

منطق ریاضی

نمره در امتحان نهایی
دو نمره

تعداد تست
یک تست

پیش نیاز
هندسه دهم درس ۲ از فصل ۱



درس اول فصل اول آمار و احتمال

گزاره و جدول
سورها

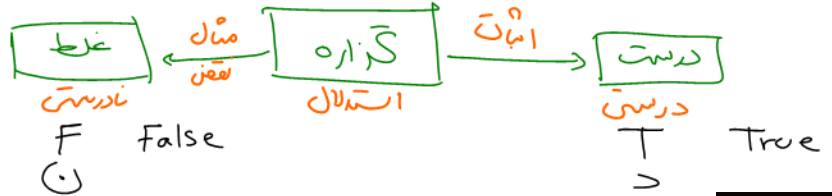
آمار و احتمال - درس ۱ - گزاره ها

* قیمت خونه اطراف ما خیلی کمه
X
؟ !

* همسایه ما خوشگله است.
X

* قرمه سبزی خوشمزه است.
X

گزاره = جمله خبری است که درستی یا نادرستی آن مشخص است.



۱ گزاره ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟ ~~X~~ **عادت عجیب علامت سوال** **(T)** گزاره است. **✓** عدد ۲ عددی اول است. **(T)**

ب) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. **(F)** **✓**

ث) $20 = 2 + 3 \times 4 = 12$ **(F)** **✓**

ج) سیب قرمز از سیب زرد خوشمزه تر است. **X** **(F)** **✓**

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. **(F)** **✓**

ج) عدد $(-1)^n$ برای $n \in \mathbb{N}$ همواره عددی مثبت است. **(F)** **✓**

ح) لطفاً تخته را پاک کن. **X** **(F)** **✓**

درستی، نادرستی، وابسته به عوامل، احاطات، سلاطین فردی است.

گزاره ساده = تک جمله
حرف تکیه انگلیسی

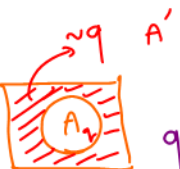
گزاره مرکب = بیش از یک جمله

همه حالات که غیر q دارد می گنجد!

فصل ریاضی کنیم

P	$\sim P$
T	F
F	T

نقیض گزاره = چنین نیست که **(F)**



در این کلاس ۲۰ نفر حضور دارند $q = 20$
در این کلاس ۲۰ نفر حضور ندارند $\sim q = 20$

۲ در هر یک از حالت های زیر، نقیض گزاره را بیان کرده و سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید. خود گزاره F/T

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک تر است. **(T)** **F**
ب) تساوی $4 = 2 \times 2$ برقرار است. **(F)** **T**

پ) عدد ۵ زوج است. **(F)** **T**
ت) ارسطو شاگرد افلاطون است. **(F)** **T**

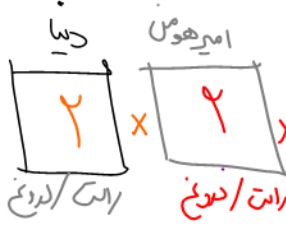
ج) $(5 \times 4) > (3 \times 7)$ **(T)** **F**
ث) ایران در منطقه ی غرب آسیا قرار دارد. **(T)** **F**



تعداد گزاره

جدول ارزش گزاره

P	q	S	
T	T	T	1
T	T	F	2
T	F	T	3
T	F	F	4
F	T	T	5
F	T	F	6
F	F	T	7
F	F	F	8



۲ سطر / حالت

$2 \times 2 \times \dots$

دکترها مسیح

اگر هیچی نیست یعنی $x \in R$

۳ مجموعه جواب گزاره $\{x \in R | x^2 - 4x = 0\}$ را بیابید.

$D=R$ $S=\{0, -2, +2\}$

$x(x-4)=0$
 $x=0 \quad x=4 \rightarrow x=\pm 2$

$T \quad \checkmark \quad \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \quad x=\frac{1}{4} \quad F \quad x \quad 1 > 1 \quad x=1$
 $F \quad X \quad -\frac{1}{4} > \frac{1}{4} \quad x=-\frac{1}{4} \quad F \quad x \quad 2 > 4 \quad x=2$
 $F \quad X \quad -2 > 4 \quad x=-2$

گزاره غلط است $\rightarrow x < 1$

$R = \text{دامنه} = D$
 $S = \text{مجموعه جواب} = (0, 1)$

سور:

سور کلمه ای عربی است و به معنای (بارو) حصار و دیوار گرداگرد شهر است. سورها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص میکنند. از نظر منطق دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر، محدود کننده است و قلمرو شهر را مشخص می کند و الفاظ یعنی سورها در گزاره نماها نیز مرز و قلمرو اشیا مورد استفاده در گزاره نما را تعیین می کنند و به دو دسته عمومی و وجودی تقسیم می شوند

$D=N$ عددی اول است.
 $S=1P=\{2, 3, 5, 7, \dots\}$

گزاره نما = جمله ای خبری بابت یک یا چند متغیر.
دامنه بابت آن که به ازای برخی مقادیر متغیر درست و برخی غلط باشد.

Domain
دامنه گزاره نما
مجموعه مقادیری که متغیری توان پذیرد (D)
Solution
مجموعه جواب گزاره نما
مجموعه مقادیر متغیر که گزاره غلط از آنجا درست است.

$S =$ درست است

سورها به ازای هر x از اعداد حقیقی ...

$\forall x \in R: x^2 > 0$ سور عمومی

$x=0 \rightarrow 0^2 > 0 \quad X$
 F

اگر تنها یک مثال نقض بیاریم گزاره نادرست است

$\exists x \in R: x^2 > 0$ سور وجودی

فقط لازم یک مثال درست وجود داشته باشد.
 T $F?$ درست وجود داشته باشد!

وجود دارد m ای عضو مجموعه اعداد حقیقی
 x ای حقیقی وجود دارد که ...

P : همه زنجانی ها ترک هستند!
 $\sim P$: وجود دارد زنجانی که ترک نباشد!

$\neg(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

$\neg(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

$\forall x \in N: x^2 > x \rightarrow \exists x \in N: x^2 \leq x$

$\neg(\exists x \in N: x^2 - 1 = 0) \equiv \forall x \in N: x^2 - 1 \neq 0$

۴ ارزش گزاره های زیر را تعیین کرده سپس نقیض آنها را بنویسید.

الف) هر عدد فردی اول است. F (مثال نقض ۹ عدد فردی است که اول نیست)
وجود دارد عدد فردی که اول نباشد. T (مثال نقض ۹ عدد فردی اول است)

ب) $\forall x \in R; x + \frac{1}{x} \geq 2$ F (مثال نقض $-1 - 1 = -2$)

ج) $\exists x \in R; x + \frac{1}{x} < 2$ T (مثال نقض $-1 - 1 = -2$)

د) $\exists x \in R; x + 2 = 3$ T (مثال نقض $x=1$)
ج) عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن منفی است. F (حتی یک عدد هم وجود ندارد)
مربع هر عدد حقیقی عدد نامنفی است.

زوج	فرد
+	-

$\forall x \in R: x + 2 \neq 3$ F (مثال نقض $x=1$)

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۵ مفهوم سور، نشانگر است.

۱) کیفیت قضیه

۲) کمیت قضیه

۳) تعریف قضیه

۴) تصدیق قضیه

همه میزان می توان دارد

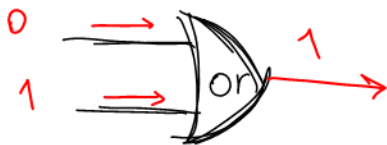
این با ممانعت مشابه می آید

(۱) ترکیب فصلی

$P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ترکیب فصلی زمانی
نا درست است که
هر دو عبارت نادرست
باشند



۳ عددی زوج است یا اربطوگ که با ممانعت است

$T \equiv T$ $F \equiv F$

انتقای مقدم

اگر مقدم نادرست باشد کل عبارت
شرطی به انتقای مقدم درست است

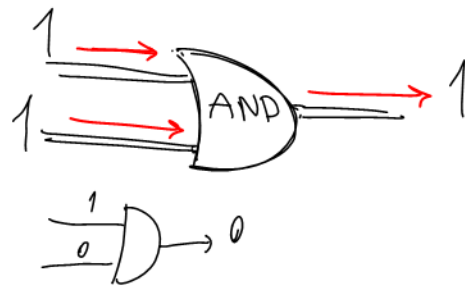
آیا این یک تابع است؟
بله $(a, b), (c, d)$
تبعیت $a = c \rightarrow b = d$

(۲) ترکیب عطفی

$P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تنها زمانی درست
است که هر دو
گزاره درست
باشند



۲ عددی اول است و ۳ عددی گویاست

$F \equiv F \wedge T$

شرط لازم

$P \rightarrow Q$
فرض حکم
مقدم نتایج

ترکیب شرطی

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

به تنها زمانی غلط است
که مقدم درست و نتایج
نادرست باشند

اگر من رئیس جمهور شوم آنگاه به هر کدام
نزد ۲ میلیون تومان می رهم

دکترها مسیح

$$P \Leftrightarrow q \equiv P \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow P$$

دو ستون اول

P	q	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow P$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

P	q	$P \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ترکیب دو شرطی
در صورتی درست است که دو عبارت هم‌ارز باشند.

nr, r, F, T

اگر p گزاره‌ی درست، q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

$$F \wedge r \equiv F$$

$$F \vee r \equiv r$$

$$T \wedge r \equiv r$$

$$T \vee r \equiv T$$

$$r \vee nr \equiv T$$

$$r \wedge nr \equiv F$$

عبارت ***

$$\begin{aligned} T \vee T &\equiv T \\ T \vee F &\equiv T \\ F \vee T &\equiv T \\ F \vee F &\equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \wedge T &\equiv T \\ T \wedge F &\equiv F \\ F \wedge T &\equiv F \\ F \wedge F &\equiv F \end{aligned}$$

$$F \Rightarrow r \equiv T$$

$$T \Rightarrow r \equiv r$$

$$F \Rightarrow nr \equiv T$$

$$T \Rightarrow nr \equiv nr$$

$$\begin{aligned} r \Rightarrow T &\equiv T \\ r \Rightarrow F &\equiv nr \\ F \Rightarrow T &\equiv T \\ F \Rightarrow F &\equiv r \end{aligned}$$

$$F \Leftrightarrow r \equiv nr$$

$$T \Leftrightarrow r \equiv r$$

$$r \Leftrightarrow nr \equiv F$$

$$T \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad \text{(ب)}$$

$$r \equiv (q \Rightarrow p) \wedge r \quad \text{(ت)}$$

$$T \equiv r \Rightarrow p \equiv (r \Rightarrow p) \vee q \quad \text{(پ)}$$

$$\begin{aligned} T \Rightarrow T &\equiv T \\ F \Rightarrow T &\equiv T \end{aligned}$$

$$r \wedge r \equiv r$$

$$r \vee r \equiv r$$

$$r \Rightarrow r \equiv T$$

$$r \Leftrightarrow r \equiv T$$

اگر p گزاره‌ی درست، q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

$$F \equiv (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q) \quad \text{(ب)}$$

$$nr \equiv (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \quad \text{(ت)}$$

$$T \Rightarrow F \equiv F$$

$$F \Rightarrow T \equiv T$$

$$T \Rightarrow F \equiv F$$

$$F \Rightarrow T \equiv T$$

$$T \equiv (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \quad \text{(الف)}$$

$$F \equiv (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \quad \text{(پ)}$$

$$F \Leftrightarrow T \equiv F$$

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$F \vee F \equiv F$$

$$F \Leftrightarrow F \equiv T$$

و/یا /منفی

P	q	$P \vee q$	$P \wedge q$	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow q$
>	>	>	>	>	>	>
>	○	>	○	○	> استی مقدم	○
○	>	>	○	> استی مقدم	○	○
○	○	○	○	>	>	>

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{قانون دمورگان}$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \quad A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

قانون جذب

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

P	q	$P \Rightarrow q$	$\sim P \vee q$
>	>	>	>
>	○	○	○
○	>	>	>
○	○	>	>

هم ارز گزاره شرطی

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \quad \text{مشتق}$$

P	q	$P \vee q$	$P \wedge (P \vee q)$
>	>	>	>
>	○	>	>
○	>	>	○
○	○	○	○

شرط لازم

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$$

P	q	$P \Rightarrow q$	$\sim P$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
>	>	>	○	○	>
>	○	○	○	>	○
○	>	>	>	○	>
○	○	>	>	>	>

"نه یا نه"

تفین

$P \Rightarrow q$ عکس $\sim q \Rightarrow \sim p$

عکس نقیض گزاره شرطی

نقیض گزاره شرطی

اگر p گزاره‌ی درست، q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ برابر

 r ①

2 همیشه درست

3 همیشه نادرست

دست راست $\Rightarrow$ اندرست $\Rightarrow$ دست چپ

$\text{ندارست} \Rightarrow \text{دارست} \Leftrightarrow \text{ندارست}$
 $\text{دارست} \Rightarrow \text{ندارست}$

* من

با وارد کردن جدول زیر در پاسخبرگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.

۱ نمره

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	>	ن	>
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	>	>	>
ن	ن	>	>	>

خرداد ۱۴۰۳

نوعی نورپردی

*

گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها ($\exists$ یا $\forall$) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱ نمره

"هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچکتر است."

$\forall x \in \mathbb{N}; x^2 > x$ F
مثال نقض $x=1 \rightarrow 1^2 \ngtr 1$

عکس

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$q \Rightarrow p$$

$$p \wedge \sim q$$

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$$

نقش

بکس

نقش

*

ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

۹

۱ گروه خونی افراد متغیر کیفی ~~ترتیبی~~ است یا ۲۵ مربع کامل است. $T \equiv$

۲ رابطه‌ی $f = \{(1, -3), (-3, -3)\}$ تابع است یا هر عدد فرد، مضرب ۳ است $T \equiv$

۳ عبارت $x^{37} + 27$ قابل تجزیه نیست و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. $F \equiv$

۴ تعداد خودروهای یک پارکینگ متغیر کمی ~~نسبتی~~ است و نمودار $y = x$ از نواحی اول و سوم می‌گذرد.



۱۰ هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 5\}$ چند گزاره از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟

$$\forall x \in A; x + 2 \leq 9 \quad (ب)$$

$$\forall x \in A; x + 1 > 6 \quad (د)$$

$$\exists x \in A; x + 4 = 10 \quad (الف)$$

$$\exists x \in A; x + 3 \leq 4 \quad (ج)$$

$$\exists x \in A; x + 2 \leq 4 \quad (ا)$$

$-2, -1, 0, 1, 2, \dots$
 $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 5\}$
 $x+2 \rightarrow 2, 3, 4, 5$
 $x+1 \rightarrow 1, 2, 3, 4$
 $x+3 \rightarrow 3, 4, 5$
 $x+4 \rightarrow 4, 5$

خاصیت جابجایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

خاصیت شرکت
نسبتی

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱	الف) اگر r, q, p سه گزاره باشند به طوری که ارزش هر سه گزاره نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim q) \vee r$ را مشخص کنید.																									
۲	$(T \wedge T) \vee F \equiv T \vee F \equiv T$ ب) اگر گزاره $q \wedge p$ درست باشد، درباره ارزش $q \vee (p \wedge r)$ چه می توان گفت؟ $T \wedge T \equiv T$ $T \vee T \equiv T$																									
۲	الف) با استفاده از جدول ارزش گزاره ها نشان دهید $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ ب) ارزش نقیض گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$ را مشخص کنید. $T \equiv$ خود گزاره درست ارزش نقیض گزاره نادرست <table border="1"> <thead> <tr> <th>p</th> <th>q</th> <th>$\sim q$</th> <th>$p \wedge \sim q$</th> <th>$(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>T</td> <td>T</td> <td>F</td> <td>F</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>F</td> <td>T</td> <td>T</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>T</td> <td>F</td> <td>F</td> <td>T</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>F</td> <td>T</td> <td>F</td> <td>T</td> </tr> </tbody> </table> $\sim((p \wedge \sim q) \Rightarrow p) \equiv p \wedge \sim q \wedge \sim p$ $\equiv F \wedge \sim q \equiv F$ عبارات *** ۱) $P \Leftrightarrow Q \equiv P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$ ۲) $P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$ ۳) دوتای مناسب به شری بزرگ ۴) $\sim(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$	p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$	T	T	F	F	T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T	F	T
p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$																						
T	T	F	F	T																						
T	F	T	T	T																						
F	T	F	F	T																						
F	F	T	F	T																						
۳	بدون استفاده از جدول و با استفاده از قوانین و خاصیت های هم ارزی ثابت کنید: $p \Leftrightarrow q \equiv p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ الف) $p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$ ب) $r \Leftrightarrow [s \wedge \sim(\sim s \Rightarrow r)] \equiv \sim r$ $r \Leftrightarrow [s \wedge \sim(s \vee r)]$ $\equiv r \Leftrightarrow [s \wedge \sim s \wedge \sim r]$ $\equiv r \Leftrightarrow [F \wedge \sim r] \equiv F$ $\equiv r \Leftrightarrow F \equiv r \Rightarrow F \wedge F \Rightarrow r \equiv r \Rightarrow F \wedge T \equiv r \Rightarrow F \equiv \sim r$ $p \Leftrightarrow F \equiv p \Rightarrow F \wedge F \Rightarrow p$ $\equiv (p \Rightarrow F) \wedge T \equiv p \Rightarrow F \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p$																									
۴	ابتدا ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید، سپس نقیض آن را بنویسید. الف) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ $T \rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 1 \wedge (x \geq 1 \vee x \leq -1)$ ب) $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}$ $T \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \notin \mathbb{Z}$ ج) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 2$ $F \rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : x > 0 \wedge x + \frac{1}{x} \leq 2$ د) $\exists x \in \mathbb{N} : x > 3 \Rightarrow x + 3 > 10$ $T \rightarrow \forall x \in \mathbb{N} : x > 3 \wedge x + 3 \leq 10$																									

۱۱

کدام گزاره زیر، همارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

کنکور داخل دی ۱۴۰۱

$p \vee q$ (۲)

$r \vee p$ (۳)

r (۴)

q (۱)

$$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \wedge r \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$$

$$(\sim(p \vee q)) \wedge r \vee ((p \vee q) \wedge r) = (\sim A \vee A) \wedge r \equiv r$$

$p \vee \sim p$

مطابق با جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب می‌تواند همارز منطقی گزاره X باشد؟

p	q	r	X
د	د	د	د
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r))$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r))$$

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim(p \vee r) \wedge q)$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$$

کنکور داخل تیرماه ۱۴۰۲

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

اگر P گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ همارز منطقی کدام گزاره است؟

$\sim T$ (۴)

$\sim r$ (۳)

T (۲)

r (۱)

کنکور داخل اردیبهشت ۱۴۰۳

$$r \equiv \text{د} \rightarrow (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow (\text{د} \Rightarrow \text{ن}) \equiv \text{ن}$$

$$r \equiv \text{ن} \rightarrow (\text{د} \Rightarrow \text{ن}) \Rightarrow (\text{ن} \Rightarrow \text{ن}) \equiv \text{د}$$

اگر n^2 مضرب 3 باشد، ثابت کنید n مضرب 3 است

$$n^2 = 3k \rightarrow n = 3q$$

برهان خلف

فرض کنیم: $n = 3k$ برهان خلف
 $n \neq 3k$ فرض کنیم

$$\neg q \Rightarrow \neg p \equiv p \Rightarrow q$$

$$n = 3k + 1 \rightarrow n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3q + 1 \quad \text{بزرگتر از } 3 \Rightarrow q$$

$$n = 3k + 2 \rightarrow n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3q + 1 \quad \text{بزرگتر از } 3 \Rightarrow q$$

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

$$= 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

$$= 3q + 1 \quad \text{بزرگتر از } 3$$

کنکور داخل تیرماه ۱۴۰۳

در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ کدام مورد صحیح است؟

(۱) همواره درست است.

(۲) همواره نادرست است.

(۳) تنها وقتی درست است که p درست باشد.

(۴) تنها وقتی درست است که q نادرست باشد.

	p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$	$p \Rightarrow r$	کل
۱	د	د	د	د	د	د	د
۲	د	د	ن	د	ن	د	د
۳	د	ن	د	ن	ن	د	د
۴	د	ن	ن	د	ن	د	د
۵	ن	د	د	د	د	د	د
۶	ن	د	ن	د	ن	د	د
۷	ن	ن	د	د	د	د	د
۸	ن	ن	ن	د	ن	د	د

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv (\neg p \vee q) \wedge r$$

$$p \Rightarrow r \equiv \neg p \vee r$$

هیچ گاه نمی توان درست باشد

با توجه به جدول ارزش درستی گزاره های زیر، کدام گزاره مرکب زیر می تواند هم ارز منطقی گزاره X باشد؟

	p	q	r	X
۱	د	د	د	ن
۲	د	د	ن	د
۳	د	ن	د	ن
۴	د	ن	ن	د
۵	ن	د	د	ن
۶	ن	د	ن	د
۷	ن	ن	د	د
۸	ن	ن	ن	ن

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \neg r)) \quad (۱)$$

$$(\neg r \Rightarrow (p \vee \neg q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\neg q \wedge r)) \quad (۲)$$

$$r \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \wedge r)) \wedge q] \quad (۳)$$

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \neg ((p \wedge r) \Rightarrow q)] \quad (۴)$$

$$p \Rightarrow p$$

$$d \Rightarrow d \Rightarrow d$$

$$n \Rightarrow n \Rightarrow d$$

کنکور خارج تیرماه ۱۴۰۲

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
د	د	د	د	د	ن	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د

در خصوص گزاره مرکب $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r)$ کدام مورد صحیح است؟

(۱) فقط در حالتی که p و q نادرست باشند، گزاره نادرست است.

(۲) فقط در حالتی که p و q درست باشند، گزاره درست است.

(۳) همواره نادرست است.

(۴) همواره درست است.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r$$

$$\neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$\neg p \vee \neg q \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\neg(p \wedge q) \vee r \Rightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$\neg p \vee \neg q \vee r \Rightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$p \Rightarrow p \equiv \neg p \vee p$$

گزاره ها

$\sim p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	
	T	T					
	T	F					
	F	T					
	F	F					

۱ دموگان: $\begin{cases} \sim (O \vee \square) \equiv \sim O \wedge \sim \square \\ \sim (O \wedge \square) \equiv \sim O \vee \sim \square \end{cases}$ (نقیض $\vee$ رو به $\wedge$ و $\wedge$ رو به $\vee$ تبدیل می‌کنه)

۲ شرطی: $O \Rightarrow \square \equiv \sim O \vee \square$ (شرطی می‌شه نقیض اولی یا دومی)

۳ جذب: $\begin{cases} (O \vee \square) \wedge O \equiv O \\ (O \wedge \square) \vee O \equiv O \end{cases}$ (یه $\wedge$ میاد و یه $\vee$ و جواب اونیه که دو بار تکرار شده)

۴ توزیع پذیری: $\begin{cases} O \wedge (\square \vee \triangle) \equiv (O \wedge \square) \vee (O \wedge \triangle) \\ O \vee (\square \wedge \triangle) \equiv (O \vee \square) \wedge (O \vee \triangle) \end{cases}$ (مثل ضرب کردن و فاکتور گرفتن تو پیره)

$\text{Pink Circle} \Rightarrow \text{Blue Square} \equiv \sim \text{Pink Circle} \vee \text{Blue Square}$

سورها

آمار و احتمال - جاست تست ← مسیح محمدی

گزاره، نقیض، عطف و فصل

نقیض گزاره «هر عدد طبیعی، اگر عدد اول باشد آن گاه فرد است و بالعکس» کدام است؟

- (۱) هر عدد طبیعی، اگر عدد اول نباشد آن گاه فرد نباشد و بالعکس
- (۲) عدد طبیعی وجود دارد که عدد اول باشد و فرد نباشد.
- (۳) عدد طبیعی وجود دارد که اگر عدد اول نباشد آن گاه فرد نباشد و بالعکس.
- (۴) عدد طبیعی وجود دارد که اگر عدد اول نباشد آن گاه فرد باشد و بالعکس.

چند مورد از گزاره‌های زیر به انتفای مقدم دارای ارزش درست هستند؟

- الف) اگر ۶ عددی اول باشد، آن گاه ۷ عددی فرد است. (ب) اگر ۱۷ مضرب ۳ باشد، آن گاه ۲۰ مضرب ۷ است.
- ج) فرد بودن ۲۸ از زوج بودن ۲۶ نتیجه می‌شود. (د) $۵ > ۲$ نتیجه می‌دهد $۰ > ۳$.
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ عددی گویاست یا $\frac{1}{5}$ عددی صحیح است.
- (۲) $\sqrt{2}$ عددی گویاست و (-5) عددی صحیح است.
- (۳) $\frac{1}{4}$ عددی گویاست یا ۱ عددی اول است.
- (۴) $\frac{1}{4}$ عددی گویاست و ۹۱ عددی اول است.

کدام گزینه تعداد حالت‌های ارزشی ۵ گزاره را به درستی نشان می‌دهد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۳۲ (۳) ۲۵ (۴) ۱۶

گزاره‌ی $(p \vee q) \wedge r$ در کدام حالت درست است؟

- (۱) p درست، q نادرست، r درست
- (۲) p درست، q درست، r نادرست
- (۳) p نادرست، q درست، r نادرست
- (۴) p نادرست، q نادرست، r درست

نقیض گزاره‌ی «امروز باران نمی‌بارد.» کدام است؟

- (۱) امروز ممکن است باران نبارد.
- (۲) چنین نیست که امروز باران می‌بارد.
- (۳) چنین است که امروز باران می‌بارد.
- (۴) فردا باران می‌بارد.

کدام یک از گزینه‌های زیر گزاره‌ای با ارزش درست است؟

- (۱) عدد ۱ عددی اول است.
- (۲) گلستان یکی از کتاب‌های مولانا است.
- (۳) هر عدد مضرب ۴ مضرب ۲ نیز هست.
- (۴) رنگ زرد بهتر از رنگ سبز است.

۸

چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درست دارند؟

- الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$ (الف)
 ب) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (ب)
 پ) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$ (پ)
 ت) $\{\emptyset, \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$ (ت)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹

نقیض گزاره‌ی «عدد 3^2 از عدد 2^3 بزرگ‌تر است.» کدام نیست؟

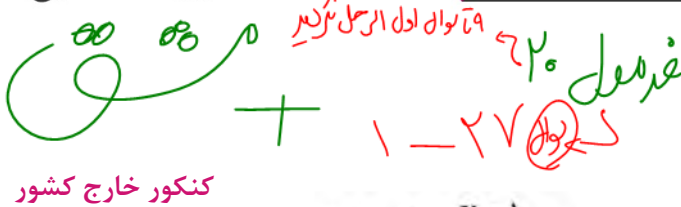
- (۱) چنین نیست که عدد 3^2 از عدد 2^3 بزرگ‌تر است.
 (۲) عدد 3^2 از عدد 2^3 کوچک‌تر است.
 (۳) عدد 2^3 از عدد 3^2 بزرگ‌تر یا مساوی است.
 (۴) عدد 3^2 از عدد 2^3 بزرگ‌تر نیست.

۱۰

کدام یک از گزینه‌های زیر، گزاره نیست؟

- (۱) جمع هر دو عدد گنگ، همواره گنگ است.
 (۲) شنبه چه روز گرمی بود.
 (۳) فاصله‌ی تهران تا مشهد بیشتر از فاصله‌ی تهران تا زنجان است.
 (۴) یک کیلو آهن از یک کیلو پنبه سنگین‌تر است.

دکترها مسیح



کنکور خارج کشور

آمار و احتمال - جاست تست
گزاره: عطف، فصل، شرط، سور

۱ کدام گزاره‌ی سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

$$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} = x \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > 2x \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 \quad (4)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : \left| x + \frac{1}{x} \right| < 2 \quad (3)$$

کنکور خارج کشور ۹۹

۲ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارزش منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

$$p \Rightarrow q \quad (4)$$

$$p \wedge q \quad (3)$$

$$q \quad (2)$$

$$p \quad (1)$$

۳ گزاره‌ی سوری، $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} ; P(x, y)$ ، با کدام گزاره نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

$$xy = 6 \quad (4) \quad x + y = 6 \quad (3) \quad x - y = 6 \quad (2) \quad y - x = 6 \quad (1)$$

سراسری ۹۸

سراسری ۹۸

۴ گزاره‌ی $\sim(p \Rightarrow q)$ ، با کدام گزاره زیر، هم ارزش است؟

$$p \wedge \sim q \quad (4)$$

$$\sim p \wedge q \quad (3)$$

$$p \vee \sim q \quad (2)$$

$$\sim p \vee q \quad (1)$$

۵ علی، احمد، روزبه، داود و حامد برحسب اندازه قد مرتب می‌شوند. می‌دانیم که حداقل دو نفر آنان از علی کوتاه‌تر هستند - داود از روزبه کوتاه‌تر است - احمد کوتاه‌ترین پسر نیست - داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۹۷ سراسری (۱) روزبه بلندتر از علی (۲) داود بلندتر از احمد (۳) احمد بلندتر از حامد (۴) احمد بلندتر از علی

۶ مطابق با جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب می‌تواند هم‌ارز منطقی گزاره X باشد؟ سراسری تیر ۱۴۰۲

p	q	r	X
د	د	د	ن
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r)) \quad (1)$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r)) \quad (2)$$

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim(p \vee r) \wedge q) \quad (3)$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q] \quad (4)$$

دکترها مسیح

خارج از کشور ۱۴۰۲

با توجه به جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزاره مرکب زیر می‌تواند هم‌ارز منطقی گزاره X باشد؟

p	q	r	X
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \sim r)) \quad (۱)$$

$$(\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge r)) \quad (۲)$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q] \quad (۳)$$

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim ((p \wedge r) \Rightarrow q)] \quad (۴)$$

۷

خارج از کشور ۹۹

کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

$$p \Rightarrow q \quad (۴)$$

$$p \wedge q \quad (۳)$$

$$q \quad (۲)$$

$$p \quad (۱)$$

۸

خارج از کشور ۱۴۰۰

ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ ، نادرست است. احتمال اینکه q نادرست باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۹

خارج از کشور ۱۴۰۱

ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت زیر درست است؟

(۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست

(۱) p درست، q نادرست، r درست

(۴) p نادرست، q درست، r نادرست

(۳) p درست، q درست، r نادرست

۱۰

۱۱

کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

سراسری دی ۱۴۰۱

$p \vee q$ (۴)

$r \vee p$ (۳)

r (۲)

q (۱)

۱۱

ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال اینکه ارزش گزاره r نادرست باشد، کدام است؟

سراسری دی ۱۴۰۰

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{7}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{7}$ (۱)

۱۲

نقیض کدام گزاره صحیح نوشته شده است؟

① $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. نقیض: « $\sqrt{2}$ عددی صحیح است.»

② $4^3 - 4^2 = 4$ نقیض: « $4^3 - 4^2 > 4$ »

③ مهدی اخوان ثالث نویسنده‌ی کتاب ارغنون است. نقیض: «مهدی اخوان ثالث نویسنده‌ی کتاب ارغنون نیست»

④ ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار دارد. نقیض: «ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد.»

۱۳

اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره همواره درست است؟

$p \Rightarrow (p \vee q)$ ②

$p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ ①

$p \Rightarrow \sim (p \vee q)$ ④

$p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ ③

۱۴ اگر گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

- ① $(p \vee \sim r) \wedge q$ ② $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$
 ③ $\sim (p \wedge q) \wedge r$ ④ $(r \wedge q) \vee p$

۱۵ در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره‌ی مرکب ایجاد شده، نادرست باشد؟

$$[(-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}) \vee \dots] \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$$

- ① تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از چارک اول هستند.
 ② رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی نسبتی است.
 ③ معادله‌ی $x^2 - 36 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه دارد.
 ④ تمام مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۵۰ عبارتند از ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰

۱۶ در یک گزاره‌ی مرکب، اگر دو گزاره‌ی ساده‌ی دیگر با آن ترکیب شود، تعداد حالت‌های جدول ارزش گزاره ...

- ① دو برابر می‌شود. ② دو حالت بیشتر می‌شود.
 ③ چهار حالت بیشتر می‌شود. ④ چهار برابر می‌شود.

۱۷ کدام گزینه نادرست است؟

① $\exists x \in \mathbb{Z} ; |x| - 1 < 0$ ② $\exists x \in P ; x = 2k (k \in \mathbb{Z})$

③ $\exists x \in \mathbb{Z} ; 2x^2 + 3x + 1 = 0$ ④ $\exists x \in \mathbb{N} ; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

۱۸ چه تعداد از جملات زیر گزاره است؟

الف) عدد $\sqrt{7}$ عددی گویا است.

پ) به به، امروز چه هوای خوبی است!

ث) کامپیوتر را خاموش کنید.

۱ ①

۴ ②

۲ ③

۳ ④

ب) محصولات ایرانی از محصولات چینی کیفیت بهتری دارند.

ت) جرم یک دانه‌ی ارزن ناچیز است.

ج) گرم‌ترین نقطه‌ی کره‌ی زمین در کویر لوت است.

۱۹

اگر p گزاره‌ی درست، q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ی دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ برابر ارزش کدام است؟ (کنکور ۹۸)

۱ ①

همیشه درست ②

همیشه نادرست ③

$\sim r$ ④

۲۰

اگر ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب کدام است؟

درست - درست ①

درست - نادرست ②

نادرست - درست ③

نادرست - نادرست ④

۱ در جدول ارزش گزاره‌های p, q, r و s در چند حالت حداقل ۳ گزاره دارای ارزش درست است؟

- ۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ نقیض گزاره‌ی «عدد ۱۵ اول است یا فرد است» کدام است؟

- ۱) عدد ۱۵ زوج است. ۲) عدد ۱۵ اول نیست و زوج است.
۳) عدد ۱۵ فرد و اول است. ۴) عدد ۱۵ اول نیست یا زوج است.

۳ ارزش کدام گزاره‌ی سوری، درست است؟

- ۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq |x|$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > x$
۳) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ ۴) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2; n! + 3 \in P$ (P مجموعه‌ی اعداد اول است).

۴ چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست می‌باشند؟

- الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $[x + y] = [x] + [y]$. ([] نماد جزء صحیح است).
ب) به ازای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 + n + 17$ عددی اول است.
ج) به ازای هیچ عدد طبیعی n ، $n^2 + 1$ بر ۳ بخش پذیر نیست.
د) اگر a, b و c سه عدد صحیح و abc فرد باشد، آن‌گاه $a^3 + b^3 + c^3$ نیز عددی فرد است.

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ نتیجه‌ی استدلال زیر کدام است؟

- «اگر m بر ۵ بخش پذیر بوده و فرد نباشد، بر ۱۰ بخش پذیر است.»
« m بر ۱۰ بخش پذیر نیست.»

- ۱) m بر ۵ بخش پذیر نبوده و فرد است.
۲) m بر ۵ بخش پذیر بوده یا زوج است ولی بر ۲ و ۵ بخش پذیر نیست.
۳) m دقیقاً بر یکی از عددهای ۵ و ۲ بخش پذیر نیست.
۴) m بر ۵ بخش پذیر نبوده یا فرد است.

۶ اگر دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد طبیعی باشد، آن‌گاه مجموعه جواب چه تعداد از این گزاره‌نماها، نامتناهی است؟

- الف) x بین ۱ و ۲ است.
ب) x مربع کامل است.
پ) $x + 1 < 6$
ت) x دو واحد از مضارب صحیح ۵ بیش تر است.

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷ نقیض گزاره «اگر مربع عددی در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ باشد، آن عدد اول است.» کدام است؟

- ۱ مربع عددی در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ نیست و آن عدد اول نیست.
 ۲ مربع عددی در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ است و آن عدد اول نیست.
 ۳ مربع یک عدد در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ نیست یا آن عدد اول نیست.
 ۴ مربع یک عدد در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ است یا آن عدد اول نیست.

۸ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، دامنه متغیر گزاره‌ها باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- ۱ $\forall x \in A; \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$
 ۲ $\exists x \in A; x^2 + 5x - 6 = 0$
 ۳ $\forall x \in A; |3 - x| < 2$
 ۴ $\exists x \in A; x^2 \leq x$

۹ میانگین حسابی دو عدد نامنفی برابر m و میانگین هندسی آن‌ها برابر p است کدام گزاره درست است؟

- ۱ m از p کمتر است. ۲ m از p بیشتر است. ۳ m از p کمتر نیست. ۴ m از p بیشتر نیست.

۱۰ ارزش کدام گزاره درست است؟

- ۱ $\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 - 1 = 2x$ ۲ $\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x = k^2$ ۳ $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > 2x$ ۴ $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > x$

۱۱ اگر دامنه متغیر در گزاره‌های سوری زیر برابر بازه‌ی $(0, 1)$ باشد، آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های سوری زیر درست هستند؟

- الف $\forall x: x^2 > x$ ب $\forall x: \sqrt{x} > x$ ج $\forall x: \sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$ د $\forall x: \frac{1}{x} > x$ هـ $\exists x: x + \frac{1}{x} = 2$
 ۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴ ۳ ۴ ۳

۱۲ ارزش کدامیک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟ (P مجموعه‌ی اعداد اول است)

- ۱ $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 2x + 4 > 0$ ۲ $\forall a, b \in \mathbb{N}; \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{a+b}$ ۳ $\forall x \in \mathbb{N}; 3^{x+1} - 2^{x+1} \in P$ ۴ $\exists A; A \subseteq \{A\}$

۱۳ اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی دامنه متغیر گزاره‌ها باشد، مجموعه‌ی جواب کدام گزاره‌ها تهی است؟

- ۱ $2^n < n^2$ ۲ $n^2 < 8n - 15$ ۳ $n! \leq \frac{n^2}{2}$ ۴ $2n^2 < 5 - 3n$

۱۴ ارزش دستی و نقیض گزاره $\forall x \in R; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ به ترتیب کدام است؟

۱ درست - $\exists x \in R; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$ ۲ نادرست - $\exists x \in R; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$

۳ نادرست - $\forall x \in R; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$ ۴ درست - $\exists x \in R; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

۱۵ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ دامنه متغیر گزاره‌نما باشد، چند گزاره از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) $\forall x \in A; 2x^2 + x + 25 > 0$ ب) $\forall x \in A; x^2 > x$

ج) $\exists x \in A; x^2 + 2x = 16$ د) $\exists x \in A; x^2 - 5x - 6 = 0$

۱ ۴

۲ ۳

۳ ۲

۴ ۱

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱ اگر گزاره‌ی $p \vee (p \wedge \sim q)$ نادرست باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$p \wedge (\sim p \vee q) \quad \text{۴}$$

$$\sim p \quad \text{۳}$$

$$p \wedge q \quad \text{۲}$$

$$q \quad \text{۱}$$

۲ برای دو گزاره‌ی « p » و « q »

« q » کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

$$q \text{ شرط لازم برای } q \text{ است.} \quad \text{۲}$$

$$p \text{ شرط لازم برای } q \text{ است.} \quad \text{۱}$$

$$q \text{ شرط کافی برای } p \text{ است.} \quad \text{۳}$$

$$p \text{ شرط کافی برای } q \text{ است.} \quad \text{۴}$$

۳ ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow r$ درست است، احتمال اینکه ارزش گزاره q درست باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{8} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{7} \quad \text{۳}$$

$$\frac{4}{7} \quad \text{۲}$$

$$\frac{2}{7} \quad \text{۱}$$

۴ گزاره $p \Rightarrow q$ با کدام یک از گزینه‌های زیر هم‌ارز نیست؟

$$(p \vee q) \Rightarrow q \quad \text{۲}$$

$$p \Rightarrow (p \wedge q) \quad \text{۱}$$

$$\sim p \wedge q \quad \text{۴}$$

$$\sim p \vee q \quad \text{۳}$$

۵ اگر $p : (5 > 3)$ ، $q : (1 \text{ عدد اول است})$ و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

$$(\sim p \vee r) \vee q \quad \text{پ}$$

$$r \Rightarrow \sim r \quad \text{ب}$$

$$p \vee \sim q \quad \text{الف}$$

$$\text{هیچ} \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

۶ اگر گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ با ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر یکسان است؟

$$p \wedge q \quad \text{۴}$$

$$q \Rightarrow p \quad \text{۳}$$

$$q \vee p \quad \text{۲}$$

$$p \vee \sim q \quad \text{۱}$$

۷ گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ هم‌ارز منطقی با کدامیک از گزاره‌های زیر است؟ (T گزاره همیشه درست و F گزاره همیشه نادرست است.)

$$p \wedge \sim q \quad \text{۴}$$

$$T \quad \text{۳}$$

$$F \quad \text{۲}$$

$$\sim p \wedge q \quad \text{۱}$$

۸ اگر ارزش گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد، ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر نیز نادرست است؟

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ۱ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$ ۲

$\sim(p \wedge \sim q) \wedge (q \vee p)$ ۳ $\sim q \wedge (q \vee p)$ ۴

۹ گزاره‌ی $[\sim(p \Rightarrow q) \vee q] \vee [(q \Rightarrow p) \wedge \sim p]$ هم‌ارز کدام گزینه است؟

T ۱ F ۲ p ۳ q ۴

۱۰ اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، گزاره $\sim p \Leftrightarrow [\sim p \wedge (p \Rightarrow q)]$ همواره هم‌ارز با کدامیک از گزاره‌های زیر است؟

T ۱ $p \vee q$ ۲ F ۳ $p \wedge q$ ۴

۱۱ اگر گزاره‌ی $p \wedge q$ نادرست باشد، با کدام احتمال گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$ درست است؟

$\frac{1}{3}$ ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴

۱۲ عکس نقیض گزاره «اگر a و b دو عدد فرد باشند، آن‌گاه $a + b$ عددی زوج است» کدام است؟

۱ اگر $a + b$ عددی زوج نباشد آن‌گاه a فرد نیست یا b فرد نیست.

۲ اگر $a + b$ عددی زوج نباشد آن‌گاه a و b فرد نیستند.

۳ اگر a و b دو عدد فرد نباشند، آن‌گاه $a + b$ زوج نیست.

۴ اگر a و b دو عدد زوج باشند، آن‌گاه $a + b$ زوج است.

۱۳ کدام مورد در خصوص ارزش گزاره $q \Rightarrow [p \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)]$ صحیح است؟

۱ با ارزش گزاره $\sim p$ برابر است. ۲ همواره درست است.

۳ با ارزش گزاره $\sim q$ برابر است. ۴ با ارزش گزاره $\sim(p \vee q)$ برابر است.

۱۴ عکس نقیض گزاره‌ی $\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$ کدام است؟

$p \Rightarrow (p \vee q)$ ۱ $p \Rightarrow (p \wedge q)$ ۲ $p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ ۳ $\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$ ۴

۱۵ اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام دو گزاره‌ی مرکب زیر هم‌ارزش هستند؟

الف) $(p \wedge q) \vee \sim r$ ب) $(\sim q \vee r) \Leftrightarrow p$ ج) $r \Rightarrow q$

۱ «الف» و «ب» ۲ «الف» و «ج»

۳ «ب» و «ج» ۴ هیچ دو گزاره‌ای هم‌ارزش نیستند

۱۶ کدام عبارت نادرست است؟

۱ ترکیب عطفی دو گزاره فقط در صورتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

۲ ترکیب فصلی هر گزاره با نقیض همان گزاره، همواره دارای ارزش درست است.

۳ ترکیب شرطی دو گزاره فقط در حالتی نادرست است که از یک گزاره‌ی نادرست، نتیجه‌ای درست گرفته شود.

۴ ترکیب دو شرطی دو گزاره‌ی نادرست، دارای ارزش درست است.

جدول زیر بخشی از جدول ارزش سه گزاره p ، q و r است. کدام گزاره بجای علامت سؤال قرار می‌گیرد؟

p	q	r	?
د	ن	د	د
د	د	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	د	د

- ۱ $(\sim p \Rightarrow q) \wedge r$ ۲ $(q \Leftrightarrow \sim r) \vee p$ ۳ $(p \Leftrightarrow r) \vee \sim q$ ۴ $(\sim q \Rightarrow p) \wedge \sim r$

اگر دو گزاره زیر درست باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر قطعاً درست خواهد بود؟
الف- اگر تیم بحرین پیروز نشود آن‌گاه تیم ملی ایران به جام جهانی صعود می‌کند.
ب- اگر تیم بحرین پیروز شود آن‌گاه تیم ملی ایران به جام جهانی صعود می‌کند.

- ۱ تیم بحرین پیروز می‌شود و ایران به جام جهانی صعود می‌کند.
۲ تیم بحرین پیروز نمی‌شود یا ایران به جام جهانی صعود نمی‌کند.
۳ اگر تیم ملی ایران به جام جهانی صعود نکند آن‌گاه تیم بحرین پیروز نشده است.
۴ تیم ملی ایران به جام جهانی صعود می‌کند اگر و تنها اگر تیم بحرین پیروز نشود.

ارزش گزاره «حداقل یک عدد طبیعی وجود دارد که اگر اول باشد، آن‌گاه زوج است.» چیست و نقیض آن به کدام صورت نوشته می‌شود؟

- ۱ درست، $\forall n \in \mathbb{N} : n \in P \wedge n \in O$ ۲ درست، $\forall n \in \mathbb{N} : n \notin P \rightarrow n \notin E$
۳ نادرست، $\exists n \in \mathbb{N} : n \notin E \rightarrow n \notin P$ ۴ نادرست، $\exists n \in \mathbb{N} : n \in P \wedge n \notin E$

نقیض گزاره $(\exists a \in \mathbb{R} ; p(a)) \Rightarrow (\exists a \in \mathbb{R} ; q(a))$ کدام است؟

- ۱ $(\exists a \in \mathbb{R} ; p(a)) \wedge (\forall a \in \mathbb{R} ; \sim q(a))$ ۲ $(\exists a \in \mathbb{R} ; p(a)) \vee (\forall a \in \mathbb{R} ; \sim q(a))$
۳ $(\forall a \in \mathbb{R} ; p(a)) \wedge (\forall a \in \mathbb{R} ; \sim q(a))$ ۴ $(\forall a \in \mathbb{R} ; \sim p(a)) \vee (\forall a \in \mathbb{R} ; \sim q(a))$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

مجموعه

نمره در امتحان نهایی

سه نمره

تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

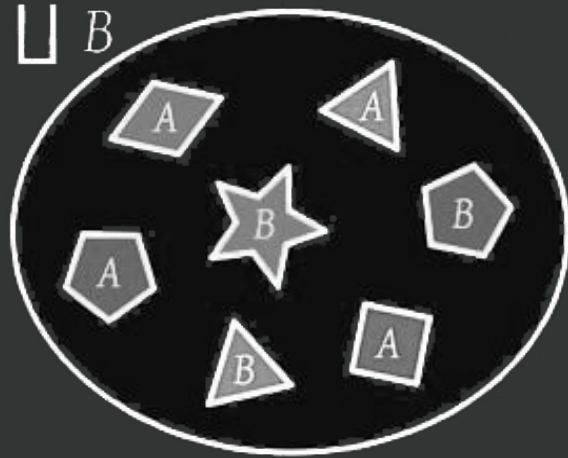
مجموعه هشتم

فصل اول درس ۱ و ۲ ریاضی دهم
درس اول فصل اول منطق ریاضی

$$A = \{ \text{پنج‌گوشی}, \text{مربع}, \text{مثلث}, \text{دایره} \}$$

$$B = \{ \text{ستاره}, \text{پنج‌گوشی}, \text{مربع} \}$$

$$A \cup B$$



درس دو فصل اول آمار و احتمال

جبر مجموعه
روابط و اعمال
مجموعه ها

کافی لازم

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

جبر مجموعه ها

$$\overline{A \cap B} = A - B = A \cap B'$$

جا به جایی $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ اقناع و اشتراک

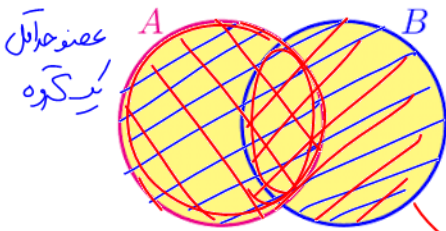
شرکت پذیری $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup B$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

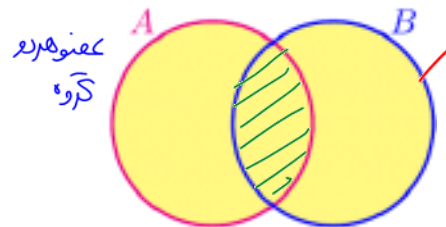
توزیع پذیری

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$



$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

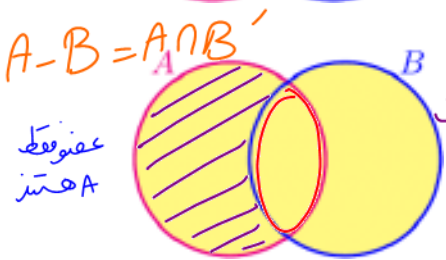
$$= \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

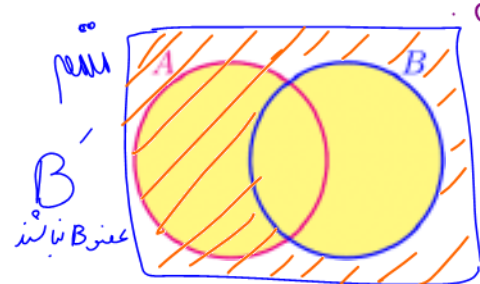
$$= \{x \in U \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$



$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B'\}$$

$$= A \cap B'$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

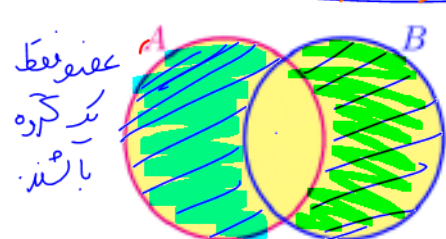


$$B' = \{x \in U \mid x \notin B\}$$

$$n(B') = n(U) - n(B)$$

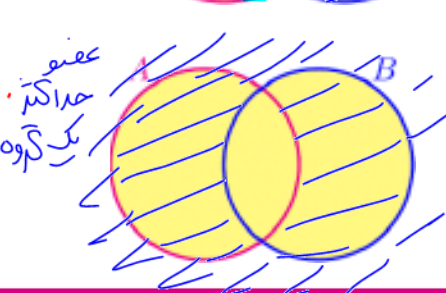
$$B \cap B' = \emptyset$$

$$B \cup B' = U$$

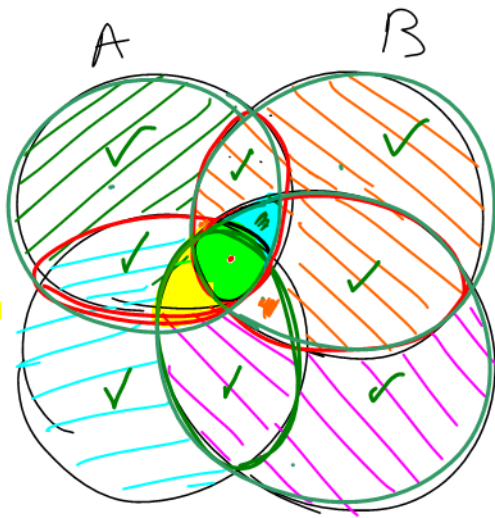


$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$$n(A \Delta B) = \underbrace{n(A) + n(B)}_{n(A) + n(B)} - \underbrace{n(A \cap B) - n(A \cap B)}_{2n(A \cap B)} = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

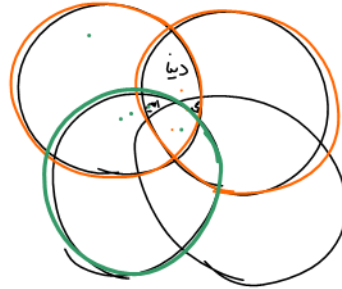


$$(A \cap B)' = A' \cup B' \rightarrow n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$$

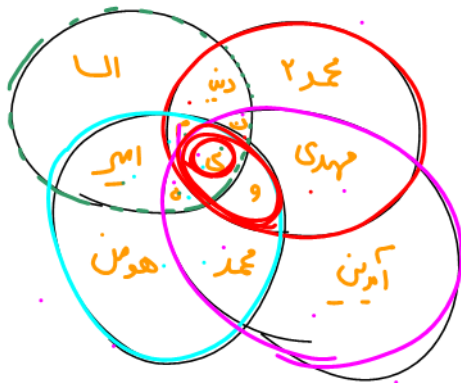


$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D)$$

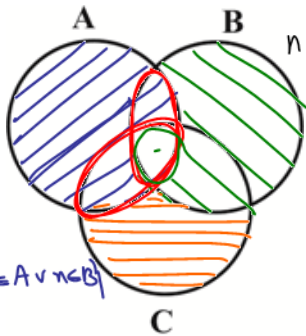


$$- n(A \cap B \cap C \cap D)$$



دکترها مسیح

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



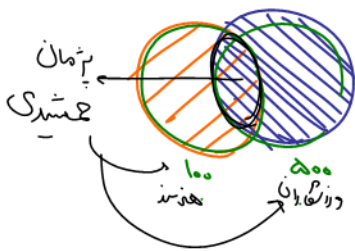
$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 = \text{تعداد}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \sim(P \vee Q) &\equiv \sim P \wedge \sim Q \\ \sim(P \wedge Q) &\equiv \sim P \vee \sim Q \end{aligned}$$



$$A \cap (B \cup A) = A$$

$$(A \cap B) \cup A = A$$



قانون جذب

$\sim(P \wedge Q)$	P	Q	$P \wedge Q$	$\sim P \wedge Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$
0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1

قانون دمورگان

$$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

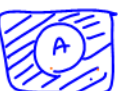
$$(A \cup B)' = \{x \mid x \in (A \cup B)'\} = \{x \mid x \notin A \cup B\} = \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A' \wedge x \in B'\} = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = \{x \mid x \notin A \cap B\} = \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} = \{x \mid x \in A' \vee x \in B'\} = A' \cup B'$$

$$A \cup A' = U$$

$$M \cup \emptyset = M$$

$$A \subseteq B$$



$$A - A' = A$$

$$M - \emptyset = M$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$M \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B))$$

$$A' - A = A'$$

$$\emptyset - M = \emptyset$$



$$A \cup M = M$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A - M = \emptyset$$

$$A - \emptyset = A$$

$$A \cap M = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$M - A = A'$$

$$\emptyset - A = \emptyset$$



$$A \cap B' = A - B$$

$$A' \cup B = (A \cap B')' = (A - B)'$$

$$A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

$$A \cup B' = (A' \cap B)' = (B \cap A')' = (B - A)'$$

$$A' \cup B' = (A \cap B)'$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکترها مسیح $2(x+3) = 2x + 2 \times 3$

۱ اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $A' \cup (B \cap A) \cap (B \cup A) \cap B'$ با کدام مجموعه برابر است؟

$A' \cup (B \cap A)$ $B \cap A \cap B'$ $\{2,3\}$ $\{3\}$ $B - A$ $\{2,3\}$ $(A - B)'$

$(A' \cup B) \cap (A' \cup A)$ $B \cap B'$ $B \cap B'$

$(A \cap B)$ $A \cup ((B \cap A) \cap B)$ $A' \cup (B \cap A)$ $(A' \cup B) \cap (A' \cup A)$ $A' \cup B$ $(A \cap B)'$ $(A - B)'$

۲ اگر A، B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $((A - B)' - (B - C)) - C$ با کدام مجموعه برابر است؟

$A = \{3,4\}$ $B \cap A = \{2\}$ $B \cup A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,3\}$

$\{3,4\} \cup \{2\} = \{2,3,4\}$

$A - B = A \cap B'$ $A \cap B' = \{1\}$ $B - C = B \cap C' = \{2\}$ $(A - B)' = \{2,3,4\}$ $(B - C) = \{2\}$ $((A - B)' - (B - C)) = \{3,4\}$ $((A - B)' - (B - C)) - C = \{3,4\} - \{2,3\} = \{4\}$

۳ فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعه مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$ اگر $((A' - B)' \cap C)' = B$ کدام عبارت درست است؟

$A - B$ (۴) $A \subseteq B$ (۳) $A \cap B = \emptyset$ (۲) $B \subseteq A$ (۱)

$A' = \{3\}$ $B = \{2,3\}$ $A' - B = \emptyset$ $(A' - B)' = \{1,2,3\}$ $C = \{1,3\}$ $(A' - B)' \cap C = \{1,3\}$ $((A' - B)' \cap C)' = \{2\} = B$

۴ فرض کنید $C = (A - B) \cup (B - A)$ حاصل $(A' \cap B')' \cap C'$ کدام است؟

C' (۴) C (۳) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۱)

$A' \cap B' = \{1\}$ $(A' \cap B')' = \{2,3\}$ $C' = \{2\}$ $(A' \cap B')' \cap C' = \{2\} = C$

$\{a, b, c, d\}$
 به مجموعه اترز

اعضوی ۱ اعضوی ۳

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$\{a\}$ $\{b, c, d\}$
 $\{b\}$ $\{a, c, d\}$
 $\{c\}$ $\{b, a, d\}$
 $\{d\}$ $\{a, b, c\}$

اعضوی ۲ اعضوی ۲

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$$

حجم صبی قنات
 (کاردنی کنه)

$\{a, b\}$	$\{c, d\}$
$\{a, c\}$	$\{b, d\}$
$\{a, d\}$	$\{b, c\}$

برون بودن
 ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵ ۶ ۶ ۷ ۷ ۸ ۸ ۹ ۹ ۱۰ ۱۰

الف) چیزی مجموعه $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1, a_2, \dots, a_n$
 $2^{10-5} = 2^5 = 32$ در مجموع

ب) چیزی مجموعه $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$$

۱۰-۲
 ۶-۰
 ۵-۰

۲) یک گروهی ۱۰ دختر و ۱۵ پسر حضور دارند

به چند طریق می توان یک گروه از آنها تشکیل داد که

الف) دختر خاص انتخاب نشود.

$$2^{15-1} = 2^{14}$$

ب) پسر خاص انتخاب و دختر خاص انتخاب نشود.

$$2^{15-1-1} = 2^{13}$$

پ) هر یک از آنها که پسر خاص در آنها بوده و دختر خاص نباشد

$$\begin{pmatrix} 20-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

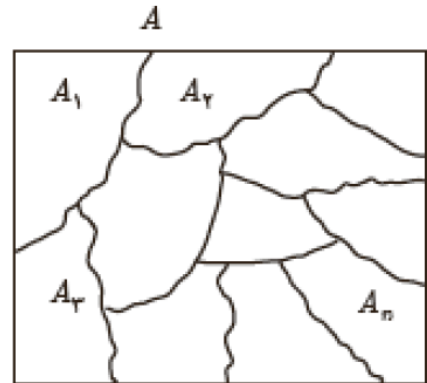
هیچ کدام نمی باشد

$$I) \forall 1 \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$$

$$II) \forall i, j (i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset)$$

$$III) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

مثلاً قطعات کاغذ یا برنجش



$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

مجموعه A به چند صورت به دو مجموعه افراز می شود؟

به چند صورت مجموعه A به ۲ مجموعه افراز می شود؟

اعضوی ۵

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \text{ حالت}$$

$$\{a, b, c, d, e, f\} \neq \{a\}$$

$$\{a, b, c, d, e, f\} \neq \{b\}$$

$$\{a, b, c, d, e, f\} \neq \{c\}$$

$$\{a, b, c, d, e, f\} \neq \{d\}$$

$$\{a, b, c, d, e, f\} \neq \{e\}$$

$$\{a, b, c, d, e, f\} \neq \{f\}$$

اعضوی ۲

$$\{a, b\}$$

$$\{a, c\}$$

$$\{b, c\}$$

اعضوی ۱

$$\{c\}$$

$$\{b\}$$

$$\{a\}$$

$$3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

اعضوی ۴

اعضوی ۲

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

اعضوی ۳

اعضوی ۳

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3! \rightarrow \text{تکرار}$$

$$\frac{abc}{3!}$$

$$\frac{abac}{2!}$$

مجموعه A به چند صورت به ۳ مجموعه افراز می شود؟

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

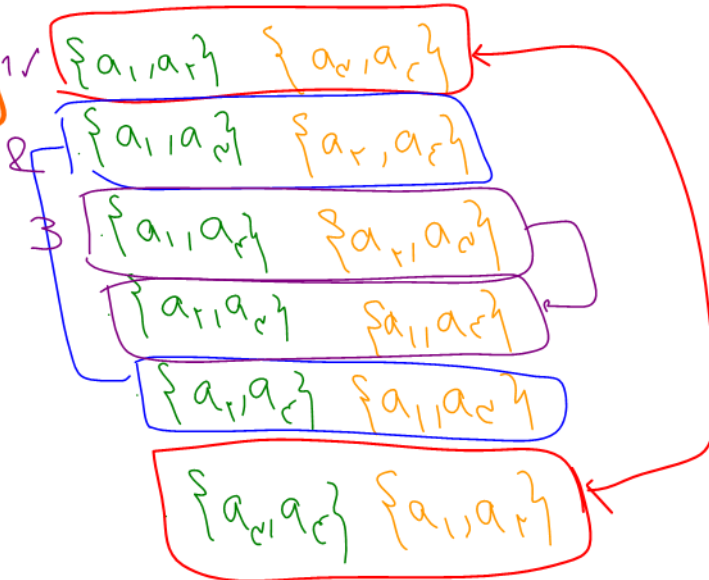
تمام امرازها ۲ مجموعه را بنویسید

$$\begin{array}{cc} \{a_4\} \{a_1, a_2, a_3\} & \{a_4\} \{a_1, a_2, a_3\} \\ \{a_1\} \{a_2, a_3, a_4\} & \{a_2\} \{a_1, a_3, a_4\} \end{array}$$

$$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{اعضای ۱}} \quad \boxed{\text{اعضای ۳}}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \quad \boxed{\text{اعضای ۲}} \quad \boxed{\text{اعضای ۴}}$$

$$\frac{4}{2!} = 2$$



$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

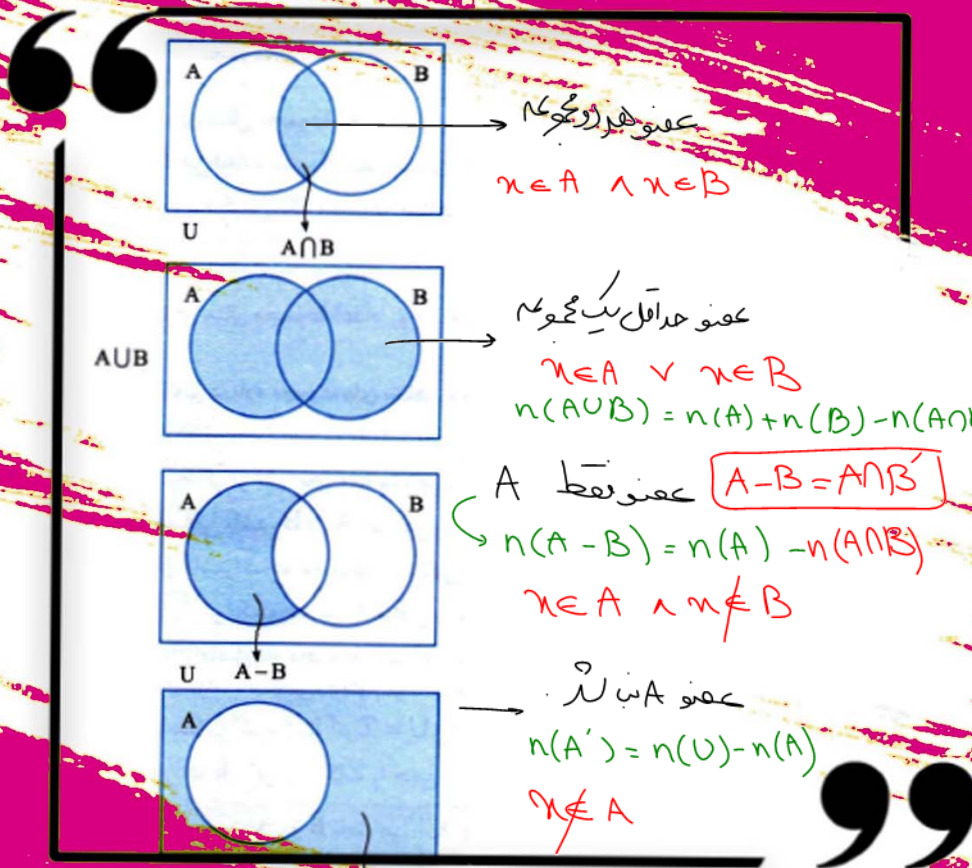
$$\{a_1\} \{a_2\} \{a_3\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 2 \times 1$$

$$3!$$

مجموعه ها



زیرمجموعه
 $U \cap A = 2 \times 2 \times 2$
 $A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
 2^n
 $n(P(A)) = 2^{n(A)}$

$P(P(A))$
 $1 = 2^0$
 2^n
 2^{2^n}

مجموعه توانی

$P(A)$
 مجموعه توانی
 مجموعه همه زیرمجموعه ها
 تعداد مجموعه (بدون تعداد مشخص) شامل - شامل
 $2^{n(A)}$
 تعداد زیر مجموعه (با تعداد مشخص) شامل - شامل
 $\binom{n}{k}$

مجموعه توانی
 $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 $A = \{a, b\}$
 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

آنالیز و ترکیبیات دوره کوتاه
 (الف) چیزی که مجموعه ۴ عضوی شامل ۲ دارد
 $\binom{4}{2} = 10$

(ب) چیزی که مجموعه ۳ عضوی فاقد ۲ و شامل ۷ دارد

$\binom{7}{3} = 35$
 $1, 3, 4, 5, 6, 7$
 (ج) چیزی که مجموعه ۵ عضوی شامل ۲ و فاقد ۳

$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکترها مسیح

نوال ۸۹۷۲۰۰ + ۲۰۰

مجموعه‌های A, B, C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C، دو واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ بیشتر از تعداد اعضای مجموعه $A \times B$ و $1/5$ برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times D$ باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چقدر است؟

تیر ۱۴۰۰

$$|C| = |A| + 2 \rightarrow \frac{5}{4}|A| = |A| + 2 \rightarrow \frac{1}{4}|A| = 2 \rightarrow |A| = 8$$

$$|D| = |B| - 3 \rightarrow \frac{5}{4}|B| - |B| = -3 \rightarrow \frac{1}{4}|B| = 3 \rightarrow |B| = 12$$

$$|C||B| = \frac{12}{4} \times \frac{5}{4} |A||B|$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} |A||B| = \frac{5}{4} |A||B| \Rightarrow |D| = \frac{5}{4}|B|$$

اگر A, B و C مجموعه‌های غیرتهی باشند، کدام مجموعه زیر تهی است؟

$$(A \times (A \cup B)) - (A \times A) \quad (1)$$

$$(A \times (B \cap C)) - (A \times B) \quad (2)$$

$$(A \times (B \cap C)) - (A \times B) = \emptyset$$

$$B \cap C \subseteq B$$

$$A - B = A - (A \cap B)$$

$$A \times B - C \times D = A \times B - (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (C \cap A) \times (B \cap D)$$



اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند به طوری که $A \times B = B \times A$ آن گاه حاصل $(A \cup B') \cap (A' \cup B)$ کدام است؟

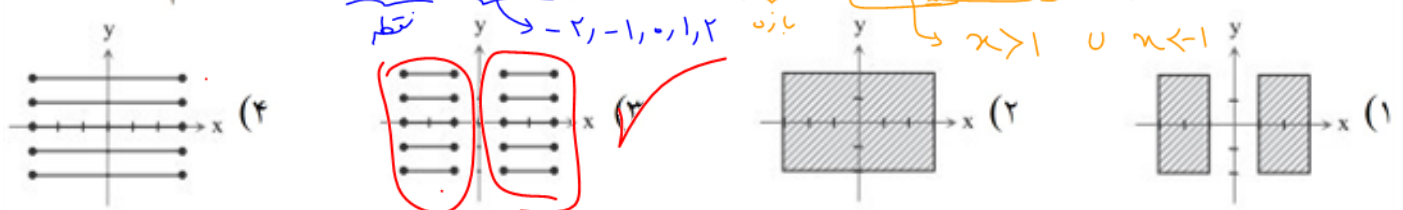
$$A = B \quad \emptyset \quad A$$

$$(A \cup A') \cap (A' \cup A) = A' \cup A = U$$

$$(A \times B) \cap (B \times A)$$

$$(A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$

نمودار $A \times B$ با شرط $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$ کدام است؟



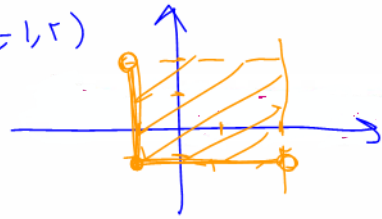
دکتر محمد مسیح

$$A = \{-1, 2, 3\}$$

$$A^T = A \times A = \begin{Bmatrix} (-1, -1) & (-1, 2) & (-1, 3) \\ (2, -1) & (2, 2) & (2, 3) \\ (3, -1) & (3, 2) & (3, 3) \end{Bmatrix} \begin{matrix} (A \cap B) \times (A \cap B) \\ (A \cap B)^T \end{matrix}$$

$$A = [-1, 2]$$

$$A^T$$



همچون مرتب‌ها $A \times B$ به هر ۴ استرا = (استراک‌ها) $A \times B - B \times A = A \times B -$

$$A \times B - B \times A = A \times B - \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 12 - 4 = 8$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (1, -1) & (1, 0) & (1, 1) & (1, 2) \\ (2, -1) & (2, 0) & (2, 1) & (2, 2) \\ (3, -1) & (3, 0) & (3, 1) & (3, 2) \\ (4, -1) & (4, 0) & (4, 1) & (4, 2) \end{Bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{Bmatrix} (-1, 1) & (-1, 2) & (-1, 3) & (-1, 4) \\ (0, 1) & (0, 2) & (0, 3) & (0, 4) \\ (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) \end{Bmatrix}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

$$(A \cap B)^T = \begin{Bmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (2, 1) & (2, 2) \end{Bmatrix}$$

ضرب دکارتی

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

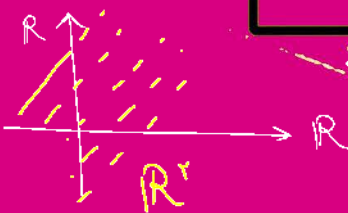
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
- $n(A \times B \cap B \times A) = n(A \cap B)^2$
- $n(A^T \cap B^T) = n(A \cap B)^T$
- $n(A \times B \cup B \times A) = 2n(A)n(B) - n(A \cap B)^2$
- $n(A \times B - B \times A) = n(A)n(B) - n(A \cap B)^2$
- $n(A^T - B^T) = n(A^T) - n(A \cap B)^T$
- $n(A^T \cup B^T) = n(A^T) + n(B^T) - n(A \cap B)^T$
- $n(A^T - A \times B) = n(A) \times n(A - B)$
- $n(A \times B - B^T) = n(A - B) \times n(B)$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

A \ B	B	مجموعه‌ای متناهی از اعداد	بازه
مجموعه‌ای متناهی از اعداد	تعدادی نقطه	تعدادی خط یا پاره خط عمودی	
بازه	تعداد خط یا پاره خط افقی	سطح یک مستطیل یا مربع	

حالت های ضرب دکارتی

$$A \times A = A^T$$



$$n(A \times B \cup B \times A) = n(A \times B) + n(B \times A) - n(A \cap B) \times n(B \cap A) = n(A)n(B) + n(B)n(A) - n(A \cap B)^2$$

$$n(A \cap B)^T = 2(n(A)n(B)) - n(A \cap B)^2$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکترها مسیح

$$A \cap B = A$$

$$A \cup B = B \quad \leftarrow \boxed{A \subseteq B} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

$$A - B = \emptyset \quad \leftarrow \begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

$$A \cap (B \cup C)$$

$$\begin{aligned} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{aligned} \Rightarrow A = B$$

انواع اثبات در مجموعه ها

عضوگیری

روابط برابری

بنیادی

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in B \Rightarrow x \in A) \quad \left\{ \begin{aligned} & \text{Diagram: } A \subseteq B \\ & A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ & A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in A \Rightarrow x \notin B \end{aligned} \right.$$

تعاریف
زیر مجموعه بودن

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اجتماع

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

اشتراک

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

جبر مجموعه ها $\leftarrow$ بلندی سمت، دوارگی سمت را انتساب دسعی می کنیم به سمت دیگر ببریم

③ فرضیات های صغریه

② فاکتور، توزیع

① $A - B = A \cap B'$

⑤ دموورگان

④ قانون جذب

دو مجموعه
 $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ مجموعه خالی

$$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap (B \cap B') = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$\begin{aligned} (A - C) \cup (B - C) &= (A \cap C') \cup (B \cap C') \\ &= (A \cup B) \cap C' \\ &= (A \cup B) - C \end{aligned}$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\ &\stackrel{2. (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)}{=} (A \cap (A' \cup C')) \cap B \\ &= (\cancel{(A \cap A')} \cup (A \cap C')) \cap B = A \cap C' \cap B = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C) \end{aligned}$$

کے نوکری

$$\textcircled{1} \quad A \subseteq B \iff \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$



$$\swarrow \searrow \rightarrow \forall x; (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

② $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = A \cap B' = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

③ $A = B$ $\leftarrow A \subseteq B \quad \forall x, x \in A \rightarrow x \in B$

$B \subseteq A \quad \forall n, n \in B \Rightarrow n \in A$

به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید $(A - B) \cup (A \cap C) = A \ominus (B - C)$

سمت چپ

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A \cap C) &= (A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C) = A \cap (B \cap C')' \\ &= A \cap (B - C)' \\ &= A - (B - C) = \text{سمت راست} \end{aligned}$$

عبارت $[A \cap (A - B)'] \cup [B \cap (A \cap B)']$ را تا حد امکان ساده کنید.

$$\begin{aligned} [A \cap (A \cap B)'] \cup [B \cap (A \cap B)'] &= [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A) \cup (B \cap B')] \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \end{aligned}$$

با فرض $A \cap B = A \cap C$ و $A' \cap B = A' \cap C$ ثابت کنید $B = C$

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap C \\ A' \cap B &= A' \cap C \\ \hline (A \cap B) \cup (A' \cap B) &= (A \cap C) \cup (A' \cap C) \\ B &= C \end{aligned}$$

اگر A, B, C, D چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{①}$$

$$C \subseteq D \Leftrightarrow \forall x; (x \in C \Rightarrow x \in D) \quad \text{②}$$

$$\forall x; x \in A \cup C \rightarrow x \in A \vee x \in C \xrightarrow{A \subseteq B, C \subseteq D} x \in B \vee x \in D$$

$$\xrightarrow{C \subseteq D} x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$$

پس می توان گفت

$$\checkmark A \cup C \subseteq B \cup D$$

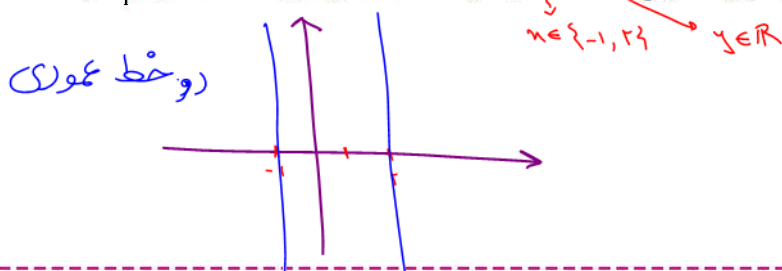
$$\forall x; (x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup D)$$

$$\forall x; (x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup D)$$

$$\Leftrightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، با استفاده از جبر مجموعه ها عبارت $(A - B) \cup (A \cap B)$ را تا حد امکان ساده کنید.

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$$

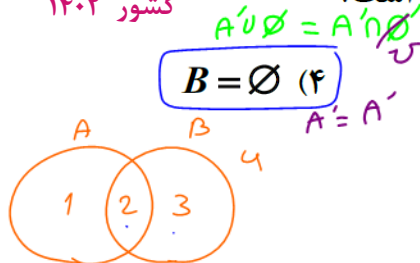


آمار و احتمال یازدهم - جاست تست

مجموعه ها

ریاضی خارج از
کشور ۱۴۰۲

۱) اگر U مجموعه مرجع و $A' \cup B = A' \cap B'$ باشند، کدام مورد درست است؟



$B = U$ (۳)

$A = \emptyset$ (۲)

$A = B$ (۱)

$A' \cup U = A' \cap \emptyset$
 $U = \emptyset$

$A' = U$
 $U \cup B = U \cap B'$
 $U = B'$

$A' \cup A = A' \cap A'$
 $U = A'$

$A' \cup B = \{3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3, 4\}$

$A' \cap B' = \{3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\}$

$(A' \cup B) \cap B = A' \cap B' \cap B$

راست، $B = \emptyset$

السا

♡!

$A \cap B' = A \cup B$
 $A - B = A \cup B$
 $B = \emptyset$

۲) اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند مجموعه $A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟

ریاضی داخل
کشور ۱۴۰۱

$\emptyset$ (۴)

B (۳)

$B - A$ (۲)

$(A - B)'$ (۱)

$A' \cup (B \cap A) = (A' \cup B) \cap (A' \cup A) = A' \cup B = ((A \cap B)')' = (A - B)'$

۳) مجموعه های $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ مفروض اند. چند مجموعه

مانند X وجود دارد به طوری که $X \subseteq A$ و $X \not\subseteq B$ ؟

۱۶ (۴)

۳۲ (۳)

۴۸۰ (۲)

۵۱۲ (۱)

۴

مجموعه‌ی A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است، مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A)'$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۶۴

۵

اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، ساده‌شده‌ی $(A - B') \cup (A - (A' \cap B))$ برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cap B$ (۴) $A - B$

۶

حاصل $[(A - B') \cup (A \cup (B - A))] \cap A$ کدام است؟

- (۱) A (۲) $A \cap B$ (۳) $A - B$ (۴) $\emptyset$

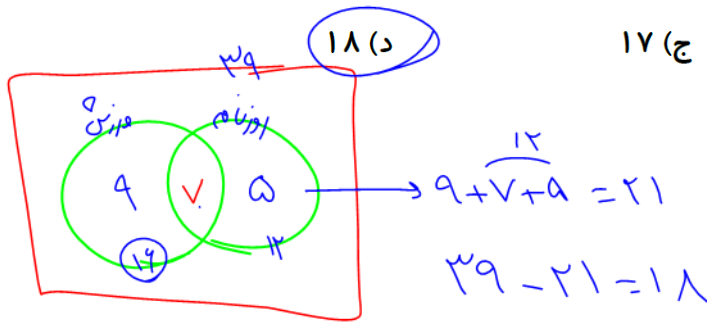
۵

در یک کلاس ۳۴ نفره، ۲ نفر از دانش‌آموزان به هیچ‌یک از رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال علاقه ندارند. ۱۵ نفر به فوتبال، ۱۸ نفر به والیبال، ۱۶ نفر به بسکتبال، ۷ نفر به فوتبال و والیبال، ۸ نفر به والیبال و بسکتبال و ۴ نفر به فوتبال و بسکتبال علاقه‌مند هستند، چه تعداد از دانش‌آموزان به حداقل دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۶ در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند، چند نفر از آن‌ها عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟

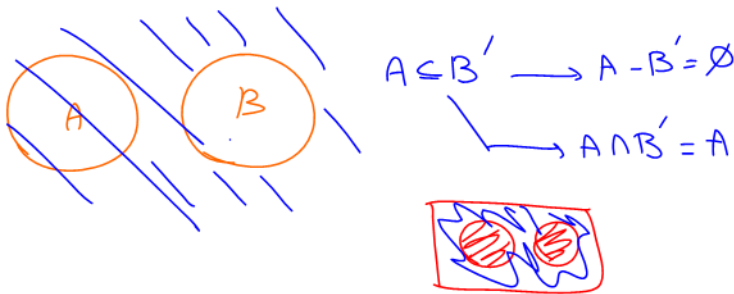
سراسری ریاضی - ۹۸



۷ فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم، با یک مجموعه مرجع باشند، کدام رابطه نادرست است؟

- (الف) $A \subseteq B$ ✓ (ب) $A - B = \emptyset$ ✓ (ج) $A \cap B' = A$ ✓ (د) $(A \cup B)' = \emptyset$

خارج کشور - ۹۹

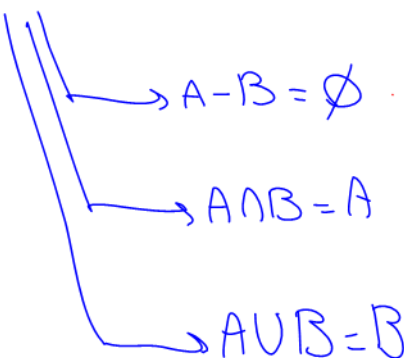


۸ اگر A و B دو مجموعه غیر تهی با شرط $A \subseteq B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

- (الف) $B - A' = A$ ✓ (ب) $A - B' = A$ ✓ (ج) $A \cap B' = \emptyset$ ✓ (د) $B \cap A' = \emptyset$

سراسری ریاضی - ۹۹

$$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$$



۹ مجموعه $(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$ با کدام مجموعه برابر است؟ سراسری ریاضی - ۹۹

الف) $A \cup B'$ (ب) $A \cap B'$ (ج) A (د) B'

$$(A \cap B') \cup ((B' \cup C') \cap ((B' \cup A) \cap B')) = (A \cap B') \cup B' = B'$$

قانون جذب

۱۰ مجموعه $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)')$ با کدام مجموعه برابر است؟

الف) A (ب) B (ج) A' (د) B'

$$(A \cap (A \cap B')') \cup (B \cap (A' \cup B')) = (A \cap A) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A') \cup (B \cap B') = B \cap (A \cup A') = B$$

۱۱ اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه های $A \cap B'$ کدام است؟

الف) ۴ (ب) ۸ (ج) ۱۶ (د) ۳۲

سراسری ریاضی - ۹۸

$$A - B = \{1, 2, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$$

۳ عضو

$$2^3 = 16$$

۱۲ اگر $A = (-5, -1]$ و $B = [-2, 2)$ ، آنگاه عدد ۲ عضو کدام یک از مجموعه های زیر است؟

الف) $A - B$ (ب) $A' - B$ (ج) $A \cup B$ (د) $A' \cap B$

دکترها مسیح

۱۴ تفاوت تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k+3$ عضو، از 10 برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه k عضو 64 است. این مجموعه k عضو چند زیرمجموعه 4 عضو دارد؟

(مدارس هماهنگ ۱۵)

۷۰ (۴) ☐

۱۰ (۳) ☐

۵ (۲) ☐

۴ (۱) ☐

۱۵ تعداد زیرمجموعه‌های 5 عضو یک مجموعه، با تعداد زیرمجموعه‌های 11 عضو آن برابر است. این مجموعه، چند زیرمجموعه 15 عضو دارد؟

۱۶ (۴) ☐

۱۵ (۳) ☐

۱۰ (۲) ☐

۱۸ (۱) ☐

۱۶ اگر $P(P(A)) = 2^{32}$ باشد، A چند زیرمجموعه محض دارد؟

۲۱۵ (۴) ☐

۲۳۱ (۳) ☐

۱۵ (۲) ☐

۳۱ (۱) ☐

- ۱۷ اگر A مجموعه مقسوم‌علیه‌های فرد عدد ۱۴۴ و B مجموعه مضارب فرد عدد ۳ باشد، $A \cap B$ دارای چند عضو است؟
- ☐ (۱) صفر
 ☐ (۲) ۴
 ☐ (۳) ۲
 ☐ (۴) ۳

(مسابقات علمی)

- ۱۸ مجموعه $A = \left\{ \frac{3^{x+1}}{9^{2y}} \mid 4y - x = 2 \right\}$ ، کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟
- ☐ (۱) $\{27\}$
☐ (۲) $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$
☐ (۳) $\{9\}$
☐ (۴) $\{-3\}$

- ۱۹ اگر $A = \{1 \cdot^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{1 \cdot^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ برابر کدام است؟
- ☐ (۱) $\{1 \cdot^{\pm k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
☐ (۲) $\{1 \cdot^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
☐ (۳) $\{1 \cdot^{\pm k} \mid k \in \mathbb{N}\}$
☐ (۴) $\{1 \cdot^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

۲۰ کدام گزینه مجموعه $\{-7, 77, -777, 7777, \dots, -777777777777777\}$ را نشان می‌دهد؟

(۲) ☐ $\{(-1)^n \times 11^n \times 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(۱) ☐ $\{1^n \times 7 \mid n \in \mathbb{I}\}$

(۴) ☐ $\{(-1)^n \times \frac{10^n - 1}{9} \times 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(۳) ☐ $\{\frac{10^n - 1}{9} \times 7 \mid n \in \mathbb{I}\}$

۲۱ بزرگ‌ترین عضو $A = \{-(x-1)^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

(۴) نامشخص ☐

(۳) ۶۳ ☐

(۲) صفر ☐

(۱) ۱ ☐

۲۲ مجموعه $B = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a = 3b, b \neq 0\}$ کدام گزینه است؟

(۲) ☐ $\{\dots, -2, 2, \dots\}$

(۱) ☐ $\{\dots, -6, -3, \dots\}$

(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست. ☐

(۳) ☐ $\{3\}$

۲۳

اگر A یک مجموعه و $p(A)$ مجموعه توانی آن باشد بطوری که تعداد اعضای $A \times p(A)$ برابر ۱۶۰ باشد، مجموعه A چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۲۴

اگر $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right)$ ، $n \in \mathbb{N}$ باشد، $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵

اگر $A_n = \{n, n+1, \dots, n+9\}$ ، آن گاه مجموعه $A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_8$ چند عضو دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۶

اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$ ، $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آن گاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, -1] \cup (1, 2]$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $\emptyset$

۲۷ مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، چند زیرمجموعه دارد به طوری که هریک از آن‌ها شامل a باشد و b و c را نداشته باشد؟

۱۶ (۱) ☐

۸ (۲) ☐

۳۲ (۳) ☐

۴ (۴) ☐

(مدارس هماهنگ ۸۶)

۲۸ به مجموعه A چند عضو اضافه کنیم تا تعداد زیرمجموعه‌های آن، ۸ برابر شود؟

۲ (۱) ☐

۸ (۲) ☐

۴ (۳) ☐

۳ (۴) ☐

۲۹ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A ، ۸ برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن است. عدد اصلی مجموعه A کدام است؟

۵ (۱) ☐

۶ (۲) ☐

۸ (۳) ☐

۳ (۴) ☐

۳۰ اگر دو عضو از اعضای یک مجموعه را حذف کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن، ۳۸۴ واحد کم می‌شود. این مجموعه چند عضو داشته است؟

۹ (۱) ☐

۱۰ (۲) ☐

۱۱ (۳) ☐

۱۲ (۴) ☐

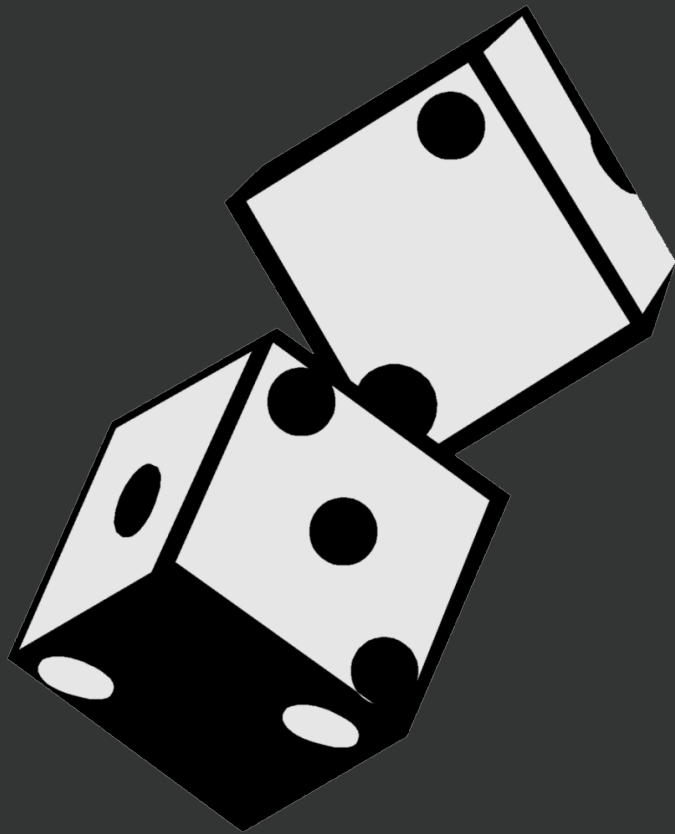
احتمال

نمره در امتحان نهایی
هفت نمره

تعداد تست
دو تست

پیش نیاز

جزوه مشترک دهم یازدهم
فصل ۶ و ۷ ریاضی دهم
احتمال هشتم و نهم



فصل دو آمار و احتمال یازدهم

احتمال غیر هم شانس
احتمال شرطی
احتمال مستقل

نیمه مستقل ۱۰۰٪ → قطعی → آزمائش/پدیده
 متابع متفاوت → تصادفی
 پرتاب تاس = پدیده تصادفی

مجموعه همه حالات ممکن = فضای نمونه
 $n(S) = \text{تعداد کل حالات} = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

۱) آزمای آتاس است. حرکت از اعضای فضای نمونه = بردار

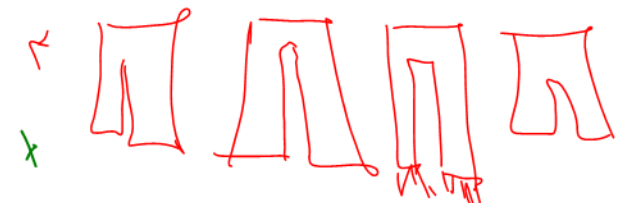
برای پرتاب تاس $2^4 = 2^4 = 16$ → تعداد زیرمجموعه ها = هر زیرمجموعه از فضای نمونه = پیمانه → تعداد حالات $n(A)$
 پیمانه می توان تعریف کرد!

$A = \{1, 2, 3\}$ کوچه از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ شماره ها عدد
 ۶ غیر از خودی
 $1 \leq n \leq 6, n \in \mathbb{Z}$
 $\{2, 4, 6\}$

۱۶ زیرمجموعه تک عضوی = پیمانه ساده

$$P(A) = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}} = \frac{\text{تعداد اعضای پیمانه}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

همزمان	مراحل	و	کارنامه شده	اصول ضرب
همزمان	حالات	∞	کارنامه شده	اصل جمع



صفت به ترتیب جدید

ترتیب	$P(n, r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
ترکیب	$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

گروه زیرمجموعه

مجموعه

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$6 = 2 \times 3$
 $30 = 2 \times 3 \times 5$

احتمال

فضای نمونه: تمام حالت‌های ممکن برای یک پدیده تصادفی فضای نمونه نام دارد.

۱ فضای نمونه‌ای حاصل از پرتاب یک تاس و دو سکه چند عضو دارد؟

$$\frac{6}{\text{تاس}} \times \frac{2}{\text{سکه}} \times \frac{2}{\text{سکه}} = 24$$
 ۲۴ (۳) ۱۲ (۲) ۸ (۱)

۲ از کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه یک مهره برمی‌داریم، فضای نمونه این آزمایش چند عضو دارد؟

$$\binom{8}{1} = 8$$
 ۸ (۴) ۵ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۳ در تست قبل اگر بخواهیم ۲ مهره از کیسه خارج کنیم فضای نمونه چند عضو خواهد داشت؟

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$
 ۲۸ (۳) ۸ (۲) ۵۶ (۱)

۴ در یک کارخانه برای بررسی سلامت محصول نهایی آن را از سه دستگاه مجزا عبور می‌دهند تا به ترتیب جرم، ابعاد و کارایی محصول را کنترل کنند. هر دستگاه در صورت تایید محصول چراغ سبز و در صورت عدم تایید آن چراغ قرمز نشان می‌دهد. اگر فضای نمونه‌ای برای بررسی سلامت یک محصول را به صورت حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

$$\frac{2}{\text{جرم}} \times \frac{2}{\text{ابعاد}} \times \frac{2}{\text{کارایی}} = 8$$
 ۸ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک پیشامد است.

پیشامد ساده: هر زیر مجموعه‌ای یک عضوی از فضای نمونه یک پیشامد ساده است.

۵ در فضای نمونه پرتاب تاس، چند پیشامد سه عضوی وجود دارد؟

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$
 ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۴ (۴)

احتمال

(۱,۴) (۴,۱)
(۲,۳) (۳,۲)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

۶ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه مجموع دو عدد برابر ۵ باشد کدام است؟

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{6} (4)$$

$$\frac{1}{12} (3)$$

$$\frac{1}{9} (2)$$

$$\frac{5}{36} (1)$$

۷ دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

۴ → (۱,۴) (۴,۱) (۲,۲)

۸ → (۲,۶) (۶,۲) (۳,۴) (۴,۳) (۴,۴)

$$\frac{5}{18} (4)$$

$$\frac{2}{9} (3)$$

$$\frac{1}{3} (2)$$

$$\frac{1}{6} (1)$$

۱۲ → (۶,۶)

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$2 \leq \leq 12$$

۸ دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

۲ → (۱,۱)

۳ → (۱,۲) (۲,۱)

۵ → (۱,۴) (۴,۱) (۲,۳) (۳,۲)

۷ → (۱,۶) (۶,۱) (۲,۵) (۵,۲) (۳,۴) (۴,۳)

۱۱ → (۵,۶) (۶,۵)

$$\frac{7}{18} (4)$$

$$\frac{5}{9} (3)$$

$$\frac{4}{9} (2)$$

$$\frac{5}{12} (1)$$

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

۹ دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

(۱,۲) (۲,۱) (۳,۲) (۲,۳)

(۴,۵) (۵,۴) (۶,۵) (۵,۶)

(۸,۹) (۹,۸)

$$\frac{4}{9} (4)$$

$$\frac{7}{18} (3)$$

$$\frac{5}{18} (2)$$

$$\frac{2}{9} (1)$$

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

۱۰ چهار تاس را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که دو جفت متمایز بین آن‌ها ایجاد شود؟



$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

$$\frac{1}{72} (4)$$

$$\frac{5}{216} (3)$$

$$\frac{5}{72} (2)$$

$$\frac{1}{216} (1)$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

قوانین احتمال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه باشند داریم:

$$1) 0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(A') = 1 - P(A)$$

$$2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$3) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A - B = A \cap B'$$

اگر $P(A' \cap B') = 4P(A \cap B) = P(A) = P(B)$ حاصل $P(A - B)$ کدام است؟ ۱۲

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\heartsuit)' = 1 - P(\heartsuit)$$

اگر $P(A - B) = \frac{1}{v}$ و $P(B - A) = \frac{2}{v}$ حداقل و حداکثر $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟ ۱۳

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= n - \frac{n}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{11}$$

$$P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{v}$$

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{v}$$

$$P(B) = \frac{2}{v} + n \leq 1 \rightarrow -\frac{2}{v} \leq n \leq \frac{4}{v}$$

$$P(A) = \frac{1}{v} + n \leq 1 \rightarrow -\frac{1}{v} \leq n \leq \frac{4}{v}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0, A \cap B = \emptyset$$

اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند و $P(A') + P(B') = 1/4$ حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟ ۱۴

$$1 - P(A) + 1 - P(B) = 1/4 \rightarrow 2 - P(A) - P(B) = 1/4$$

$$1/4 = P(A) + P(B)$$

اگر $P(A - B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{1}{3}$ حاصل $P(B - A')$ کدام است؟ ۱۵

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{3} \rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(B \cap A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B - A') = P(B) - P(B \cap A')$$

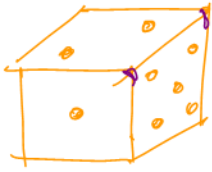
$$= P(B) - P(B - A) = P(B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

اگر $P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B)$ حاصل $\frac{P(A - B)}{P(A)}$ کدام است؟ ۱۶

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

احتمال غیر هم شانس



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n P(X_i) = 1$$

$$P(\text{زوج}) = 2P(\text{فرد})$$

$$n + 2n + n + 2n + n + 2n = 9n = 1 \rightarrow n = \frac{1}{9}$$

$$P(\{1, 2\}) = P(1) + P(2) = n + 2n = 3n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

یک تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، ۲ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. احتمال آن که در پرتاب این تاس،

۱۷

$$P(\text{اول}) = 2P(\text{غیراول})$$

ن اول به مرکب

$$\frac{5}{9} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{9} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

عددی کوچک تر از ۴ ظاهر شود، کدام است؟

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$n + 2n + 2n + n + 2n + n = 1$$

$$P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= n + 2n + 2n = 5n$$

$$= 5 \times \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$9n = 1$$

$$n = \frac{1}{9}$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

در پرتاب یک تاس احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با مربع همان عدد است. در پرتاب این تاس مقدار $P(\{2, 3\})$ کدام است؟

۱۸

$$\frac{5}{9} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{91} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{7} \text{ (۲)}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$1^2n + 2^2n + 3^2n + 4^2n + 5^2n + 6^2n = 1$$

$$1n + 4n + 9n + 16n + 25n + 36n = 91n = 1$$

$$n = \frac{1}{91} \quad P(\{2, 3\}) = 4n + 9n = 13n = \frac{13}{91} = \frac{1}{7}$$

$$13 \times 7 = 91$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$$

۱۹ در یک تاس، شانس نشستن هر عدد با خود عدد متناسب است. احتمال وقوع عدد اول روی اولین

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$1x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$$

$$21x = 1$$

$$x = \frac{1}{21}$$

$$2x + 3x + 5x = 10x = \frac{10}{21}$$

$$\frac{5}{21} (1)$$

$$\frac{10}{21} (3)$$

تاس چقدر است؟

۲۰ اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ و $P(1) = 2P(2) = 3P(3) = 4P(4)$ کدام است؟

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1$$

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

$$\frac{12+6+4+3}{12} x = 1 \Rightarrow \frac{25}{12} x = 1 \Rightarrow x = \frac{12}{25}$$

$$\frac{2}{25} (1)$$

$$\frac{12}{25} (3)$$

۲۱ اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ و $P(1) = 2P(2) = 3P(3) = 4P(4)$ آنگاه $P(\{1, 2\})$ کدام است؟

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1$$

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

$$\frac{12+6+4+3}{12} x = 1 \Rightarrow x = \frac{12}{25}$$

$$x + \frac{x}{2} = \frac{3}{4} x = \frac{3}{4} \times \frac{12}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{2}{25} (1)$$

$$\frac{12}{25} (3)$$

۲۲ دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. اگر احتمال آمدن عدد فرد برای هر تاس دو برابر عدد زوج باشد،

$$2x \leftarrow P(\text{فرد}) = 2P(\text{زوج}) \quad x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$2x + x + 2x + x + 2x + x = 1$$

$$9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

احتمال آنکه مجموع آنها برابر ۵ باشد چقدر است؟

$$(1, 4) \rightarrow P(1) \times P(4)$$

$$(4, 1)$$

$$(2, 3)$$

$$(3, 2)$$

$$4 \times P(\text{فرد}) \times P(\text{زوج})$$

$$4 \times 2x \times x = 8x^2 = 8 \times \frac{1}{81}$$

$$\frac{8}{81} (3)$$

$$\frac{1}{9} (2)$$

$$\frac{4}{9} (4)$$

در یک مسابقه ۳ نفره که تنها یک برنده دارد، علی، کامران و اشکان شرکت کرده اند. می دانیم احتمال

برد علی دو برابر برد کامران و احتمال برد کامران سه برابر برد اشکان است. احتمال اینکه علی در مسابقه برنده

شود، کدام است؟

$$P(\text{علی}) + P(\text{کامران}) + P(\text{اشکان}) = 1$$

$$2x \leftarrow P(\text{علی}) = 2P(\text{کامران}) \quad x$$

$$2x + x + \frac{x}{3} = 1$$

$$P(\text{کامران}) = 3P(\text{اشکان})$$

$$3x + \frac{x}{3} = 1$$

$$\frac{10}{3} x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{10}$$

$$\frac{2}{6} (2)$$

$$\frac{3}{8} (4)$$

$$\frac{5}{10} (1)$$

$$\frac{7}{10} (3)$$

دکترها مسیح

ن



پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B'|A')$

$$P(\heartsuit)' = 1 - P(\heartsuit)$$

کدام است؟

کنکور دی ماه ۱۴۰۱

$$P(B'|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B \cup A) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{1 - (P(A) + P(B))}{1 - P(A)} = \frac{1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{4})}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{10}$$

سازگار $\neq$ ناسازگار
 $\downarrow$
 دو مجموعه هم‌پوشان
 $A \cap B \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} A \cap B' &= A - B & A' \cap B' &= (A \cup B)' \\ A' \cap B &= B - A & A' \cup B &= (A \cap B)' = (A - B)' \\ A' \cup B' &= (A \cap B)' & A \cup B' &= (A' \cap B)' = (B - A)' \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned} \right.$$

احتمال شرطی



$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \\ P(A \cap B) &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} P(A - B) &= P(A) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned} \right.$$

$$P(A|B)$$

احتمال پیشامد A به شرط پیشامد B

شرط
 آنچه که می‌دانیم
 آنچه که اتفاق افتاده
 فضای نمونه را محدود می‌کند
 فضای نمونه = B

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ B &= \{1, 2, 5\} \end{aligned}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

احتمال عدد کوکله در ۴ آمدن
 در صورتیکه تاس زوج شماره باشد

$$A = \{1, 2, 3\} \rightarrow B = \{1, 2, 5\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مطلوب
 ما می‌خواهیم
 شرط
 می‌دانیم

همزمان	مراحل انجام کار	زمانی که تمام نشده	و	اصل ضرب
همزمان	حالت‌های انجام کار	وقتی که تمام شده	+	اصل جمع

Permutation = جایگشت

ترتیب
صف‌های میزبان

$$P(n, r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب
گروه‌ایتم انتخابی از یک مجموعه

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ترکیب = Composition

تعداد صف‌های فرد = تعداد جایگشت‌های n = $n!$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

تعداد زیرمجموعه‌های k و $n-k$ یکسانی دارند.

२५

تجربی خارج کشور ۸۹

۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟ تجربی خارج کشور ۹۹

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

سراسری ۹۳

۲۸ دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۲۹: از ظرفی شامل ۵ مهره سفید، ۵ مهره آبی و ۶ مهره قرمز، مهره ای به تصادف خارج می کنیم. اگر مهره آبی

نباشد احتمال سفید بودن مهره چقدر است؟

$$\frac{5}{11}$$

$$\frac{6}{11} (2)$$

$$\frac{6}{11} (1)$$

$$\frac{5}{11} (2)$$

$$\frac{5}{11} (1)$$

۳۰: دو تاس را انداخته ایم، اگر حاصل جمع شماره های روشده کمتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره یکی از تاس های روشده ۲ باشد کدام است؟

سراسری ۹۱

$$2 \rightarrow (1,1)$$

$$3 \rightarrow (1,2), (2,1)$$

$$4 \rightarrow (2,2), (3,1), (1,3)$$

$$5 \rightarrow (2,3), (3,2), (4,1), (1,4)$$

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} (2)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$

۳۱: پنج مهره سفید یکسان با شماره های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهره سیاه یکسان با شماره های ۱ تا ۵ را در ظرفی قرار می دهیم، به تصادف دو مهره از بین آن ها بیرون می آوریم، اگر مجموع شماره های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟

سراسری ۹۲

$$\frac{4}{9} (2)$$

$$\frac{2}{5} (1)$$

$$\frac{5}{9} (3)$$

$$\frac{2}{5} (1)$$

$$\frac{5}{9} (3)$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \text{ وابسته}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ مستقل}$$

۳۲: در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0/1$ ، $P(A \cup B) = 0/6$ و با فرض $P(B') > P(B)$ احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

خارج از کشور ۹۹

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/1$$

$$P(A) + P(B) = 0/6$$

$$P(B') > P(B)$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

$$P(B) = P(B')$$

۳۳

سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می‌دهند، a و b دارای شانس مساوی هستند و شانس هر کدام

از آن‌ها، ۲ برابر c است. احتمال برد شناگر b یا c کدام است؟

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1$$

$$2x + 2x + x = 1$$

$$\frac{4}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۱)}$$

$$5x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

۳۴

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ ، آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

$$P(A - B) = 0/2$$

$$0/75 \text{ (۲)}$$

$$0/7 \text{ (۱)}$$

سراسری ۸۹

$$P(A) - P(A \cap B) = 0/2$$

$$0/4$$

$$0/9 \text{ (۴)}$$

$$P(A - B) = 0/2$$

$$0/85 \text{ (۳)}$$

$$P(A) = 0/18$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0/4 + 2/5 = 11/10$$

$$P(A' \cap B)' = 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(B - A) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 0/25 + 0/4 = 0/18$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{10} P(B) \rightarrow P(B) = \frac{3}{1} \rightarrow P(B') = \frac{1}{1}$$

یک خانواده سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

۳۵

سراسری ۷۸

مسئله
B آسان‌تر از A است

$$\frac{5}{1} \text{ (۲)}$$

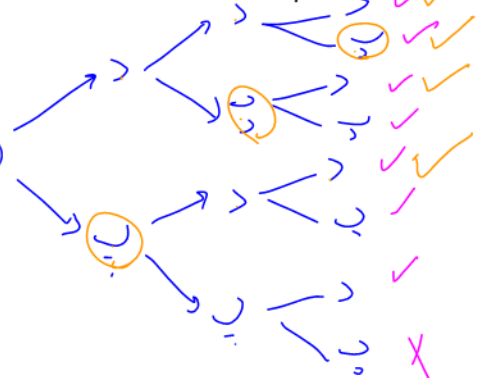
$$\frac{4}{1} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{1} \text{ (۱)}$$

$$\frac{3}{1} \text{ (۳)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{7}$$

آسان‌تر از A است



هرگاه $P(A \cap B | B - A) = 1$ باشد حاصل $\frac{P(A - B | B - A) + P(A \cup B' | B')}{P(B' | A')}$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$\text{صفر (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$1 \text{ (۱)}$$

سه کیسه یکسان، هر کدام شامل ۱۰ گوی در اختیار داریم. کیسه اول دارای گوی های سبز، کیسه دوم دارای گوی های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه ای به تصادف انتخاب کرده، یک گوی خارج می کنیم و

می بینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی های آن کیسه قرمز است؟

$P(A|B) = \frac{\text{احتمال گوی آبی در کیسه ۲}}{\text{احتمال قرمز بودن گوی}}$

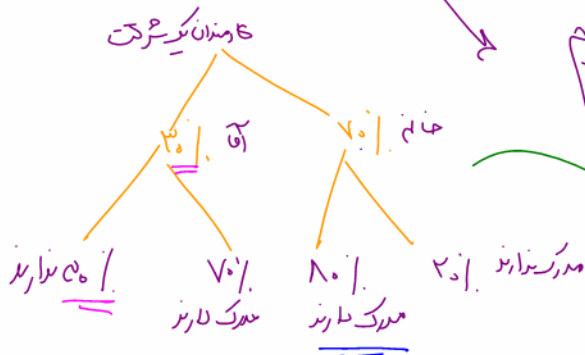
$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$

کنکور داخل دی ماه سال ۱۴۰۲

$P(A|B) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

کیسه اول $\frac{1}{3}$ $\begin{cases} 10 \text{ سبز} & P(S) = 1 \\ 0 \text{ قرمز} & P(G) = 0 \end{cases}$

کیسه دوم $\frac{1}{3}$ $\begin{cases} 0 \text{ سبز} & P(S) = 0 \\ 10 \text{ قرمز} & P(G) = 1 \end{cases}$



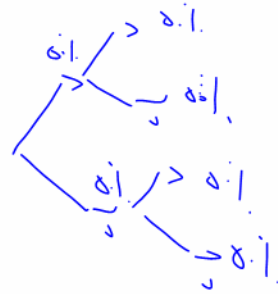
کیسه سوم $\frac{1}{3}$ $\begin{cases} 8 \text{ سبز} & P(S) = \frac{8}{10} \\ 2 \text{ قرمز} & P(G) = \frac{2}{10} \end{cases}$

احتمال آمدن یک مرد مرگ دار آقا به مرد؟

$P(\text{آقای مرگ} | \text{مرد}) = \frac{\text{آقای مرگی}}{\text{مرد}}$

$P(\text{مرد} | \text{آقا}) = \frac{21\%}{77\%} = \frac{21}{77}$

$21\% + 56\%$

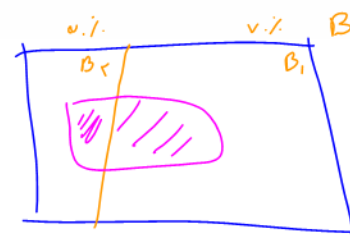


$\frac{30}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{9}{100} = 9\%$

$\frac{80}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{16}{100} = 16\%$

خانم مرگ دار

آقای مرگ دار + خانم مرگ دار = مرگ دارها



$10\% \times 70\% + 70\% \times 30\%$

احتمال آمدن یک مرد مرگ دار آقا به مرد

احتمال آمدن یک خانم مرگ دار به خانم

احتمال آمدن یک مرد مرگ دار به مرد

احتمال آمدن یک خانم مرگ دار به خانم

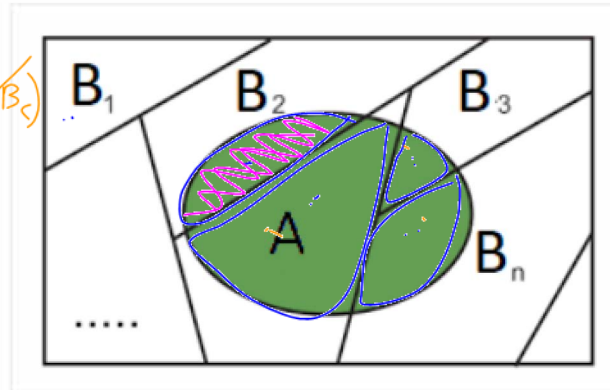
$P(A|B) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) = P(A)$

$56\% + 21\% = 77\%$

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

$$P(A|B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \times P(B_i)$$



اگر فضای نمونه Ω توسط $B_1, B_2, \dots, B_n$ افراز شده باشد، بطوری که $P(B_i) > 0$ آنگاه برای هر پیشامد A می‌توانیم بنویسیم:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}$$

زیرا براساس رابطه احتمال شرطی می‌دانیم:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

که تساوی آخر براساس قانون ضرب احتمال نوشته شده است. این قانون را برای دو پیشامد A و B یادآوری می‌کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \quad \rightarrow \quad P(B \cap A) = P(A|B)P(B)$$

گاهی رابطه مربوط به قضیه بیز را به صورت زیر که معادل قضیه اصلی است، می‌نویسند:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$



۳۸

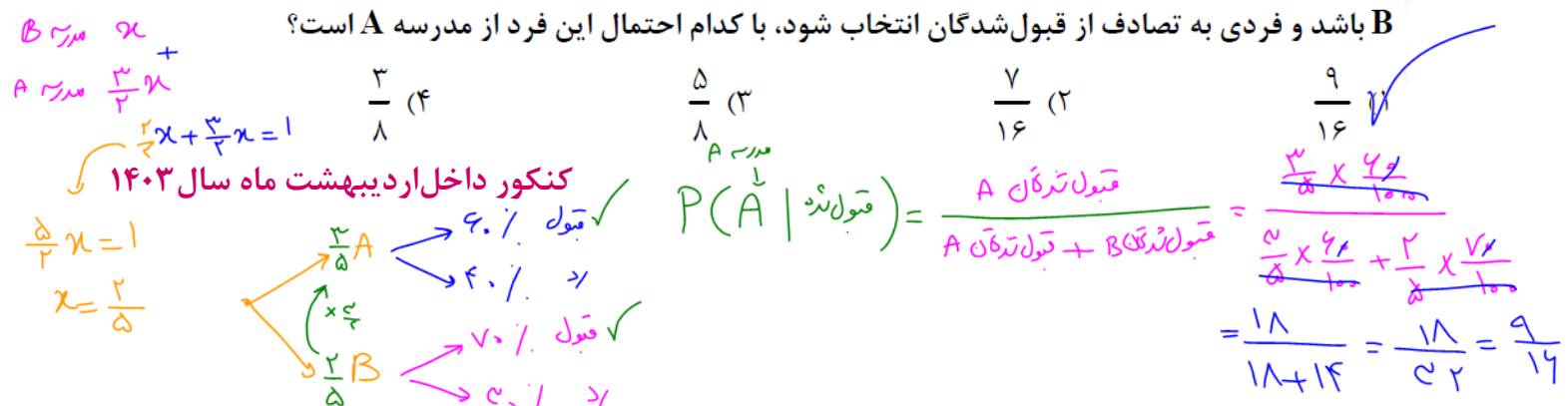
یک دستگاه طوری طراحی شده که به تصادف یکی از دو حرف A یا B را از ورودی می‌گیرد و پس از طی سه مرحله حرفی را در خروجی چاپ می‌کند. در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{4}$ بدون تغییر به مرحله بعد می‌رود یا به شکل حرف دیگری درآمده و به مرحله بعدی وارد می‌شود. اگر احتمال انتخاب حرف A، ۲ برابر حرف B باشد، با کدام احتمال، حرف «A» چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است؟

کنکور داخل تیر ماه سال ۱۴۰۲



۳۹

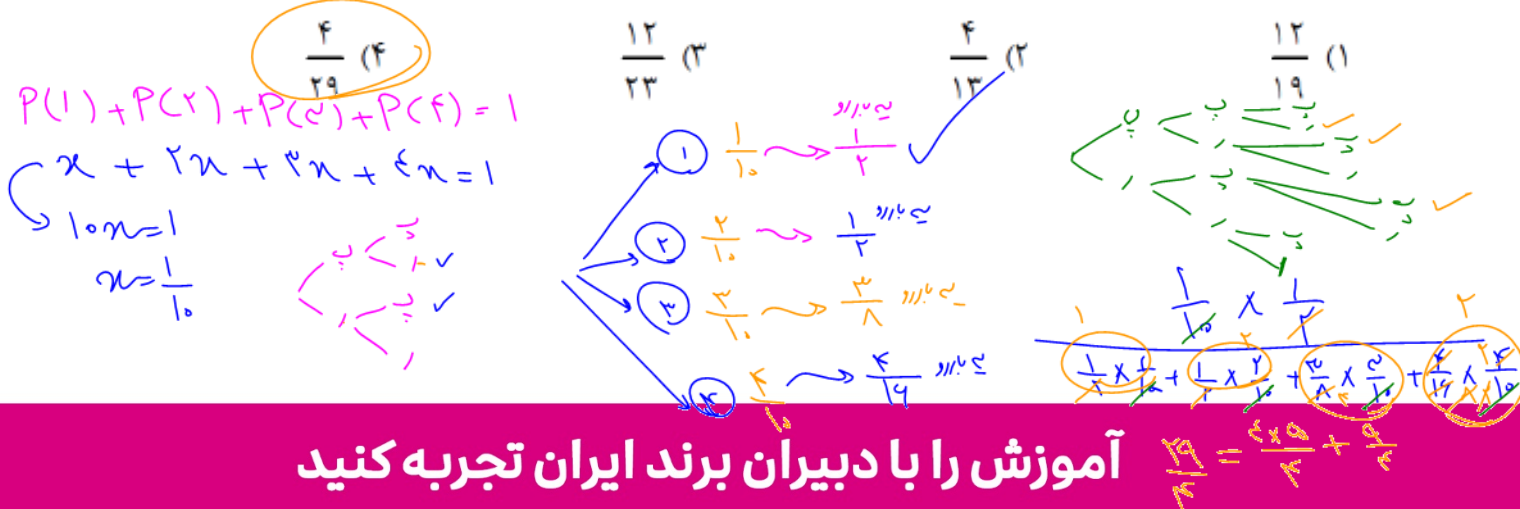
دانش آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش آموزان مدرسه A و ۷۰ درصد از دانش آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟



۴۰

چهار کارت به شماره ۱ تا ۴ با احتمال متناسب با عدد نوشته شده روی آنها در اختیار است. کارتی به تصادف انتخاب شده و سپس به تعداد عدد کارت، یک سکه پرتاب می‌شود. اگر سکه یک بار «رو» آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً یک بار پرتاب شده است؟

کنکور خارج کشور تیر ماه سال ۱۴۰۲



در یک آزمایش n بار و با احتمال P اگر بخواهیم K بار از

n بار آزمایش را با احتمال P از این فرمول استفاده می‌کنیم

$$\binom{n}{K} \times P^K \times (1-P)^{n-K}$$

ابریک خان را انداختیم حیدر احتمال دارد که ۳ بار عدد ۲ ظاهر شود!



احتمال ۱/۴
۳ بار عدد ۲
۷ بار
 $\Rightarrow \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

از یک خانواده ۵ فرزند حیدر احتمال دارد ۲ فرزند دختر باشد.

$$\binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

۴۱

در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره

بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده، هم رنگ هستند؟

بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده، هم رنگ هستند؟

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{240 + 12}{56 \times 240} = \frac{252}{13440} = \frac{3 \times 5}{2 \times 8 \times 12} = \frac{15}{1280}$$

سراسری ۹۳

۵. سفید
۳. سیاه

۳. سفید
۲. سیاه

۴ (۰/۲۴)

۳ (۰/۱۸)

سراسری ۹۳



$$\frac{\lambda_{xv}}{x} = \frac{\binom{10}{x}}{\binom{21}{x}} \times \frac{\binom{11}{v}}{\binom{12}{v}} + \frac{\binom{10}{x}}{\binom{21}{x}} \times \frac{\binom{1}{v}}{\binom{1}{v}} = \frac{90 + v}{21 \times 12} = \frac{90 + v}{252} = \frac{v \times 0}{252} \quad \text{if } v = 0$$

۴۲

احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند 0.025 و احتمال انتقال به افراد دیگر 0.2 است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه

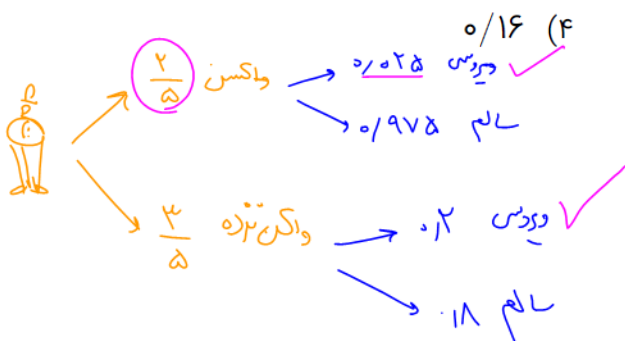
واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

سراسری ۹۸

o/14 (4

o/w, (✓)

0/15 (3)



$$\frac{r_a}{100} \times \frac{1}{a} + \frac{r_o}{100} \times \frac{1}{o}$$

$$= \frac{a + r_o}{a o o} = \frac{r_a \times r}{a o o \times r} = \frac{1 r}{100 r} = 0.1 r$$

۴۳

در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه

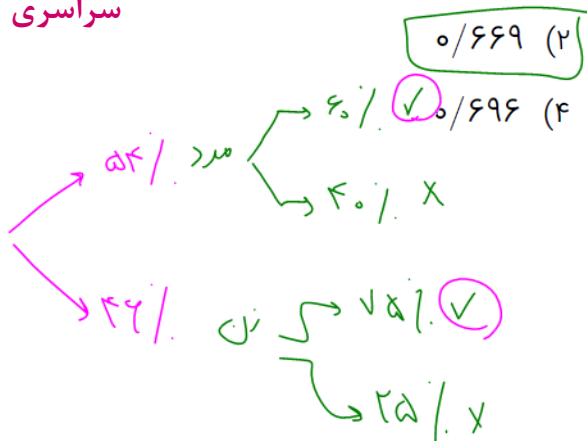
سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها دفترچهٔ سلامت دارد؟

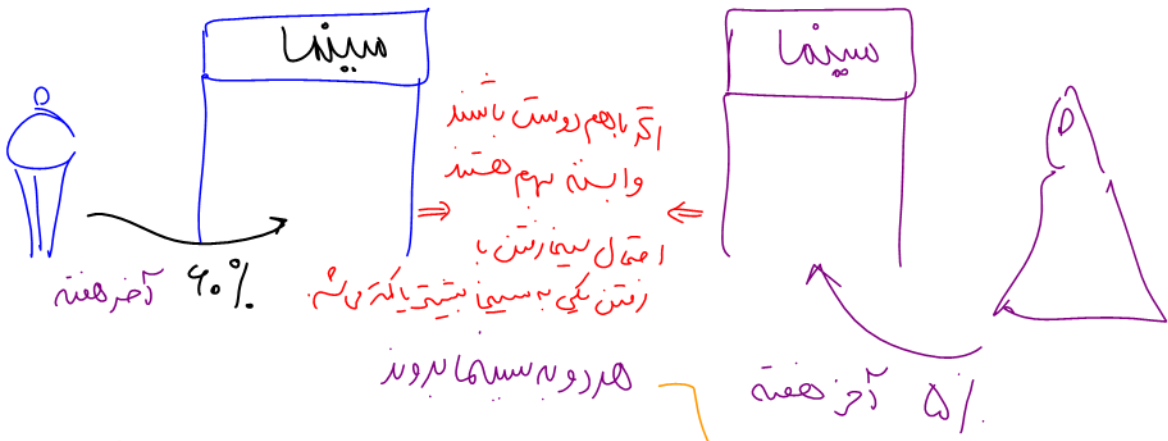
سراسری ۹۰

o/551 (1)

0/615 (3)

$$= \frac{324 + 358}{1000} = \frac{682}{1000} = 0.682$$





$$\frac{3}{100} = \frac{300}{10000} = \frac{90}{100} \times \frac{5}{100}$$

دو آدم مستقل

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} =$$

آزمایش

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

۱۰۰ خانواده
چشم رنگی

	دختر	پسر
کل تعداد	۹۰	۴۰
چشم رنگی	۴۰	۲۵

دوستان مستقل

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{40}{100}$$

$$P(A) = \frac{90}{100}$$

$$P(B) = \frac{45}{100}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{90}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{39}{100}$$

پیشامدهای مستقل - وابسته / سازگار - ناسازگار: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A - B) = P(A)$$

$$P(B-A) = P(B)$$



اگر $P(A \cap B) = 0$ آنگاه A و B ناسازگارند.

اگر $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ آنگاه A و B مستقل اند.

خانواده‌ای دارای سه فرزند است. در فضای نمونه‌ی فرزندان این خانواده، پیشامدهای A، B و C

۲۲

به ترتیب به صورت «جنسیت فرزند اول و دوم متفاوت باشد»، «حداقل دو فرزند دختر باشند» و «فرزند اول پسر

پ د

$A - B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right), \dots \right\}$
(۴) هیچ کدام A و B

A 9 B-C (3)

$$C - A = B \quad C - A = (Y$$

~~$C \leq A - B \quad (1)$~~

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

در دو کلاس زیر تعیین کنید پیشامد پسر بودن و ریاضی بودن مستقل است یا خیر.

۴۵

$$P(s) \times P(\text{رياضي}) \neq P(s, \text{رياضي})$$

ریاضی	تجربی	
۵	۱۰	پسر
۵ =	۱۰	دختر

$$P(\omega) = \frac{1}{r}$$

$$P(\text{ریاضی}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P(\psi_1, \underline{\psi}) = \frac{\omega}{\mu_0} = \frac{1}{4} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\mu}$$

	تجربی	ریاضی
پسر	<u>۱۲</u>	<u>۳</u>
دختر	۸	۷

$$P(\underline{\quad}) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

$$\Phi(\omega_4) = \frac{10}{\mu_0} = \frac{1}{\mu}$$

$$P(\sigma_{1,2}) = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{10}$$

در فضای نمونه‌ی پرتاب تاس اگر A پیشامد عدد زوج و B پیشامد عدد اول و C پیشامد عدد مضرب ۳

۴۶

$C = \{3, 4\}$ $B = \{2, 3, 5\}$ $A = \{1, 4, 4\}$ باشد آیا A و B مستقل اند؟ و C چطور؟

$$P(C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

$$P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

int

وَابَتَّ

$$P(A \cap C) = P(\{4\}) = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \checkmark$$

$$P(B \cap A) = P(\{v\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$$

ش

اگر A و B مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

۴۷

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{r} \times \frac{1}{q} = \frac{1}{1r}$$

$$\rightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15} = \frac{1}{7.5}$$

$$P(A \cup B') = \cancel{P(A)} + \cancel{P(B')} - \cancel{P(A \cap B')} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

دکتر رها مسیح

۴۸ اگر A و B، دو پیشامد مستقل از یکدیگر و $P(A \cap B) = 0/2$ و $P(A \cap B') = 0/3$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

$P(A - B) = P(A) - 0/2 = 0/3 \rightarrow P(A) = 0/5$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0/2}{0/5} = \frac{2}{5} = 0/4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/5 + 0/4 - 0/2 = 0/7$

۴۹ برای دو پیشامد مستقل A و B، $P(A|B) = 0/3$ و $P(A \cup B) = 0/58$ است. $P(B)$ کدام است؟

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0/3 \rightarrow P(A \cap B) = 0/3 \times P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/58$

$0/3 + P(B) - 0/3 \times P(B) = 0/58$

$0/3 + P(B)(1 - 0/3) = 0/58$

$0/3 + 0/7 P(B) = 0/58$

$0/7 P(B) = 0/58 - 0/3 = 0/21$

$P(B) = \frac{0/21}{0/7} = 0/3$

۵۰ احتمال قبولی دو برادر در کنکور به ترتیب $0/3$ و $0/7$ است با چه احتمالی حداقل یک از آنها قبول می‌شود؟

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0/3 + 0/7 - 0/3 \times 0/7 = 0/79$

۵۱ اگر A و B مستقل باشند کدام گزینه درست نیست؟

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

۵۲ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ ، آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

$P(A - B) = P(A) - 0/2 = 0/2 \rightarrow P(A) = 0/4$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0/6}{0/4} = 0/3$

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

$P(A \cup B') = 0/4 + 0/7 - 0/2 = 0/9$

۵۳ احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

$P(A) = 2P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{9}$

$2P(B) + P(B) - 2P(B) \times P(B) = \frac{7}{9}$

$3P(B) - 2P(B)^2 = \frac{7}{9}$

$2P(B)^2 - 3P(B) + \frac{7}{9} = 0$

$P(B) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times \frac{7}{9}}}{4}$

$P(B) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \frac{56}{9}}}{4}$

$P(B) = \frac{3 \pm \sqrt{\frac{81 - 56}{9}}}{4}$

$P(B) = \frac{3 \pm \sqrt{\frac{25}{9}}}{4}$

$P(B) = \frac{3 \pm \frac{5}{3}}{4}$

$P(B) = \frac{14/3}{4} = \frac{7}{6}$ (Not possible)

$P(B) = \frac{4/3}{4} = \frac{1}{3}$

$P(A) = 2P(B) = \frac{2}{3}$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

آزمایش تصادفی ← نتیجه مشخص نیست

فضای نمونه ← مجموعه نتایج متفاوت S

پیشامد ← مجموعه مطلوب (زیر مجموعه فضای نمونه است) A

پیشامد ساده ← یک عضو

برآمد ← هر عضو فضای نمونه

احتمال ← نسبت تعداد پیشامد مطلوب به فضای نمونه

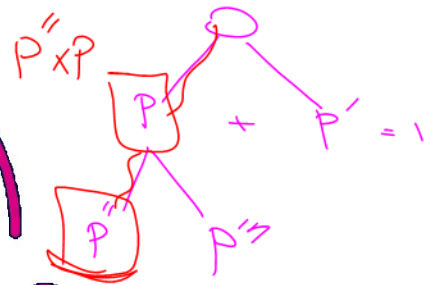
آمار

احتمال شرطی ← و متباین است
و فضای نمونه
هموردیده است!

$$P(A|B) = \frac{n(ANB)}{n(B)}$$

چیز ← احتمال شرطی و احتمال کل تغییر می کند

احتمال کل



احتمال

$P(A)$



ناسازگار ← $P(ANB) = 0$ $ANB = \emptyset$

وابسته

$P(ANB) \neq P(A) \times P(B)$ مثل اندامین دوستان

$P(ANB) = P(A) \times P(B)$ ← مستقل

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ دوستان ۶ بیامید}$$

تعداد اعداد n که K بخش پذیرند

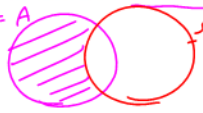
$$\left[\frac{n}{K} \right]$$

تعداد اعدادی که K و K' بخش پذیرند

$$225 \times \left[\frac{n}{[K, K']} \right]$$

عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد، را محاسبه کنید.

۱/۲۵



$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \left[\frac{200}{3} \right] - \left[\frac{200}{12} \right] = \frac{44-14}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

۱۴۰۳

یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. در پرتاب این تاس، احتمال این که عدد زوج مشاهده شود را به دست آورید.

$$P(\text{عدد اول}) = 4P(\text{عدد غیر اول})$$

۱/۲۵

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n = 1$$

$$15n = 1 \rightarrow n = \frac{1}{15}$$

$$P(\{2, 4, 6\}) = 4n + 4n + 4n = 12n = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 80\%$$

فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(B) \neq 0$ ، ثابت کنید: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

۰/۷۵

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A')}{P(B)} = P(A'|B)$$

دروازه‌بان یک تیم فوتبال، اگر روحیه خوبی داشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد و اگر روحیه بدی داشته باشد، با احتمال ۳۰ درصد ضربه پنالتی را مهار می‌کند. پیش از اولین ضربه پنالتی، روحیه این دروازه‌بان خوب است. احتمال آن را به دست آورید که این دروازه‌بان در سه ضربه پنالتی اول، دوم و سوم، دقیقاً دو ضربه آخر را مهار کند. (با مهار هر پنالتی، روحیه دروازه‌بان خوب و در غیر این صورت بد می‌شود).

۱/۲۵

$$\frac{40}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{48}{1000} = 0.048$$

در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این

مدرسه، $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان رشته تجربی و $\frac{1}{4}$ دانش‌آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. دانش‌آموزی به

تصادف از این مدرسه انتخاب شده و معدل او بالای ۱۸ است. احتمال آن که این فرد، دانش‌آموز رشته تجربی باشد را به

۱/۵

$$P(\text{تجربی} | \text{معدل بالای ۱۸}) = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{40}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{1}{10}} = \frac{40}{41}$$

در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده عدد ۵ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۹ در برآمدهای دو تاس باشد.

۱/۲۵

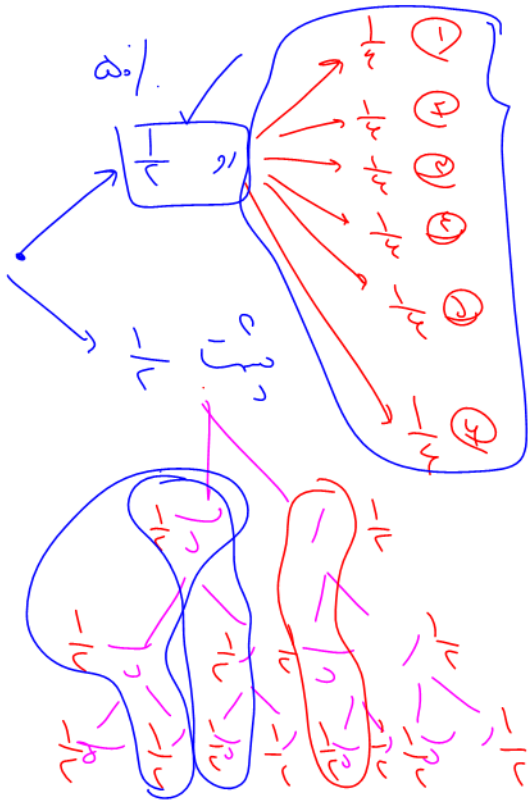
مستقل بودن یا نبودن پیشامدهای A و B را بررسی کنید.

۵۶۵

در کوزه

مکه ای را یک کب می کنیم اگر رو باید تا سر رکیم و اگر نیست باید نه مکه
دست می اندازیم. اقول اینک دنیا یک مکه رو باید

→ لواء حجر



کلاً ادره رو

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8} \right) = \frac{11}{16}$$

گزینه ۲

۱	عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را حساب کنید. الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد. ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد. ج) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.	$n(A) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50$ $n(B) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$ $n(A \cap B) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$ $P(A \cup B) = \frac{50 + 33 - 16}{100} = \frac{67}{100}$ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{34}{100}$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $P(A - B)$ $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$
۲	ظرفی شامل ۴ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز است، ۳ مهره به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم. مطلوب‌ست احتمال این‌که: الف) ۳ مهره هم‌رنگ باشند. ب) ۲ مهره قرمز و یک مهره سیاه انتخاب شود.	$n(S) = \binom{9}{3} = 84$ $n(E) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$ $P(E) = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$ $\frac{\binom{4}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{5}{14}$
۳	در پرتاب دو تاس به‌طور پی‌درپی اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد مستقل بودن A و B را بررسی کنید.	$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ $n(A) = 36$ $n(B) = 6$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $P(A) = \frac{36}{36} = 1$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
۴	۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{50}{100} \times \frac{3}{10}}{\frac{3}{10} \times \frac{50}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{80}{100}} = \frac{15}{15 + 8} = \frac{15}{23}$ $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ $P(A \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{50}{100} = \frac{3}{20}$ $P(A \cup B) = \frac{3}{20} + \frac{1}{10} \times \frac{80}{100} = \frac{3}{20} + \frac{4}{10} = \frac{11}{10}$
۵	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. مطلوب است احتمال این‌که در این تاس: الف) عدد ۱ یا ۴ ظاهر شود؟ ب) عددی اول ظاهر شود؟	$P(\text{زوج}) = 3P(\text{فرد})$ $3P(\text{زوج}) + 3P(\text{فرد}) = 1$ $3(2x) + 3x = 1$ $12x = 1$ $x = \frac{1}{12}$ $P(\{1, 4\}) = P(1) + P(4) = 2x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $P(\{2, 3, 5\}) = P(2) + P(3) + P(5) = 3x + 3x + 3x = 9x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
۶	فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید: الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A - B) = P(A) - P(B)$ ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(B) \leq P(A)$	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ $P(A - B) + P(B) = P(A) \rightarrow P(A - B) \leq P(A)$ $P(A - B) = P(A) - P(B)$ $P(B) \leq P(A)$
۷	خانم‌ها اکبری، برنا، چمنی، نسخه‌خوان یک مؤسسه انتشاراتی‌اند که به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال این‌که این سه نفر صفحه‌ای که به آن‌ها سپرده می‌شود را بدون غلط انجام دهند به ترتیب ۰٫۹۵، ۰٫۹۹ و ۰٫۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟	$P(\text{غلط}) = 1 - P(\text{بدون غلط})$ $P(\text{اکبری غلط}) = 0.05$ $P(\text{برنا غلط}) = 0.01$ $P(\text{چمنی غلط}) = 0.01$ $P(\text{غلط}) = 0.05 \times \frac{20}{100} + 0.01 \times \frac{30}{100} + 0.01 \times \frac{50}{100} = \frac{1}{100}$ $P(\text{اکبری} \text{غلط}) = \frac{0.05 \times \frac{20}{100}}{\frac{1}{100}} = 10$
۱۰	"موفق و سربلند باشید"	۸۰٪

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 0.17$$

۸	اگر $p(A') = 0.5$ و $p(A \cup B) = 0.7$ باشد. حاصل $p(A - B)$ و $p(B A)$ را حساب کنید. $P(A) = 1 - P(A') = 0.5$ $P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$ $P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$
۹	در پرتاب یک تاس اگر احتمال ظاهر شدن هر عدد دو برابر عدد قبل آن باشد. احتمال ظاهر شدن عددی بیش از ۴ را بدست آورید؟ $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ $x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 1$ $63x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{63}$ $P(\{5, 6\}) = 16x + 32x = 48x = \frac{48}{63} = \frac{16}{21}$
۱۰	یک سبد میوه دارای ۶ سیب و ۴ پرتقال و ۳ لیموشیرین است و سبدهای دیگر دارای ۳ سیب و ۲ پرتقال و ۱ لیموشیرین است. از سبد اول یک میوه برداشته و در سبد دوم قرار می‌دهیم و از سبد دوم دو میوه برمی‌دارم. اگر از سبد دوم یک پرتقال و یک لیموشیرین خارج شود، چقدر احتمال دارد از سبد اول یک پرتقال خارج شده باشد؟ $P(A B) = \frac{\frac{4}{13} \left(\frac{\binom{1}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{2}{2}} \right)}{\frac{4}{13} \left(\frac{\binom{1}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{2}{2}} \right) + \frac{4}{13} \left(\frac{\binom{1}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{2}{2}} \right) + \frac{3}{13} \left(\frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} \right)}$ $= \frac{4 \times 2 \times 1}{4 \times 2 \times 1 + 4 \times 1 \times 1 + 3 \times 2 \times 1} = \frac{8}{19}$
۱۱	اگر احتمال آمدن عددی زوج در پرتاب یک تاس ناهمگن $\frac{3}{4}$ باشد، و احتمال رو آمدن سکه $\frac{2}{3}$ باشد، احتمال اینکه تاس عدد فرد بیاید یا سکه پشت بیاید را حساب کنید. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{19}{12}$
۱۲	در یک کیسه ۵ مهره قرمز، ۱۰ مهره آبی و ۶ مهره زرد وجود دارد سه مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال این که فقط مهره اول و سوم آبی باشد، چقدر است؟ $n(S) = 21 \times 20 \times 19$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10 \times 9 \times 11}{21 \times 20 \times 19} = \frac{33}{246}$

آمار

نمره در امتحان نهایی

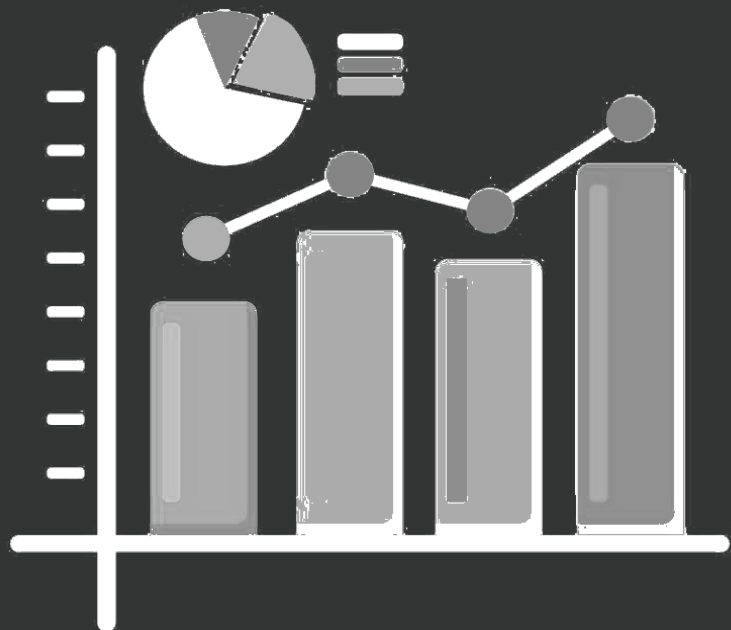
هفت نمره

تعداد تست

سه تست

پیش نیاز

آمار ریاضی هشتم



فصل سه و چهار آمار و احتمال یازدهم

آمار توصیفی
آمار استنباطی

آمار توصیفی و استنباطی

علم آمار

واژه آمار دو مفهوم کاملاً متفاوت دارد؛ در اصطلاح عام، آمار عبارت است از اعداد و ارقام معناداری که بیان کننده اطلاعاتی خاص مانند جمعیت یک کشور، تعداد خانوارهای یک شهر یا درآمد سرانه هستند. اما مفهوم تخصصی آن یعنی علم آمار، مجموعه‌ای از روش‌هاست که برای جمع‌آوری، طبقه‌بندی، تلخیص، تجزیه و تحلیل و تفسیر اطلاعات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جامعه و نمونه

اطلاعات آماری، از یک جامعه آماری حاصل می‌شود. جامعه (Population) مجموعه‌ای از عناصر مورد نظر است که حداقل یک صفت مشترک (صفت مشخصه) داشته باشند. برای مثال دانشجویانی که در درس آمار نمره بالاتر از 17 گرفته‌اند، جامعه‌ای را تشکیل می‌دهند که نمره بالاتر از 17، صفت مشترک آن‌هاست.

جامعه آماری، محدود یا نامحدود است. جامعه آماری محدود مجموعه‌ای است که عناصر آن، مجموعه‌ای محدود و پایان پذیر باشد؛ مانند تعداد کارمندان یک شرکت. جامعه آماری نامحدود مجموعه‌ای است که عناصر آن، مجموعه‌ای نامحدود یا بی‌پایان باشد؛ مانند تعداد ماهی‌های تمام اقیانوس‌ها.

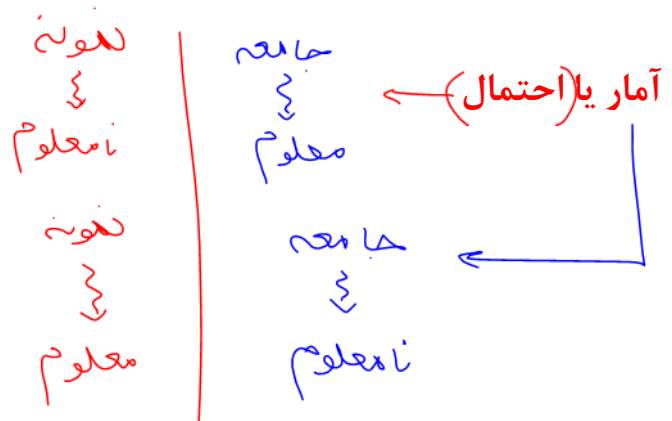
نمی‌توان همه را دید!

سرشماری یا نمونه‌گیری

به زنی مجموعه از جامعه که پرسش‌ها و تکلیف‌های آن‌ها انجام می‌شود.
تک تک اعضای جامعه مورد پرسش قرار بگیرند ← نمونه = کل جامعه.

نمونه

اندازه جامعه را با N و اندازه نمونه را با n نشان می‌دهند.



دکترها مسیح

به درد شما نمی خوره

گروه	آمار گیری	شاخص	مشخصات شاخص	آزمون کردن
جامعه	سرشماری	پارامتر (θ)	ثابت (عدد) - مجهول	نیاز ندارد.
نمونه	نمونه گیری	آماره (برآورد کننده) $(\hat{\theta})$	متغیر - معلوم	نیاز دارد $(n \geq 1)$

۱ پارامترها به کمک کدام یک از موارد زیر قابل محاسبه هستند؟

۲ جامعه و نمونه

(۱) جامعه

۴ به شرایط تحقیق بستگی دارد.

۳ نمونه ← آماره

۲ برای بررسی فرضیه‌ای از تمام مشاهدات جامعه استفاده شده است، آن را چه می‌نامند؟

~~۴ همبستگی~~~~۳ آمار پارامتریک~~

۲ آمار استنباطی

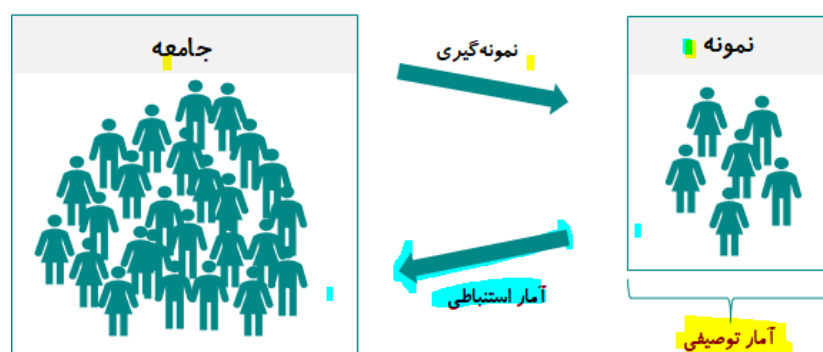
(۱) آمار توصیفی

آمار توصیفی (Descriptive Statistics)

موضوع: استنباط پارامتر جامعه از آماره نمونه	هدف: محاسبه آماره‌ها و تعمیم آن‌ها به پارامترها	نوع آمار گیری: نمونه گیری
---	---	---------------------------

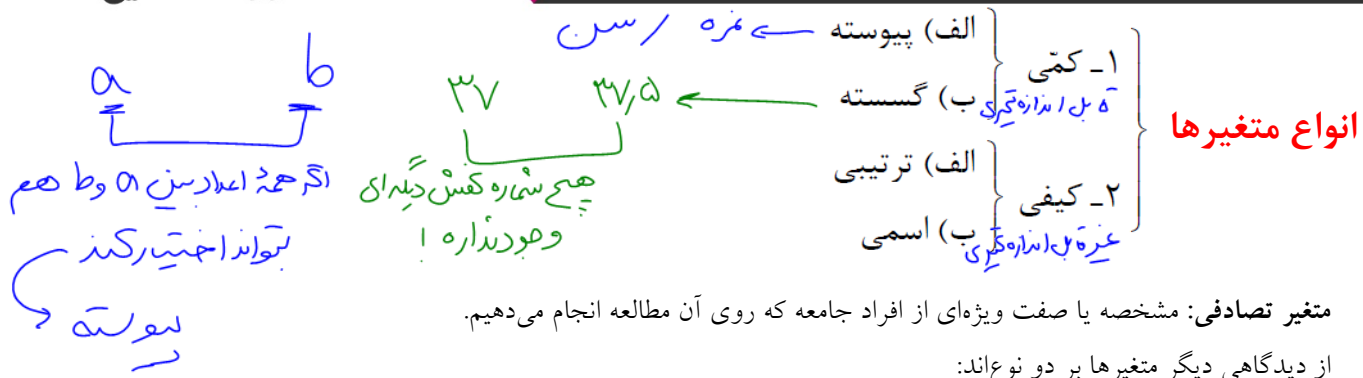
آمار استنباطی (Inferential Statistics)

موضوع: توصیف جامعه	هدف: محاسبه پارامترهای جامعه	نوع آمار گیری: سرشماری
--------------------	------------------------------	------------------------



آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکترها مسیح



(۱) کمی: متغیری که اندازه و مقدار دارد و دارای واحد اندازه‌گیری می‌باشد، مانند: قد، وزن، عمر

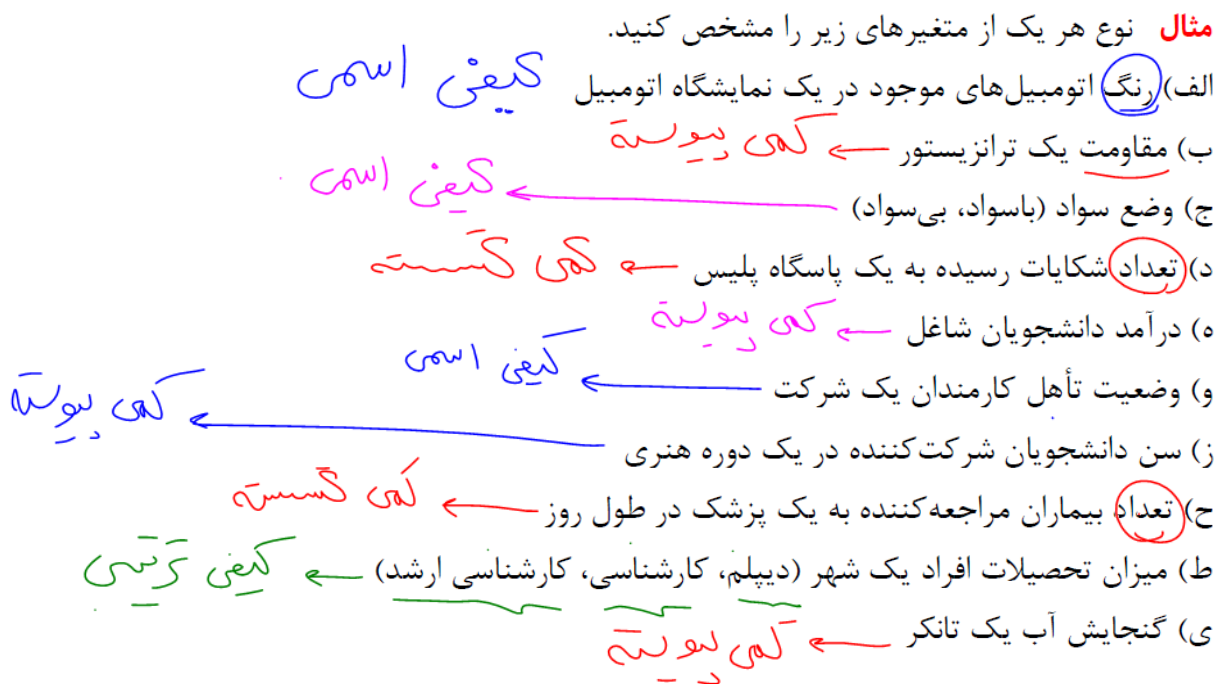
که خود بر دو نوع است پیوسته: قابل اندازه‌گیری مانند: قد، وزن

گسسته: قابل شمارش مانند: تعداد تصادفات، تعداد کالای خراب، تعداد روزهای بارانی

(۲) کیفی: متغیری که قابل اندازه‌گیری نیست و عموماً با مقایسه بررسی می‌شود، مانند: هوش، استعداد، درس‌خوان بودن و...

که خود بر دو نوع است ترتیبی: دارای ترتیب ذاتی هستند مانند حروف الفبای فارسی یا مراحل رشد

اسمی: دارای ترتیب ذاتی نیستند مانند رنگ چشم افراد، گروه‌های خونی



طبقه بندی داده ها

در طبقه بندی مشاهدات، عوامل مختلفی از جمله تعداد مشاهدات و تجربیات آمارگر تأثیر دارند. یک روش تقریبی برای طبقه بندی مشاهدات به شرح زیر است:

۱- دامنه تغییرات مشاهدات (R) به روش زیر محاسبه می شود:

$$R = \max(x_i) - \min(x_i) = \text{کوچکترین مشاهده} - \text{بزرگترین مشاهده}$$

۲- تعداد طبقات (k)

اگر در مورد طول دسته ها تصمیم گیری کرده باشیم، در این صورت تعداد دسته ها از رابطه زیر به دست می آید.

$$\text{تعداد دسته ها} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{طول دسته ها}} \rightarrow \text{دامنه تغییرات} = \text{طول دسته}$$

که اگر عدد فوق اعشاری بود حتماً از رابطه ی $+1$ استفاده می شود.

۳- فاصله طبقات (I) به روش زیر محاسبه می شود:

$$I = \frac{R}{k} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد طبقات}}$$

۹, ۸, ۷, ۵, ۴, ۱, ۲, ۱۳, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸

دسته تغییرات $R = 20 - 5 = 15$

طول دسته $\frac{15}{3} = 5$

$$x_i = \frac{(\text{حد بالای طبقه } i) + (\text{حد پایین طبقه } i)}{2} = \frac{L_i + U_i}{2}$$

مرکز دسته	غزلان	۲
[۵, ۱۰)	۵	
[۱۰, ۱۵)	۱۲	
[۱۵, ۲۰)	۱۷	

تعداد کل ۱۳

۳ اگر حداقل و حداکثر مشاهدات به ترتیب ۲۰۰ و ۴۰۰ و فاصله طبقات ۲۵ باشد، تعداد طبقات جدول طبقه بندی داده ها

کدام است؟

۲۵ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲) ✓

۱۶ (۱)

$$R = 400 - 200 = 200$$

$$\text{تعداد دسته} = \frac{200}{25} = 8$$

دکتر رها مسیح

فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	درصد فراوانی	فراوانی نسبی	مركز	دسته
$\frac{8}{20}$	۸۰٪	۴۰٪	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$	۷,۵	(۵, ۱۰)
$\frac{12}{20}$	۱۸۰٪	۵۰٪	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	۱۲,۵	(۱۰, ۱۵)
$\frac{20}{20}$	۲۰۰٪	۱۰۰٪	$\frac{20}{20} = 1$	۱۷,۵	(۱۵, ۲۰)

انواع فراوانی

فراوانی مطلق ← مجموع کل = تعداد کل افراد

تعریف: تعداد مشاهدات (دفعات تکرار) طبقه یا دسته i ام از کل مشاهدات جامعه را فراوانی مطلق می‌نامند و با F_i نشان می‌دهند.

فراوانی نسبی ← مجموع کل = ۱

تعریف: نسبت فراوانی مطلق هر طبقه یا دسته (F_i) به کل مشاهدات جامعه (N) را فراوانی نسبی می‌نامند و آن را با f_i نشان می‌دهند.

$$f_i = \frac{F_i}{N}$$

درصد فراوانی نسبی ← مجموع کل = ۱۰۰٪

تعریف: حاصل ضرب فراوانی نسبی هر طبقه یا دسته در ۱۰۰، درصد فراوانی نسبی نامیده می‌شود.

$$f_i \times 100 = \text{درصد فراوانی نسبی داده یا طبقه } i \text{ام}$$

فراوانی تجمعی ← آخرین فراوانی تجمعی برای با تعداد کل است!

تعریف: برای هر دسته یا طبقه، مجموع فراوانی مطلق طبقه و طبقات قبلی را فراوانی تجمعی می‌نامند و آن را با F_{c_i} نشان می‌دهند.

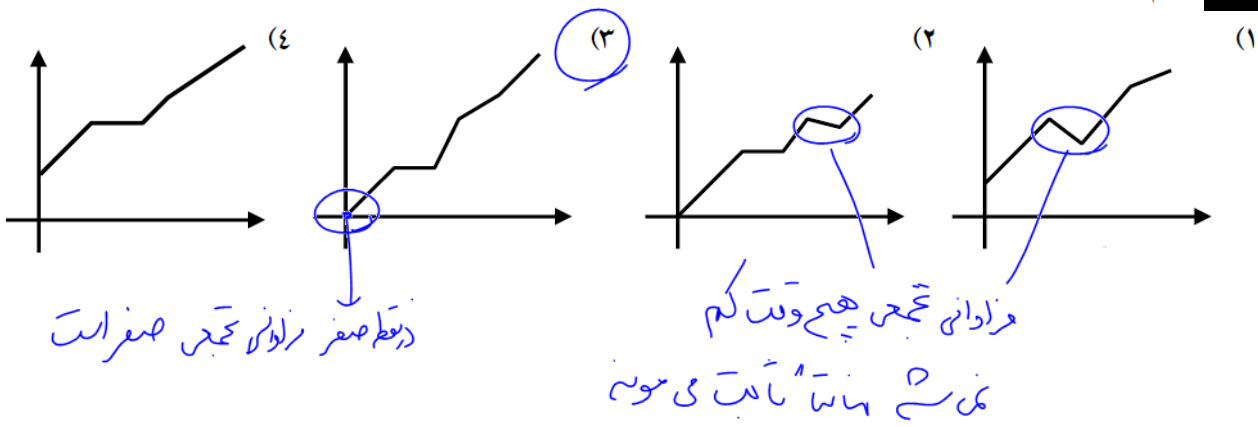
$$F_{c_i} = F_1 + F_2 + \dots + F_i$$

فراوانی نسبی تجمعی ← آخرین فراوانی نسبی برای با ۱ می‌شود!

تعریف: برای هر دسته یا طبقه، نسبت تجمع مشاهدات طبقه و طبقات قبلی به کل مشاهدات را فراوانی نسبی تجمعی می‌نامند و آن را با f_{c_i} نشان می‌دهند. f_{c_i} از حاصل تقسیم فراوانی تجمعی طبقه به کل مشاهدات به دست می‌آید:

$$f_{c_i} = \frac{F_{c_i}}{N} \rightarrow f_{c_i} = \frac{F_1 + \dots + F_i}{N} = \sum f_i$$

۴ کدام شکل نمودار فراوانی تجمعی است؟



دکترها مسیح

۵ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده زیر، اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط 24 باشد، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟ (برنامه ریزی شهری - ۸۶)

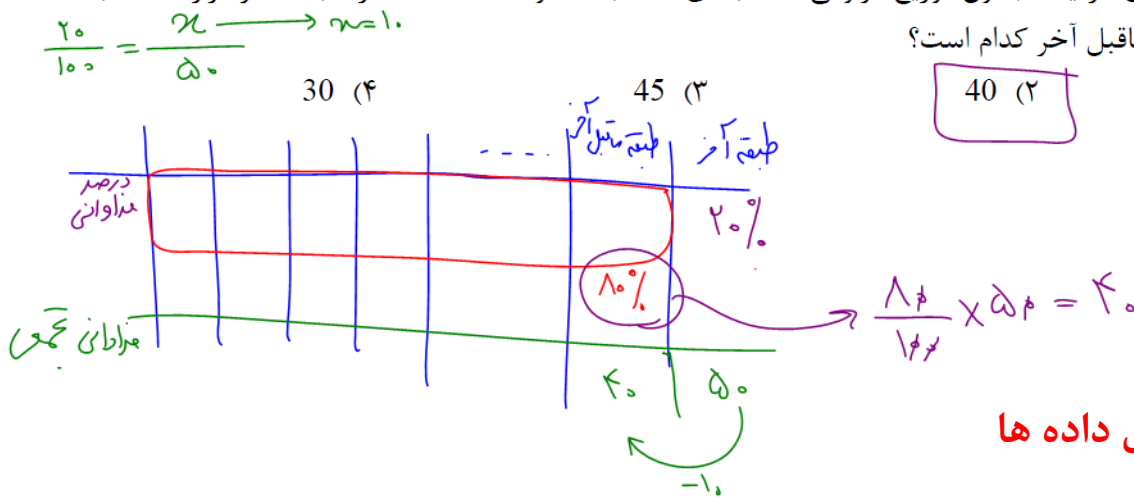
مرکز دسته	13	15	17	19	21
فراوانی تجمعی	5	14	29	41	50
فراوانی نسبی			24/100		
فراوانی	5	9	12	15	9

تعداد کل

دسته وسط: $\frac{24}{100} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 12$

- 14 (۱)
16 (۳)
15 (۲)
17 (۴)

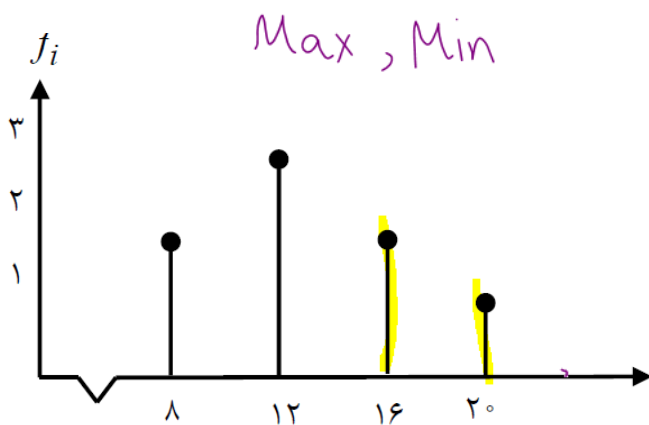
۶ اگر 50 داده آماری در یک جدول توزیع فراوانی دسته‌بندی شده و 20% داده‌ها در طبقه آخر قرار داشته باشند، فراوانی تجمعی دسته ماقبل آخر کدام است؟



نمودارها و تحلیل داده ها

نمودار میله ای

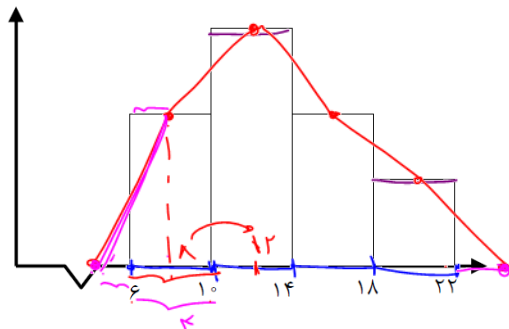
اگر نقاط متناظر با متغیرها (یا نشان دسته‌ها) را روی محور Xها مشخص کنیم و روی هر نقطه پاره‌خطی به ارتفاع فراوانی (مطلق یا نسبی) نظیر آن رسم کنیم، شکل حاصل نمودار میله‌ای داده‌ها می‌باشد.
این نمودار برای متغیرهای کیفی و کمی گسسته مناسب است. و بیشتر برای مقایسه‌ی فراوانی داده‌ها استفاده می‌شود.



نمودار مستطیلی یا هیستوگرام

هنگامی که جدول توزیع فراوانی در دست است از این نمودار استفاده می‌کنیم. در این نمودار مستطیل‌هایی رسم می‌کنیم که یک ضلع آن منطبق بر دسته‌ها و ضلع دیگر، فراوانی (مطلق یا نسبی) دسته متناظر باشد.

Max, Min



نمودار مستطیلی برای داده‌های کمی پیوسته مناسب است.

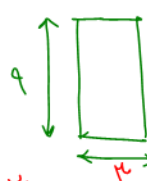
اگر طول دسته‌ها با هم برابر باشند، فراوانی دسته‌ای که مساحت آن بزرگ‌تر است، بیشتر خواهد بود. در واقع فراوانی متناسب با مساحت مستطیل‌هاست.

نمودار مستطیلی = هیستوگرام، بافت نگار

۷

جدول زیر جدول فراوانی تجمعی داده‌های آماری دسته‌بندی شده است اگر فراوانی نسبی دسته سوم برابر ۰/۴۵ باشد آنگاه مساحت مستطیل مربوط به دسته چهارم در نمودار مستطیلی این داده‌های آماری کدام است؟

مرکز دسته	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶	۲۹	۳۲
فراوانی تجمعی	۴	۱۳	۲۰	۴۹	۵۸	۶۰
فراوانی نسبی			۰/۴۵			
فراوانی مطلق	۴	۹	۷	۲۹	۹	۲



~~۱۲-۳~~
~~۳-۴~~

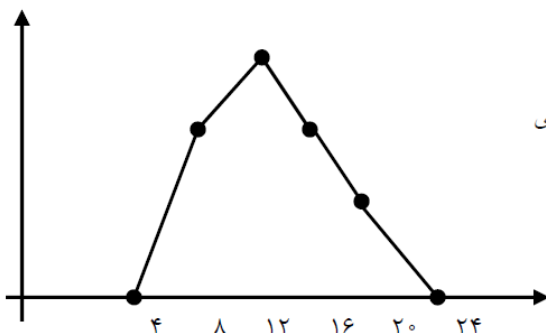
۹-۱
۲۷-۲

$$F_3 = 27$$

تغییرات خط شکسته

نمودار چندبر فراوانی

در این نمودار نقاطی از صفحه را مشخص می‌کنیم که طول آنها برابر مرکز دسته‌ها و عرض آنها، فراوانی (مطلق یا نسبی) همان دسته است. با به هم وصل کردن این نقاط چندبر فراوانی به دست می‌آید. در چندبر فراوانی، دو دسته با فراوانی صفر به ابتدا و انتهای داده‌ها اضافه می‌کنیم که به این وسیله مساحت چندبر فراوانی با مساحت نمودار مستطیلی متناظرش برابر می‌شود.



مساحت چندبر = مساحت نمودار مستطیلی

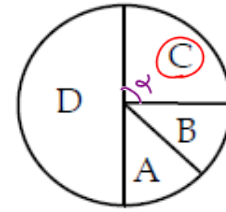
نمودار چندبر فراوانی برای داده‌های کمی پیوسته مناسب است.

نمودار چند بر فراوانی را می‌توان با داشتن فراوانی نسبی نیز رسم کرد که آن را چندبر فراوانی نسبی می‌گوییم. در این صورت اطلاعات منسجم‌تری در اختیار ما قرار می‌گیرد، چون می‌توان فراوانی را با کل جامعه مقایسه کرد.

اگر بخواهیم تغییرات متغیر را در فاصله‌ی بین دو دسته یا در خود دسته بهتر نشان دهیم از نمودار چندبر فراوانی استفاده می‌کنیم.

دکترها مسیح

نمودار دایره ای



$$\frac{F_i}{N} = \frac{\alpha}{360}$$

برای رسم نمودار دایره ای، مساحت دایره را به وسیله قطاع هایی به نسبت فراوانی ها تقسیم می کنیم. اگر فراوانی دسته ای معلوم باشد، زاویه هر قطاع از رابطه $\theta_i = \frac{f_i}{N} \times 360^\circ$ به دست می آید. نمودار دایره ای امکان مقایسه بین فراوانی ها را با سرعت بیشتر فراهم می کند.

۸ در انتخابات یک شهر ۵۴۰۰۰۰ نفر شرکت کرده اند. اگر آنان را به ۵ گروه سنی تقسیم نموده و با نمودار دایره ای نشان دهیم، درصد شرکت کنندگان در یک گروه سنی با زاویه قطاع ۶۳ درجه نشان داده می شود. تعداد اعضای این گروه کدام است؟

۱- ۹۳۵۰۰ ۲- ۹۴۰۰۰ ۳- ۹۵۰۰۰ ۴- ۹۴۵۰۰ ✓

$$\frac{93500}{94500} = \frac{x}{13500}$$

۲ ۲
 $x = 94500 \times \frac{13500}{94500} = 13500$

۹ داده های آماری در ۹ طبقه دسته بندی شده اند. فراوانی تجمعی نسبی در دسته ی چهارم و پنجم به ترتیب ۰/۲۸ و ۰/۴۰ است. در نمودار دایره ای زاویه ی مربوط به دسته ی پنجم چند درجه است؟

۴۴-۴

۴۳.۵-۳

۴۳.۲-۲

۴۳-۱

مشخص کننده های عددی

مشخص کننده های عددی، معیارهایی هستند که برای مقایسه چند جامعه به کار می روند و به سه دسته تقسیم می شوند:

- ۱- معیارهای مرکزی
- ۲- معیارهای پراکندگی
- ۳- معیارهای پراکندگی نسبی

معیارهای مرکزی (Measures of Central)

یکی از مهم ترین مسایل در مطالعه و بررسی هر جامعه آماری، تعیین مقادیری است که نماینده (مرکز) جامعه بوده و داده ها حول آن توزیع شده اند.

تعریف: هر شاخص عددی را که نشانگر مرکز داده های جامعه است و مشاهدات جامعه اطراف آن قرار دارند، معیار مرکزی می نامند.

انواع معیارهای مرکزی

برای محاسبه مرکز جامعه های آماری شاخص های متعددی وجود دارد که بر اساس آن شاخص ها، به انواع مختلف معیارهای مرکزی می رسیم که عبارت اند از:

- ۱- مد (Mode)
- ۲- میانه (Median)
- ۳- چندک (Quantile)
- ۴- میانگین (Mean)

مد (نما) (Mode)

تعریف: در میان مشاهدات هر جامعه، داده ای (x_i) که بیشترین فراوانی (تکرار) را داشته باشد، مد (نما) می نامند و آن را با Mo نشان می دهند.

۱۰	مد (نمای) مربوط به مشاهدات 7, 4, 13, 5, 7, 8, 7, 8 کدام است؟		
(۱) 7	(۲) 8	(۳) 7, 8	(۴) وجود ندارد.

مشخصات مد (نما)

- ۱- شاخص مرکزی مد (نما) لزوماً منحصر به فرد نیست، اگر چند داده بیشترین تکرار را داشته باشند، همه آن داده ها به عنوان مد در نظر گرفته می شوند.
- ۲- در شرایطی که تمام داده ها (x_i) به یک اندازه تکرار شده باشند (فراوانی های مطلق یا نسبی یکسان داشته باشند)، آن گاه جامعه فاقد شاخص مرکزی مد (Mo) خواهد بود.
- ۳- هرگاه تمام داده ها را در یک عدد ثابت ضرب یا بر یک عدد ثابت تقسیم کنیم و همچنین با یک عدد ثابت جمع و یا از یک عدد ثابت کم کنیم، مد داده ها نیز به همان نسبت تغییر می کند.

$$x_1, \dots, x_n \rightarrow ax_i \pm b \rightarrow Mo(ax_i \pm b) = aMo_x \pm b$$

۱۱ مد (نما) مربوط به مشاهدات 3, 7, 3, 4, 2, 7, 2, 9, 2, 7 کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 7 (۳) 7, 2 (۴) وجود ندارد.

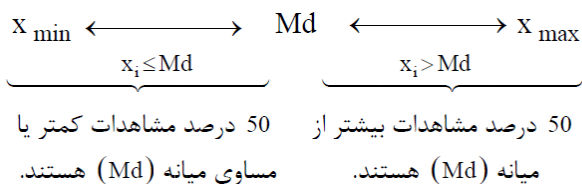
۱۲ برای داده‌های $X_1, X_2, \dots, X_n$ مقدار مد برابر 10 است. اگر هر یک از داده‌ها را نصف کرده و از هر کدام 1 واحد کم کنیم، مقدار مد چقدر می‌شود؟

- (۱) 5 (۲) 10 (۳) 9 (۴) 4

میانه (Median)

تعریف: اگر مشاهدات (x_i) در یک جامعه به صورت صعودی مرتب شده باشند، آن‌گاه داده‌ای را که در وسط داده‌ها قرار دارد (یعنی 50 درصد مشاهدات قبل از آن و 50 درصد مشاهدات بعد از آن قرار دارند)، میانه می‌نامند و آن را با Md یا Me نشان می‌دهند.

نکته: بنا بر تعریف، شاخص میانه (Md) جزیی از 50 درصد مشاهدات قبل از خود است.
به عبارت دیگر:



۱۳

میانۀ در جدول زیر کدام است؟

- (۱) 7.5
(۲) 6.5
(۳) 4
(۴) 1

x_i	4	1	0	7
F_i	3	8	5	9

چندک (Quantile)

چندک‌ها مقادیری از مشاهدات هستند که جامعه آماری را به فواصل مساوی با نسبت‌های $\frac{1}{4}$ (چارک)، $\frac{1}{10}$ (دهک) و $\frac{1}{100}$ (صدک) تقسیم می‌کنند به طوری که فراوانی در هر یک از این فواصل، درصد معینی از فراوانی کل را تشکیل می‌دهد. چارک‌های اول و دوم و سوم داده‌های زیر را بیابید.

۱۰، ۵، ۷، ۱۲، ۳، ۶، ۹

۱۴

چارک اول و سوم قد دانش‌آموزان به ترتیب 1.20 و 1.50 متر است. این به آن مفهوم است که

(۱) 25% دانش‌آموزان قدشان کمتر و یا مساوی 1.20 متر است.

(۲) 50% دانش‌آموزان قدشان بین 1.20 و 1.50 متر است.

(۳) 25% دانش‌آموزان قدشان بیشتر از 1.50 متر است.

(۴) هر سه گزینه درست است.

۱۵

چارک اول در جدول داده‌های زیر کدام است؟

(۱) 1

(۲) 4

(۳) 0

(۴) 0.25

x_i	4	1	0	7
F_i	9	3	4	10

نمودار جعبه ای

۱۶ در نمودار جعبه‌ای داده‌های زیر، حاصل $\frac{Q_2 + \min}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

نمرات دانشجو : ۱۳، ۷/۵، ۱۵، ۱۹، ۱۲، ۱۸، ۱۳/۵

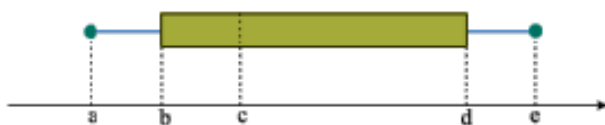
۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۱ (۱)

۱۷ نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰ و ۱۲ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a+c}{b+d}$ کدام است؟



$\frac{25}{37}$ (۲)

$\frac{27}{35}$ (۴)

$\frac{25}{35}$ (۱)

$\frac{27}{37}$ (۳)

۱۸ تعداد داده‌های آماری برابر کدام باشد تا مطمئن شویم که چارک‌های اول، دوم و سوم با سه تا از

داده‌های موجود برابراند؟ (داده‌ها متمایزاند.)

۲۵ (۴)

۲۳ (۳)

۱۸ (۲)

۱۳ (۱)

۱۹ داده‌های $a+1, a+4, \dots, a+31$ ، یک دنباله‌ی حسابی تشکیل داده‌اند. اگر چارک سوم این داده‌ها، ۳ برابر چارک اول همین داده‌ها باشد، میانه‌ی این داده‌ها کدام است؟

- ۱۶ (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴)

۲۰ اگر میانگین داده‌های ۳۷، ۱۲، ۷، ۴، ۳، ۲ و a برابر ۱۰ باشد، اختلاف چارک اول و سوم آن‌ها کدام است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۲۱ در کدام یک از داده‌های زیر، مقادیر مد و میانه با یکدیگر برابر است؟

- ۵، ۷، ۷، ۸، ۹ (۴) ۲، ۲، ۳، ۷، ۷ (۳) ۳، ۴، ۵، ۶، ۶ (۲) ۲، ۴، ۵، ۷، ۹ (۱)

انواع میانگین

میانگین با توجه به مقیاس اندازه‌گیری مشاهدات، دارای انواع مختلفی به شرح زیر است:

- ۱- میانگین هارمونیک ($\bar{x}_H$) جای دوتا
- ۲- میانگین هندسی ($\bar{x}_G$) واسط هندسی
- ۳- میانگین حسابی ($\mu, \bar{x}$)

میانگین n داده‌ی آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با:

میانگین حسابی

وزن	درکده
(۵, ۱۰)	۷, ۵
(۱۰, ۱۵)	۱۲, ۵
(۱۵, ۲۰)	۱۷, ۵

$$\bar{x} = \frac{2 \times 7,5 + 10 \times 12,5 + 15 \times 17,5}{20}$$

$\sqrt[3]{abc} = c, b, a$ میان هندسی

$\sqrt{ab}$ واسط هندسی

$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n$ ضرب

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad \frac{3(3+1)(2 \cdot 3 + 1)}{6} = 14$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \cancel{1} (1 + \cancel{2} + \dots + \cancel{n}) = n(n+1)$$



$$\sum_{i=1}^n i-1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 = n^2$$

$$\sum_{i=1}^n ki = k \sum_{i=1}^n i$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n i$$

$$\sum_{i=1}^n (i+k) = (1+k) + (2+k) + \dots + (n+k)$$

$$\sum_{i=1}^n (i+k) = \left(\sum_{i=1}^n i \right) + nk$$

$$\sum (i + i^2) = \sum i + \sum i^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} (i^2 - 2i + 1) &= \sum_{i=1}^{10} i^2 - 2 \sum_{i=1}^{10} i + 10 \times 1 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{10 \times 11}{2} \right) + 10 \\ &= 100^2 - 110 + 10 = 100^2 - 100 \end{aligned}$$

دکترها مسیح

میانگین دو داده وسط

$$\frac{2+5+8+11}{4} = \frac{26}{4} = 6.5$$

(۱) در یک جامعه آماری، میانگین عددی منحصر به فرد است که همواره بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده قرار دارد.

(۲) اگر داده‌های آماری تشکیل تصاعد حسابی بدهند، میانگین آنها عبارت است از: $\frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

داده وسط

اولین داده X_1 آخرین داده X_n

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

(۳) مفیدترین خاصیت میانگین آن است که اگر به جای تک‌تک داده‌ها، میانگین آن را قرار دهیم، مجموع و میانگین داده‌ها تغییر نخواهد کرد.

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{X} \quad \sum_{i=1}^n X = n\bar{X}$$

(۴) اگر میانگین m داده‌ی آماری $\bar{X}$ و میانگین n داده‌ی آماری $\bar{Y}$ باشد، میانگین کلیه داده‌ها برابر است با:

$$\frac{\sum X + \sum Y}{m+n} = \frac{m\bar{X} + n\bar{Y}}{m+n}$$

(۵) هر آن‌هایی برای داده‌هایی برای میانگین هم می‌افتد

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} \Rightarrow \sum Y = n\bar{Y} \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{m} \Rightarrow \sum X = m\bar{X}$$

۲۲ میانگین داده‌های $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ برابر ۵ است. میانگین مقادیر $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ کدام است؟

۸-۴

۷-۳

۶-۲

۵-۱

۲۳

میانگین و میانه‌ی ۱۱ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۳ و ۱۲ محاسبه شده است. بعداً معلوم شد که داده‌هایی

که مقدار آن ۱۵ محاسبه شده بود مقدار ۱۷ داشته‌اند. اگر این خط را اصلاح کنیم آن‌گاه:

- (۱) میانگین تغییر نمی‌کند، اما میانه افزایش می‌یابد.
- (۲) میانگین و میانه تغییر نمی‌کنند.
- (۳) میانگین افزایش می‌یابد، اما میانه تغییر نمی‌کند.
- (۴) میانگین و میانه هر دو افزایش می‌یابند.

۲۴ در داده‌های آماری $x, 105, 90, 80, 85, 20$ و 100 ، میانگین و میانه، هر دو با داده‌ای که در بین

داده‌ها بیش‌ترین فراوانی را دارد، برابراند. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۸۵ (۳) ۹۰ (۴) ناموجود

میانگین وزن دار

میانگین n داده‌ی آماری که در آن داده‌ها دارای فراوانی باشند برابر است با

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

مجموع داده‌ها

تعداد داده‌ها

که در این صورت: $\sum f_i (x_i - \bar{X}) = 0$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

انواع معیارهای پراکندگی

- (۱) دامنه تغییرات
- (۲) دامنه میان چارکی (نیم دامنه)
- (۳) انحراف چارکی
- (۴) انحراف متوسط از میانگین
- (۵) واریانس و انحراف معیار
- (۶) ضریب تغییرات
- میزان پراکندگی داده‌ها را نسبت به یکدیگر تعیین می‌کنند.
- میزان پراکندگی داده‌ها را نسبت به میانگین تعیین می‌کنند.

دامنه تغییرات (Range)

تعریف: دامنه تغییرات (R) عبارت است از تفاضل مقدار کوچک‌ترین مشاهده از مقدار بزرگ‌ترین مشاهده.

به عبارت دیگر، در صورتی که مشاهدات $x_1, x_2, \dots, x_n$ از جامعه‌ای مفروض باشند، آن‌گاه دامنه تغییرات (R) به عنوان یکی از ساده‌ترین پارامترهای پراکندگی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \max(x_i) - \min(x_i)$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

۲۵ دامنه تغییرات مربوط به مشاهدات 4, 2, 3, 7, 6 کدام است؟

۷ (۴)

4 (۳)

2 (۲)

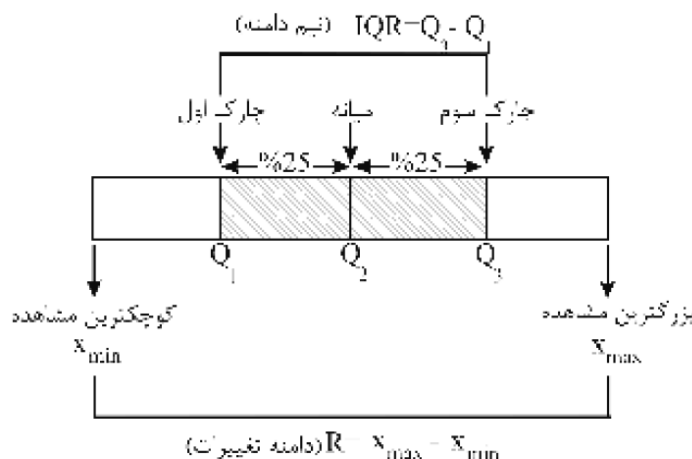
5 (۱)

دامنه میان چارکی (نیم دامنه) (Interquartile Range)

تعریف: اگر پارامتر پراکندگی دامنه تغییرات (R) را برای 50 درصد از مشاهدات در فاصله Q_1 (چارک اول) تا Q_3 (چارک سوم) محاسبه کنیم، به شاخص پراکندگی جدیدی می‌رسیم که آن را دامنه میان چارکی (نیم دامنه) می‌نامند و با IQR نشان می‌دهند.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

در دامنه میان چارکی (نیم دامنه)، پارامتر مرکزی میانه را که 50 درصد داده‌هاست در نظر می‌گیریم و از پایین تا Q_1 (چارک اول) و از بالا تا Q_3 (چارک سوم) توسعه می‌دهیم.



انحراف معیار (Standard Deviation)

در صورتی که واحد اصلی مشاهدات $(x_1, \dots, x_N)$ برابر با m باشد، آن گاه واحد اندازه گیری واریانس مجذور واحد اصلی یعنی m^2 است. برای مثال، اگر واحد اصلی مشاهدات متر باشد، واحد واریانس m^2 (متر) یا همان مترمربع است. از آنجاکه واریانس به صورت مجذور واحد اولیه محاسبه می شود، نمی توانیم میزان پراکندگی مشاهدات را از روی آن به راحتی بررسی کنیم. برای حل این مشکل از جذر مثبت واریانس $(\sqrt{\sigma^2})$ استفاده می کنیم و آن را انحراف معیار (σ) می نامیم. به این ترتیب به معیاری از پراکندگی می رسیم که با واحد اصلی مشاهدات $(x_1, \dots, x_N)$ بیان می شود.

نکته: در مفهوم مالی، «انحراف معیار» همان «ریسک» است.

- ۲۶ دستگاه A در اندازه گیری مکرر از شیء واحدی دارای واریانس $\sigma^2 = 9$ بوده است. دستگاه B در اندازه گیری مکرر از همان شیء دارای واریانس $\sigma^2 = 25$ بوده است.
- (۱) دستگاه A دقیق تر است.
 - (۲) دستگاه B دقیق تر است.
 - (۳) دستگاه A اندازه گیری های بزرگ تری از دستگاه B به دست می دهد.
 - (۴) دستگاه B اندازه گیری های بزرگ تری از دستگاه A به دست می دهد.

محاسبه واریانس

برای محاسبه واریانس داده های یک جامعه $(x_1, \dots, x_N)$ می توانیم یکی از دو رابطه زیر را به کار ببریم:

$$(1) \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \text{میانگین مجذور تفاضل داده ها از میانگین}$$

$$(2) \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N} \right)^2 = (\text{میانگین مجذور } x) - (\text{میانگین } x)^2$$

در محاسبه واریانس (σ^2) و انحراف معیار (σ) داده های خام $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ، استفاده از رابطه (۱) برای سهولت در محاسبه توصیه می شود.

برای محاسبه انحراف معیار جامعه (σ) ، کافی است بعد از محاسبه واریانس (σ^2) از آن جذر مثبت بگیریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N} \right)^2}$$

۲۷ واریانس مشاهدات 2, 4, 1, 4, 5, 2 در یک جامعه برابر است با:

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۸ در جامعه‌ای به حجم $N = 10$ ، در صورتی که مجموع مشاهدات 40 و مجموع مجذور مشاهدات 250 باشد، انحراف معیار جامعه کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) 3 (۳) 9 (۴) 4

ضریب تغییرات

میانگین	هرگاه داده های با یک عدد جمع	هرگاه داده های در یک عدد ضرب	هم ضرب هم جمع
میانه			
مد			
دامنه			
واریانس			
انحراف معیار			
ضریب تغییرات			

۲۹ هرگاه واریانس داده های F ، $\frac{a+b}{2}$ ، a و b ، صفر باشد. حاصل $2a+3b$ کدام است؟

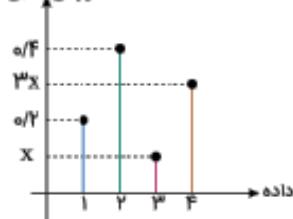
- ۲۲ (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

۳۰ واریانس داده های بین چارک اول و سوم داده های زیر کدام است؟

۳، ۷، ۱۸، ۵، ۱۹، ۱۰، ۱۴، ۲۴، ۳، ۲۵، ۳۱، ۱، ۴

- ۳۲ (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴)

فراوانی نسبی



۳۱ با توجه به نمودار میله ای زیر برای داده های ۱، ۲، ۳ و ۴، واریانس کدام

است؟

- ۱/۵ (۱) ۱/۲۵ (۲) ۰/۷۵ (۳) ۱ (۴)

۳۲ میانگین و واریانس ۲۰ داده ای آماری به ترتیب برابر با ۱۲ و ۱۵ است. اگر ۲ داده با مقادیر ۱۴ و ۱۰ به

این داده ها اضافه شوند، واریانس ۲۲ داده ای موجود کدام است؟

- ۱۴/۵ (۱) ۱۴ (۲) ۱۴/۲۵ (۳) ۱۴/۷۵ (۴)

۳۳ ۲۰ داده ای آماری با واریانس ۶ داریم. چند داده ای مساوی با میانگین باید به آن ها اضافه کنیم تا

واریانس کل داده ها برابر ۴ شود؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۳۴ در سه گروه داده که گروه اول شامل اعداد ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱، گروه دوم شامل اعداد ۱۵، ۱۲، ۹، ۶ و ۳ و گروه سوم شامل اعداد ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۷ و ۱۶ است. واریانس داده‌های کدام گروه بیش‌تر است؟
(۱) گروه اول (۲) گروه دوم (۳) گروه سوم (۴) واریانس سه گروه یکسان است.

۳۵ با توجه به جدول زیر، اگر x متغیری کمی باشد، ضریب تغییرات داده‌های x_i کدام است؟

$x_i - 12$	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۳	۱	۳	۶	۲

(۲) $\frac{1}{8}$
(۴) $\frac{1}{4}$

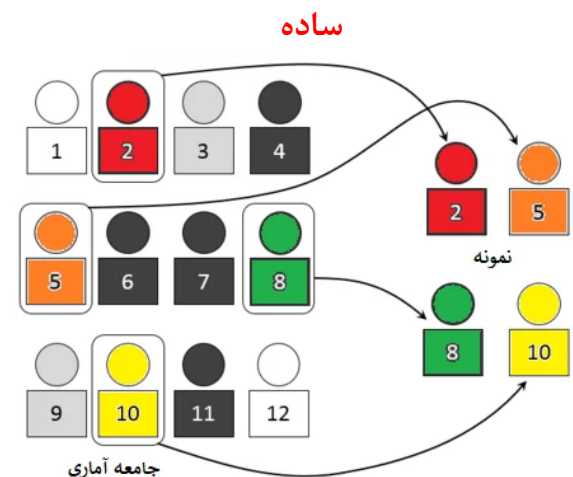
(۱) $\frac{1}{12}$
(۳) $\frac{1}{6}$

۳۶ ضریب تغییرات ۳۰ داده‌ی آماری برابر با $\frac{3}{6}$ است. اگر سه برابر میانگین این داده‌ها را به هم‌ی آن‌ها اضافه کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید چقدر خواهد شد؟
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{10}{8}$ (۳) $\frac{14}{4}$ (۴) $\frac{5}{9}$

۳۷ ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۳ است. تمامی داده‌ها را دو برابر کرده و سپس میانگین داده‌های اولیه را از تمامی آن‌ها کم می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟
(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶

۳۸ در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟
(۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{8}{9}$

انواع نمونه گیری



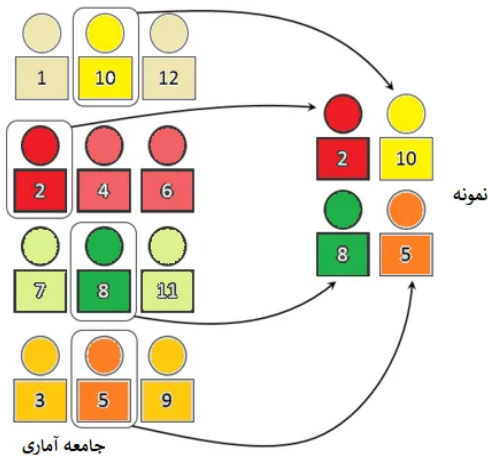
■ مزیت این روش: همه واحدهای آماری شانس برابر برای انتخاب شدن دارند.

خوشه ای

■ **مزیت این روش :** سرعت بالا، احتمال انتخاب خوشه ها با هم برابر. اما ممکنه تعداد اعضای داخل خوشه ها با هم متفاوت باشه.

■ اما با این حال، احتمال انتخاب واحدهای آماری با هم برابر.

■ **عیب این روش :** دقت کم

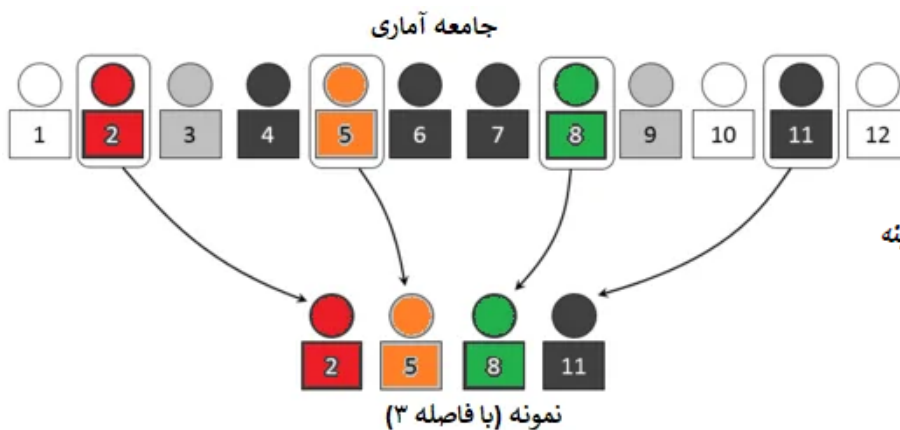


طبقه ای

■ **مزیت این روش :** دقت بالاتر

■ احتمال انتخاب شدن اعضا با هم برابر نیست! بلکه متناسب با سهم طبقه آنها از کل جامعه است.

■ **عیب این روش :** افزایش هزینه و زمان



سیستماتیک

■ **مزیت این روش :** صرفه جویی در زمان و هزینه

■ **عیب این روش :** کاهش دقت

۳۹ برای انتخاب یک نمونه از مگس های سفید شهر تهران چه روشی برای نمونه گیری مناسب است؟

- (۱) تصادفی ساده (۲) خوشه ای (۳) طبقه ای (۴) سامانمند

۴۰ کمیته ملی المپیک می خواهد از چند ورزشکار اعزامی به المپیک، تست دوپینگ بگیرد. این کمیته تنها نام رشته های

ورزشی که در آن رشته ورزشکار عازم المپیک است را دارد. مناسب ترین روش برای نمونه گیری کدام است؟

- (۱) تصادفی ساده (۲) خوشه ای (۳) طبقه ای (۴) سامانمند

۴۱

کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟

- (۱) احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری سامانمند برابر نیست.
- (۲) احتمال انتخاب هر طبقه در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر است.
- (۳) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب واحدهای آماری یکسان است.
- (۴) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، طبقه‌ها اشتراک ندارند.

گردآوری داده‌ها

مشاهده
مصاحبه
پرسش‌نامه
دادگان

تفاوت پارامتر و آماره

✓ پارامتر یک مقدار ثابت، اما آماره بسته به نمونه انتخابی می‌تونه متغیر باشه.

برآورد نقطه‌ای و بازه‌ای

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

μ : میانگین جامعه
 $\bar{X}$: میانگین نمونه
 σ : انحراف معیار جامعه
 n : اندازه نمونه

۴۲

برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از دو نمونه تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازه نمونه دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین با نمونه دوم، $\frac{2}{3}$ برابر مقدار محاسبه شده با نمونه اول باشد. اندازه نمونه دوم، چند برابر نمونه اول است؟

تیر ۱۴۰۱

(۴) $3/5$

(۳) $2/25$

(۲) $2/25$

(۱) $1/5$

۴۳

میانگین شش داده آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها، به صورت $1, b^2, 9, 0, a^2, 9$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

تیر ۱۴۰۱

(۴) -2

(۳) 2

(۲) 4

(۱) -4

۴۴

از جامعه‌ای با انحراف معیار $1/5$ ، نمونه‌ای به صورت $1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5$ انتخاب می‌شود. بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین این جامعه کدام است؟

(۴) $[1, 5]$

(۳) $[1/5, 4/5]$

(۲) $[2, 4]$

(۱) $[2/5, 3/5]$

۴۵

در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دوتای آنها را با کوچک‌ترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد در دسته دوم (دسته جدید) تک رقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم کدام است؟

دی ۱۴۰۱

$$۱,۲۵ \quad (۴)$$

$$\sqrt{۲} \quad (۳)$$

$$۵,۴\sqrt{۱۵} \quad (۲)$$

$$۵,۲\sqrt{۵} \quad (۱)$$

۴۶

می‌خواهیم به روش سامان‌مند از بین ۱۱۰۲ خوش‌نویس، ۳۸ نفر را انتخاب کنیم. اگر همه را از ۱ تا ۱۱۰۲ شماره‌گذاری کرده باشیم، و اولین نفر انتخابی شماره ۷ باشد، در آن صورت کدام یک از اعضای زیر جزء گروه انتخابی ما نخواهد بود؟

$$۱۰۲۲ \quad (۴)$$

$$۲۹۷ \quad (۳)$$

$$۸۴۸ \quad (۲)$$

$$۳۸۴ \quad (۱)$$

۴۷

اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیر تکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند، انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

تیر
۱۴۰۲

(۴) $\sqrt{28}$

(۳) $\sqrt{21}$

(۲) $\sqrt{11}$

(۱) $\sqrt{10}$

۴۸

میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به طوری که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $1/25$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

اردیبهشت
۱۴۰۳

(۴) $4/5$

(۳) $3/75$

(۲) $2/5$

(۱) $1/25$

۴۹

اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد زوج، غیر تکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند، انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

خارج
۱۴۰۲

(۱) ۲۸

(۳) $\sqrt{21}$

(۲) ۱۱

(۱) $\sqrt{10}$

۵۰

میانگین دسته اول با ۵ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۶ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده a است. اگر واریانس دسته اول $\frac{2}{3}$ از واریانس دسته دوم بیشتر باشد، واریانس دسته اول کدام است؟

تیر
۱۴۰۳

(۴) $6/25$

(۳) ۴

(۲) $2/25$

(۱) ۱

نمره ۱/۲۵

جدول فراوانی زیر مربوط به قد دانش‌آموزان یک کلاس برحسب سانتی‌متر است.

الف) مقادیرهای عددی a و b را در جدول پیدا کنید.

ب) نمودار بافت نگاشت فراوانی قد دانش‌آموزان را رسم کنید.

فراوانی نسبی	فراوانی	قد دانش‌آموزان
۰/۳	۶	$120 \leq H < 140$
a	۱۰	$140 \leq H < 160$
b	۴	$160 \leq H < 180$

حسین در یک آزمون شرکت کرده و کارنامه آزمون او به شرح زیر است. اگر معدل موزون (میانگین وزن‌دار) نمره‌های این آزمون حسین، ۷۰ باشد، نمره فیزیک او را محاسبه نمایید.

نمره ۱/۲۵

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی
نمره	۶۵	۴	۹۵
ضریب درس	۴	۳	۲

نمره ۱/۲۵

انحراف معیار داده‌های زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه انحراف معیار را به شکل کامل بنویسید.)

۱۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴

چارک اول، میانه و چارک سوم داده‌های زیر را بیابید.

نمره ۰/۷۵

۲، ۵، ۷، ۳، ۹، ۴، ۱، ۶، ۶، ۷

نمره ۰/۵

در هر مورد مناسب‌ترین روش نمونه‌گیری را بنویسید.

الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم اما فهرست مدارس موجود است.

ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است.

در یک دانشگاه، میانگین سن یک نمونه تصادفی ۲۵ نفره از دانشجویان برابر ۲۲ سال است. اگر در بررسی‌های گذشته، انحراف معیار سن دانشجویان این دانشگاه برابر ۲ سال باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه دانشجویان این دانشگاه را محاسبه کنید.

نمره ۰/۷۵

نمره ۱/۲۵

داده‌های مربوط به مطالعه یک جامعه ۷ عضوی به صورت زیر است:

۳، ۱، ۴، ۰، ۲، ۶، ۵

الف) تمام نمونه‌های دو عضوی از جامعه را بنویسید که میانگین آن‌ها ۳ باشد.

ب) احتمال آن‌که یک نمونه دو عضوی که به تصادف انتخاب شده است، دارای میانگین ۳ باشد، را به دست آورید.