

دایره

نمره در امتحان نهایی

هشت نمره

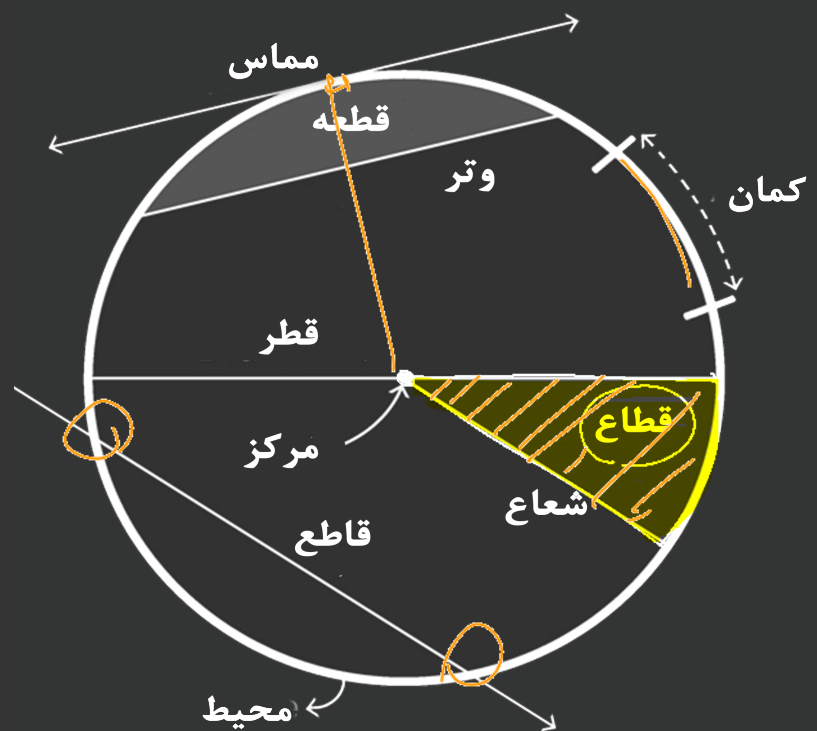
تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

زوایا سال هفتم

فصل ۱ هندسه دهم: هم‌رسانی های مثلث

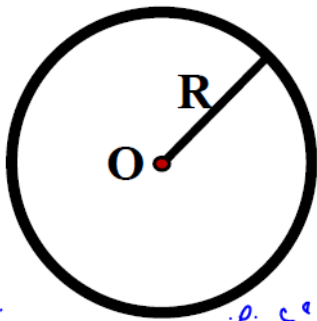


فصل یک هندسه یازدهم

زوایا
روابط طولی
محاطی - محیطی

دایره

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت هستند



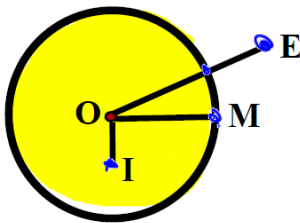
شعاع دایره $OI < R$
فاصله آرای های

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.

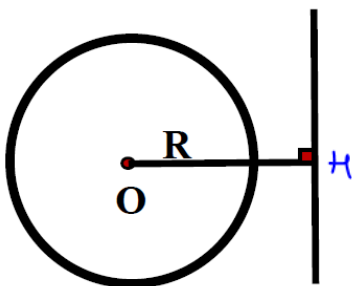
۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.

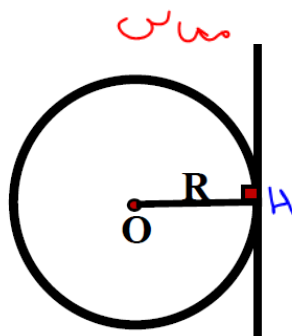


حالت های خط و دایره

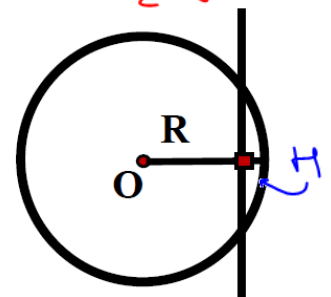
مماس



$OH > R$
بدون برخورد



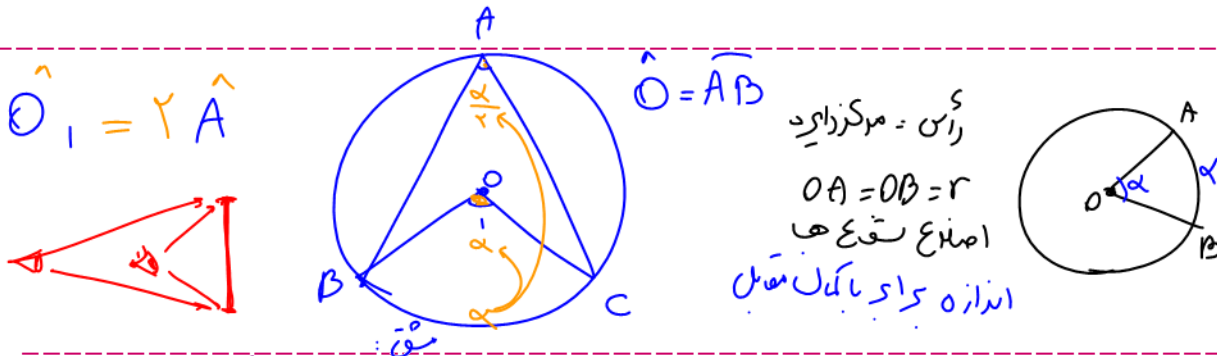
$OH = R$
یک نقطه برخورد



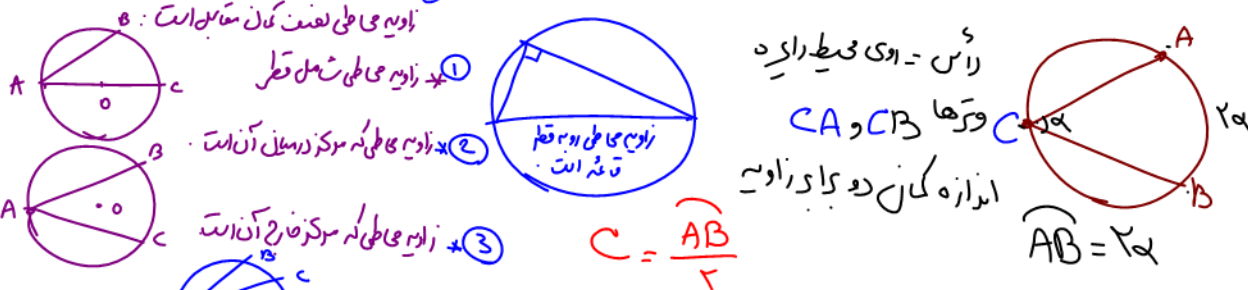
$OH < R$
دو نقطه برخورد

انواع زاویه در دایره

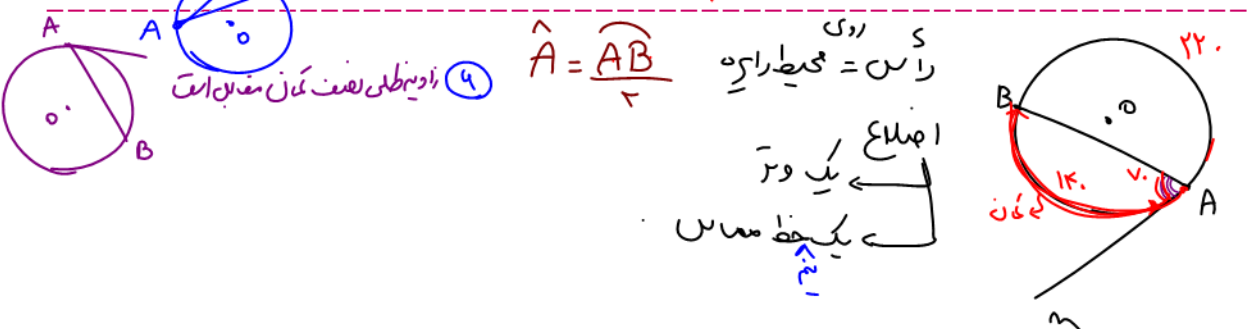
زاویه مرکزی



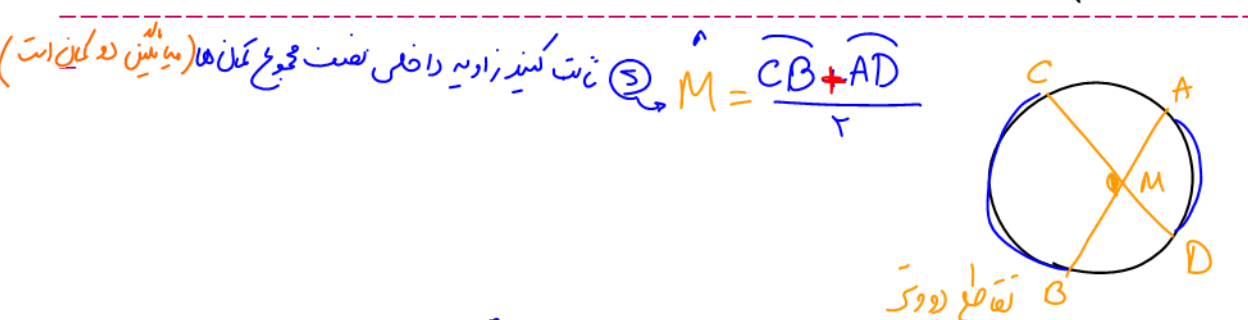
زاویه محاطی



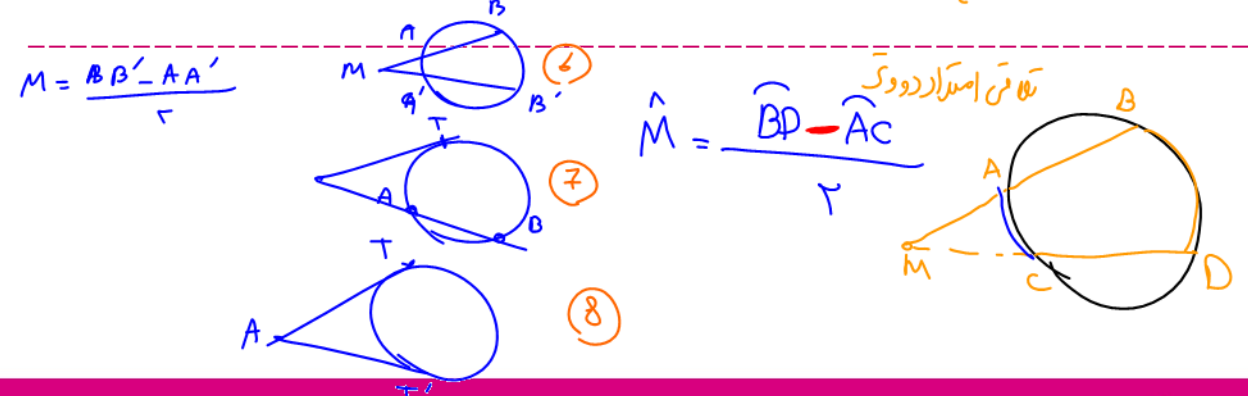
زاویه ظلّی

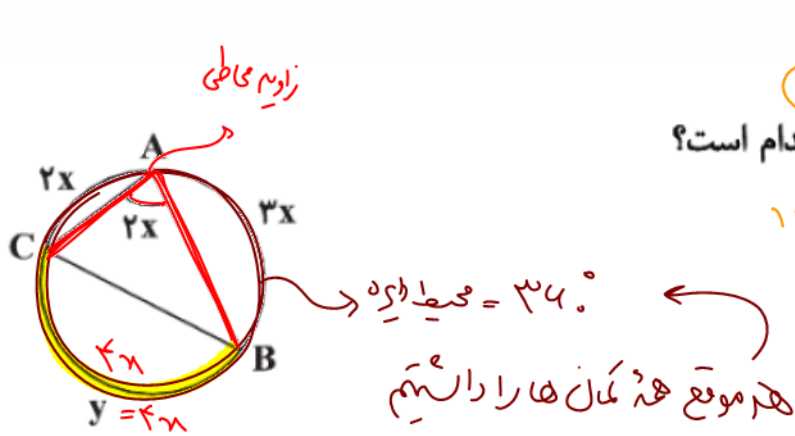


زاویه داخلی



زاویه خارجی





۱) با توجه به شکل مقابل، حاصل $y - x$ کدام است؟

$$140 - 40 = 100$$

$$3 \times 40 = 120$$

$$90^\circ (1)$$

$$150^\circ (2)$$

$$120^\circ (3)$$

$$135^\circ (4)$$

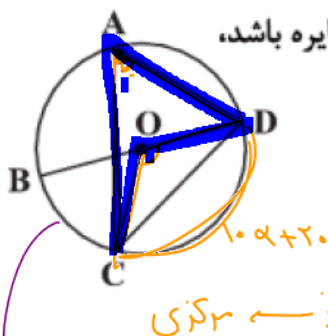
$$2x + 3x + y = 340$$

زاویه یاطی

$$2x + 3x + 4x = 340$$

$$9x = 340$$

$$x = 40$$



۲ در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A} = 7x - 10$ و $\hat{COD} = 10x + 20$ مرکز دایره باشد،

$$\hat{A} = 7x - 10 \rightarrow \widehat{CD} = 2\hat{A} = 2(7x - 10)$$

$$\hat{COD} = 10x + 20 = \widehat{CD} = 14x - 20$$

$$10x + 20 = 14x - 20$$

$$40 = 4x$$

$$10 = x$$

$$* 10x + 20 = 2(7x - 10)$$

دکتر رها مسیح



دوایم > وتری > وتری
قضایای مهم

فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

حکم $AH = HB$

$\widehat{AD} = \widehat{DB}$

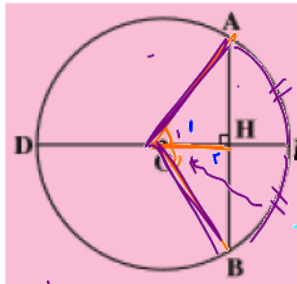
شعاع در دایره یهفته است

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$OA = OB = r$

$OH = OH$

$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow AH = HB$
 $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$



فرض $AH = HB$

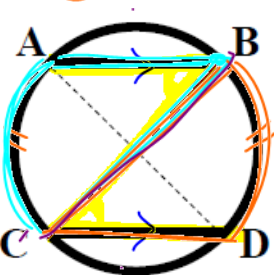
حکم $\widehat{AE} = \widehat{EB}$

$AH = HB$
 $OA = OB$
 $OH = OH$

$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$
 $H_1 = H_2$
 $H_1 + H_2 = 180^\circ$



$\widehat{AB} \neq \widehat{CD}$
لزوماً برابر نیست!!



فرض $AB \parallel CD / BC$ خطوط موازی می‌باشد $\rightarrow \hat{ABC} = \hat{BCD}$ قاطع $\rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

حکم $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

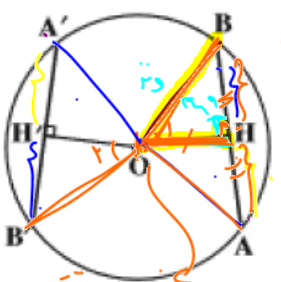
ثابت کنید اگر گره ها محدود بین دو خط موازی باشند

فرض $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

حکم $AB \parallel CD$

$\hat{B} = \hat{C}$
 $\rightarrow AB \parallel CD$

چون وترهای دو دایره



فرض $OH = OH'$

حکم $AB = A'B'$

$OB = OH + BH$
 $OB' = OH' + B'H'$

$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
 $OB = OB'$
 $\Rightarrow \triangle OBH \cong \triangle OB'H' \rightarrow BH = B'H'$
 $AB = A'B' \leftarrow BH + OH = B'H' + OH'$

$AB < A'B'$

$OH < OH'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

$OH > OH'$

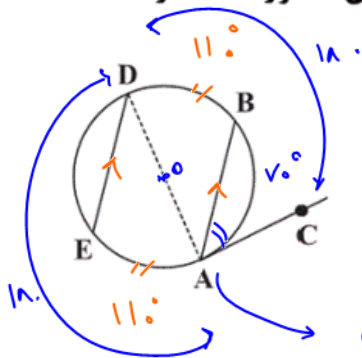
$AB < A'B'$

$OH > OH'$

$AB < A'B'$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۳ در شکل روبه‌رو $AB \parallel DE$ ، مماس بر دایره و $\widehat{AE} = 11^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه $\widehat{BAC}$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)

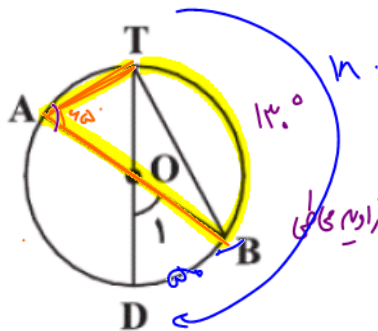


رفع کمال حاصل = خطی

$$\text{Gib } \hat{BAC} = \frac{\widehat{BA}}{r} = \frac{v_o}{r} = \omega^o$$

- $3\Delta^\circ$ (1) ✓
 $4\Delta^\circ$ (2)
 $5\Delta^\circ$ (3)
 $6\Delta^\circ$ (4)

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه O_1 کدام است؟



$$A = \frac{TB}{r}$$

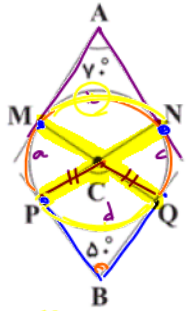
$$48^\circ = \frac{\widehat{TB}}{2} \rightarrow \widehat{TB} = 12^\circ$$

- 65° (1)
- 60° (2)
- 50° (3)
- 45° (4)

دکترها مسیح

$$C = \frac{d+b}{2} = \frac{240}{2} = 120^\circ$$

۵ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟



$$70^\circ A = \frac{a+d+c-b}{2}$$

$$140 = a+d+c-b \Rightarrow 140 = 2a+2c$$

$$100 = a+b+c-d \Rightarrow 120 = a+c$$

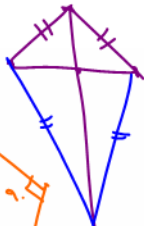
- (1) 100°
- (2) 120° ✓
- (3) 80°
- (4) 140°

$$a+b+c+d=320^\circ$$

$$120$$

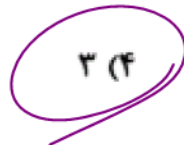
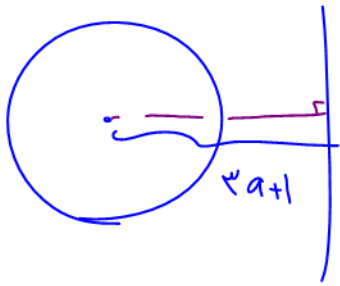
$$b+d=240$$

شع در نقطه مماس بر خط مماس مماس



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

۶ دایره $C(O, r)$ و خط l به فاصله $3a+1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۱)

مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$\frac{3}{2} (2) \quad 1/5$$

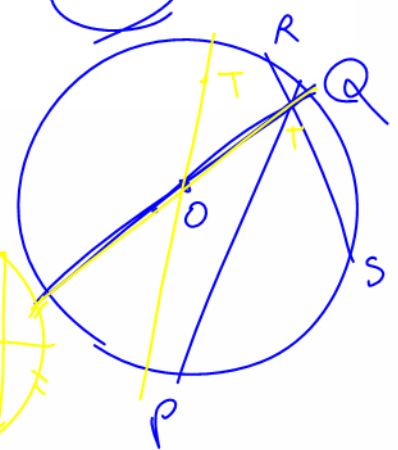
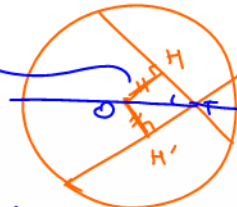
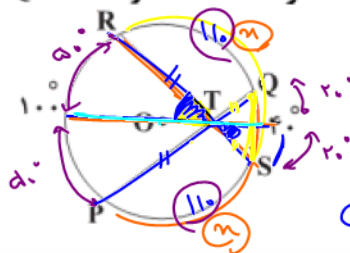
$$3a+1 > r$$

$$3a > 6 \rightarrow a > 2$$

۷ در دایره $C(O, r)$ وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

$$\widehat{RQ} = \frac{40+120}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ$$

- (1) 70°
- (2) 35°
- (3) 30°
- (4) 40°



$$RS = PQ \Rightarrow \widehat{RS} = \widehat{PQ}$$

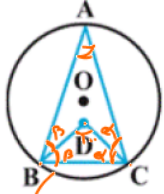
دو وتر برابرند

$$\widehat{RQ} + \widehat{QS} = \widehat{PS} + \widehat{QP}$$

$$2n + 40 + 100 = 360$$

$$2n = 220 \Rightarrow n = 110$$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آنگاه کمان BC چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۸۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

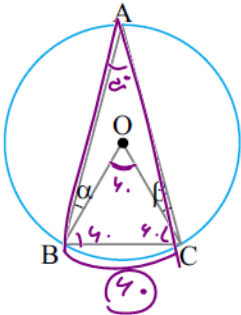
$$\widehat{BDC}: \beta + \alpha + 100 = 180$$

$$\beta + \alpha = 80$$

$$2\beta + 2\alpha = 160 \Rightarrow A = 180 - 160 = 20$$

$$\widehat{BC} = 2\hat{A} = 40$$

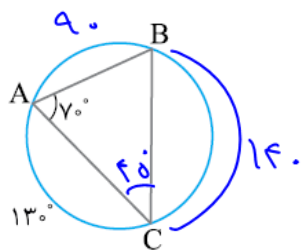
۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)

(۱) 10° (۲) 20° (۳) 30° (۴) 40°

$$30 + \alpha + 60 + \beta + 60 = 180$$

$$\alpha + \beta = 30$$

۱۰ در شکل مقابل اندازهی زاویهی C کدام است؟

(۱) 70° (۲) 60° (۳) 65° (۴) 45° 

$$130^\circ + 140^\circ = 270$$

$$360 - 270 = 90$$

וועג

11

دایره‌ی $C(\bar{O}, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

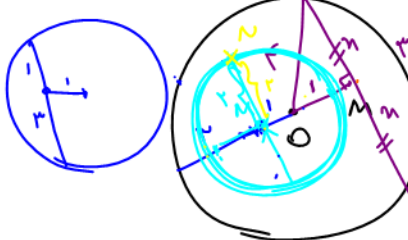
1 (1)

2. (2)

۳) صفر

(۴) بی شمار

کتابہ ترین و تر مکتب سے رہنمائی و رہنمائی



٢٧١٥
وَمِنْ مَحْذُورٍ
رَقَرٍ

وَبَرَّاسْمُ نَزْدَ
نَبِ نَفَعًا رَاضٍ
دَالِرَه

قطر

प्रा. वि.

هیج وتر → وتر محو < اندازه

۱. وتر $\Rightarrow$ وترعود = اندازه / قطر
۲. ر $\Rightarrow$ قطر < اندازه < وترعود

مستتر $\Rightarrow$ قعر $\wedge$ اندازه

12

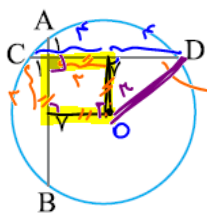
مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

$$\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

Δ (✓)

$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

9 (f)



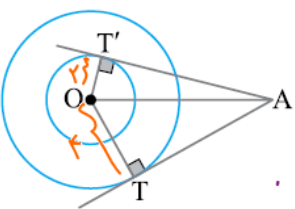
→ دوویترای بند

← فاصله ها هم برای من



ابن عبد الله

مربع تناقصات $(A_T - A_T')^2$



مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

13

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

120

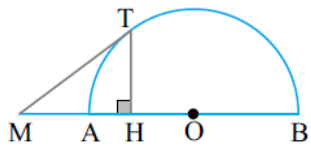
20 (1)

10. (1)

15 (3)

$$\frac{\begin{array}{l} \cancel{r^r + AT^r = QA^r} \\ \cancel{y^r + AT^r = QA^r} \end{array}}{19 - 7 = 12} = AT^r - AT^r$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید



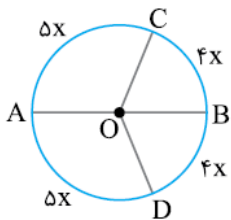
۱۴ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$



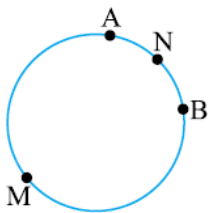
۱۵ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°



۱۶ در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

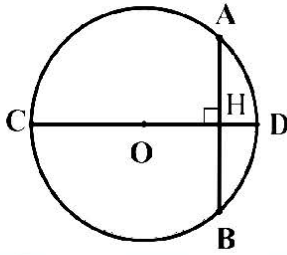
(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{4}$

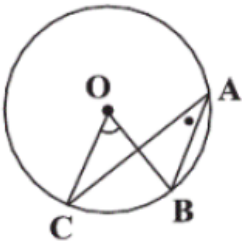
(۴) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{6}$

در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند. **خرداد ۱۴۰۳**
۱/۵ نمره



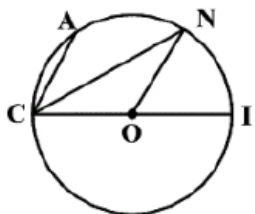
دایره $C(O, 6)$ مفروض است. اگر $\hat{O} = (2x + 10)^\circ$ و $\hat{A} = (3x - 25)^\circ$ باشد، طول کمان BC کدام است؟



- (۱) $\frac{5\pi}{3}$
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{8\pi}{3}$
- (۴) $\frac{10\pi}{3}$

۱۷

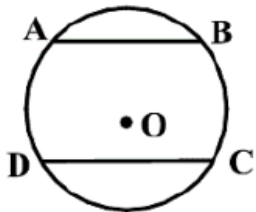
در شکل مقابل، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$. اگر $\widehat{AC} = 40^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



- (۱) $27/5^\circ$
- (۲) 30°
- (۳) 35°
- (۴) $32/5^\circ$

۱۸

۱۹ مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = 6$ و $CD = 8$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟



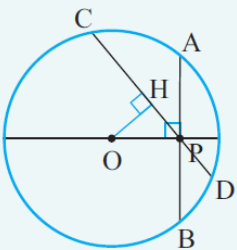
(۱) ۵۶

(۲) ۴۹

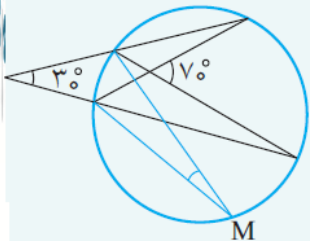
(۳) ۴۲

(۴) ۳۵

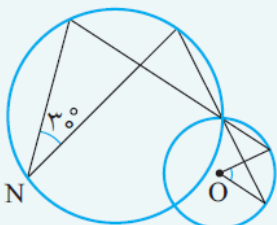
۲۰ نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



۲۱ زاویه $\widehat{M}$ را به دست آورید.

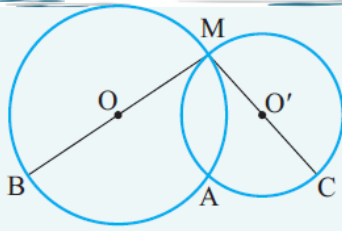


۲۲ زاویه O را به دست آورید.

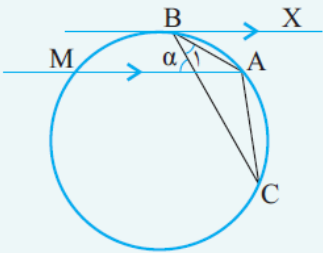


مسئله:

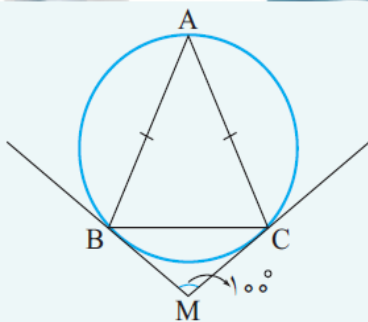
دکترها مسیح



۲۳ نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



۲۴ $\hat{B}_1 = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 20^\circ$ و $BX \parallel MA$. زاویه α را به دست آورید.

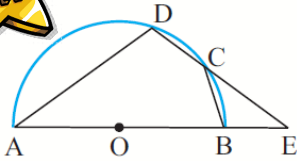


۲۵ MB و MC مماس بر دایره هستند و $AB = AC$. زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید.

در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC = CD$ و $AD = DE$ ، اندازه زاویه A چند درجه

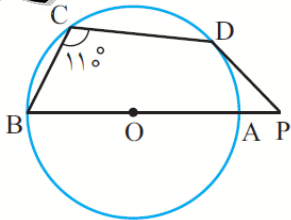
۲۶

است؟

(۱) 24° (۲) 30° (۳) 36° (۴) 42° 

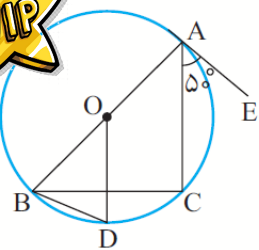
در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\widehat{C} = 110^\circ$ ، اندازه زاویه P چند درجه است؟

۲۷

(۱) 50° (۲) 60° (۳) 45° (۴) 55° 

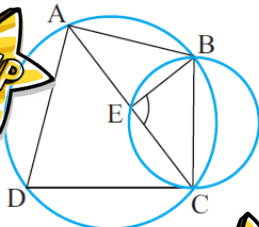
در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازه زاویه CBD چند درجه است؟

۲۸

(۱) 15° (۲) 20° (۳) 25° (۴) 30° 

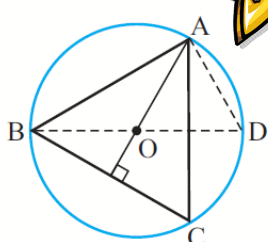
در شکل روبه‌رو، CD بر دایره کوچک مماس است. اگر $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه BEC چند درجه است؟

۲۹

(۱) 80° (۲) 100° (۳) 40° (۴) 50° 

در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه AOD برابر کدام است؟

۳۰

(۱) $\widehat{OBC}$ (۲) $\widehat{CAD}$ (۳) $\widehat{OAC}$ (۴) $\widehat{ADO}$ 

دکترها مسیح

۳۱

در مثلث ABC ، داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع اند. زاویه MBC چند درجه است؟

(۴) 40°

(۳) 35°

(۲) 30°

(۱) 25°

۳۲

در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC ، مرکز دایره ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟
(۱) متساوی الساقین (۲) قائم الزاویه (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین (۴) غیر مشخص

۳۳

در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله وسط کمان AB از نزدیک ترین رأس مربع چقدر است؟

(۱) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{4} - 2\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{1} + \sqrt{2}$

۳۴

در شکل مقابل، اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 3$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، آنگاه اندازه AM کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $2/25$

(۳) $2/5$

(۴) $2/75$

۳۵

در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $2/5$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند. فاصله نزدیک ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۶

مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

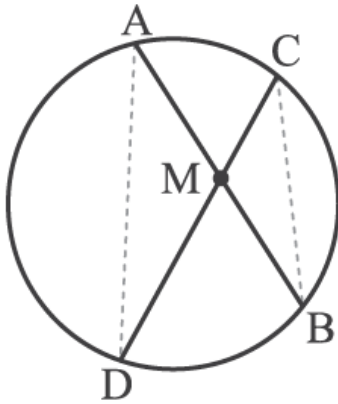
(۱) $2/25$

(۲) $2/5$

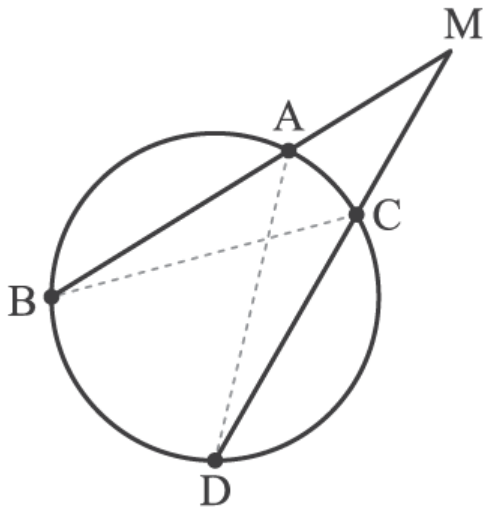
(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) ۳

روابط طولی در دایره



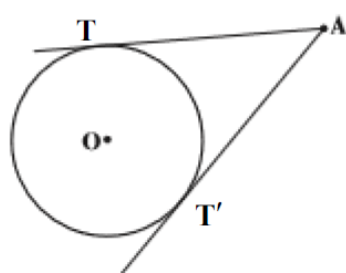
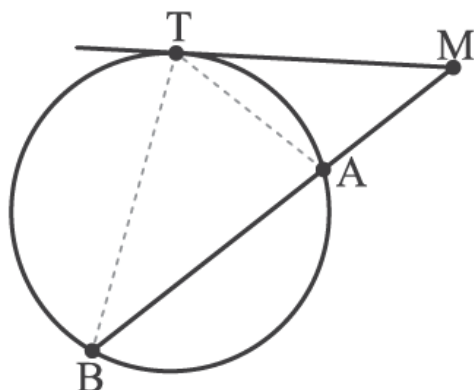
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



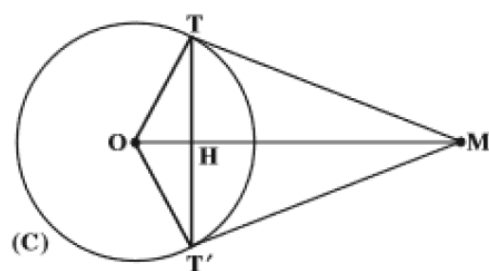
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$

از اینرو، هر سه این قضایا دارای طرح کلی یکسانی می باشند:

$$(\text{vertex to circle}) \cdot (\text{vertex to circle}) = (\text{vertex to circle}) \cdot (\text{vertex to circle})$$



خط مماس بر دایره



• OM نیمساز $\hat{O}$ و نیمساز $\hat{M}$ است.

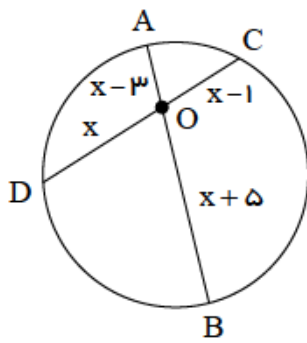
• OM عمود منصف TT' است.

$$OH \times OM = R^2$$

$$TT'^2 = 4OH \times MH$$

$$TT' \times OM = 2R \times MT$$

$$MT = MT'$$

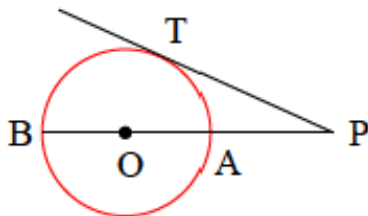


۳۷ در شکل مقابل x برابر است با:

- ۱) ۵
 ۲) ۱۰
 ۳) ۸
 ۴) گزینه های ۱ و ۲

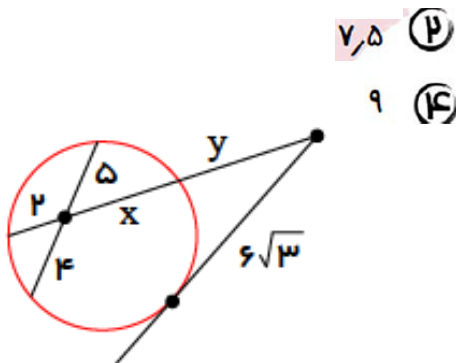
۳۸ در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و AB قطر و $PA = 4$ می باشد، طول مماس PT کدام است؟

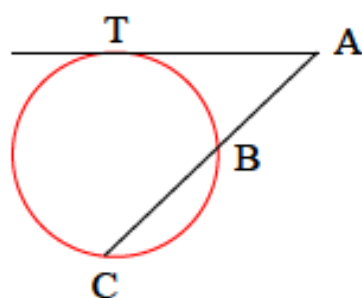
- ۱) $4\sqrt{3}$
 ۲) $5\sqrt{2}$
 ۳) ۱۴
 ۴) ۸



۳۹ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟

- ۱) ۶
 ۳) ۸





۴۰. در شکل، AT مماس و کمان های $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$ زاویه A چند درجه است؟

۷۲° (۵)

۱۸° (۱)

۱۴۴° (۴)

۳۶° (۳)

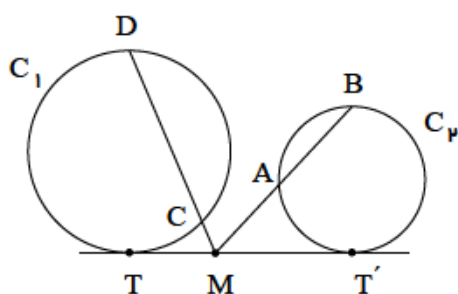
۴۱. در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $MT = \frac{1}{3}MT'$ باشد، حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ کدام است؟

۳ (۵)

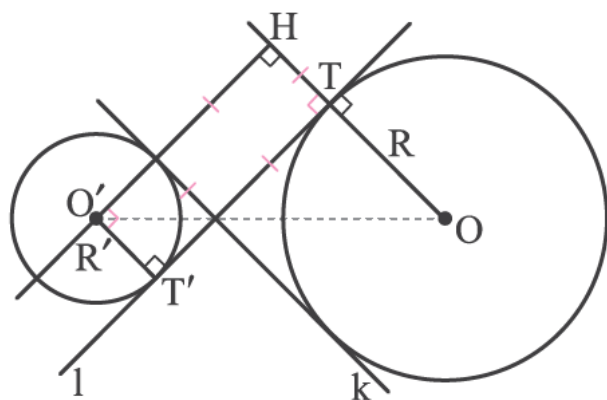
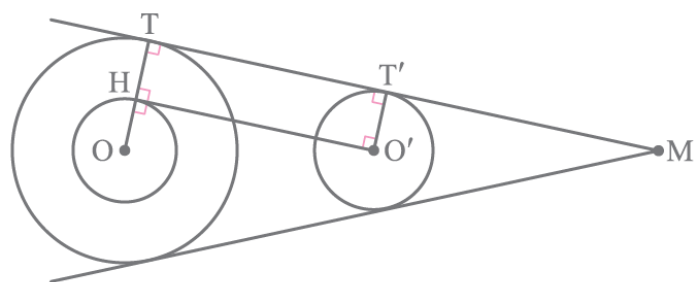
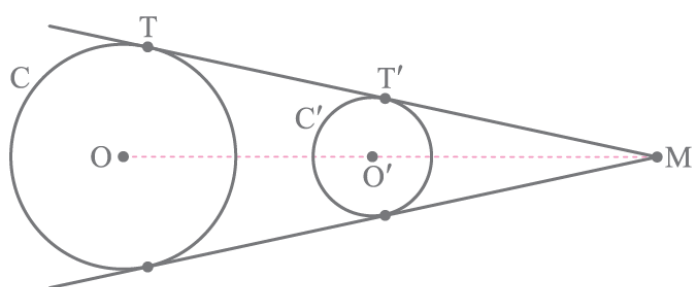
۴ (۱)

$\frac{1}{9}$ (۴)

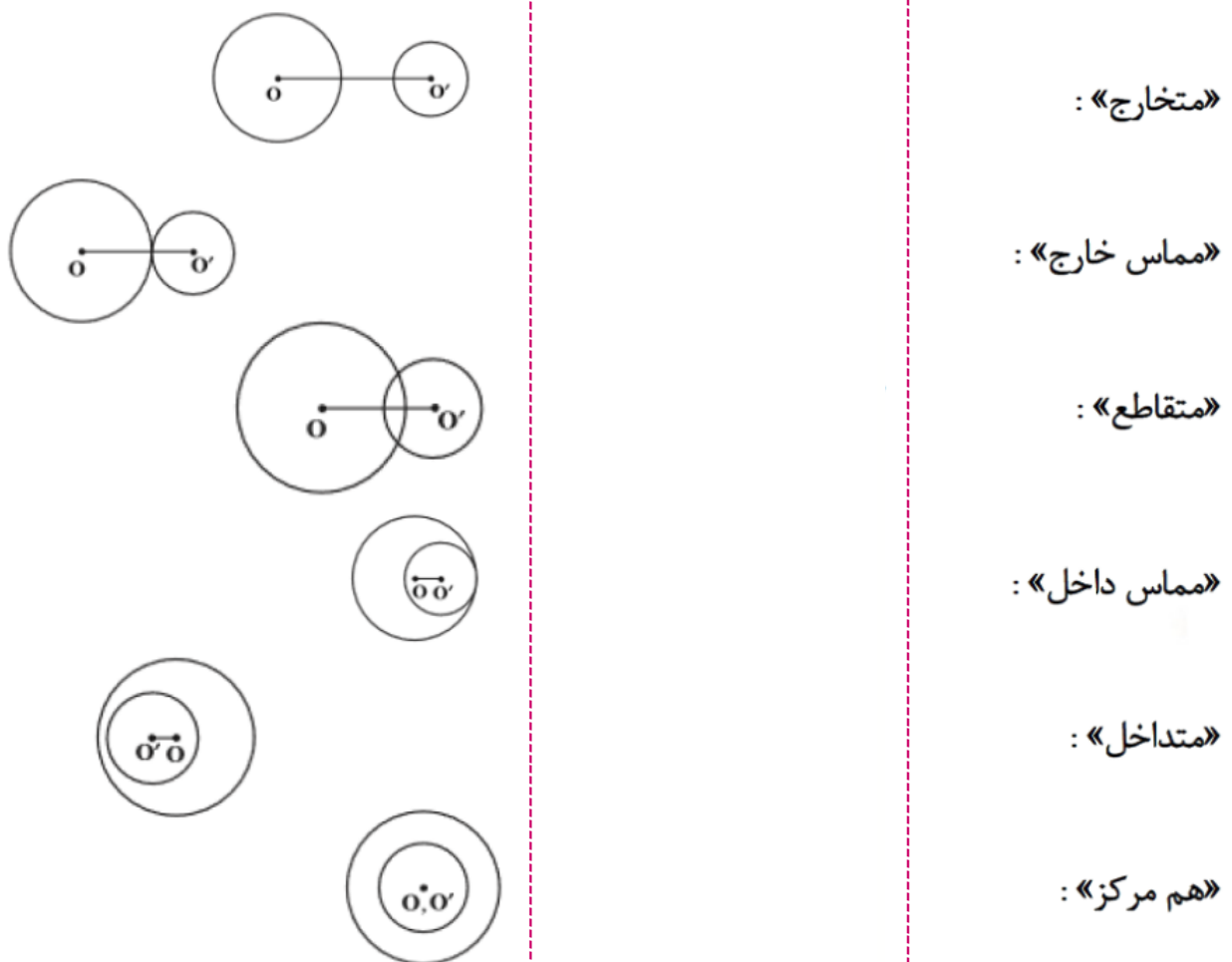
۹ (۳)



مماس مشترک



فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:



۴۲ اگر دو دایره را به مراکز $O(2, -3)$ و $O'(1, 4)$ داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی دوم ۳ باشد، دو دایره در چه وضعیتی نسبت به هم قرار دارند؟

۴۳

دو دایره $C(O, 17)$ و $C'(O, 10)$ مفروضند. خط قاطع d که در دایره C وترى به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایره C' وترى با کدام طول پدید می‌آورد؟
 ۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

۴۴

دو دایره C_1 و C_2 به شعاع ۵ مماس خارجند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره C_1 مماس باشد و در دایره C_2 وترى به طول ۶ جدا کند؟

۱۴ بی شمار

۱۳ ۴

۱۶ ۲

۱ صفر

۴۵

دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۲ مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۱۲ واحد باشد، بیش‌ترین فاصله بین نقاط روی دو دایره از هم چقدر است؟

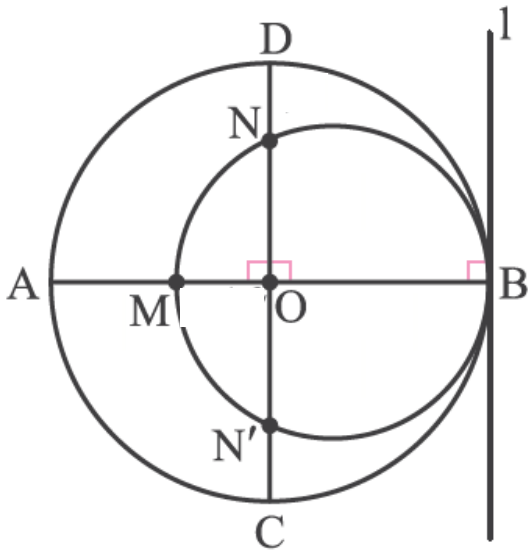
۱۴ ۲۳

۱۳ ۲۲

۱۶ ۲۱

۱ ۲۰

۴۶ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

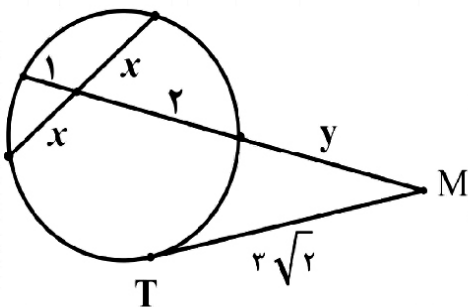


ثابت کنید هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: خرداد ۱۴۰۳

۱/۵ نمره $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

در شکل زیر MT به طول $۳\sqrt{۲}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید. خرداد ۱۴۰۳

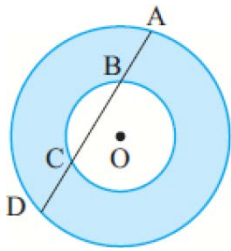
۱/۲۵ نمره



دکترها مسیح



۴۷ در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB = 4$ و



$BC = 5$ ، آنگاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۲) 6π (۱) 20π (۴) 25π (۳) 16π

۴۸ نقطه P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۴ تقسیم کرده است.

(سراسری ریاضی - ۸۲)

طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه P کدام است؟

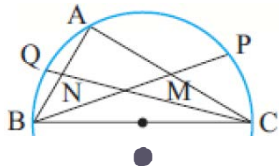
(۴) ۱۵

(۳) ۱

(۲) ۹



۴۹ در شکل روبه‌رو، $BC = 6$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$ برابر با کدام است؟



(۱) ۴

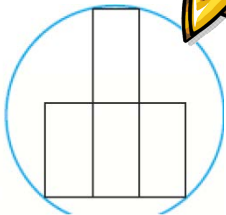
(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶

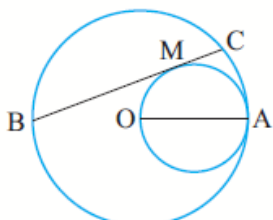


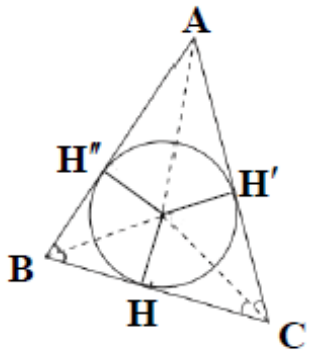
۵۰ چهار تا مستطیل 2×4 مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟

(۲) $\sqrt{15}$ (۱) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{17}$ (۳) $\sqrt{16}$

۵۱ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \cdot MC$ برابر کدام است؟

(سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۴)

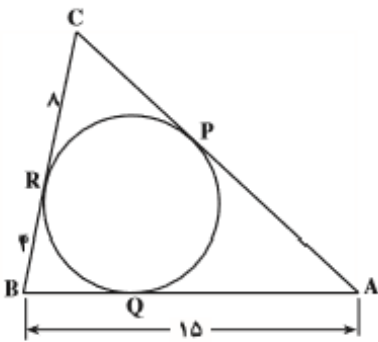
(۱) MO^2 (۲) MA^2 (۳) OA^2 (۴) $MA \cdot MO$



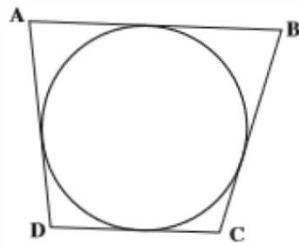
$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$r_b = \frac{S}{P-b}$$

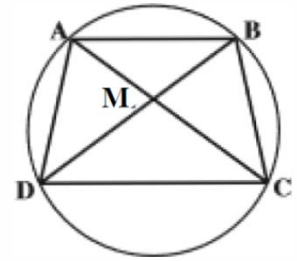
$$r_c = \frac{S}{P-c}$$

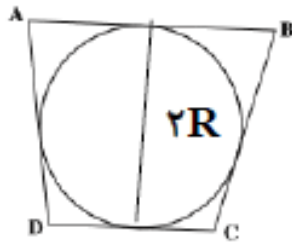


چند ضلعی محیطی



چند ضلعی محاطی





$$(2R)^2 = AB \times CD$$

ارتفاع

۵۲ یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۳

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۵۴

یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۵

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ ، طول خط المکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۵۶ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $4/8$ (۲) ۵ (۳) $9/6$ (۴) ۱۰

۵۷ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۵۸

اگر در یک مثلث قائم الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

$$(۱) \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \quad (۲) \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \quad (۳) \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad (۴) \frac{5-\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$$

۵۹

در مثلث ABC اگر $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 40$ باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

$$(۱) 1 \quad (۲) 4 \quad (۳) \sqrt{5} \quad (۴) \sqrt{3}$$

نمره ۱/۲۵

در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید. **خرداد ۱۴۰۳**

جاست تست

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و تعاریف و قضایای اولیه

۱ یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

تیر ماه ۱۴۰۲

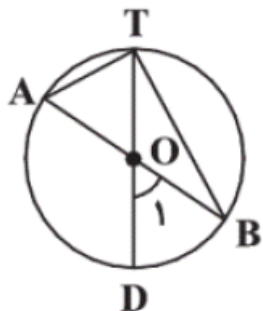
۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

۲ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه O_1 کدام است؟

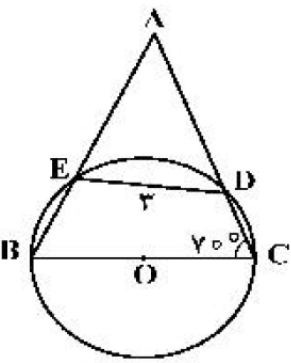


۶۵° (۱)

۶۰° (۲)

۵۰° (۳)

۴۵° (۴)



۳ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ریاضی ۱۴۰۰

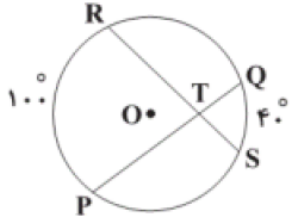
(۱) ۸۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۴ در دایره $C(O, r)$ وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

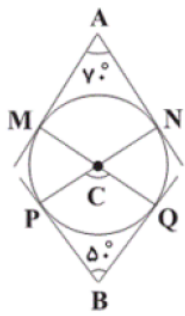


(۱) 70° (۲) 35° (۳) 30° (۴) 40°

۵ دایره $C(O, r)$ و خط ℓ به فاصله $ra + 1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

دکترها مسیح

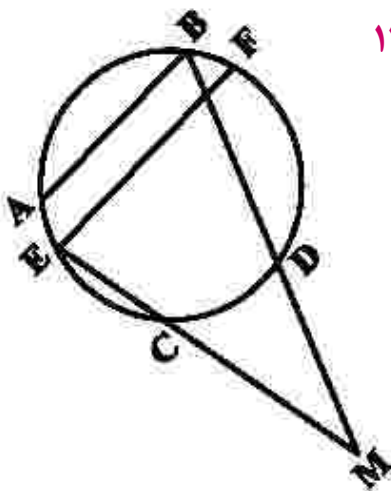


۶ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

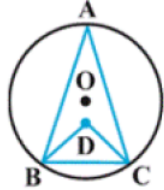
(۱) 100° (۲) 120° (۳) 80° (۴) 140°

۷ در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 80^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر $\angle BME = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\angle ABD$ چند درجه است؟

تیرماه ۱۴۰۱

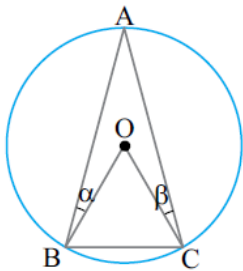
(۱) $71, 25$ (۲) 74 (۳) 75 (۴) $78, 75$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\hat{BDC} = 100^\circ$ ، آن گاه کمان BC چند درجه است؟



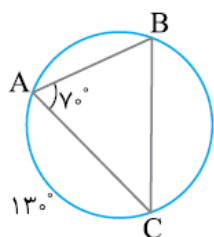
- (۱) ۲۰
(۲) ۸۰
(۳) ۶۰
(۴) ۴۰

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



- (۱) 10°
(۲) 20°
(۳) 30°
(۴) 40°

۱۰ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟



- (۱) 70°
(۲) 60°
(۳) 65°
(۴) 45°

۱۱) دایره‌ی $C(O, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

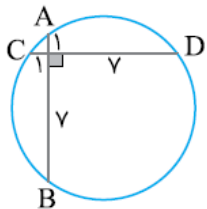
۱۲) مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۵

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۶



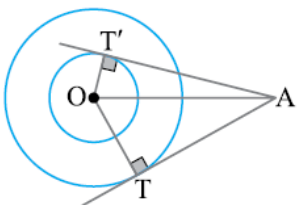
۱۳) مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

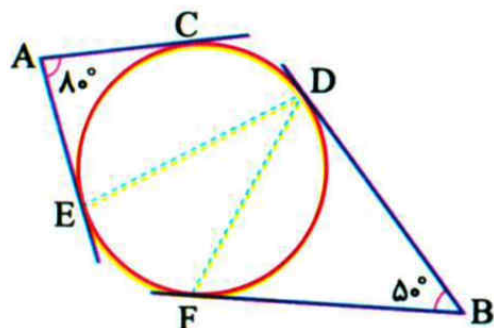
(۴) ۲۰

(۳) ۱۶



۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه EDF چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

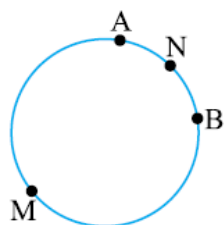
۱۵

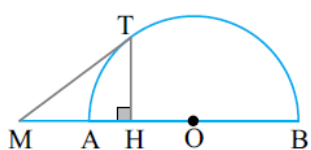
در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

 $\frac{1}{3}$ (۲)

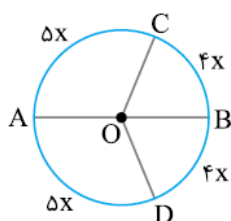
 $\frac{1}{5}$ (۴)

 $\frac{1}{4}$ (۱)

 $\frac{1}{6}$ (۳)




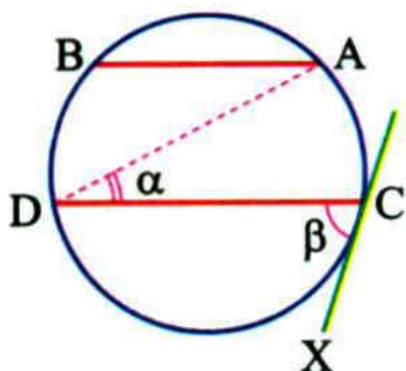
۱۶ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ 

۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150° (۱) 160° (۴) 130° (۳) 140°

۱۸ در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟



سراسری ۹۸

(۱) ۵۰

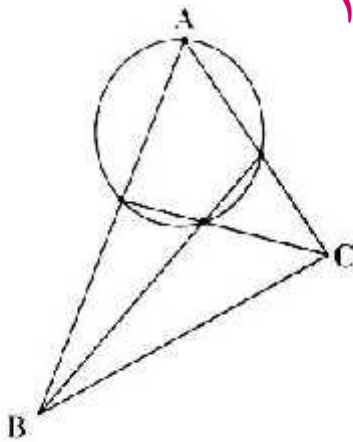
(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵

۱۹ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره معاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

۲۰ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴

جاست تست

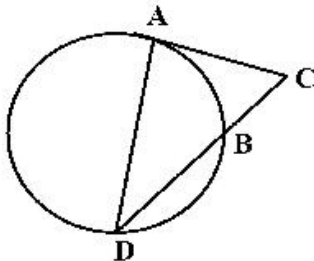
دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی در دایره

۱ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۲ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

سراسری ۱۴۰۰

۳ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ است. خط‌المركزین دو دایره چند واحد است؟

$$7\sqrt{6} \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$12\sqrt{2} \quad (1)$$

سراسری ریاضی ۱۳۹۱

۴ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

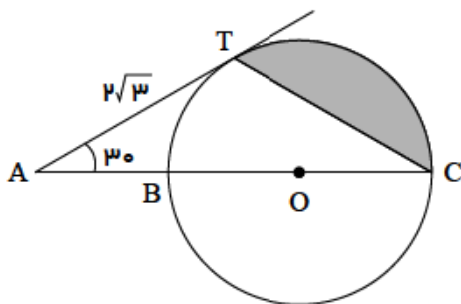
$$10 \quad (4)$$

$$9/6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4/8 \quad (1)$$

۵ در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشورخورده چقدر است؟



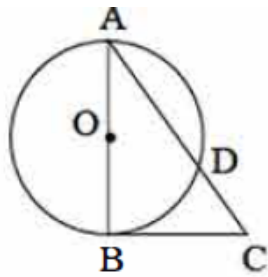
$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (p)$$

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \quad (k)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

۶ در شکل روبه‌رو پاره‌خط BC مماس بر دایره، زاویه $\hat{C} = 60^\circ$ و اندازه CD برابر $2\sqrt{3}$ واحد می‌باشند. مساحت دایره چقدر است؟



۲۴π (۲)

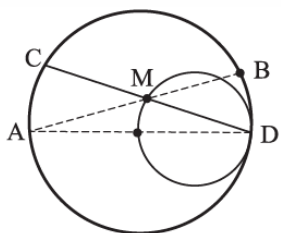
۴۰π (۴)

۳۶π (۱)

۱۸π (۳)

۷ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$

است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟



سراسری
ریاضی ۹۹

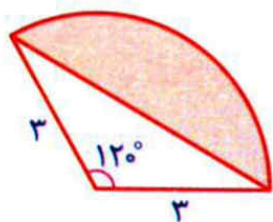
۹ (۲)

۱۲ (۴)

۸ (۱)

۶ (۳)

۸. مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (2)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

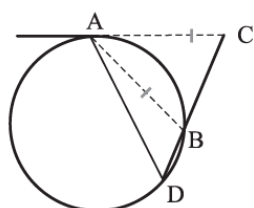
۹. اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, 13)$ و $C'(O', 3)$ برابر 60° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$24 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$



۱۰. در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (1)$$

$$BD = AC \quad (2)$$

$$BC = BD \quad (3)$$

$$DA = DC \quad (4)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی

باشد، زاویه A چند درجه است؟

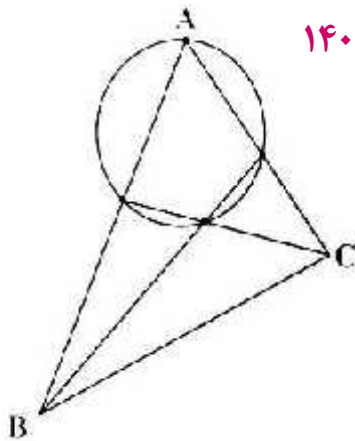
(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

دی ماه ۱۴۰۱



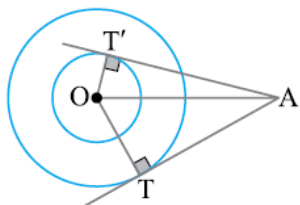
۱۲ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

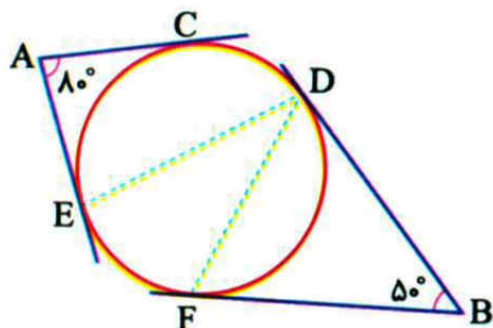
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

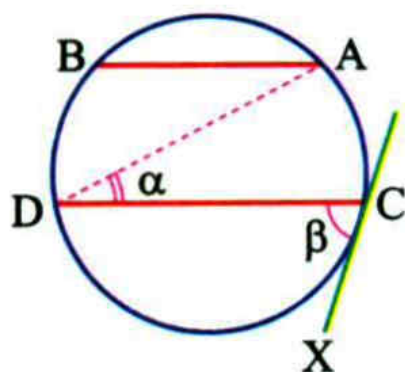
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸

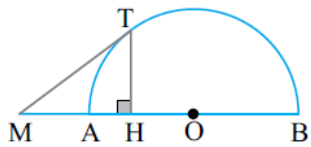


۵۰ (۱)

۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)



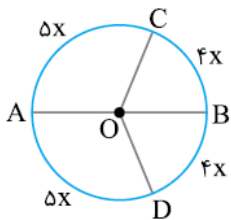
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$



۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۸ فرض کنید خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهای یک دایره و خط $4x+3y+5=0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

(۴) $\sqrt{5}-2$

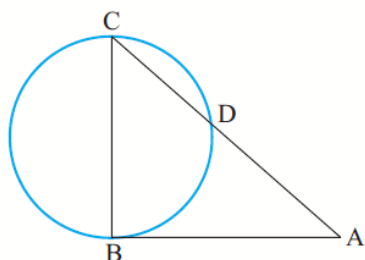
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}-1$

سراسری ۱۴۰۰

۹ خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = 6$ مماس است. اگر $CD = 4$ ، طول پاره خط AD کدام است؟



(۱) ۳

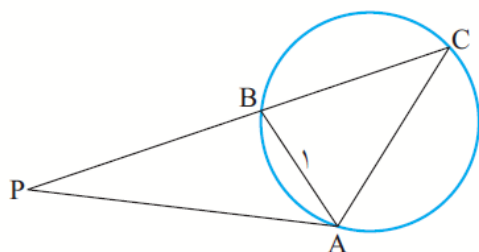
(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹



۲۰ در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(۴) ۲

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی و چند ضلعی محاطی و محیطی

۱ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

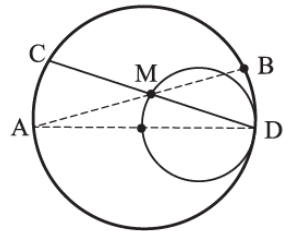
۸ (۱)

۶ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۴)

سراسری
ریاضی ۹۹



۲ فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های $a-1$ و a^2-2 ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

۳ (۱)

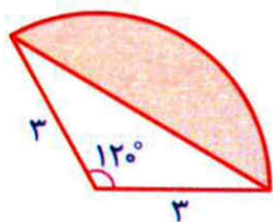
$\frac{13}{3}$ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

سراسری ۱۴۰۰

۳ مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

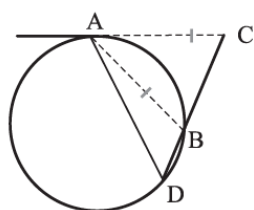
۴ اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, ۱۳)$ و $C'(O', ۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۵ - در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

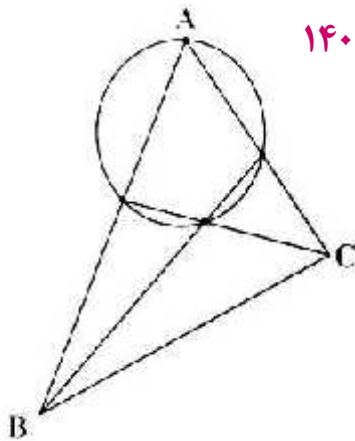
$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۶ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

۷

اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴

۸

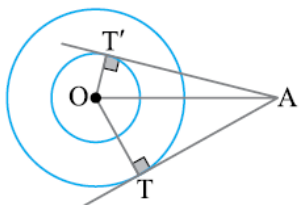
مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

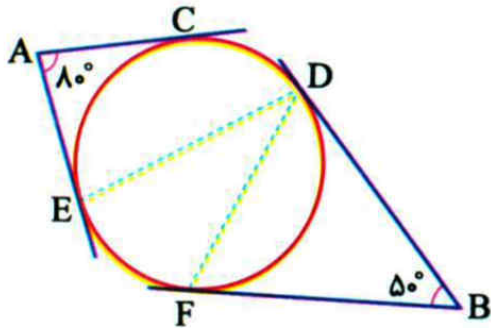
(۴) ۲۰

(۳) ۱۶



۹. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

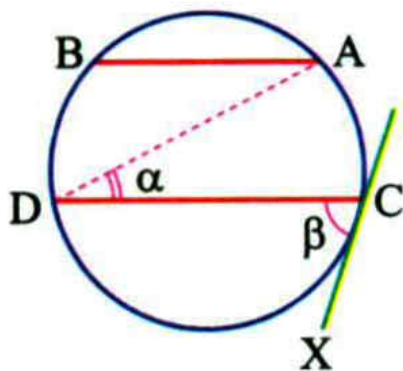
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۰. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸



۵۰ (۱)

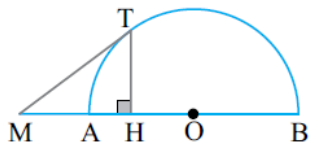
۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)

۱۱

در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



(۲) $\frac{1}{6}$

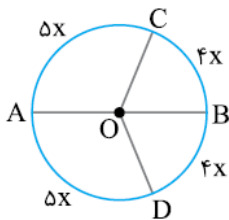
(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۱۲

در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۳

یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های ۸ و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت 15π محیط است. مقدار h کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) $\frac{32}{3}$

(۲) ۸

(۱) $\frac{25}{3}$

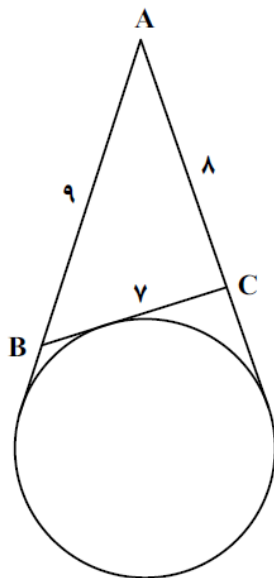
سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

۱۴ طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها $2\frac{1}{\pi}$ سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

(۴) $2\frac{1}{75}$ (۳) $2\frac{2}{25}$ (۲) $1\frac{1}{25}$ (۱) $1\frac{1}{25}$

۱۵ در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

(۱) $7\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (۲) $4\frac{1}{8}\sqrt{5}$ (۳) $3\frac{1}{6}\sqrt{2}$ (۴) $2\frac{1}{4}\sqrt{5}$

۱۶

یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

(۱) ۵۴۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۳۶۰

سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

۱۷

یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۱) $\frac{12}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

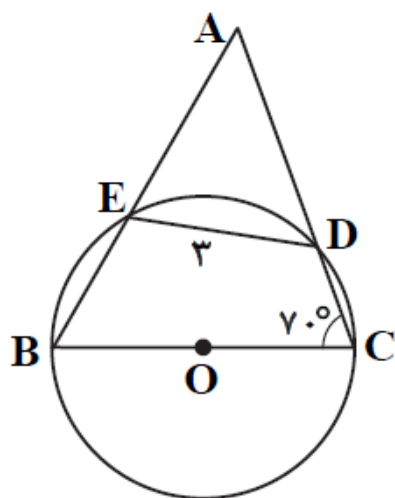
(۳) $\frac{24}{\sqrt{3}}$

(۴) $\frac{32}{\sqrt{3}}$

سراسری
دی ماه ۱۴۰۱

۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) ۸۰

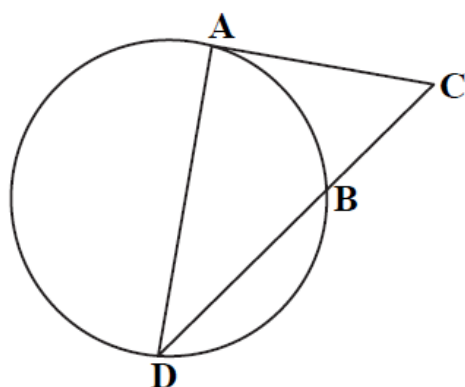
(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۱۹ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) $\sqrt{2}$

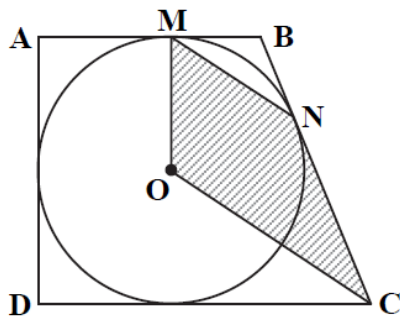
(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۰. مطابق شکل زیر ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است.

اگر زاویه $\hat{MBN} = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی $OMNC$ کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

(۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

(۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

(۴) $۹\sqrt{۳}$

نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آزمون اول هندسه یازدهم - زوایا و روابط طولی در دایره

پایه تحصیلی :

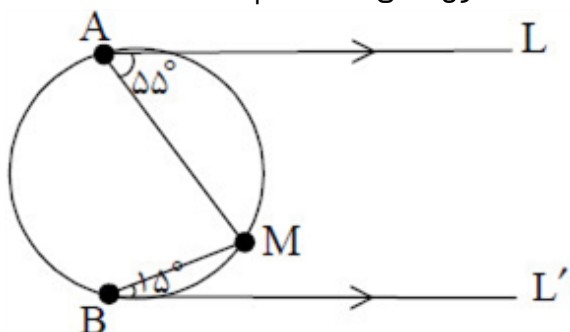
زمان آزمون :

نام دبیر : رها مسیح

تاریخ برگزاری

کارنامه خرد

۱ در شکل مقابل $L \parallel L'$ و شعاع دایره برابر 30° واحد است. با فرض $\pi = 3$ ، طول کمان $\widehat{AB}$ کدام است؟



۶۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

۲ در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ طول مماس مشترک خارجی 12 و طول مماس مشترک داخلی $2\sqrt{15}$ و اندازه خط مرکزین $4\sqrt{10}$ است. اختلاف مساحت دو دایره C و C' ، کدام است؟

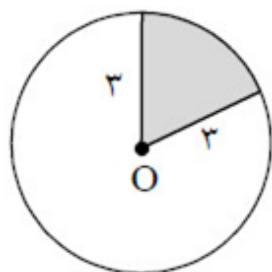
50π (۴)

40π (۳)

30π (۲)

20π (۱)

۳ اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، محیط قسمت سایه خورده کدام است؟ (در محاسبه نهایی محیط π را 3 فرض کنید.)



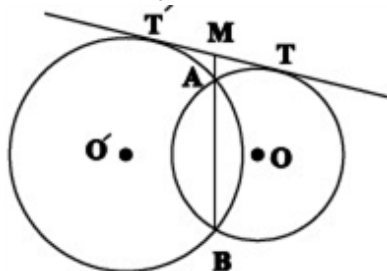
۷ (۴)

۶ (۳)

$10/5$ (۲)

$7/5$ (۱)

۴ در شکل مقابل فاصله مراکز دو دایره متقاطع برابر $OO' = 9$ است. وتر مشترک $AB = 5$ را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در نقطه M قطع کند. اگر $AM = 2$ باشد، اختلاف اندازه شعاع‌های دو دایره کدام است؟



$4\sqrt{2}$ (۴)

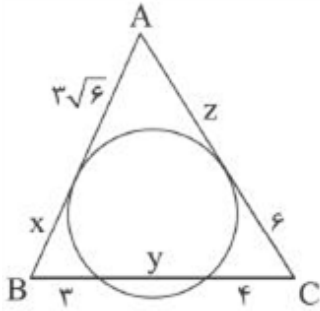
۵ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۱)

۵

در دایره شکل زیر، دو ضلع AB و AC از مثلث ABC بر دایره مماس‌اند. حاصل $x + y + z$ برابر کدام است؟



۴ $5 + 8\sqrt{6}$

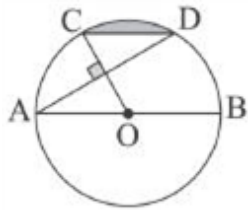
۳ $8\sqrt{6}$

۲ $5\sqrt{6}$

۱ $5 + 5\sqrt{6}$

۶

در دایره به مرکز O و شعاع ۶، دو وتر AB و CD موازی‌اند. مساحت قطعه رنگ‌شده برابر کدام است؟



۴ $6\pi - 9\sqrt{3}$

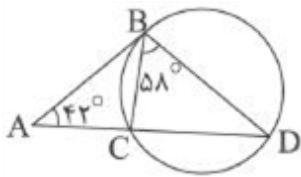
۳ $6\pi - 6\sqrt{3}$

۲ $8\pi - 8\sqrt{3}$

۱ $8\pi - 4\sqrt{3}$

۷

در شکل زیر اندازه زاویه ظلی $\widehat{ABC}$ برابر کدام است؟



۴ 29°

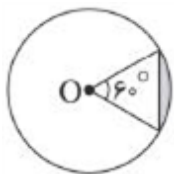
۳ 21°

۲ 36°

۱ 40°

۸

در شکل زیر مساحت قطعه رنگی برابر $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ است. مساحت دایره کدام است؟



۴ π

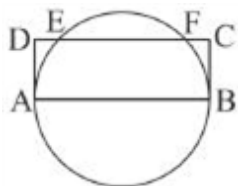
۳ 4π

۲ 6π

۱ 9π

۹

در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF کدام است؟



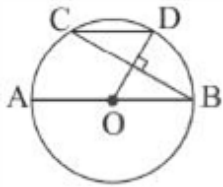
۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

۱۰ در دایره $C(O, 3)$ $CD \parallel AB$ است. طول کمان $\widehat{CD}$ کدام است؟



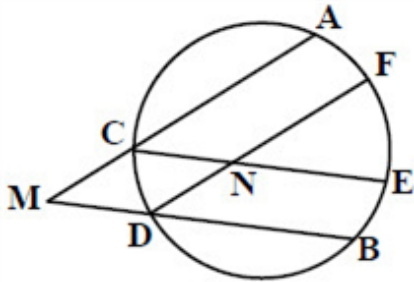
π (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{3\pi}{2}$ (۲)

2π (۱)

۱۱ در شکل مقابل، $BD \parallel CE$ ، $AC \parallel DF$ ، $\widehat{AC} = 85^\circ$ و $\widehat{BD} = 75^\circ$ است. اگر $\widehat{CNF} = 135^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{EF}$ چند درجه است؟



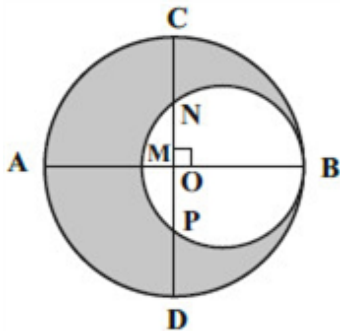
۳۰ (۴)

۳۵ (۳)

۴۰ (۲)

۴۵ (۱)

۱۲ در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = 8$ و $CN = 6$ باشد، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟



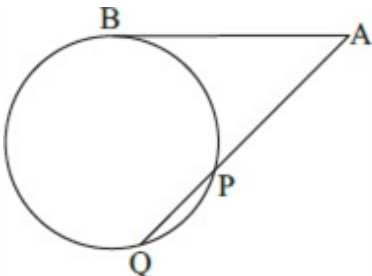
66π (۴)

64π (۳)

56π (۲)

54π (۱)

۱۳ در دایره $C(O, 5)$ پاره خط AB در نقطه B بر دایره مماس است. اگر $AB = 6$ و $AP = 4$ باشند، آنگاه طول کمان PQ برابر کدام است؟



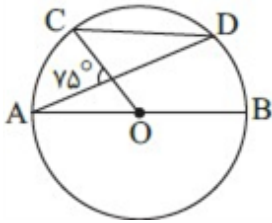
$\frac{5}{6}\pi$ (۴)

$\frac{6}{5}\pi$ (۳)

$\frac{4}{3}\pi$ (۲)

$\frac{5}{3}\pi$ (۱)

۱۴ در شکل مقابل وتر CD با قطر AB موازی است. زاویه $\widehat{DBA}$ چند درجه است؟



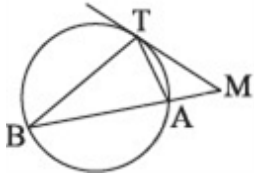
۶۰ (۴)

۶۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۵ در شکل، MT بر دایره مماس است. اگر $AT = ۲$ ، $BT = ۴$ و $MA = ۱/۵$ باشند، آنگاه اندازه AB کدام است؟



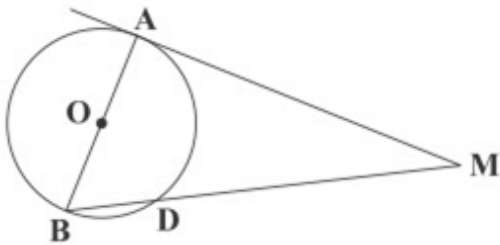
۴ (۴)

۴/۵ (۳)

۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۱۶ در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع آن ۴ واحد است. اگر $BD = ۴$ باشد، طول مماس MA کدام است؟



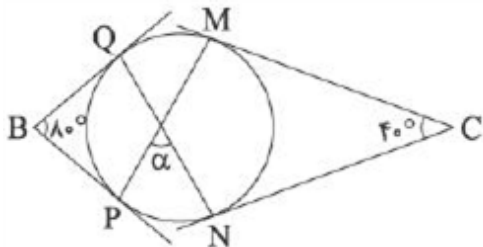
$۱۶\sqrt{۳}$ (۴)

$\sqrt{۳}$ (۳)

$۴\sqrt{۳}$ (۲)

$۸\sqrt{۳}$ (۱)

۱۷ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه α چند درجه است؟



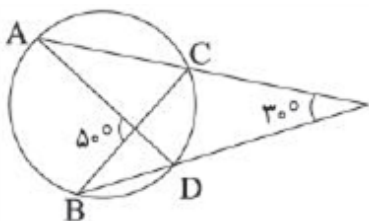
۳۰° (۴)

۵۰° (۳)

۶۰° (۲)

۴۵° (۱)

۱۸ در دایره $C(O, ۶)$ ، طول کمان AB برابر کدام است؟



۳π (۴)

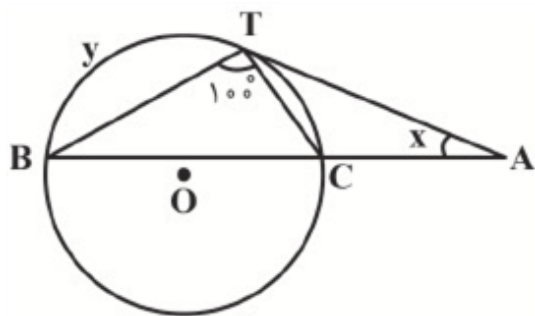
$\frac{۸}{۳}\pi$ (۳)

$\frac{۳}{۲}\pi$ (۲)

۶π (۱)

۱۹

در شکل مقابل، $\widehat{A} = x$ و $\widehat{BT} = y$ است. اگر $\widehat{B} = 2\widehat{A}$ و AT در نقطه‌ی T بر دایره مماس باشد، حاصل $y - x$ کدام است؟



۸۰° (۴)

۹۰° (۳)

۶۰° (۲)

۵۰° (۱)

۲۰

در دایره‌ای به قطر AB، وتر AC با قطر AB زاویه‌ی 64° می‌سازد. نقطه‌ی D را روی کمان BC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC = CD$ ، زاویه‌ی BAD چند درجه است؟

۳۵ (۴)

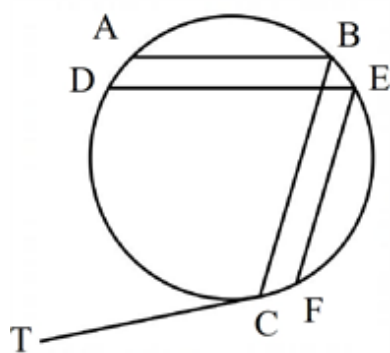
۳۶ (۳)

۳۷ (۲)

۳۸ (۱)

۲۱

در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ و $AB \parallel DE$ است. اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 100^\circ$ و $\widehat{EF} = 80^\circ$ باشد، اندازه $\widehat{BCT}$ چند درجه است؟



۱۱۰ (۴)

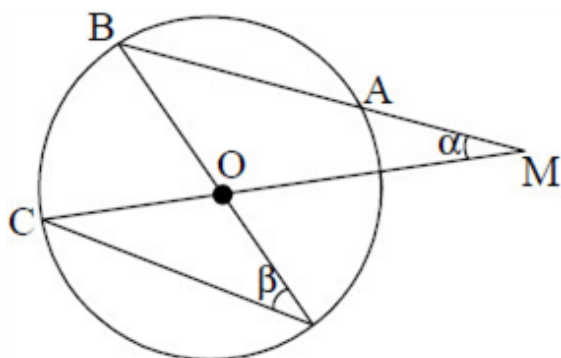
۱۰۰ (۳)

۹۵ (۲)

۹۰ (۱)

۲۲

از نقطه‌ی M خارج دایره $C(O, R)$ ، خطی چنان رسم شده است که دایره را در نقاط A و B قطع کرده و $MA = R$ است. اگر $\alpha = 22^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه β کدام است؟



۲۲° (۴)

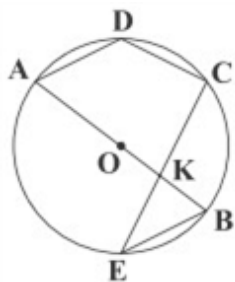
۲۷° (۳)

۳۰° (۲)

۳۳° (۱)

۲۳

در شکل زیر O مرکز و AB قطر دایره و $AD = DC = BE$ می‌باشد. اگر $\widehat{AKE} = 75^\circ$ باشد، زاویه ADC چند درجه است؟



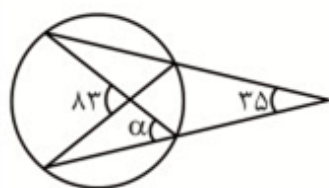
۱۰۰ (۴)

۱۰۵ (۳)

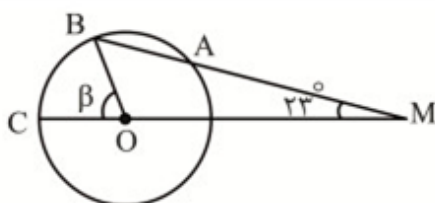
۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

۲۴ با فرض $MA = R$ (R شعاع دایره) در شکل‌های زیر، اندازه $\alpha + \beta$ کدام است؟



۱۳۲ (۴)

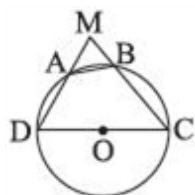


۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۱۸ (۱)

۲۵ در شکل زیر O مرکز دایره است و $CD = 2AD$. اگر $\widehat{BCD} = 50^\circ$ باشد، زاویه M چند درجه است؟



۷۰° (۴)

۶۰° (۳)

۵۰° (۲)

۴۵° (۱)

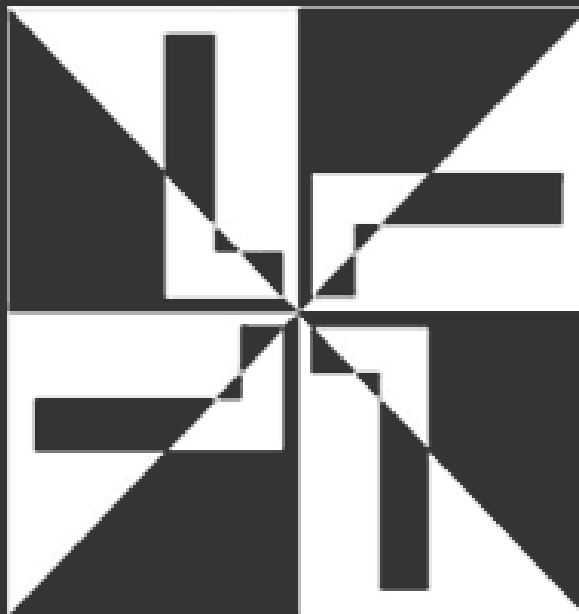
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴

تبدیلات هندسی

نمره در امتحان نهایی
شش نمره

تعداد تست
یک تست

پیش نیاز
تبدیلات هفتم



فصل دو هندسه یازدهم

انتقال، بازتاب ،
دوران و تجانس

$$F(x) = y$$

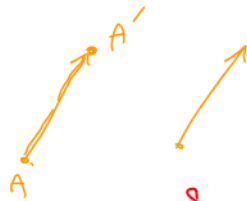
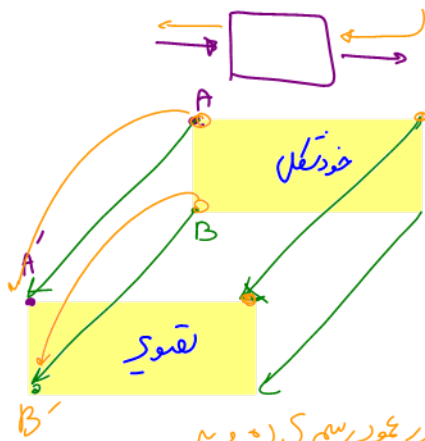
ورودی $\uparrow$ $\downarrow$ خروجی

$$F(x, y) = (x', y')$$

تبدیل هندسی

رابطه ای است که به هر نقطه از صفحه یک نقطه را تغییر می‌دهد (تصویر)

انتقال و هر نقطه تصویر دقیقاً از یک نقطه بدست آمده است

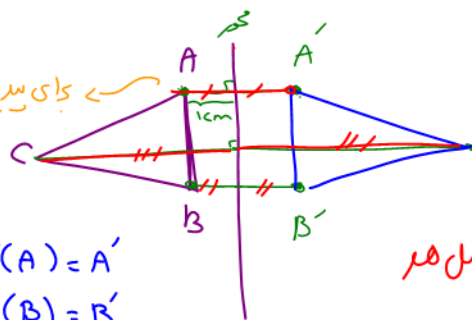


$$\vec{v} \text{ بردار انتقال}$$

$$\vec{AA'} = \vec{v} \quad T(A) = A'$$

بردار واحد هر نقطه به تصویرش

جای پیدا کردن تصویر به محور محور رسم کردن و به همان اندازه امتداد می‌دهیم



$$S(A) = A'$$

معور بازتاب

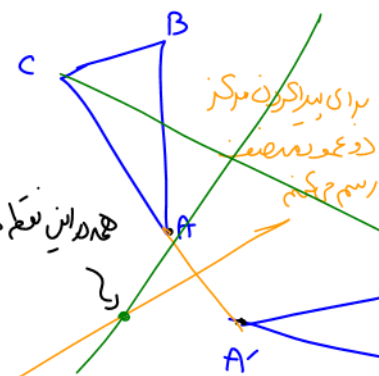
عمود منصف پایه خط واصل هر نقطه و تصویرش

$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

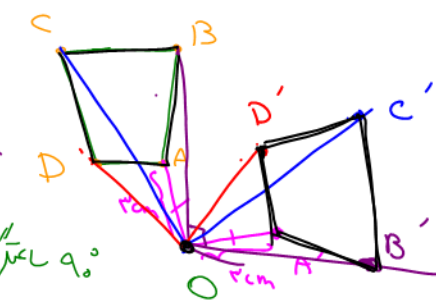
$$T(C) = C'$$

۳۰° پاد ساعتگرد نسبت به O



برای پیدا کردن مرکز دو عمود منصف رسم می‌کنیم

همه در این نقطه همساز



۹۰° پاد ساعتگرد

فاصله نقطه تا مرکز و تصویرش تا مرکز برابر است

$$R(A) = A'$$

$$|OA| = |OA'|$$

مرکز دوران

$$\angle AOA' = \alpha$$

α زاویه دوران (زاویه بین نیم خط رأس و مرکز دوران) و (تصویر و مرکز دوران)

جهت $\leftarrow$ ساعتگرد
پاد ساعتگرد

مرکز دوران روی عمود منصف پایه خط واصل هر نقطه و تصویرش قرار دارد

$$T(A) = A'$$

تبدیل T نقطه A را به نقطه A' تغییر می‌دهد

تجانس

اگر از جنس هم روی به اندازه مختلف

مرکز تجانس O و A و A' در یک سمت O

نسبت تجانس K $\leftarrow$ اگر K مثبت است
O بین A و A'

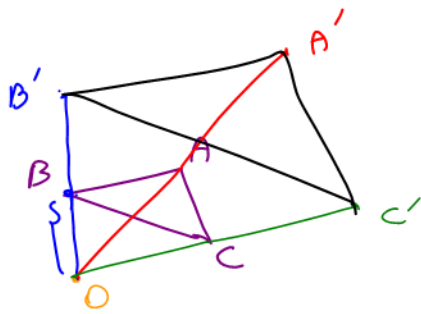
انقباض $|K| < 1$
استretch $|K| > 1$
تطبیق $|K| = 1$

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = |K|$$

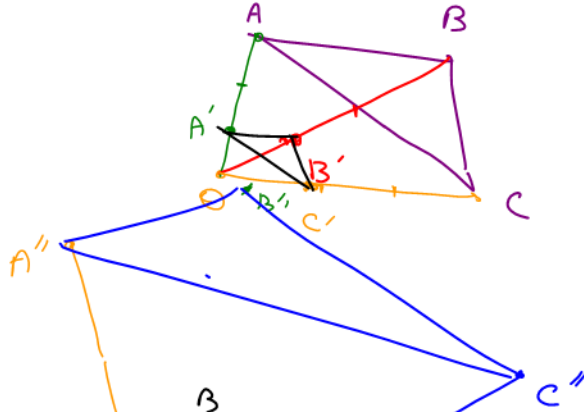
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = K$$

تعمیق متعامد

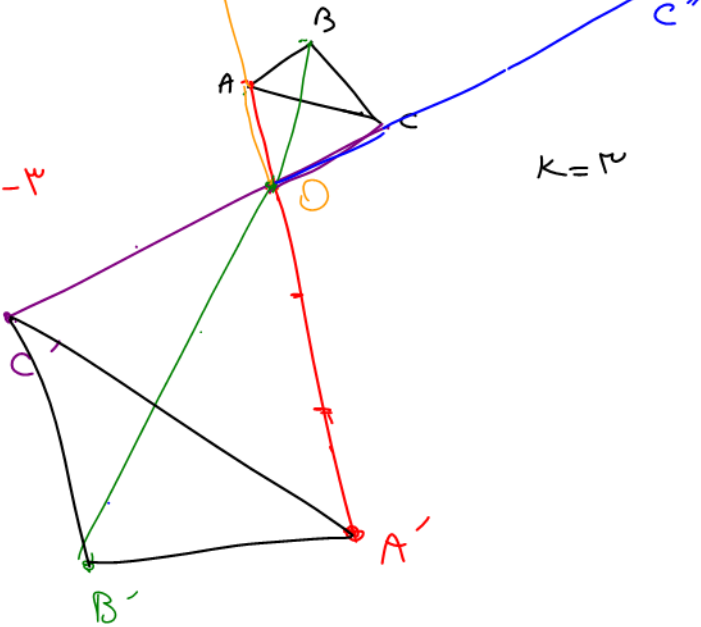
$$K = 2$$



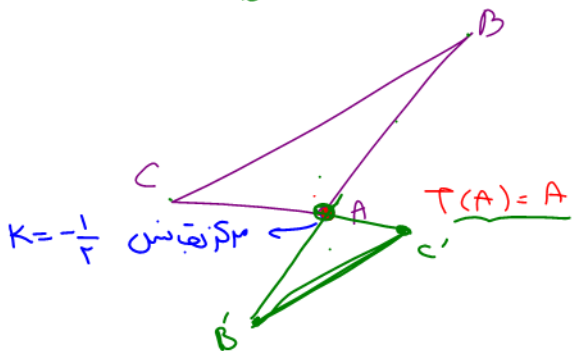
$$K = \frac{1}{2}$$



$$K = -3$$



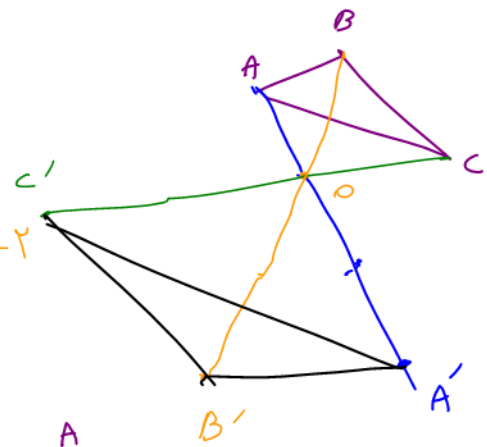
$$K = 2$$



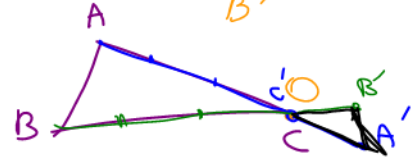
$$K = -\frac{1}{2}$$

$$T(A) = A$$

$$K = -2$$



$$K = -\frac{1}{2}$$



دکترها مسیح
هر رابطی می‌تونه باشه

$$f(x, y) = (x + y, x - 3y)$$

$$f(1, 2) = (1 + 2, 1 - 3 \times 2) = (3, -5)$$

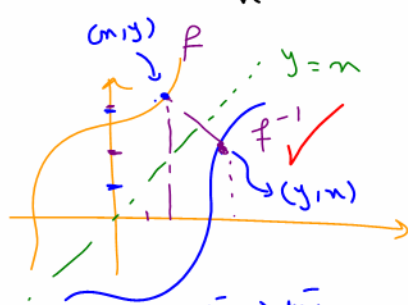
$$A(0, 0)$$

$$f(A) = A'$$

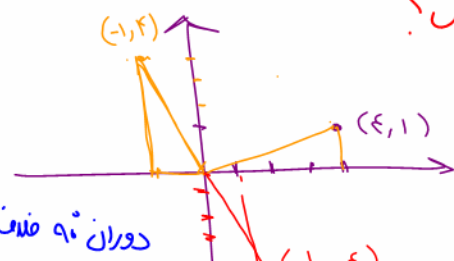
$$A'(3, -5)$$

$$f(n) = 2n$$

$$f(n) = \frac{3n-1}{n^2}$$

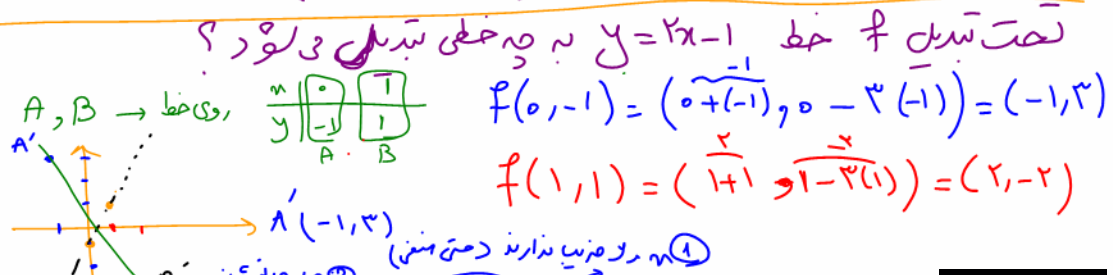


تبدیل هست
خون هر نقطه یک تصویر
و هر تصویر متعلق به یک نقطه



$$T(n, y) = (-y, n)$$

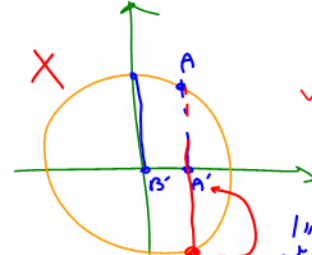
$$R(n, y) = (y, -n)$$



$$T(x, y) = (y + 2, x - 1)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+1}{2}, \frac{3y+5}{2} \right)$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}, y + \frac{5}{2} \right)$$



هر نقطه را به نقطه ای با طول یک
ردی نور n نظم کنید

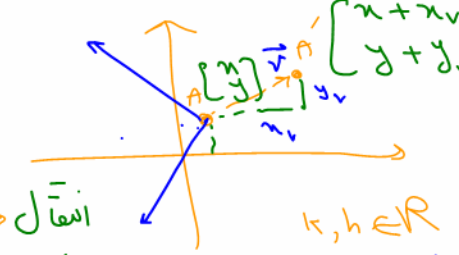
آیا این یک تبدیل است؟

هر نقطه را به نقطه ای با طول یک
ردی نور n نظم کنید

$$T(x, y) = (x + 1, 1 + y)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+1}{2}, \frac{3y+5}{2} \right)$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}, y + \frac{5}{2} \right)$$



$$T(n, y) = (n + k, y + h)$$

تصویر خط $2x - 3y = 1$ را تحت تبدیل $T(x, y) = (1 - y, 2x + 2)$ به دست آورید.

$$\begin{matrix} x & y \\ \hline 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$T(-1, -1) = (1 - (-1), 2(-1) + 2) = (2, 0)$$

$$\Rightarrow T(-1, -1) = (2, 0)$$

$$T(2, 1) = (1 - 1, 2(2) + 2) = (0, 6)$$

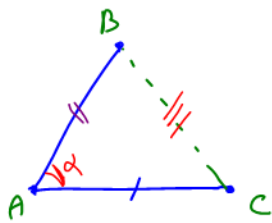
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 0}{0 - 2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$y = -3x + 6$$

در نقطه هر خط برآورد

تصویر دو نقطه را بدست آورید

معادله خط جدید را بدست آورید



شاید بکنید در مورد تبدیل
طولها، اندازه زاویه
نیز حفظ می شود.

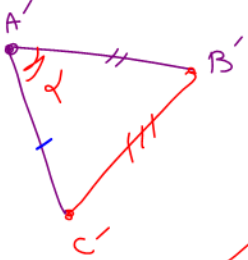
تغییر

$$S = S'$$

$$P = P'$$

$$rP = rP'$$

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

$$A = A'$$

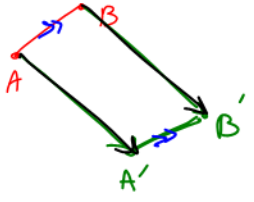
$$B = B'$$

$$C = C'$$

مقدار

طول

* ثابت کنید انتقال ~~انرژی~~ است و سبب را حفظ می کند.



$$\begin{aligned} T(A) &= A' \\ T(B) &= B' \end{aligned}$$

$$\vec{AA'} \parallel \vec{v}$$

$$\vec{BB'} \parallel \vec{v}$$

$$\vec{AA'} \parallel \vec{BB'}$$

→ A A' B' B
متوازی السطوح

①

حالت اول $v \parallel AB$

(انتقال سبب را حفظ می کند)

$$AB \parallel A'B'$$

(انتقال طول است)

$$|AB| = |A'B'|$$

$$|v| < |AB|$$



$$|AA'| = |v|$$

$$|BB'| = |v|$$

$$|AA'| = |BB'|$$

$$|AB| - |AA'| = |A'B'| - |A'B|$$

طول است

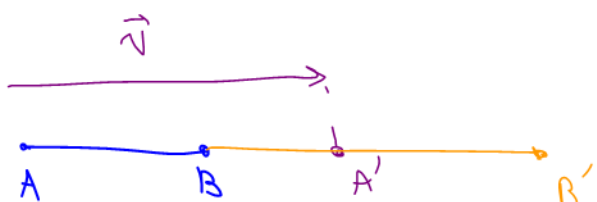
$$|AB| = |A'B'|$$

② $v \parallel AB$

$$\begin{aligned} AB/A'B' &\Leftarrow v \parallel AB \\ &\Leftarrow v \parallel A'B' \end{aligned}$$

در یک راستا

$$|v| > |AB|$$



$$|AA'| = |v|$$

$$|BB'| = |v|$$

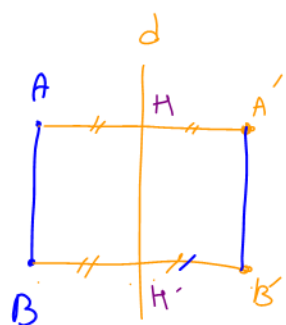
$$\Rightarrow |AA'| = |BB'|$$

$$|AB| + |AA'| = |A'B'| + |A'B|$$

$$|AB| = |A'B'|$$

نایب کیند بازتاب طولی است

1) $AB \parallel d$



$$T(A) = A'$$

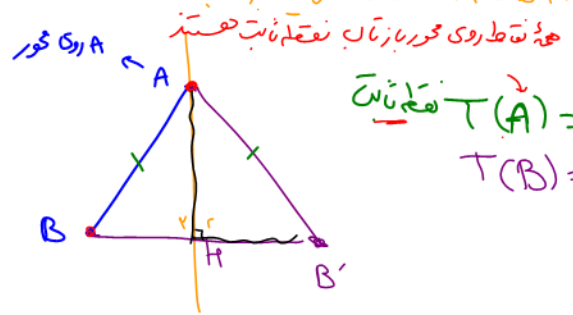
$$T(B) = B'$$

$$\left. \begin{array}{l} d \perp AA' \\ d \perp BB' \end{array} \right\} \rightarrow AA' \parallel BB'$$

$AA'B'B$ متوازی السطوح
 $AB \parallel A'B'$
 $|AB| = |A'B'|$ (طولهاست)

تعریف بازتاب $\leftarrow AH = A'H$
 دو خط موازی $\leftarrow AH = BH'$
 تعریف بازتاب $\leftarrow BH' = B'H$

$$\rightarrow AA' = BB'$$

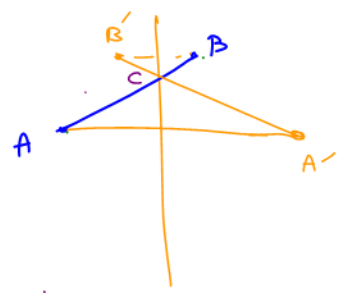


نقطه ثابت $T(A) = A$
 $T(B) = B'$

$$\left. \begin{array}{l} BH = B'H \\ AH = AH \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه}} \triangle AHB \cong \triangle AHB'$$

پس $|AB| = |A'B'|$

3) در دو طرف محور



$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

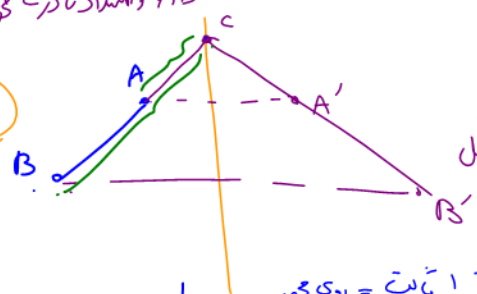
$$T(C) = C$$

طبق اثبات 1 $\rightarrow |CB| = |CB'|$
 $|CA| = |CA'|$

$$|CA| + |CB| = |CA'| + |CB'|$$

$$|AB| = |A'B'|$$

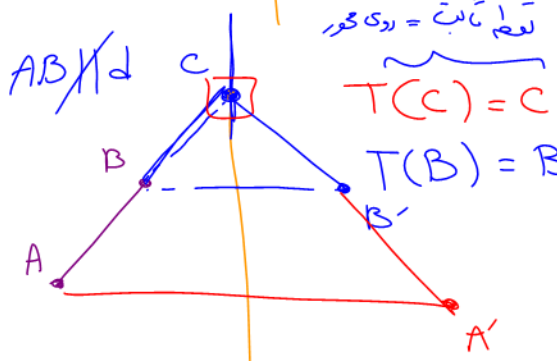
4) در یک طرف محور



طبق اثبات 1 $\rightarrow |CB| = |CB'|$
 $|CA| = |CA'|$

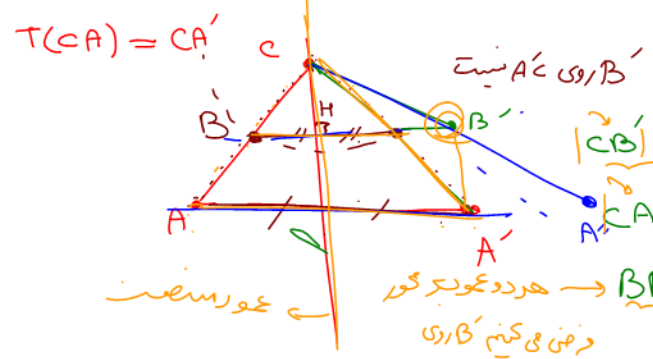
$$|CB| - |CA| = |CB'| - |CA'|$$

$$|AB| = |A'B'|$$



نقطه ثابت = روی محور
 $T(C) = C$
 $T(B) = B'$
 $\Rightarrow |CB| = |CB'|$
 طبق اثبات 1

طبق اثبات 1
 $T(C) = C$
 $T(A) = A'$
 $\Rightarrow |CA| = |CA'|$

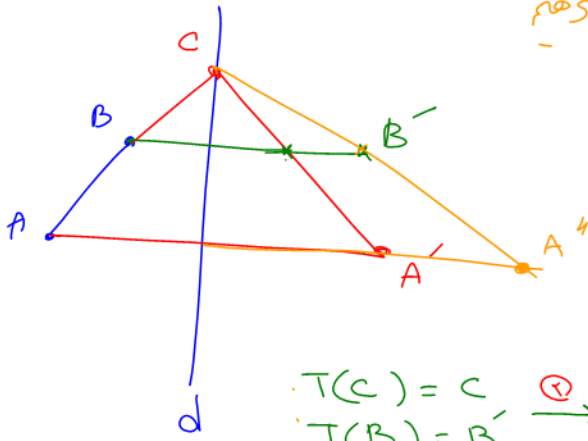


روی $A' \in B'$ نیست
 $|CB'| = |CB|$
 $|CA'| = |CA|$

A, A', A'' روی یک خط هستند

پس $\frac{CB}{CA} = \frac{CB'}{CA''} \Rightarrow CA = CA''$
 $CA = CA' \Rightarrow A' = A''$

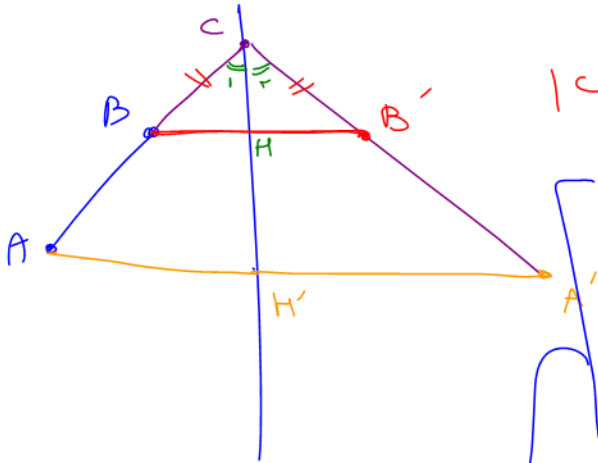
فرض کنیم B' روی راستی CA' نباشد و CB' را ادامه دهیم
 - راستی AA' را در A'' قطع کند



$$\begin{aligned} T(C) &= C \quad \textcircled{1} \Rightarrow |CB| = |CB'| \\ T(B) &= B' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(C) &= C \quad \textcircled{2} \Rightarrow |CA| = |CA'| \\ T(A) &= A' \end{aligned}$$

صورت عمودی محور بازتاب $\rightarrow BB' \parallel AA' \rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{CB'}{CA'} \Rightarrow CA = CA' \Rightarrow CA'' = CA'$
 $\left. \begin{array}{l} CA = CA' \\ A'' \text{ و } A' \text{ روی یک راسته هستند} \end{array} \right\} \Rightarrow A'' = A' \quad \text{X}$



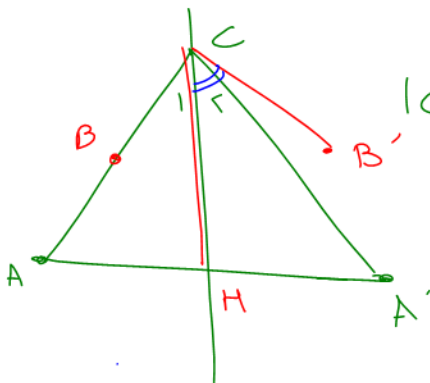
$$|CB| = |CB'| \Rightarrow \triangle CBB' \text{ متساوی الساقین}$$

$$C_1 = \hat{HCB'} \leftarrow \hat{B'CB'} = d \text{ نیمساز زاویه}$$

$$|CA| = |CA'| \rightarrow \triangle CAA' \text{ متساوی الساقین}$$

$$C_1 = \hat{HCA'} \leftarrow \hat{ACA'} = d \text{ نیمساز زاویه}$$

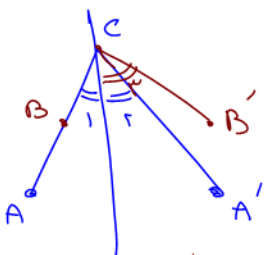
$$\hat{HCB'} = \hat{HCA'} \leftarrow \begin{array}{l} A', B' \text{ روی یک راسته هستند} \end{array}$$



$$|CA| = |CA'| \rightarrow C_1 = C_2$$

فرض خلف B روی CA' قرار گیرد $\hat{HCB'} \neq C_1$
 ندارد پس زاویه های برابر نیستند

$$|CB| = |CB'| \xrightarrow[\text{الافین}]{\text{متساوی}} \hat{HCB} = C_1$$



$$\hat{C}_3 \neq \hat{C}_2 \Rightarrow \begin{array}{l} B' \text{ روی } CA' \text{ نیست} \\ \text{فرض خلف} \end{array}$$

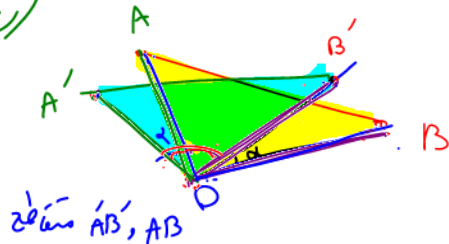
بازتاب زاویه
 را حفظ می کند

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= \hat{C}_2 \\ \hat{C}_1 &= \hat{C}_3 \end{aligned} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{C}_3 \quad \text{X}$$

رابطه کنید دوران این دو مستقیم (طول) است.

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= \widehat{A'O'B'} + \alpha \quad \} \rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} \\ \widehat{A'O'B'} &= \alpha + \widehat{A'O'B'} \end{aligned}$$

1



$$\begin{aligned} T(A) = A' &\rightarrow OA = OA' \\ &\hookrightarrow \widehat{AOA'} = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(B) = B' &\rightarrow OB = OB' \\ &\hookrightarrow \widehat{BOB'} = \alpha \end{aligned}$$

$$\widehat{AOB'} + \widehat{A'OA} = \widehat{A'O'B'}$$

$$\Rightarrow \widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$$

$$\widehat{A'OB'} + \widehat{BOB'} = \widehat{AOB}$$

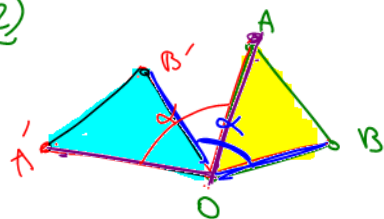
$$\begin{aligned} OA &= OA' \\ OB &= OB' \\ \widehat{AOB} &= \widehat{A'O'B'} \end{aligned}$$

منزله

$$\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$$

$$AB = A'B'$$

2



$$\begin{aligned} T(A) = A' &\rightarrow OA = OA' \\ &\hookrightarrow \widehat{AOA'} = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(B) = B' &\rightarrow OB = OB' \\ &\hookrightarrow \widehat{BOB'} = \alpha \end{aligned}$$

$$\widehat{AOB} = \alpha - \widehat{B'OA}$$

$$\widehat{A'O'B'} = \alpha - \widehat{B'OA}$$

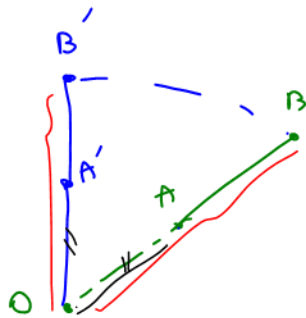
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= \widehat{A'O'B'} \\ OA &= OA' \\ OB &= OB' \end{aligned}$$

منزله

$$\triangle AOB \cong \triangle A'O'B' \rightarrow AB = A'B'$$

3 در استار AB



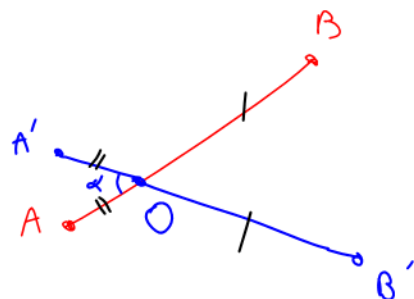
$$\begin{aligned} T(A) = A' &\rightarrow OA' = OA \\ &\hookrightarrow \widehat{AOA'} = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(B) = B' &\rightarrow OB' = OB \\ &\hookrightarrow \widehat{BOB'} = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OB - OA &= OB' - OA' \\ AB &= A'B' \end{aligned}$$

و AB با O

4



$$T(A) = A' \rightarrow OA = OA'$$

$$T(B) = B' \rightarrow OB = OB'$$

$$\begin{aligned} OA + OB &= OA' + OB' \\ AB &= A'B' \end{aligned}$$

حفظ طول پایه خط - محیط دایره و زاویه حفظ

$$AB \parallel A'B'$$

حفظ شیب

شیب را حفظ می‌کنند!

$$\vec{v} \parallel \vec{AB} \quad \vec{v} \times \vec{AB} = 0$$

موازی بودن

$$|AB| = |A'B'|$$

ایزومتري = طولیابی

$$|A'B'| < |AB| \quad |A'B'| > |AB| \quad |A'B'| = |AB|$$

ایزومتري است!

$$T(A) = A$$

نقطه ثابت

$$\vec{AA'} = \vec{v}$$

نقطه ثابت ندارد

بازتاب شیب را لزوماً حفظ نمی‌کنند

مگر خطوط موازی و عمود

بازتاب ایزومتري است

- موازی محور بازتاب
- کمی تغییر می‌دهد
- دو نقطه در خط محور
- دو نقطه یک خط محور

بازتاب

بسیار نقطه ثابت دارد

خطوط موازی محور بازتاب

$$\overline{AH} = \overline{HA'}$$

$$AA' \perp l$$

دورتاب شیب را لزوماً حفظ نمی‌کنند

$$\alpha = 180^\circ k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

ایزومتري است

در امتداد AB

در امتداد AB

در امتداد AB

دوران

هرگز دوران نقطه ثابت ندارد

نقطه ثابت دارد

تغییر شیب را در هر صورت حفظ می‌کنند

فقط و فقط در صورتی

طول ثابت می‌ماند

$$K = \pm 1$$

دوران ۱۸۰ است

تجانس

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = K$$

$$|OA'| = |K| |OA|$$

نقطه ثابت دارد = هرگز تغییر نمی‌کند

۵	سه خط دوجه دو ناموازی L_1 و L_2 و L_3 داریم. توضیح دهید که چگونه می توان پاره خطی به طول ۵ واحد رسم کرد که دو سر آن روی L_1 و L_2 باشند و موازی L_3 باشد. حل هندسی (پاره را با براری موازی L_3 به طول ۵ انتقال داد) که می تصور پاره خط L_1 انتهای پاره خط دو نقطه ی نظیر کناری خط ابتدای پاره خط است	۲
۶	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ واحد باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید. $\frac{S'}{S} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ $S' = \frac{4}{9}S$ $2P = 12$ $S - S' = S - \frac{4}{9}S = 5 \rightarrow \frac{5}{9}S = 5 \Rightarrow S = 9 = a^2 \Rightarrow a = 3$	۲
۷	نقطه B تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AB = 16$ و نقطه O روی خط L باشد و $OA = 10$ ، فاصله نقطه A از خط OB را بیابید. $S = 2 \times 24 = 48$ $S_{OBA} = 48 = \frac{AH \times OB}{2} \Rightarrow AH = \frac{48}{5} = 9,6$ $S = \frac{9 \times 16}{2} = 72$	۱/۵
۸	فقط درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) تجانس همواره اندازه زاویه را حفظ می کند. ✓ ب) بازتاب همواره شیب خط را حفظ می کند. ✗ نقطه خط عمود موازی!	۱

۲

یکی از نقاط تلاقی دو دایره C و C' نقطه A می باشد برای رسم خطی از نقطه A گذشته

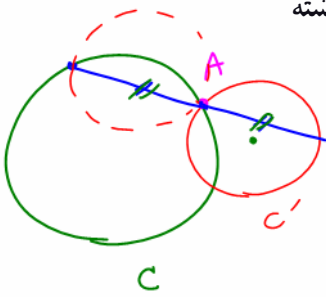
به طوری که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به کار می رود؟

(۱) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز دایره ی کوچک تر.

(۲) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز A .

(۳) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز دایره ی بزرگ تر.

(۴) بازتاب یکی از دایره ها به مرکز وسط خط الممرکزین دو دایره.



۳

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ و نقطه A بیرون آن ها مفروضند برای رسم مثلث

قائم الزاویه متساوی الساقین به رأس A بطوریکه دو رأس بعدی در دایره C و C' قرار داشته باشند کدام

تبدیل به کار می رود؟

(۱) انتقال

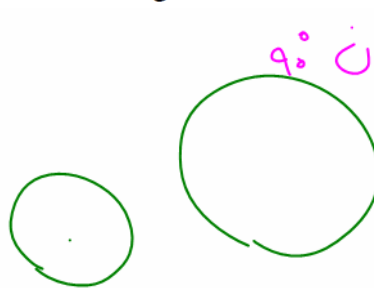
(۲) دوران

(۳) تجانس

(۴) بازتاب

$C(O, R)$

$C'(O', R')$



A

۴

دوران یافته ی خط $3x - y = 2$ به مرکز مبدأ و زاویه ی -90° کدام است؟

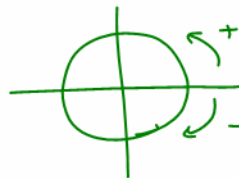
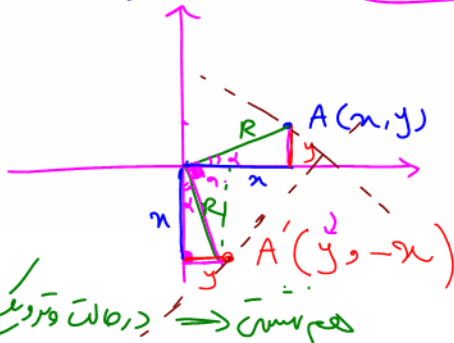
(۱) $3y - x = 2$

(۲) $3y + x = 2$

(۳) $3y - x + 2 = 0$

(۴) $3y + x + 2 = 0$

فقط برای زیبایی



x	۱	۰
y	۱	-۲
	A	B

$T(1, 1) = (1, -1)$

$T(0, -2) = (-2, 0)$

$T(x, y) = (y, -x)$

$3y = -x - 2$

$3y + x = -2 \rightarrow 3y + x + 2 = 0$

خط گذر از A' و B'

شیب = $\frac{0 - (-1)}{-2 - 1} = -\frac{1}{3}$

معادله $y = -\frac{1}{3}x + b$

$b = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

۵

در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌الممرکزیین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی

بزرگ‌تر کدام است؟

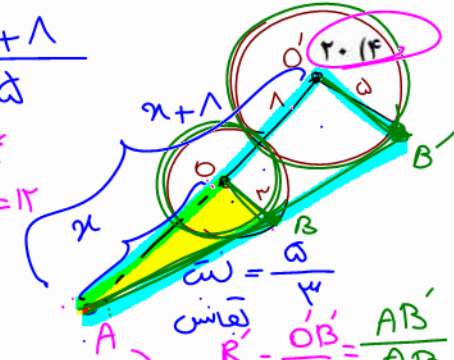
$$\frac{x}{3} = \frac{x+8}{5}$$

$$5x = 3x + 24$$

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

$$d = R + R'$$

دو دایره بیرون‌فاصله

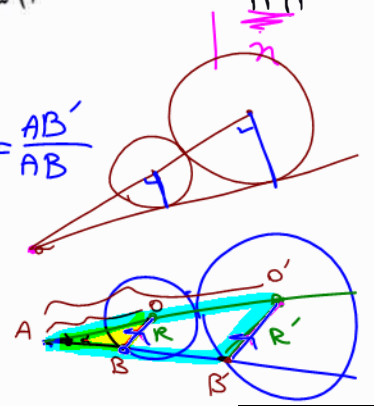


۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

$$\frac{R'}{R} = \frac{O'A}{OA} = \frac{AB'}{AB}$$



۶

نحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص

است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

(۱) تجانس (۲) دوران



(۳) بازتاب نسبت به نقطه (۴) بازتاب نسبت به خط

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'}$$

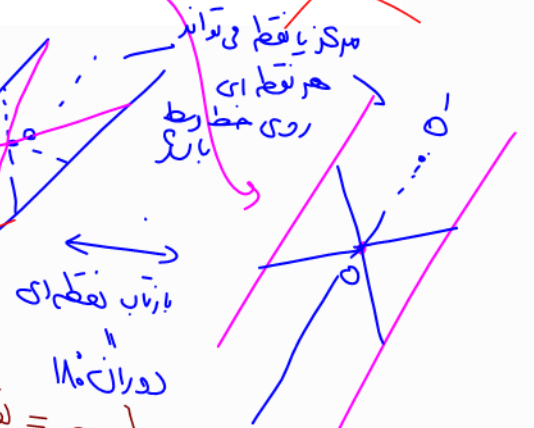
تجانس به مرکز O (نقطه دوخط)

$$K = -1$$



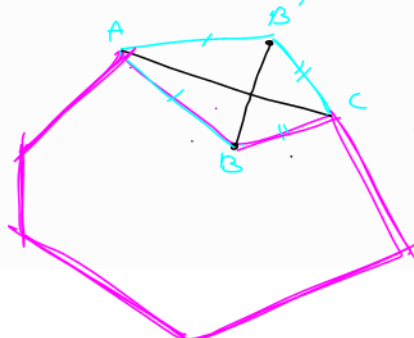
تجانس به مرکز O

$$K = -1$$



کاربرد تبدیل هم پیرامونی

هم محیطی

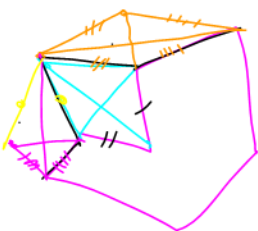


هرجا شکل معکوس شده (کلو)

آن رأس را بازتاب نسبت به

خط دایره دو رأس کناری اش

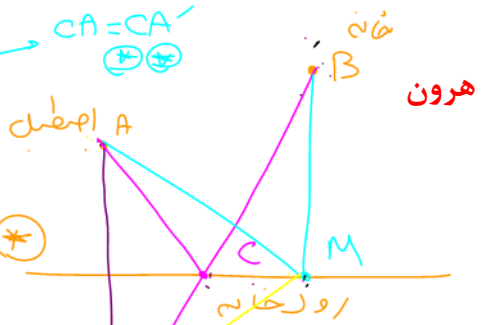
می‌دهیم



$$S = 2S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

$T(C) = C$ $\rightarrow CA = CA'$
 $T(A) = A'$
 $T(M) = M$

 $AM = A'M$

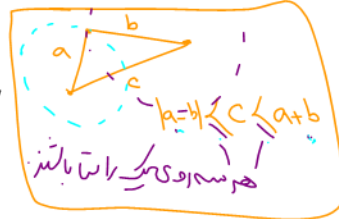


$A'B'M : A'M + MB > A'B$

④ $AM + MB > A'B$

$$\rightarrow AM + MB \rangle A'C + CB$$

$\overbrace{AM+MB}^{AC} = AC + CB \checkmark$



① A, انبساط به خط بازتاب دارد (A)
② A' را به B وصل کرد و متوجه شد
خط قطع می‌شود و بازتاب است.

رایین

(14)

$\frac{2 \times 6}{2} = 6$

$\frac{2 \times 9}{2} = 9$

$\frac{2 \times 4}{2} = 4$

$12 + 24 + 8 = 44$

$\wedge \wedge (F)$

۸۶ (۳)

14 (Y)

۸۲ (۱)

$$12 + 14 = 26$$

$$9_0 + 2\Lambda = \Lambda\Lambda$$

$$F \times \sqrt{r_0} = 1 \sqrt{\omega}$$

$$\frac{1\sqrt{5} (Y)}{16\sqrt{5} (F)}$$

$$F\sqrt{\Delta} \quad (1)$$

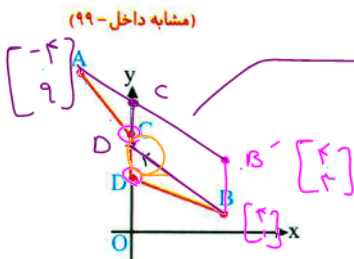
$$12\sqrt{5} \quad (3)$$

۹. دو نقطه $A|_9^{-4}$ و $B|_9^4$ در طرفین محور y ها قرار دارند، دو نقطه C و D به فاصله دو واحد از هم روی محور y ها قرار دارند، حداقل طول خط

شکسته ACDB کدام است؟

(مشابه داخل - ۹۹) $\rightarrow AB' = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

$$10 + 7 = 17$$



11

10. (2)

^ (3)

12 (F)

$B'A$

1.



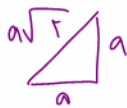
(۱) بازتاب (۲) دوران ✓ (۳) انتقال (۴) لغزش ✓

11



$$\text{Max}(|MA - MB|) = AB$$

$$AB = \sqrt{(\omega-1)^r + (V-K)^r} = \sqrt{r^r + r^r} = \delta$$

$$\begin{array}{l} \Delta (1) \\ \epsilon (2) \\ \gamma (3) \\ \tau (4) \end{array}$$
$$\sqrt{a}(x) \quad \sqrt{x}(x) \quad x\sqrt{x}(x) \quad x\sqrt{a}(1)$$


زاد HAM سلامت؟

$$Y_0 | \mu \quad d_0 | \mu \quad \boxed{Y_0 | \mu} \quad d_0 | \mu$$

$$\text{Uner (vgl.)} \Rightarrow \frac{d_{\text{un}}}{r_g} = \frac{14}{r_g} \Rightarrow \sin A'' = \sin \hat{HAM} = \frac{1}{r} \rightarrow \hat{HAM} = 90^\circ$$

دکترها مسیح



نقاط ثابت: ندارد

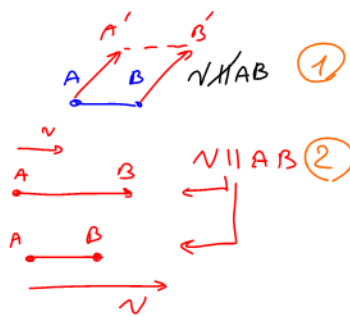
ایزومتريک ✓

همانی: در هیچ دوری نیست

حفظ شیب ✓

ویژگی: مجموعه‌های موازی به مجموعه‌های موازی تبدیل می‌شوند

حفظ جهت ✓



انتقال

(دور) $v \neq 0$

بازتاب

جرم بازتاب به دور نیست
یاره خط واصل هر نقطه
به تقویرش

نقاط ثابت: بیشتر از یک نقطه ندارد

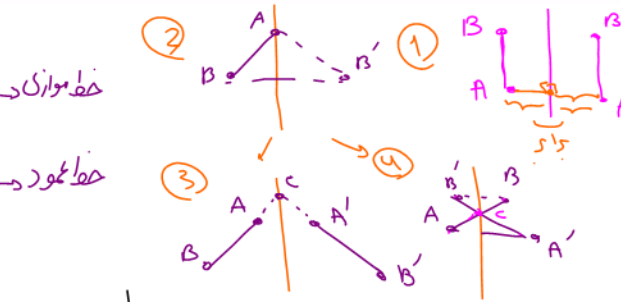
ایزومتريک ✓

همانی: خط میانه

حفظ شیب ✗

ویژگی: بازتاب نسبت به نقطه

حفظ جهت ✗



نقاط ثابت: همان مرکز دوران

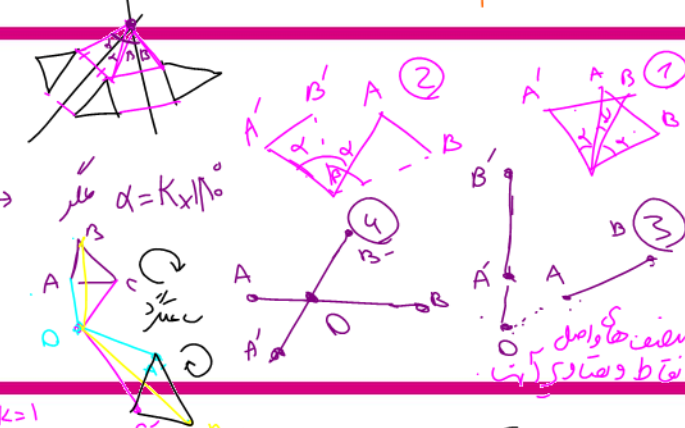
ایزومتريک ✓

همانی: $\alpha = K \times 360^\circ$

حفظ شیب ✗

ویژگی: هر دو بازتاب با هم ترکیب می‌شوند و یک دور را تشکیل می‌دهند

حفظ جهت ✓



دوران

$\alpha = \angle AOA'$
 $OA = OA'$
هر دو دوران به هم ترکیب می‌شوند و یک دور را تشکیل می‌دهند

نقاط ثابت: هیچ نقطه‌ای ندارد

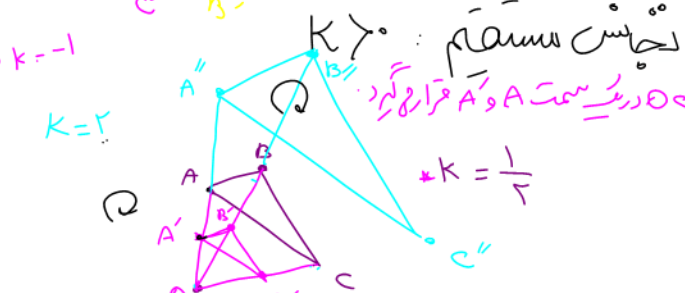
ایزومتريک ✗

همانی: $K=1$

حفظ شیب ✓

ویژگی: $K=1$ و $K=-1$ هر دو بازتاب هستند

حفظ جهت ✓



تجانس

K نسبت تقیاس
برای پیدا کردن مرکز تقیاس

نسبت تقیاس معکوس $K < 0$ ← بین A و A' قرار دارد

نسبت تقیاس $|K| > 1$

نسبت تقیاس $|K| < 1$

نسبت تقیاس $|K| = 1$

نسبت تقیاس $K = -1$

نسبت تقیاس $K = 1$

نسبت تقیاس $K = -2$

نسبت تقیاس $K = -\frac{1}{2}$

نسبت تقیاس $K = 2$

نسبت تقیاس $K = -\frac{1}{2}$

نسبت تقیاس $K = \frac{1}{2}$

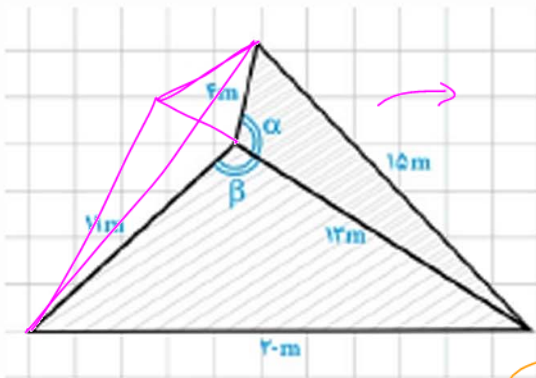
$$\frac{P'P}{P} = |K| = \frac{A'B'}{AB}$$

$$\frac{S'}{S} = K^2$$

تبدیل ها
تابع یک به یک
نقطه → نقطه

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

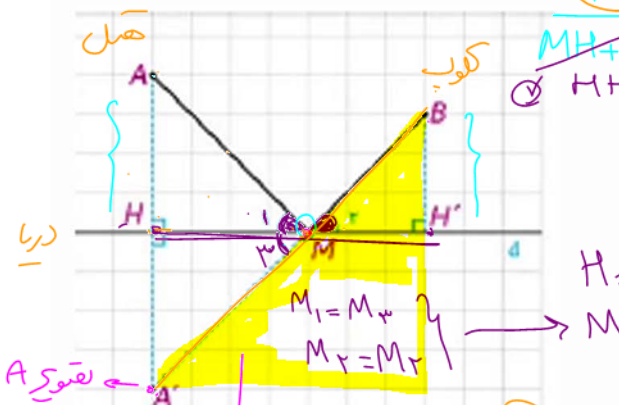
کاربرد تبدیل ها



تبدیل کامل → بازتاب
کاملاً متقارن

ترکیب در عکس

$$\frac{MH}{MH'} = \frac{AH}{BH'} = \frac{AM}{MB}$$



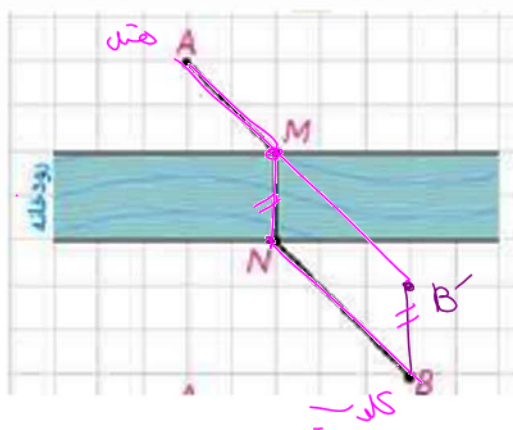
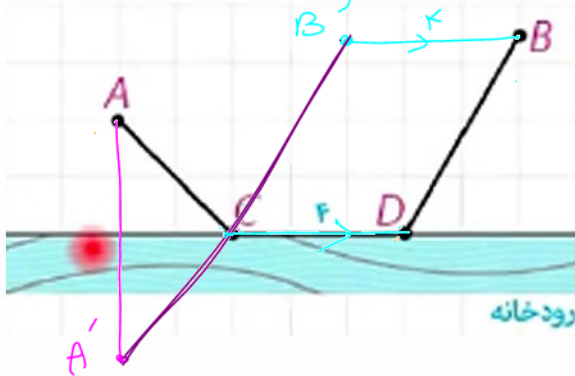
$$H = H' = 90^\circ \Rightarrow \triangle AHM \sim \triangle MBH'$$

$$AM + MB = A'B$$

۱) تصویر A نسبت به رودخانه را در می آوریم (A')

۲) B را به اندازه طول CD انتقال می دهیم (B')

۳) A' را به B' وصل می کنیم خط مماسی با محور نقطه ابتدایی (C) است



۱) B را به اندازه طول MN به بالا انتقال می دهیم (B')

۲) A را به B' وصل می کنیم (M)

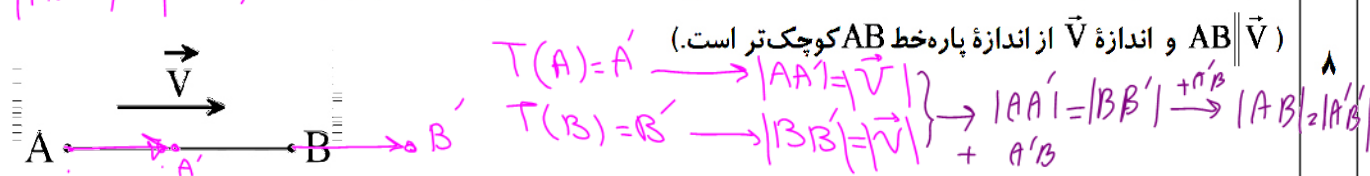
ردیف	خرداد ۱۴۰۳	سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	خرداد ۱۴۰۳	نمره
------	------------	--	------------	------

سوالات فصل ۲

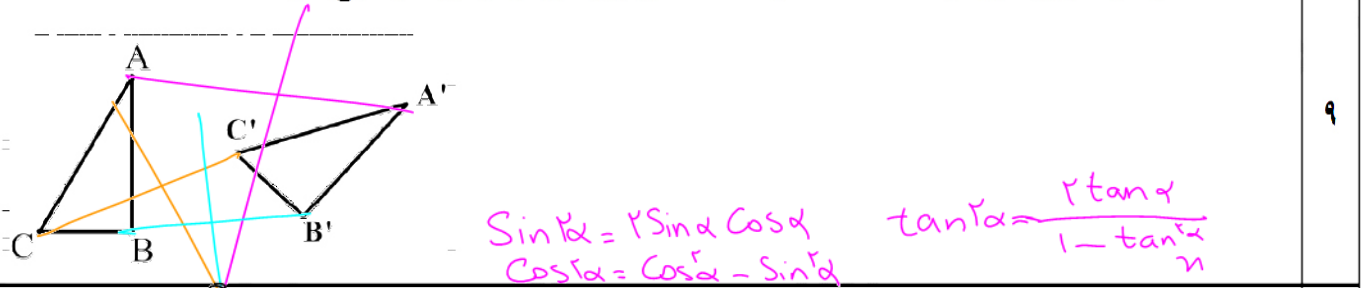
برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است).

۷	گروه A	
	الف	تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی کند:
	ب	تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محوره های متقاطع است:
	پ	تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند:
	گروه B	
۰.۷۵	دوران بازتاب	$\alpha = \text{زاویه بین محورهای بازتاب}$
	همانی	
	بازتاب	
	انتقال	

با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند.



نقاط A', B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید.



مقدار عمودی محورهای بازتاب

پاره های موازی

هر خط به تصویر خود

$\tan 15^\circ = \frac{3}{y + \sqrt{3}}$

$y + \sqrt{3} = \frac{3}{\tan 15^\circ} = \frac{3}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(6 + 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{12 + 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9}{4 - 3} = 21 + 12\sqrt{3}$

$y = 21 + 12\sqrt{3} - \sqrt{3} = 21 + 11\sqrt{3}$

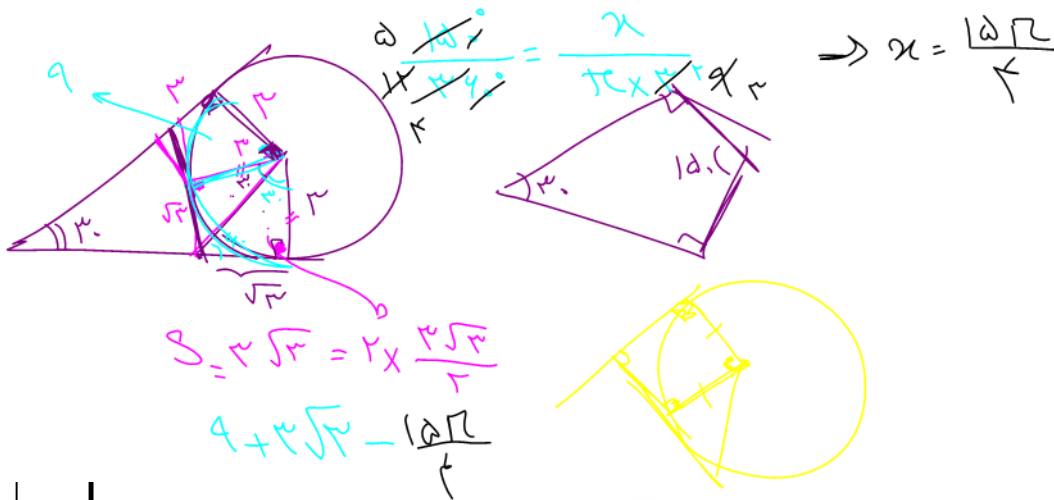
$2P = y + y + \sqrt{3} = 2y + 2\sqrt{3}$
 $P = y + \sqrt{3}$

$\tan 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

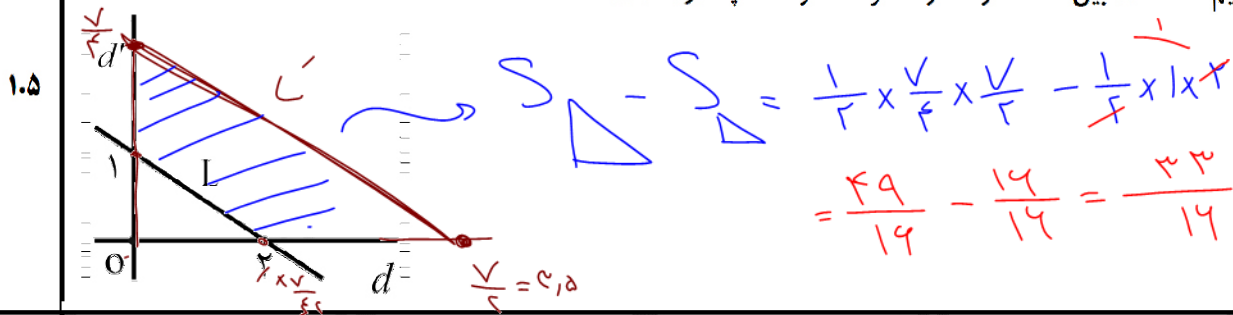
$2\sqrt{3}x = 1 - x^2$
 $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$
 $x = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2} = -\sqrt{3} \pm 2$

$r_b = r = \frac{S}{P - b} \Rightarrow r = \frac{S}{y + \sqrt{3} - (x + \sqrt{3})} = \frac{S}{y - x}$

$\tan 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

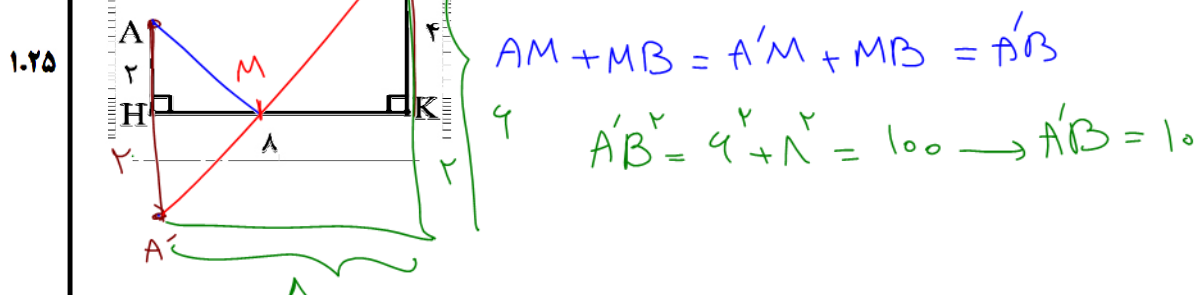


در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟

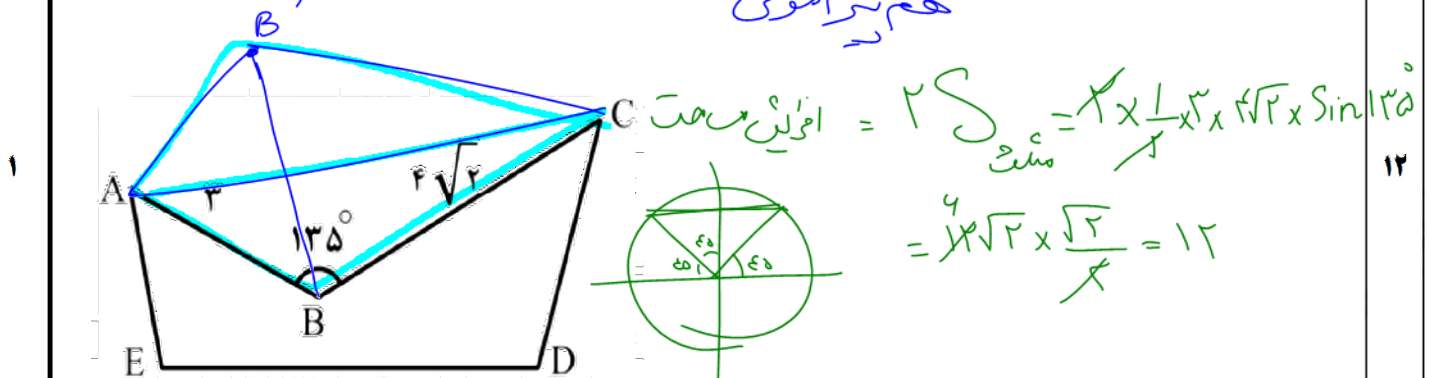


با توجه به شکل، نقطه M روی پاره‌خط $HK=8$ را به گونه‌ای بیابید که:
الف) مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.
ب) کمترین مقدار عددی $AM+MB$ را محاسبه کنید.

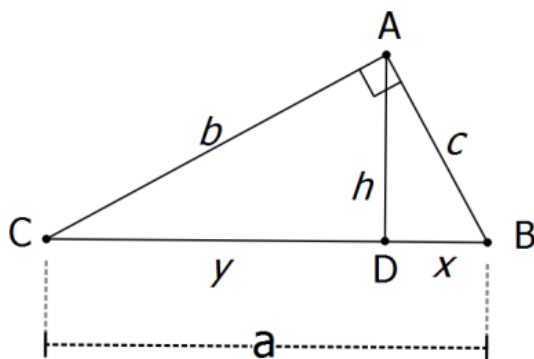
① A را نسبت به HK قرینه کردیم و A' نامیدیم.
 ② A' و B را وصل می‌کنیم.
 ③ خط $A'B$ را با HK امتداد می‌دهیم تا M را بیابیم.



در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید.



مثلث قائم الزاویه



$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

قضیه کسینوس ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

۱ در مثلث ABC، زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و $b = a\sqrt{2}$ ، زاویه C چند درجه است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۲۰

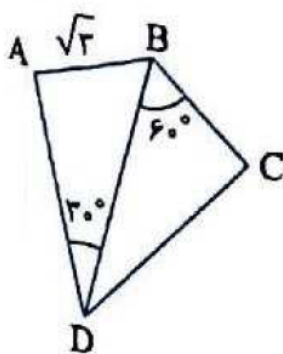
۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD محاطی است. طول ضلع CD کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



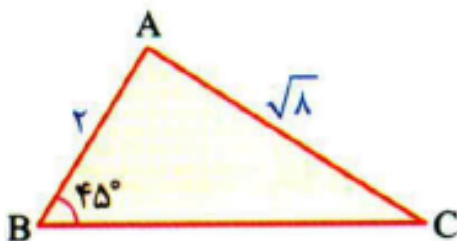
۳ در شکل مقابل اندازه زاویه A چقدر است؟

(۱) 135°

(۳) 75°

(۲) 105°

(۴) 60°



۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ اندازه شعاع دایره محیطی کدام است؟

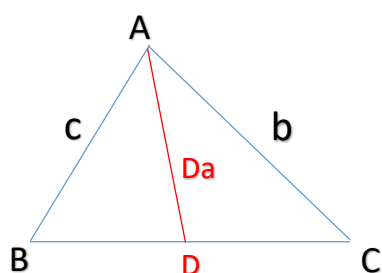
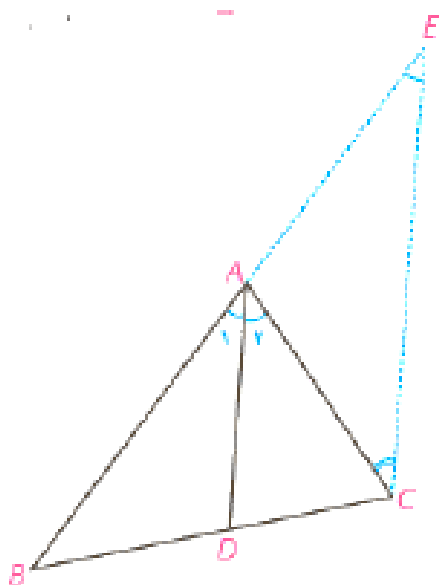
(۱) $8/5$

(۲) $7/5$

(۳) $9/5$

(۴) ۹

قضیه نیمساز و روابط مرتبط با آن



$$da = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

رابطه های میانه

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2ma^2$$

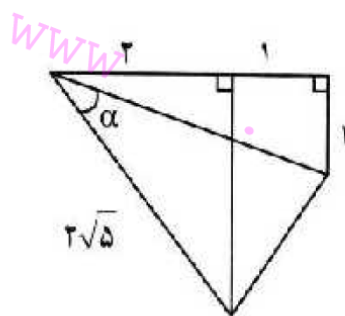
$$ma^2 = b^4 - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

قضیه هرون

در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟ سراسری دی ۱۴۰۱

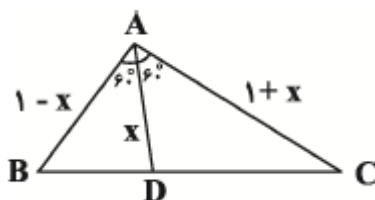
۵



sanjesh

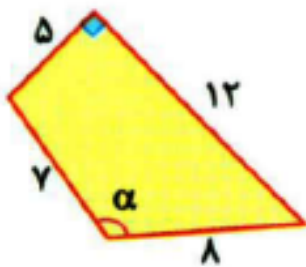
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{10}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

۶ در شکل مقابل، اندازه x کدام است؟



۱. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳. $2 - 1$
۴. $3 - 1$

۷ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع برهم عمودند، $\sin \alpha$ کدام است؟ خارج کشور ۹۸



$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

۸ در مثلث ABC، حاصل $b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \sin^2 \hat{B}$ برابر با کدام است؟

a^2 (۱)

b^2 (۲)

c^2 (۳)

bc (۴)

۹ در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

سراسری ۹۵

$2/8$ (۲)

$2/1\sqrt{2}$ (۴)

$1/4\sqrt{2}$ (۱)

$2/1$ (۳)

۱۰ مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹، ۱۲ کدام است؟

$14\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

$14\sqrt{3}$ (۲)

$15\sqrt{2}$ (۱)

دکترها مسیح

۱۱ در مثلثی با اضلاع x ، 5 ، $2x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{2}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

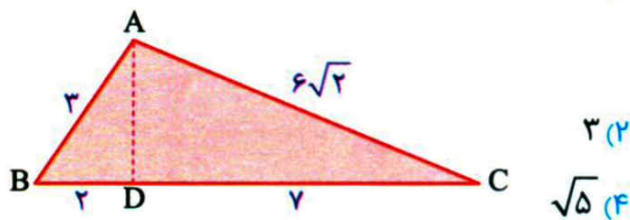
۱۵ (۲)

۱۷ (۱)

۱۲ در مثلثی با اضلاع 7 ، 10 ، 13 طول میانه وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

 $3\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{21}$ (۱)

۱۳ در شکل مقابل طول AD چقدر است؟

۳ (۲)

 $2\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۳)

۱۴ در مثلث ABC اگر $BC=10$ و میانه‌های $BM=12$ و $CN=9$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱۰۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۳۶ (۱)

۱۵ در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۳ و ۴ و زاویه بین آن‌ها 150° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

 $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

سوالات فصل ۳

خرداد ۱۴۰۳

◀ در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟ $0/5$ نمره

الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

◀ در مثلث ABC که $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $1/5$ نمره

◀ مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید. 1 نمره

◀ در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه C را محاسبه کنید. $1/5$ نمره

◀ در مثلث ABC که $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 8$ ، نقطه M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را به دست آورید. $1/5$ نمره