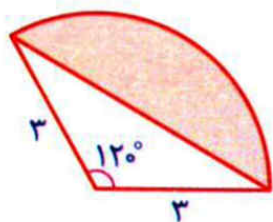
۶ (۳)

۱۲ (۴)

سراسری  
ریاضی ۹۹



۸. مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (2)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

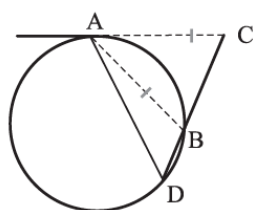
۹. اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره  $C(O, 13)$  و  $C'(O', 3)$  برابر  $60^\circ$  باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$24 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$



۱۰. در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (1)$$

$$BD = AC \quad (2)$$

$$BC = BD \quad (3)$$

$$DA = DC \quad (4)$$

سراسری  
ریاضی ۹۹

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های  $B$  و  $C$  در مثلث  $ABC$  رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی

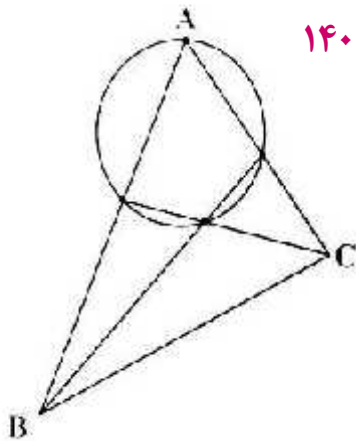
باشد، زاویه  $A$  چند درجه است؟

(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵



دی ماه ۱۴۰۱

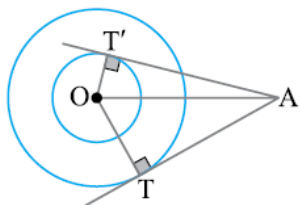
۱۲ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره  $C(O, r)$  تا خط  $d$  برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی  $A$  دو مماس بر دو دایره

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

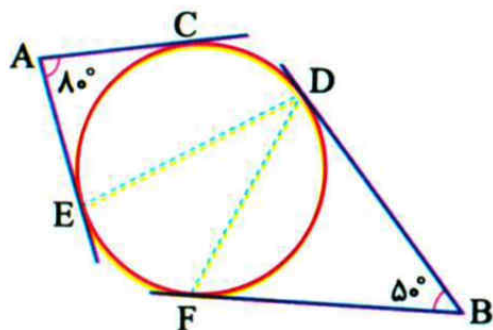
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های  $A$  و  $B$  بر دایره مماس اند، اگر وتر  $CD$  برابر شعاع دایره باشد، زاویه  $\widehat{EDF}$  چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

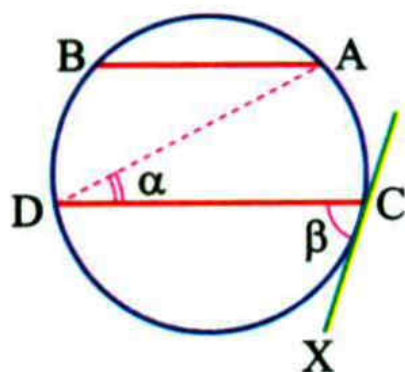
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵. در شکل زیر وتر  $AB$  برابر شعاع دایره و  $AB \parallel CD$  و زاویه  $\beta = 2\alpha$  و  $CX$  مماس بر دایره است. کمان  $\widehat{BD}$  چند درجه است؟

سراسری ۹۸

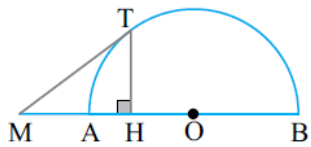


۵۰ (۱)

۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)



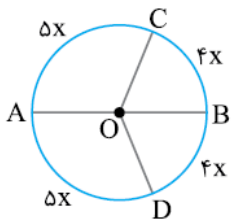
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل  $AB=3$  و  $AM=1$ . اگر  $MT$  بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط  $MH$  چقدر است؟

(۲)  $\frac{1}{6}$

(۱)  $\frac{1}{5}$

(۴)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{1}{4}$



۱۷ در شکل مقابل  $AB$  قطر دایره و  $O$  مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی  $COD$  کدام است؟

(۲)  $150^\circ$

(۱)  $160^\circ$

(۴)  $130^\circ$

(۳)  $140^\circ$

۱۸ فرض کنید خطوط  $x+y=1$  و  $x-y=3$  قطرهای یک دایره و خط  $4x+3y+5=0$  مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه  $M(4, -2)$  از دایره، کدام است؟

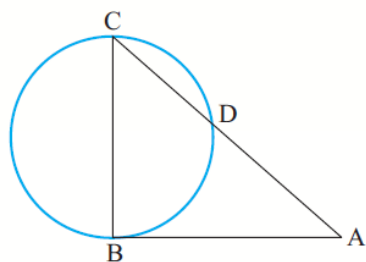
(۴)  $\sqrt{5}-2$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲)  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(۱)  $\sqrt{3}-1$

سراسری ۱۴۰۰



۹ خط AB بر دایره‌ای به قطر  $BC = 6$  مماس است. اگر  $CD = 4$ ، طول پاره خط AD کدام است؟

(۱) ۳

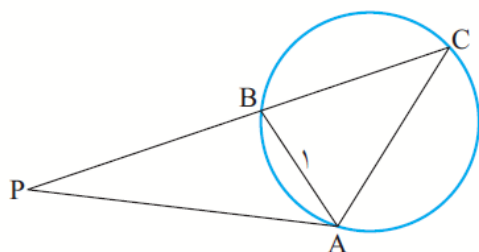
(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹



۲۰ در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که  $AB = 1$ . طول AC چقدر است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$ (۲)  $\sqrt{2}$ (۳)  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 

(۴) ۲

## دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی و چند ضلعی محاطی و محیطی

۱ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر  $\frac{4\pi}{3}$  است. حاصل  $MA \times MB$ ، کدام است؟

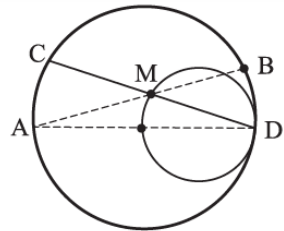
۸ (۱)

۶ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۴)

سراسری  
ریاضی ۹۹



۲ فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های  $6a - 1$  و  $a^2 - 2$ ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای  $a$ ، کدام است؟

۳ (۱)

$\frac{13}{3}$  (۲)

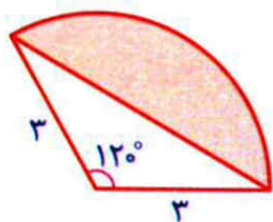
۶ (۳)

۷ (۴)

سراسری ۱۴۰۰



۳ مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

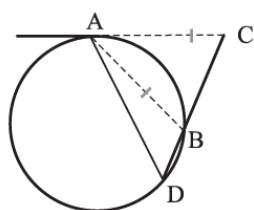
۴ اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره  $C(O, ۱۳)$  و  $C'(O', ۳)$  برابر  $۶۰^\circ$  باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۵ - در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

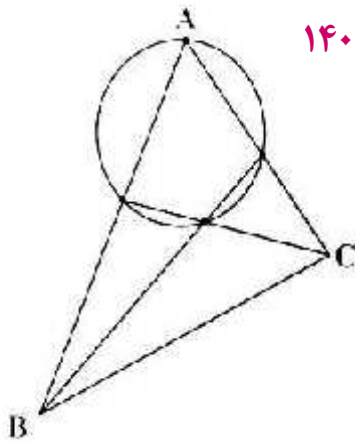
$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری  
ریاضی ۹۹

۶ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های  $B$  و  $C$  در مثلث  $ABC$  رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه  $A$  چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

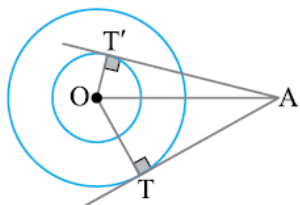
۷ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره  $C(O, r)$  تا خط  $d$  برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۸ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی  $A$  دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

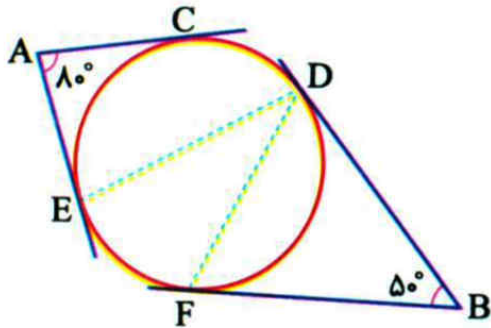
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۹. در شکل زیر اضلاع زاویه های  $A$  و  $B$  بر دایره مماس اند، اگر وتر  $CD$  برابر شعاع دایره باشد، زاویه  $\widehat{EDF}$  چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



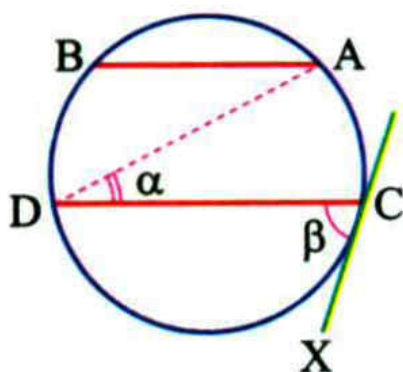
۲۵ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۰. در شکل زیر وتر  $AB$  برابر شعاع دایره و  $AB \parallel CD$  و زاویه  $\beta = 2\alpha$  و  $CX$  مماس بر دایره است. کمان  $\widehat{BD}$  چند درجه است؟



سراسری ۹۸

۵۰ (۱)

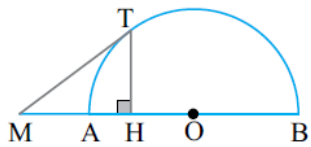
۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)

۱۱

در نیم دایره‌ی شکل مقابل  $AB=3$  و  $AM=1$ . اگر  $MT$  بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط  $MH$  چقدر است؟



(۲)  $\frac{1}{6}$

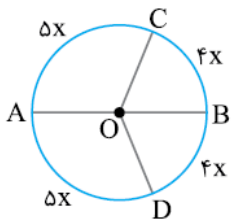
(۱)  $\frac{1}{5}$

(۴)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

۱۲

در شکل مقابل  $AB$  قطر دایره و  $O$  مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی  $COD$  کدام است؟



(۲)  $150^\circ$

(۱)  $160^\circ$

(۴)  $130^\circ$

(۳)  $140^\circ$

۱۳

یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های ۸ و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت  $15\pi$  محیط است. مقدار  $h$  کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳)  $\frac{32}{3}$

(۲) ۸

(۱)  $\frac{25}{3}$

سراسری  
تیرماه ۱۴۰۱

۱۴

طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی  $\frac{3}{5}$  سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها  $2\frac{1}{\pi}$  سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

سراسری  
تیرماه ۱۴۰۱

(۴)  $2\frac{1}{75}$

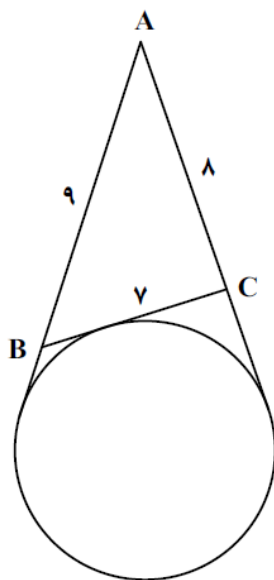
(۳)  $2\frac{2}{25}$

(۲)  $1\frac{1}{25}$

(۱)  $1\frac{1}{25}$

۱۵

در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



سراسری  
تیرماه ۱۴۰۲

(۱)  $7\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(۲)  $4\frac{1}{8}\sqrt{5}$

(۳)  $3\frac{1}{6}\sqrt{2}$

(۴)  $2\frac{1}{4}\sqrt{5}$

۱۶

یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

(۱) ۵۴۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۳۶۰

سراسری  
تیرماه ۱۴۰۲

۱۷

یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۱)  $\frac{12}{\sqrt{3}}$

(۲)  $\frac{16}{\sqrt{3}}$

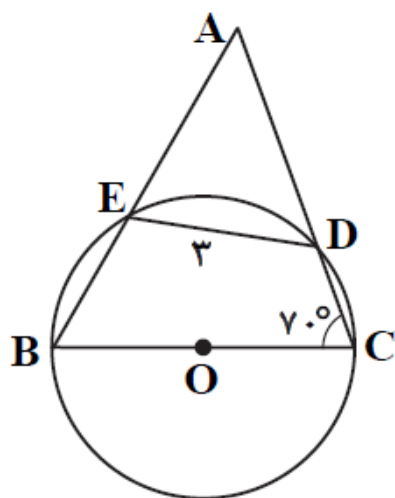
(۳)  $\frac{24}{\sqrt{3}}$

(۴)  $\frac{32}{\sqrt{3}}$

سراسری  
دی ماه ۱۴۰۱

۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان  $\widehat{EDC}$  به درجه، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) ۸۰

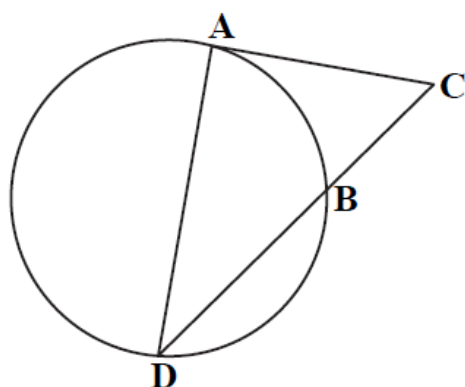
(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۱۹ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر  $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت  $\frac{DB}{BC}$  کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱)  $\sqrt{2}$

(۲)  $\sqrt{3}$

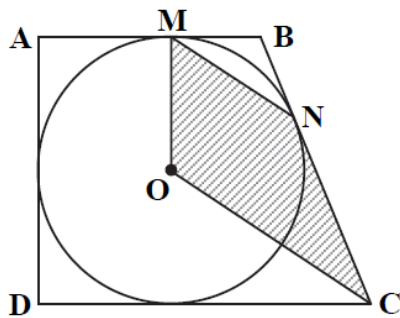
(۳) ۲

(۴) ۳



۲۰. مطابق شکل زیر ذوزنقه قائم‌الزاویه  $ABCD$  بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است.

اگر زاویه  $\widehat{MBN} = ۱۲۰^\circ$  باشد، مساحت چهارضلعی  $OMNC$  کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

(۱)  $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

(۲)  $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

(۳)  $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

(۴)  $۹\sqrt{۳}$

نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آزمون اول هندسه یازدهم - زوایا و روابط طولی در دایره

پایه تحصیلی :

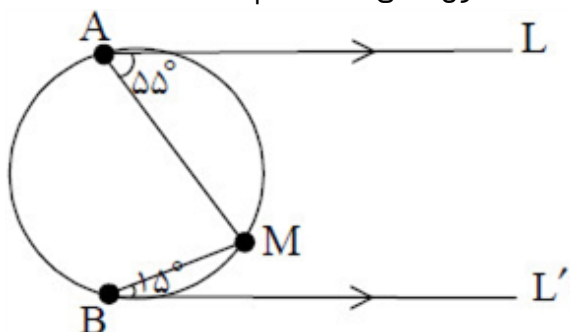
زمان آزمون :

نام دبیر : رها مسیح

تاریخ برگزاری

کارنامه خرد

۱ در شکل مقابل  $L \parallel L'$  و شعاع دایره برابر  $30^\circ$  واحد است. با فرض  $\pi = 3$ ، طول کمان  $\widehat{AB}$  کدام است؟



۶۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

۲ در دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  طول مماس مشترک خارجی  $12$  و طول مماس مشترک داخلی  $2\sqrt{15}$  و اندازه خط مرکزین  $4\sqrt{10}$  است. اختلاف مساحت دو دایره  $C$  و  $C'$ ، کدام است؟

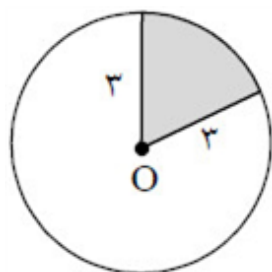
$50\pi$  (۴)

$40\pi$  (۳)

$30\pi$  (۲)

$20\pi$  (۱)

۳ اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر  $\frac{\pi}{4}$  باشد، محیط قسمت سایه خورده کدام است؟ (در محاسبه نهایی محیط  $\pi$  را  $3$  فرض کنید.)



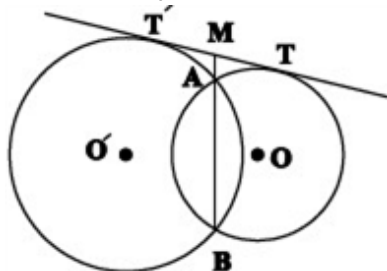
۷ (۴)

۶ (۳)

$10/5$  (۲)

$7/5$  (۱)

۴ در شکل مقابل فاصله مراکز دو دایره متقاطع برابر  $OO' = 9$  است. وتر مشترک  $AB = 5$  را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی  $TT'$  را در نقطه  $M$  قطع کند. اگر  $AM = 2$  باشد، اختلاف اندازه شعاع‌های دو دایره کدام است؟



$4\sqrt{2}$  (۴)

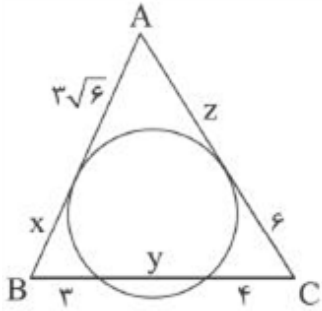
۵ (۳)

$2\sqrt{3}$  (۲)

۳ (۱)

۵

در دایره شکل زیر، دو ضلع AB و AC از مثلث ABC بر دایره مماس‌اند. حاصل  $x + y + z$  برابر کدام است؟



۴  $5 + 8\sqrt{6}$

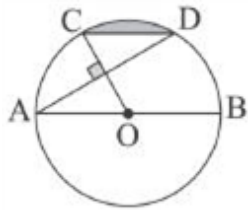
۳  $8\sqrt{6}$

۲  $5\sqrt{6}$

۱  $5 + 5\sqrt{6}$

۶

در دایره به مرکز O و شعاع ۶، دو وتر AB و CD موازی‌اند. مساحت قطعه رنگ‌شده برابر کدام است؟



۴  $6\pi - 9\sqrt{3}$

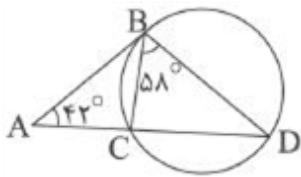
۳  $6\pi - 6\sqrt{3}$

۲  $8\pi - 8\sqrt{3}$

۱  $8\pi - 4\sqrt{3}$

۷

در شکل زیر اندازه زاویه ظلی  $\widehat{ABC}$  برابر کدام است؟



۴  $29^\circ$

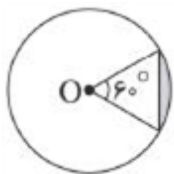
۳  $21^\circ$

۲  $36^\circ$

۱  $40^\circ$

۸

در شکل زیر مساحت قطعه رنگی برابر  $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$  است. مساحت دایره کدام است؟



۴  $\pi$

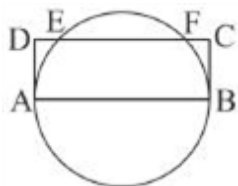
۳  $4\pi$

۲  $6\pi$

۱  $9\pi$

۹

در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF برابر کدام است؟



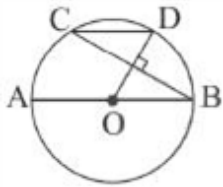
۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

۱۰ در دایره  $C(O, 3)$   $CD \parallel AB$  است. طول کمان  $\widehat{CD}$  کدام است؟



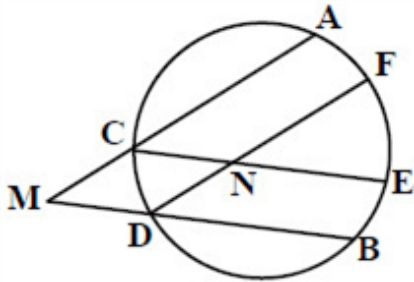
۴  $\pi$

۳  $\frac{\pi}{2}$

۲  $\frac{3\pi}{2}$

۱  $2\pi$

۱۱ در شکل مقابل،  $BD \parallel CE$ ،  $AC \parallel DF$ ،  $\widehat{AC} = 85^\circ$  و  $\widehat{BD} = 75^\circ$  است. اگر  $\widehat{CNF} = 135^\circ$  باشد، اندازه کمان  $\widehat{EF}$  چند درجه است؟



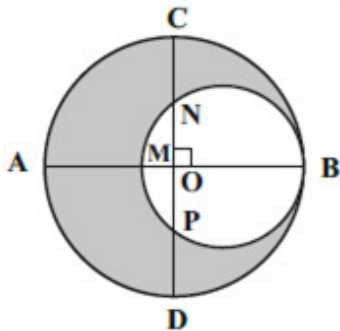
۴ ۳۰

۳ ۳۵

۲ ۴۰

۱ ۴۵

۱۲ در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر  $AM = 8$  و  $CN = 6$  باشد، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟



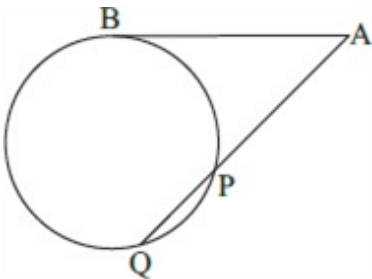
۴  $66\pi$

۳  $64\pi$

۲  $56\pi$

۱  $54\pi$

۱۳ در دایره  $C(O, 5)$  پاره خط AB در نقطه B بر دایره مماس است. اگر  $AB = 6$  و  $AP = 4$  باشند، آنگاه طول کمان PQ برابر کدام است؟



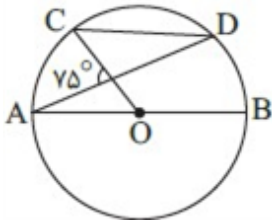
۴  $\frac{5}{6}\pi$

۳  $\frac{6}{5}\pi$

۲  $\frac{4}{3}\pi$

۱  $\frac{5}{3}\pi$

۱۴ در شکل مقابل وتر  $CD$  با قطر  $AB$  موازی است. زاویه  $\widehat{DBA}$  چند درجه است؟



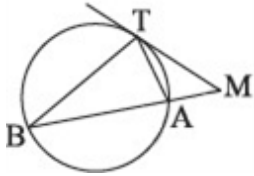
۶۰ (۴)

۶۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۵ در شکل،  $MT$  بر دایره مماس است. اگر  $AT = ۲$ ،  $BT = ۴$  و  $MA = ۱/۵$  باشند، آنگاه اندازه  $AB$  کدام است؟



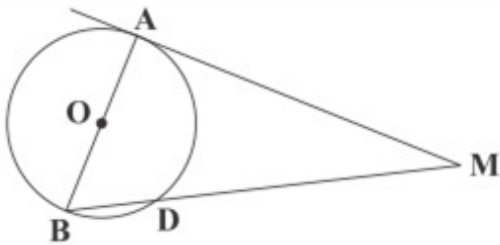
۴ (۴)

۴/۵ (۳)

۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۱۶ در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و شعاع آن ۴ واحد است. اگر  $BD = ۴$  باشد، طول مماس  $MA$  کدام است؟



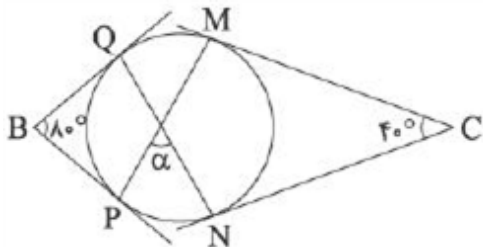
$۱۶\sqrt{۳}$  (۴)

$\sqrt{۳}$  (۳)

$۴\sqrt{۳}$  (۲)

$۸\sqrt{۳}$  (۱)

۱۷ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های  $B$  و  $C$  بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه  $\alpha$  چند درجه است؟



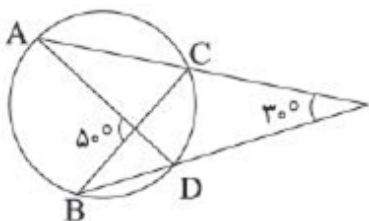
$۳۰^\circ$  (۴)

$۵۰^\circ$  (۳)

$۶۰^\circ$  (۲)

$۴۵^\circ$  (۱)

۱۸ در دایره  $C(O, ۶)$ ، طول کمان  $AB$  برابر کدام است؟



$۳\pi$  (۴)

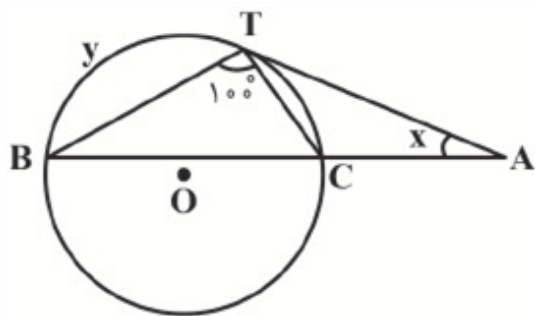
$\frac{۸}{۳}\pi$  (۳)

$\frac{۳}{۲}\pi$  (۲)

$۶\pi$  (۱)

۱۹

در شکل مقابل،  $\widehat{A} = x$  و  $\widehat{BT} = y$  است. اگر  $\widehat{B} = 2\widehat{A}$  و AT در نقطه‌ی T بر دایره مماس باشد، حاصل  $y - x$  کدام است؟



۸۰° (۴)

۹۰° (۳)

۶۰° (۲)

۵۰° (۱)

در دایره‌ای به قطر AB، وتر AC با قطر AB زاویه‌ی  $64^\circ$  می‌سازد. نقطه‌ی D را روی کمان BC طوری انتخاب می‌کنیم که  $AC = CD$ ، زاویه‌ی BAD چند درجه است؟

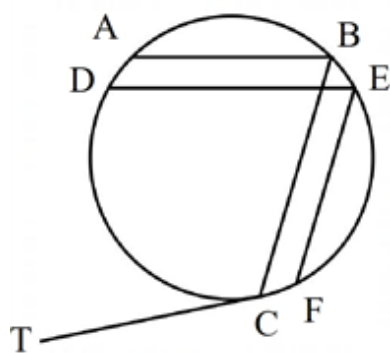
۳۵ (۴)

۳۶ (۳)

۳۷ (۲)

۳۸ (۱)

در شکل مقابل،  $EF \parallel BC$  و  $AB \parallel DE$  است. اگر  $\widehat{AB} = 60^\circ$ ،  $\widehat{CD} = 100^\circ$  و  $\widehat{EF} = 80^\circ$  باشد، اندازه  $\widehat{BCT}$  چند درجه است؟



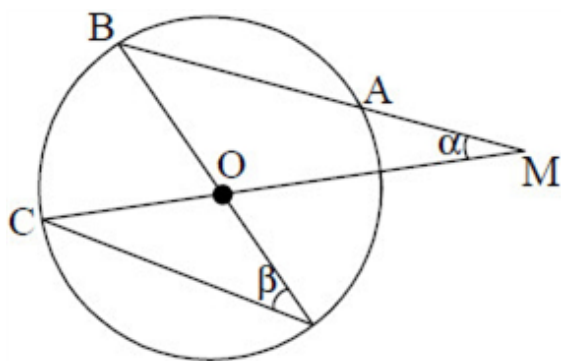
۱۱۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۹۵ (۲)

۹۰ (۱)

از نقطه‌ی M خارج دایره  $C(O, R)$ ، خطی چنان رسم شده است که دایره را در نقاط A و B قطع کرده و  $MA = R$  است. اگر  $\alpha = 22^\circ$  باشد، اندازه‌ی زاویه  $\beta$  کدام است؟



۲۲° (۴)

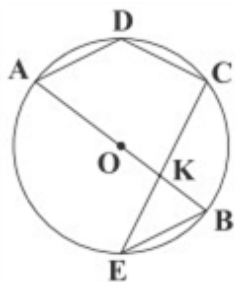
۲۷° (۳)

۳۰° (۲)

۳۳° (۱)

۲۳

در شکل زیر  $O$  مرکز و  $AB$  قطر دایره و  $AD = DC = BE$  می‌باشد. اگر  $\widehat{AKE} = 75^\circ$  باشد، زاویه  $ADC$  چند درجه است؟



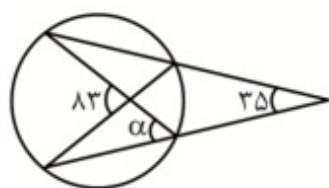
۱۰۰ (۴)

۱۰۵ (۳)

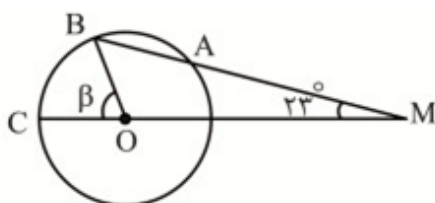
۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

۲۴ با فرض  $MA = R$  ( $R$  شعاع دایره) در شکل‌های زیر، اندازه  $\alpha + \beta$  کدام است؟



۱۳۲ (۴)

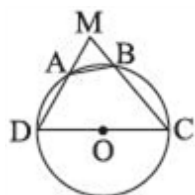


۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۱۸ (۱)

۲۵ در شکل زیر  $O$  مرکز دایره است و  $CD = 2AD$ . اگر  $\widehat{BCD} = 50^\circ$  باشد، زاویه  $M$  چند درجه است؟



۷۰° (۴)

۶۰° (۳)

۵۰° (۲)

۴۵° (۱)

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

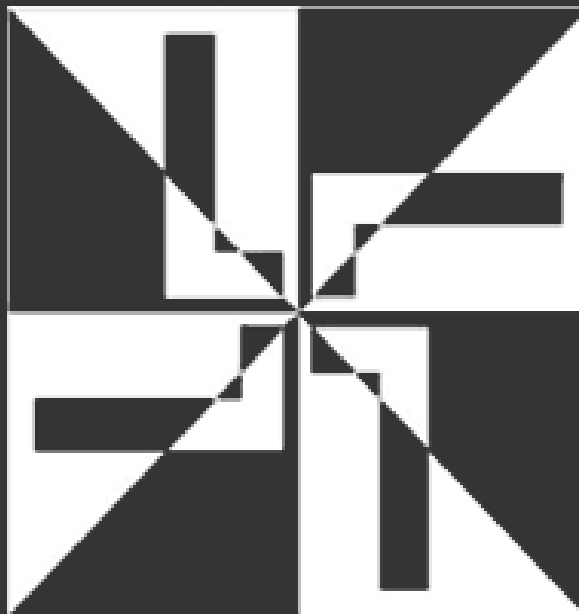


# تبدیلات هندسی

نمره در امتحان نهایی  
شش نمره

تعداد تست  
یک تست

پیش نیاز  
تبدیلات هفتم



فصل دو هندسه یازدهم

انتقال، بازتاب ،  
دوران و تجانس

تبدیل هندسی

انتقال

بازتاب

دوران

تجانس

$$f(x, y) = (x + y, x - 3y)$$

۱ کدام یک از تبدیلهای زیر یک انتقال است؟

$$T(x, y) = (y + 2, x - 1) \quad (۲)$$

$$T(x, y) = (x + 1, 1 - y) \quad (۱)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{2x + 1}{2}, \frac{3y + 5}{3} \right) \quad (۴)$$

$$T(x, y) = (2x + 1, 1 + y) \quad (۳)$$

۲ تصویر خط  $2x - 3y = 1$  را تحت تبدیل  $T(x, y) = (1 - y, 2x + 2)$  به دست آورید.

|         |          |           |
|---------|----------|-----------|
| حفظ شیب | ایزومتري | نقطه ثابت |
|         |          | انتقال    |
|         |          | بازتاب    |
|         |          | دوران     |
|         |          | تجانس     |

|   |                                                                                                                                                                       |     |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ۵ | سه خط دوجه دو ناموازی $L_1$ و $L_2$ و $L_3$ داریم. توضیح دهید که چگونه می توان پاره خطی به طول ۵ واحد رسم کرد که دو سر آن روی $L_1$ و $L_2$ باشند و موازی $L_3$ باشد. | ۲   |
| ۶ | یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ واحد باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.  | ۲   |
| ۷ | نقطه $B$ تصویر نقطه $A$ در بازتاب نسبت به خط $L$ است. اگر $AB = 16$ و نقطه $O$ روی خط $L$ باشد و $OA = 10$ ، فاصله نقطه $A$ از خط $OB$ را بیابید.                     | ۱/۵ |
| ۸ | فقط درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:<br>الف) تجانس همواره اندازه زاویه را حفظ می کند.<br>ب) بازتاب همواره شیب خط را حفظ می کند.                              | ۱   |

۲ یکی از نقاط تلاقی دو دایره  $C$  و  $C'$  نقطه‌ی  $A$  می‌باشد برای رسم خطی از نقطه‌ی  $A$  گذشته به‌طوری که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی کوچک‌تر.  
 (۲) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز  $A$ .  
 (۳) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر.  
 (۴) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز وسط خط‌المركزین دو دایره.

۳ دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  و نقطه‌ی  $A$  بیرون آن‌ها مفروضند برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به رأس  $A$  بطوریکه دو رأس بعدی در دایره  $C$  و  $C'$  قرار داشته باشند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) انتقال (۲) دوران (۳) تجانس (۴) بازتاب

۴ دوران یافته‌ی خط  $3x - y = 2$  به مرکز مبدأ و زاویه‌ی  $-90^\circ$  کدام است؟

(۱)  $3y - x = 2$  (۲)  $3y + x = 2$  (۳)  $3y - x + 2 = 0$  (۴)  $3y + x + 2 = 0$

۵

در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی

بزرگ‌تر کدام است؟

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

۶

تحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص

است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

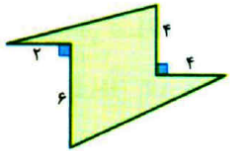
(۱) تجانس (۲) دوران

(۳) بازتاب نسبت به نقطه (۴) بازتاب نسبت به خط

کاربرد تبدیل هم پیرامونی

هرون

۷ زمینی به شکل زیر حصار کشی شده است و مساحت آن ۶۰ مترمربع است اگر بخواهیم بدون تغییر محیط زمین و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، حصارها را طوری جابه‌جا کنیم تا مساحت زمین بیش‌ترین مقدار ممکن شود، در این صورت حداکثر مساحت زمین چند مترمربع است؟



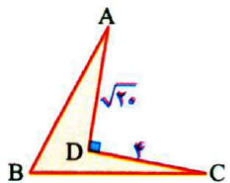
۸۸ (۴)

۸۶ (۳)

۸۴ (۲)

۸۲ (۱)

۸ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟



$8\sqrt{5}$  (۲)

$4\sqrt{5}$  (۱)

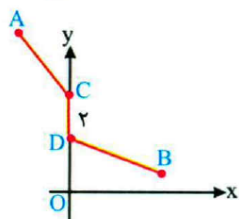
$16\sqrt{5}$  (۴)

$12\sqrt{5}$  (۳)

۹ دو نقطه  $A|-4$  و  $B|4$  در طرفین محور  $y$ ها قرار دارند، دو نقطه  $C$  و  $D$  به فاصله دو واحد از هم روی محور  $y$ ها قرار دارند، حداقل طول خط

(مشابه داخل - ۹۹)

شکسته  $ACDB$  کدام است؟



۹ (۱)

۱۰ (۲)

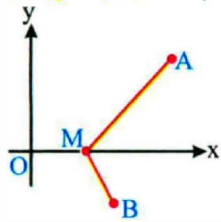
۸ (۳)

۱۲ (۴)



## دکترها مسیح

۱۰) نقاط  $A(4, 6)$  و  $B(1, -2)$  در طرفین محور  $x$  ها قرار گرفته اند و نقطه  $M$  روی محور  $x$  هاست. حداکثر  $|MA - MB|$  کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



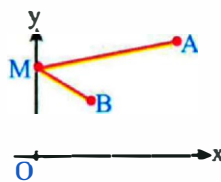
۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۱۱) نقاط  $A(5, 7)$  و  $B(1, 4)$  در یک طرف محور  $y$  ها قرار گرفته اند و نقطه  $M$  روی محور  $y$  هاست. حداکثر  $|MA - MB|$  کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۴ (۴)

دکتررها مسیح

انتقال

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

حفظ شیب

ویژگی:

حفظ جهت

بازتاب

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

حفظ شیب

ویژگی:

حفظ جهت

دوران

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

حفظ شیب

ویژگی:

حفظ جهت

تجانس

نقاط ثابت:

ایزومتريک

همانی:

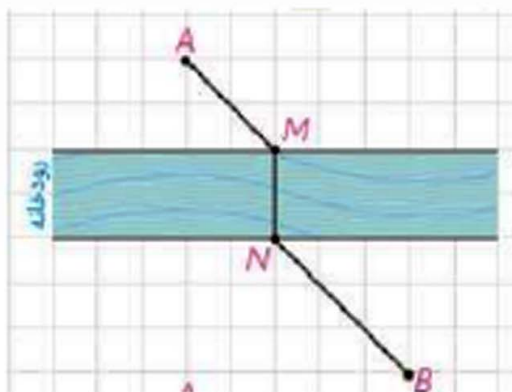
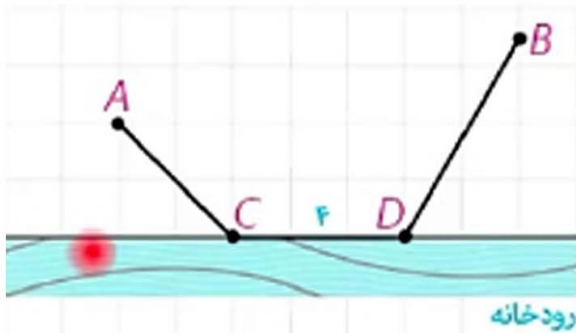
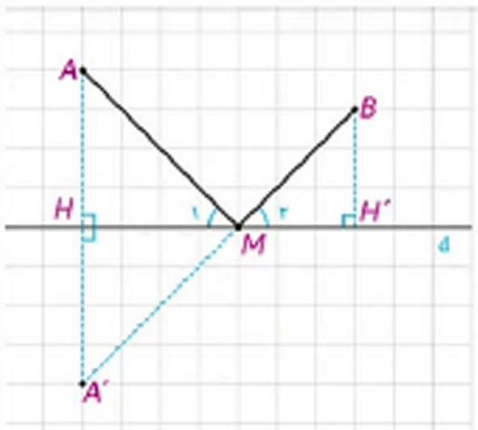
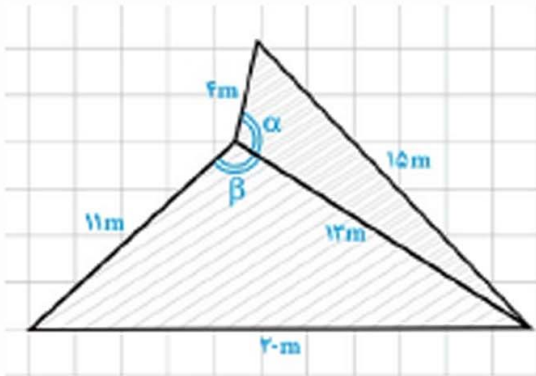
حفظ شیب

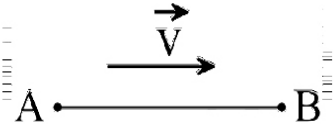
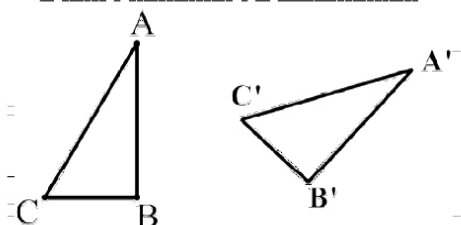
ویژگی:

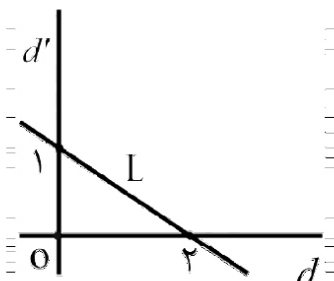
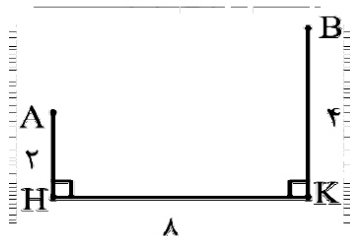
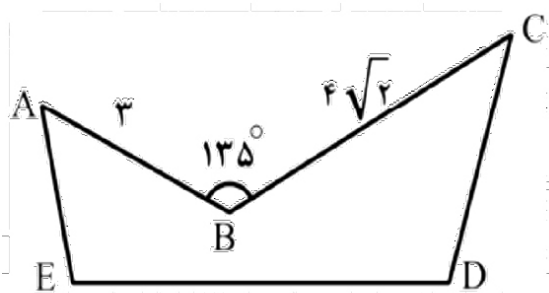
حفظ جهت

تبدیل ها

## کاربرد تبدیل ها



| ردیف                                                       | ۱۴۰۳ خرداد | سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۱۴۰۳ خرداد | نمره   |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
|------------------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------|----------------------------------------|-------|------------------------------------------------------------|-------|----------------------------------------------------------|--------|--|--------|--|--|
| ۷                                                          | ۰.۷۵       | <p><b>سؤالات فصل ۲</b></p> <p>برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است).</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>گروه A</th><th>گروه B</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:</td><td>دوران</td></tr> <tr> <td>ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:</td><td>همانی</td></tr> <tr> <td>پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:</td><td>بازتاب</td></tr> <tr> <td></td><td>انتقال</td></tr> </tbody> </table> | گروه A     | گروه B | الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند: | دوران | ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است: | همانی | پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند: | بازتاب |  | انتقال |  |  |
| گروه A                                                     | گروه B     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
| الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:                     | دوران      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
| ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است: | همانی      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
| پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:   | بازتاب     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
|                                                            | انتقال     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
| ۸                                                          | ۱          | <p>با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند.</p> <p>(<math>\vec{V} \parallel AB</math> و اندازه <math>\vec{V}</math> از اندازه پاره خط AB کوچک تر است).</p>                                                                                                                                                                                                                                            |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |
| ۹                                                          | ۰.۵        | <p>نقاط A'، B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            |        |                                        |       |                                                            |       |                                                          |        |  |        |  |  |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ۱.۵  | <p>در شکل روبه‌رو اگر خط <math>L</math> را در تجانس به مرکز <math>O</math> و نسبت تجانس <math>\frac{7}{4}</math> تصویر کنیم و آن را <math>L'</math> بنامیم؛ مساحت بین خط <math>L</math> و <math>L'</math> و خطوط <math>d</math> و <math>d'</math> چقدر است؟</p>  | ۱۰ |
| ۱.۲۵ | <p>با توجه به شکل، نقطه <math>M</math> روی پاره‌خط <math>HK=8</math> را به گونه‌ای بیابید که:<br/>         الف) مسیر <math>AMB</math> کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.<br/>         ب) کمترین مقدار عددی <math>AM+MB</math> را محاسبه کنید.</p>                       | ۱۱ |
| ۱    | <p>در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید.</p>                                                                                                                                                  | ۱۲ |

# روابط طولی

نمره در امتحان نهایی

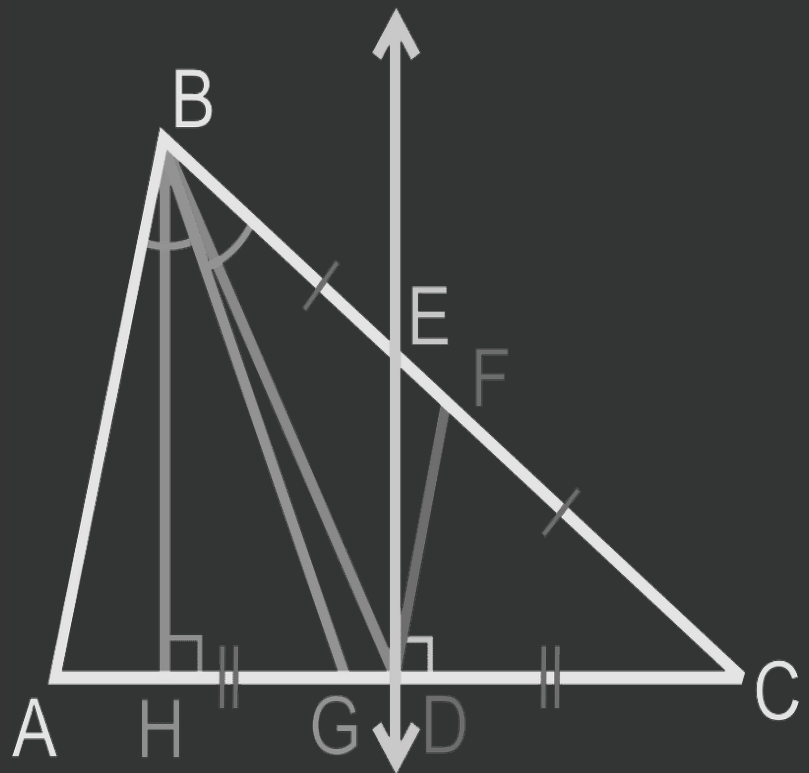
نش نمره

تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

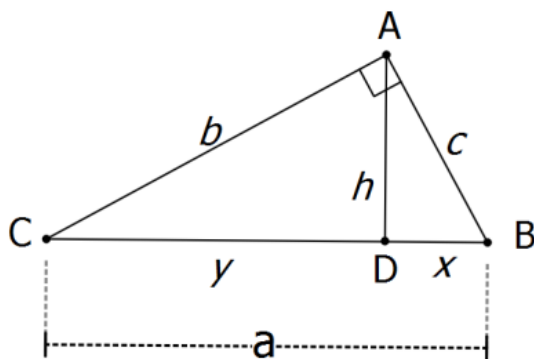
نسبت های مثلثاتی فصل ۲ ریاضی دهم  
هندسه دهم فصل ۱



فصل سوم هندسه یازدهم

قضیه سینوس و کسینوس  
قضیه نیمساز  
قضیه هرون

مثلث قائم الزاویه



$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

قضیه کسینوس ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

۱ در مثلث ABC، زاویه  $\hat{A} = 30^\circ$  و  $b = a\sqrt{2}$ ، زاویه C چند درجه است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۲۰

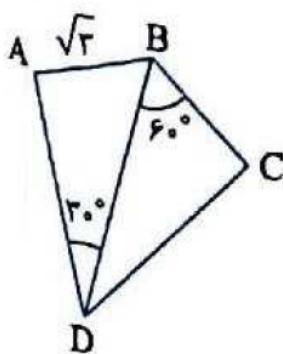
۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD محاطی است. طول ضلع CD کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳)  $2\sqrt{3}$

(۴)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



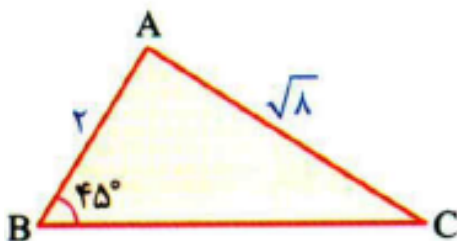
۳ در شکل مقابل اندازه زاویه A چقدر است؟

(۱)  $135^\circ$

(۳)  $75^\circ$

(۲)  $105^\circ$

(۴)  $60^\circ$



۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ اندازه شعاع دایره محیطی کدام است؟

(۱)  $8/5$

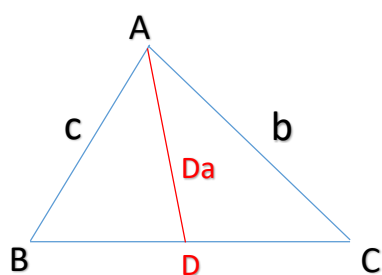
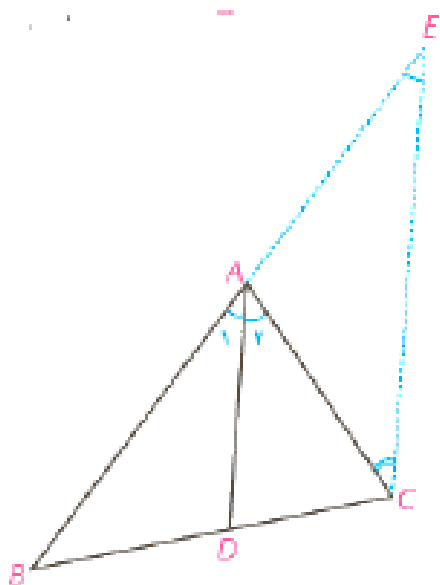
(۲)  $7/5$

(۳)  $9/5$

(۴) ۹



قضیه نیمساز و روابط مرتبط با آن



$$da = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

رابطه های میانه

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2ma^2$$

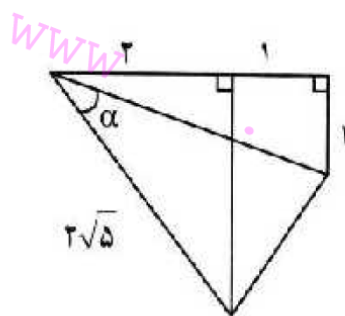
$$ma^2 = b^4 - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

قضیه هرون

در شکل زیر، مقدار  $\cos \alpha$  چقدر است؟ سراسری دی ۱۴۰۱

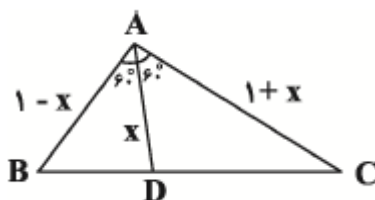
۵



sanjesh

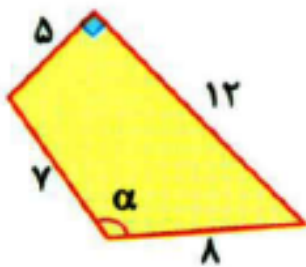
- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{10}$
- (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

۶ در شکل مقابل، اندازه  $x$  کدام است؟



۱.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳.  $2 - 1$
۴.  $3 - 1$

۷ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع برهم عمودند،  $\sin \alpha$  کدام است؟ خارج کشور ۹۸



$\frac{3}{5}$  (۲)

$\frac{4}{5}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

۸ در مثلث ABC، حاصل  $b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \sin^2 \hat{B}$  برابر با کدام است؟

$a^2$  (۱)

$b^2$  (۲)

$c^2$  (۳)

$bc$  (۴)

۹ در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

سراسری ۹۵

$2/8$  (۲)

$2/1\sqrt{2}$  (۴)

$1/4\sqrt{2}$  (۱)

$2/1$  (۳)

۱۰ مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹، ۱۲ کدام است؟

$14\sqrt{5}$  (۴)

$12\sqrt{5}$  (۳)

$14\sqrt{3}$  (۲)

$15\sqrt{2}$  (۱)

## دکترها مسیح

۱۱ در مثلثی با اضلاع  $x$ ،  $5$ ،  $2x$  اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر  $\frac{105}{2}$  باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

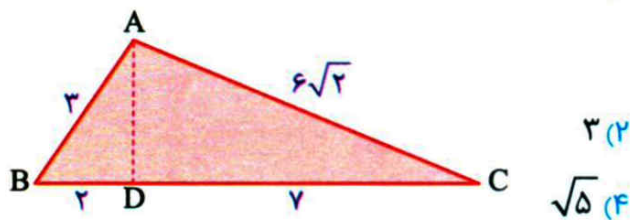
۱۵ (۲)

۱۷ (۱)

۱۲ در مثلثی با اضلاع  $7$ ،  $10$ ،  $13$  طول میانه وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

 $3\sqrt{10}$  (۲) $2\sqrt{21}$  (۱)

۱۳ در شکل مقابل طول AD چقدر است؟

۳ (۲)

 $2\sqrt{2}$  (۱) $\sqrt{5}$  (۴) $\sqrt{6}$  (۳)

۱۴ در مثلث ABC اگر  $BC=10$  و میانه‌های  $BM=12$  و  $CN=9$  باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱۰۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۳۶ (۱)

۱۵ در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۳ و ۴ و زاویه بین آن‌ها  $150^\circ$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

 $3\sqrt{3}$  (۴) $2\sqrt{3}$  (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

## سوالات فصل ۳

خرداد ۱۴۰۳

◀ در مثلث  $ABC$ ،  $BC = 10 \text{ cm}$ ،  $\hat{A} = 30^\circ$ ، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟ ۰/۵ نمره  
الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

◀ در مثلث  $ABC$  که  $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$  ۱/۵ نمره

◀ مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  را به کمک دستور هرون بیابید. ۱ نمره

◀ در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 7$ ،  $AC = 4$  و  $BC = 10$  است. طول نیمساز داخلی زاویه  $C$  را محاسبه کنید. ۱/۵ نمره

◀ در مثلث  $ABC$  که  $AB = 4$ ،  $AC = 6$  و  $BC = 8$ ، نقطه  $M$  وسط ضلع  $BC$  است. محیط مثلث  $AMC$  را به دست آورید. ۱/۵ نمره