

دایره

نمره در امتحان نهایی

هشت نمره

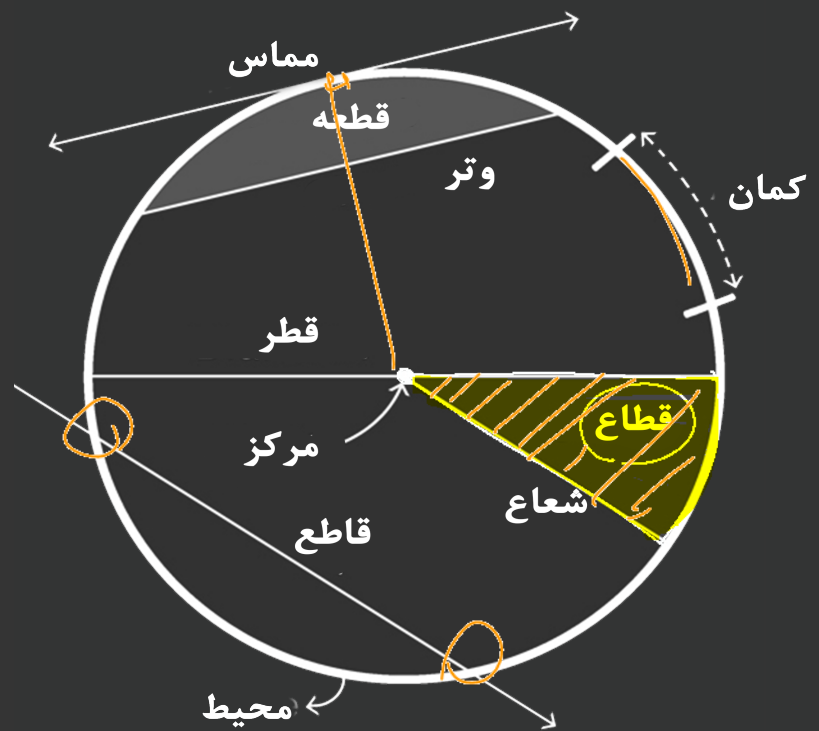
تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

زوایا سال هفتم

فصل ۱ هندسه دهم: هم‌رسمی‌های مثلث

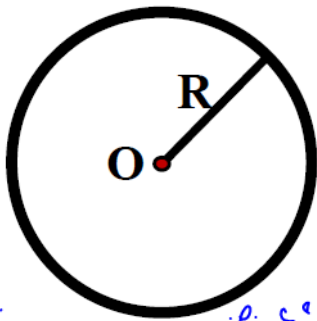


فصل یک هندسه یازدهم

زوایا
روابط طولی
محاطی - محیطی

دایره

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت هستند



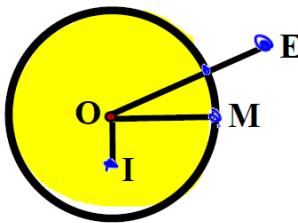
شعاع دایره $OI < R$
فاصله آرای های

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.

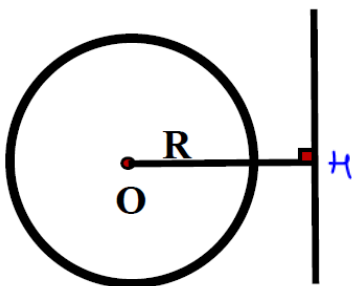
۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.

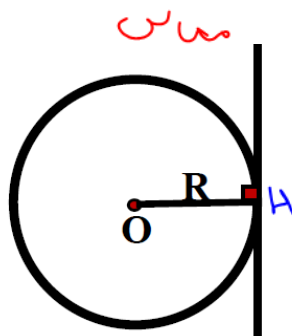


حالت های خط و دایره

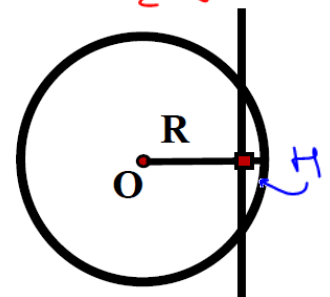
مماس



$OH > R$
بدون برخورد



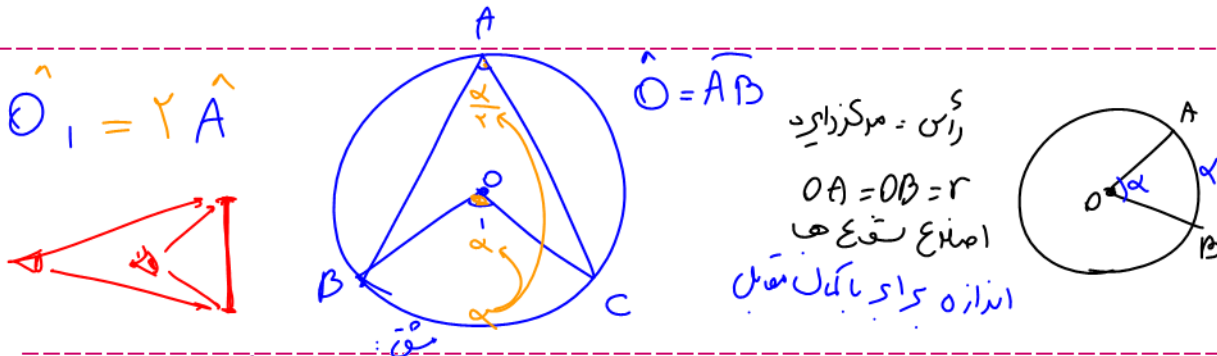
$OH = R$
یک نقطه برخورد



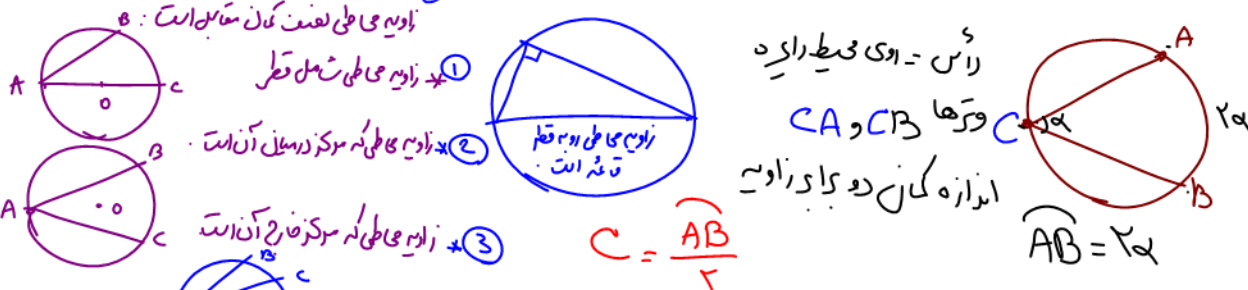
$OH < R$
دو نقطه برخورد

انواع زاویه در دایره

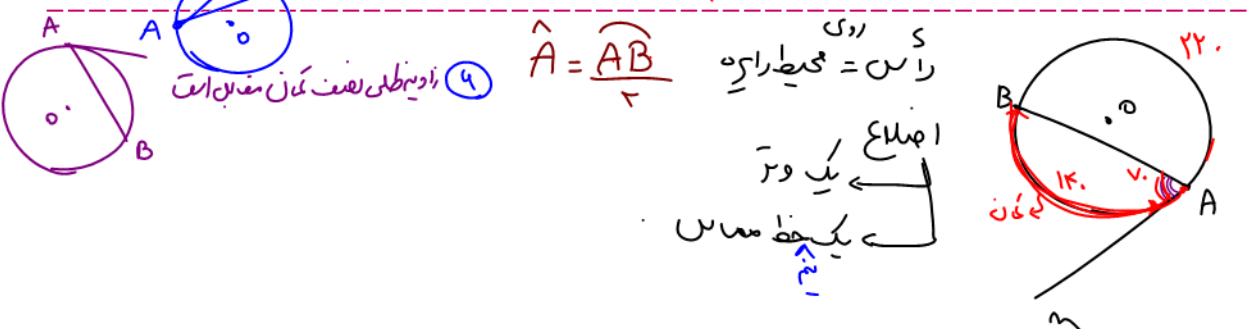
زاویه مرکزی



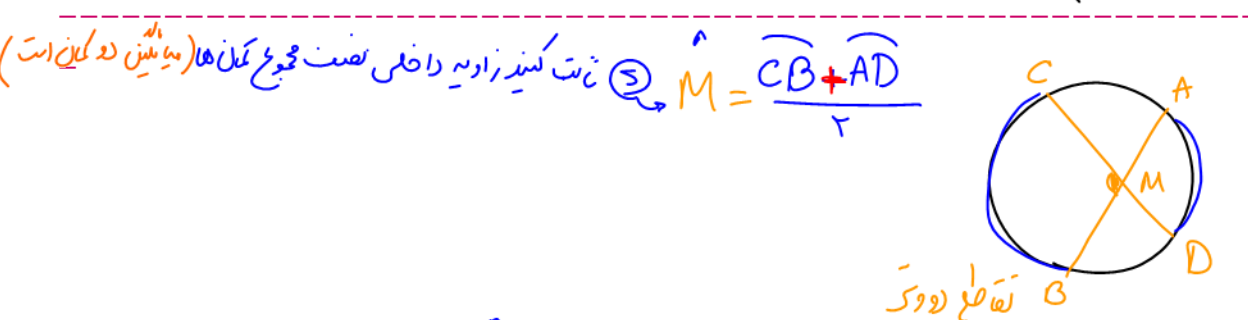
زاویه محاطی



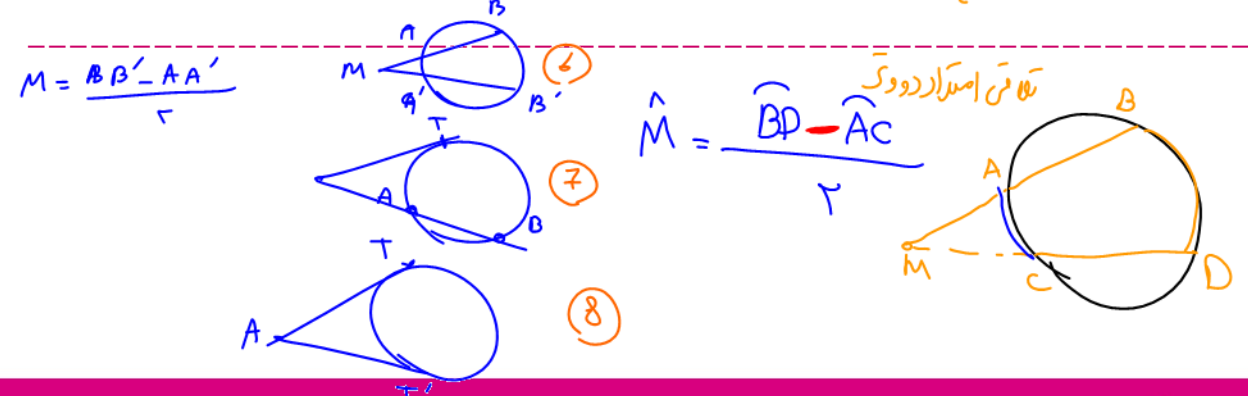
زاویه ظلی

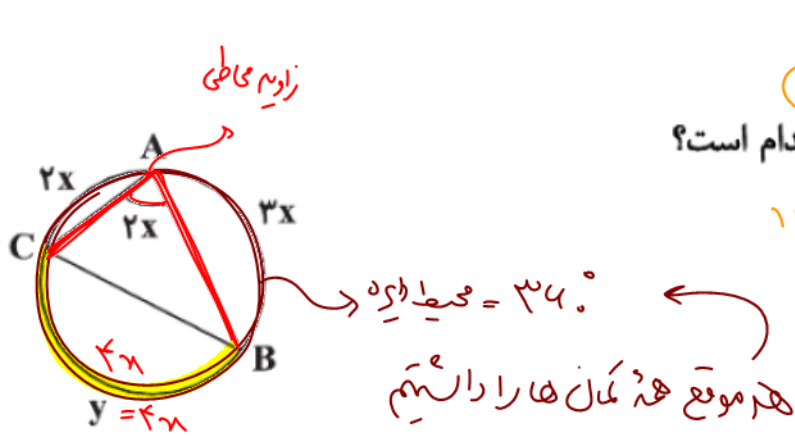


زاویه داخلی



زاویه خارجی





۱) با توجه به شکل مقابل، حاصل $y - x$ کدام است؟

$$4x - x = 3x$$

$$120 - 40 = 80$$

$$3 \times 40 = 120$$

$$90^\circ (1)$$

$$150^\circ (2)$$

$$120^\circ (3)$$

$$135^\circ (4)$$

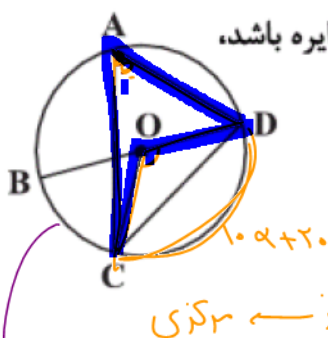
$$2x + 3x + y = 340$$

زاویه یاطی

$$2x + 3x + 4x = 340$$

$$9x = 340$$

$$x = 40$$



۲) در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A} = 7x - 10$ ، $\hat{COD} = 10x + 20$ و O مرکز دایره باشد،

کمان BC چند درجه است؟

$$\hat{A} = 7x - 10 \rightarrow \widehat{CD} = 2\hat{A} = 2(7x - 10)$$

$$\hat{COD} = 10x + 20 = \widehat{CD} = \widehat{CD} = 14x - 20$$

$$15 (1)$$

$$30 (2)$$

$$45 (3)$$

$$60 (4)$$

$$10x + 20 = 14x - 20$$

$$40 = 4x$$

$$10 = x$$

$$* 10x + 20 = 2(7x - 10)$$

دکتر رها مسیح



دوایم > وتر > وتر
قضایای مهم

فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

حکم $AH = HB$

$\widehat{AD} = \widehat{DB}$

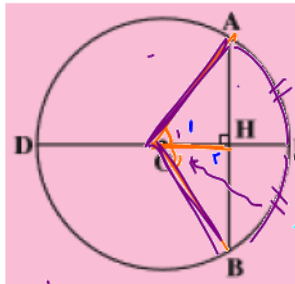
شعاع در دایره یهفته است

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$OA = OB = r$

$OH = OH$

$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow AH = HB$
 $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB}$



فرض $AH = HB$

حکم $\widehat{AE} = \widehat{EB}$

$AH = HB$

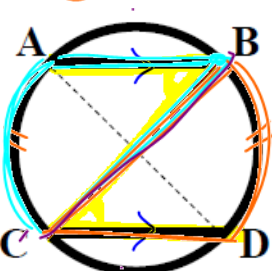
$OA = OB$

$OH = OH$

$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EB}$
 $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$



$\widehat{AB} \neq \widehat{CD}$
لزوماً برابر نیست!!



فرض $AB \parallel CD / BC$ خطوط موازی می‌باشد $\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{BCD}$ قاطع $\Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2}$

حکم $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$

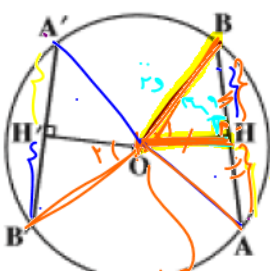
ثابت کنید اگر گره ها محدود بین دو خط موازی باشند

فرض $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

حکم $AB \parallel CD$

$\hat{B} = \hat{C}$ عکس خطوط موازی

چون وتر و قطر



فرض $OH = OH'$

حکم $AB = A'B'$

$OB = OH + BH$

$OB' = OH' + B'H'$

$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
 $OB = OB'$
 $\Rightarrow \triangle OBH \cong \triangle OB'H' \Rightarrow BH = B'H'$
 $AB = A'B'$

فرض $AB < A'B'$

حکم $OH < OH'$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\hat{O}_1 + \hat{H}_1 = \hat{O}_2 + \hat{H}_2$
 $\hat{O}_1 + 90^\circ = \hat{O}_2 + 90^\circ$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

فرض $OH > OH'$

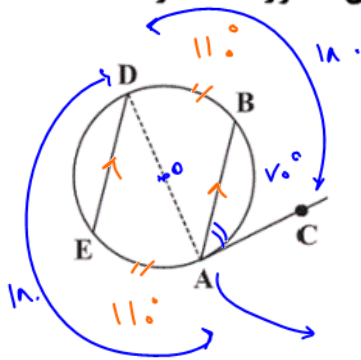
حکم $AB < A'B'$

$BH < B'H'$
 $AB < A'B'$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۳

در شکل روبه‌رو AC مماس بر دایره و $AB \parallel DE$ ، $\widehat{AE} = 110^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه $\widehat{BAC}$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)



نصف کمال مقابل = خطی

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BA}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

(۱) 35°

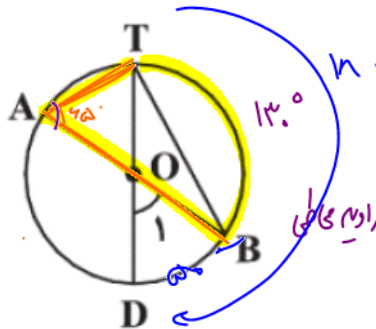
(۲) 70°

(۳) 40°

(۴) 45°

۴

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه $\widehat{O_1}$ کدام است؟



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2}$$

$$65^\circ = \frac{\widehat{TB}}{2} \rightarrow \widehat{TB} = 130^\circ$$

(۱) 65°

(۲) 60°

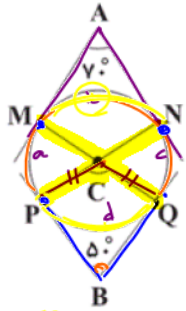
(۳) 50°

(۴) 45°

دکترها مسیح

$$C = \frac{d+b}{2} = \frac{240}{2} = 120^\circ$$

۵ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟



$$70^\circ A = \frac{a+d+c-b}{2}$$

$$140 = a+d+c-b \Rightarrow 140 = 2a+2c$$

$$100 = a+b+c-d \Rightarrow 120 = a+c$$

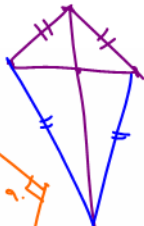
- (1) 100°
- (2) 120°
- (3) 80°
- (4) 140°

$$a+b+c+d=320^\circ$$

$$120$$

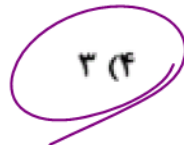
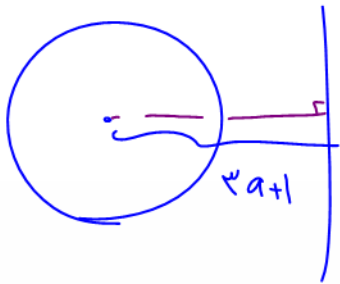
$$b+d=240$$

شع در نقطه مماس بر خط مماس مماس



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

۶ دایره $C(O, r)$ و خط ℓ به فاصله $3a+1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۱)

مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$\frac{3}{2} (2) \quad 1/5$$

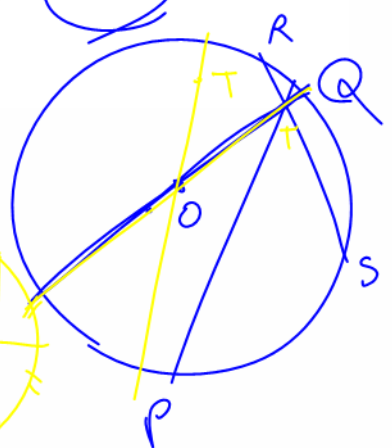
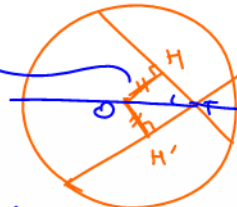
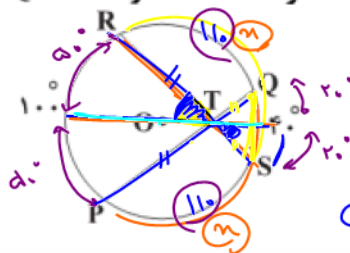
$$3a+1 > r$$

$$3a > 6 \rightarrow a > 2$$

۷ در دایره $C(O, r)$ وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

$$\widehat{RQ} = \frac{40+120}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ$$

- (1) 70°
- (2) 35°
- (3) 30°
- (4) 40°



$$RS = PQ \Rightarrow \widehat{RS} = \widehat{PQ}$$

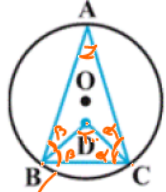
دو وتر برابرند

$$\widehat{RQ} + \widehat{QS} = \widehat{PS} + \widehat{QP}$$

$$2n + 40 + 100 = 360$$

$$2n = 220 \Rightarrow n = 110$$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آنگاه کمان BC چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۸۰

(۳) ۶۰

(۴) ۴۰

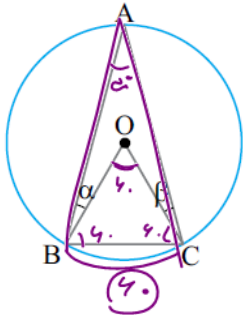
$$\widehat{BDC}: \beta + \alpha + 100 = 180$$

$$\beta + \alpha = 80$$

$$2\beta + 2\alpha = 160 \quad \rightarrow \quad A = 180 - 160 = 20^\circ$$

$$\widehat{BC} = 2\hat{A} = 40^\circ$$

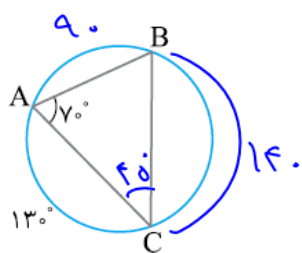
۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)

(۱) 10° (۲) 20° (۳) 30° (۴) 40°

$$30 + \alpha + 60 + \beta + 60 = 180$$

$$\alpha + \beta = 30$$

۱۰ در شکل مقابل اندازهی زاویهی C کدام است؟

(۱) 70° (۲) 60° (۳) 65° (۴) 45° 

$$130^\circ + 140^\circ = 270$$

$$360 - 270 = 90$$

וועג

11

دایره‌ی $(\bar{O}, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

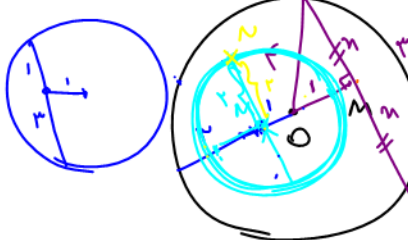
1 (1)

2. (2)

۳) صفر

(۴) بی شمار

کونہ ترین و تر مملکت سے رہنمورد ہوا



٢٧١٥
وَمِنْ مَحْذُورٍ
رَقَرٍ

وَبَرَّاهِمُ نَدَىٰ
زَيْدٍ نَفَقًا رَاضٍ
دالره

قطر

प्रा. वि.

هیج وتر → وتر محو < اندازه

۱. وتر $\Rightarrow$ وترعود = اندازه / قطر
۲. ر $\Rightarrow$ قطر < اندازه < وترعود

مستتر $\Rightarrow$ قعر $\wedge$ اندازه

12

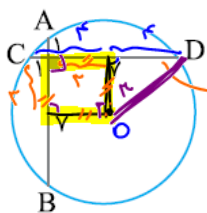
مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

$$\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

Δ (✓)

$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

9 (f)



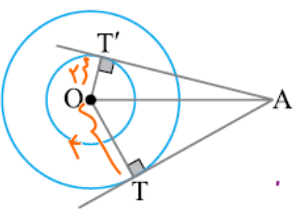
→ دوویترای بند

← فاصله ها هم برای من



ابن عبد الله بن مسعود

مربع تناقصات $(A_T - A_T')^2$



مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

13

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

120

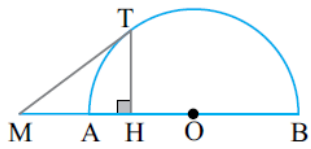
20 (1)

10. (1)

15 (3)

$$\frac{\begin{array}{l} r^r + AT^r = QA^r \\ y^r + AT'^r = DA^r \end{array}}{19 - r = AT'^r - AT^r}$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید



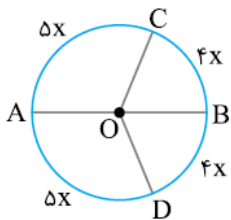
۱۴ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$



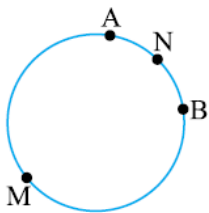
۱۵ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°



۱۶ در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

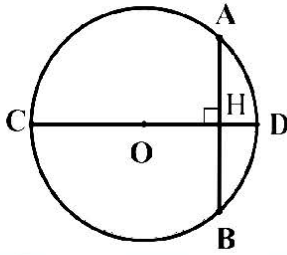
(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{4}$

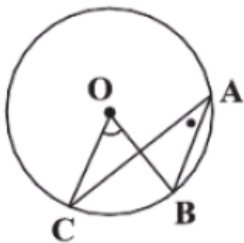
(۴) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{6}$

در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند. **خرداد ۱۴۰۳**
۱/۵ نمره



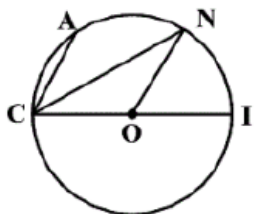
دایره $C(O, 6)$ مفروض است. اگر $\hat{O} = (2x + 10)^\circ$ و $\hat{A} = (3x - 25)^\circ$ باشد، طول کمان BC کدام است؟



- (۱) $\frac{5\pi}{3}$
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{8\pi}{3}$
- (۴) $\frac{10\pi}{3}$

۱۷

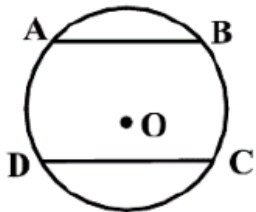
در شکل مقابل، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$. اگر $\widehat{AC} = 40^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



- (۱) $27/5^\circ$
- (۲) 30°
- (۳) 35°
- (۴) $32/5^\circ$

۱۸

۱۹ مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = 6$ و $CD = 8$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟



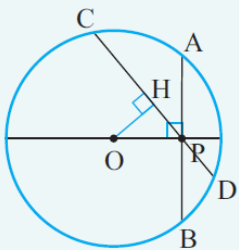
(۱) ۵۶

(۲) ۴۹

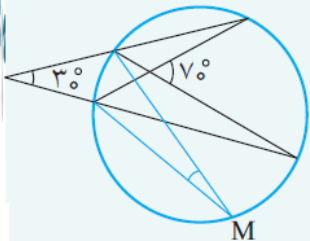
(۳) ۴۲

(۴) ۳۵

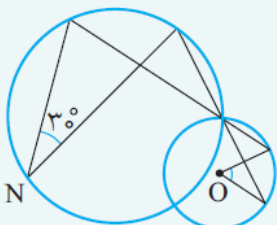
۲۰ نقطه P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



۲۱ زاویه $\widehat{M}$ را به دست آورید.

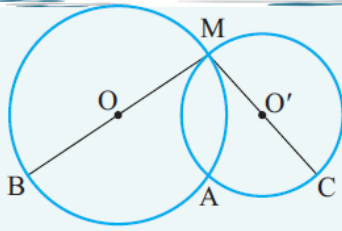


۲۲ زاویه O را به دست آورید.

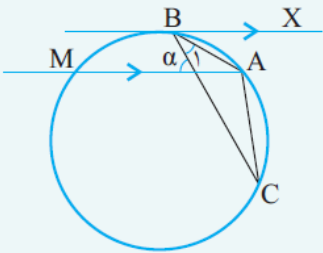


مسئله:

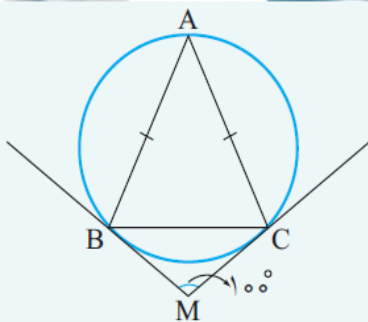
دکترها مسیح



۲۳ نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



۲۴ $\hat{B}_1 = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 20^\circ$ و $BX \parallel MA$. زاویه α را به دست آورید.



۲۵ MB و MC مماس بر دایره هستند و $AB = AC$. زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید.

در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC = CD$ و $AD = DE$ ، اندازه زاویه A چند درجه

۲۶

است؟

(۱) 24° (۲) 30° (۳) 36° (۴) 42°

در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\widehat{C} = 110^\circ$ ، اندازه زاویه P چند درجه است؟

۲۷

(۱) 50° (۲) 60° (۳) 45° (۴) 55°

در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازه زاویه $\widehat{CBD}$ چند درجه است؟

۲۸

(۱) 15° (۲) 20° (۳) 25° (۴) 30°

در شکل روبه‌رو، CD بر دایره کوچک مماس است. اگر $\widehat{BAD} = 100^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه $\widehat{BEC}$ چند درجه است؟

۲۹

(۱) 80° (۲) 100° (۳) 40° (۴) 50°

در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه $\widehat{AOD}$ برابر کدام است؟

۳۰

(۱) $\widehat{OBC}$ (۲) $\widehat{CAD}$ (۳) $\widehat{OAC}$ (۴) $\widehat{ADO}$

دکترها مسیح

۳۱

در مثلث ABC ، داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع اند. زاویه MBC چند درجه است؟

(۴) 40°

(۳) 35°

(۲) 30°

(۱) 25°

۳۲

در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه O در امتداد AC ، مرکز دایره ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟
(۱) متساوی الساقین (۲) قائم الزاویه (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین (۴) غیر مشخص

۳۳

در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله وسط کمان AB از نزدیک ترین رأس مربع چقدر است؟

(۱) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{4} - 2\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{1} + \sqrt{2}$

۳۴

در شکل مقابل، اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 3$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، آنگاه اندازه AM کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $2/25$

(۳) $2/5$

(۴) $2/75$

۳۵

در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $2/5$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند. فاصله نزدیک ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۳۶

مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

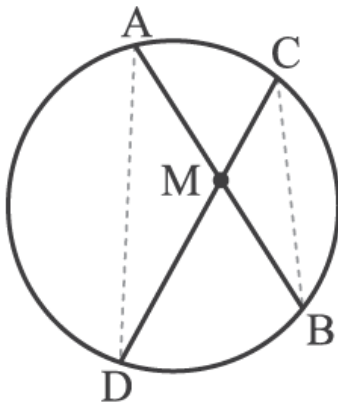
(۴) ۳

(۳) $2\sqrt{2}$

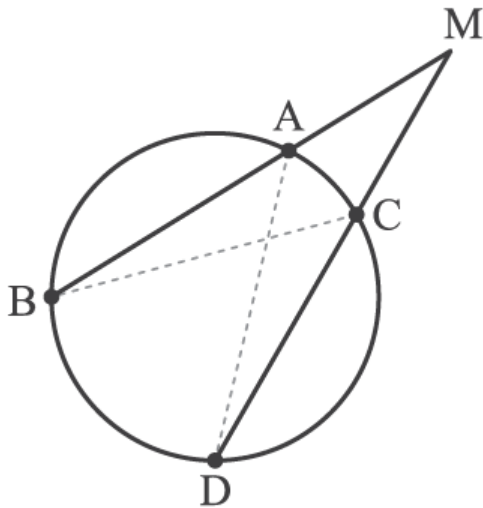
(۲) $2/5$

(۱) $2/25$

روابط طولی در دایره



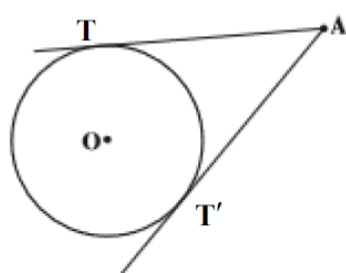
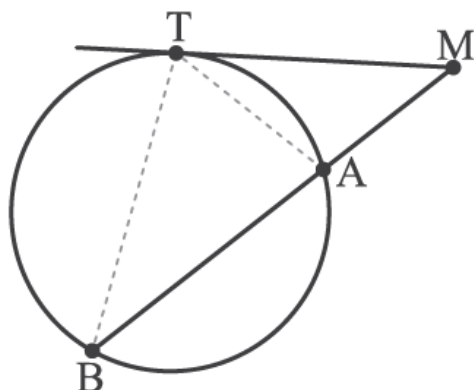
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



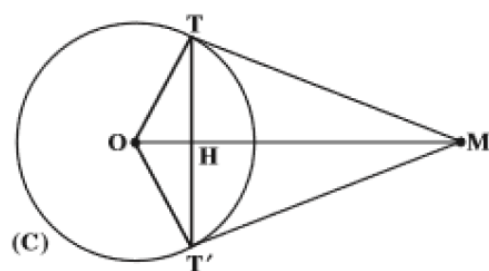
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$

از اینرو، هر سه این قضایا دارای طرح کلی یکسانی می باشند:

$$(\text{vertex to circle}) \cdot (\text{vertex to circle}) = (\text{vertex to circle}) \cdot (\text{vertex to circle})$$



خط مماس بر دایره



• OM نیمساز $\hat{O}$ و نیمساز $\hat{M}$ است.

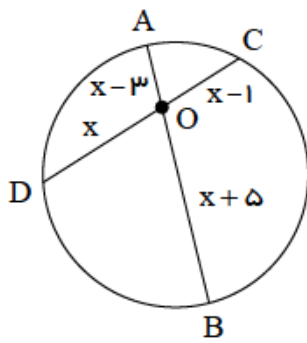
• OM عمود منصف TT' است.

$$OH \times OM = R^2$$

$$TT'^2 = 4OH \times MH$$

$$TT' \times OM = 2R \times MT$$

$$MT = MT'$$

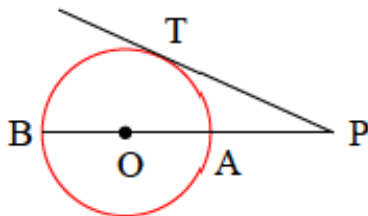


۳۷ در شکل مقابل x برابر است با:

- ۱) ۵
 ۲) ۱۰
 ۳) ۸
 ۴) گزینه های ۱ و ۲

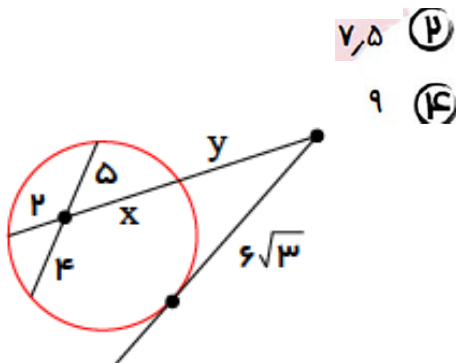
۳۸ در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و AB قطر و $PA = ۴$ می باشد، طول مماس PT کدام است؟

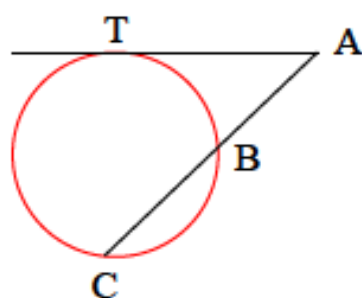
- ۱) $۴\sqrt{۳}$
 ۲) $۵\sqrt{۲}$
 ۳) ۱۴
 ۴) ۸



۳۹ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟

- ۱) ۶
 ۳) ۸





۴۰. در شکل، AT مماس و کمان های $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$ زاویه A چند درجه است؟

۷۲° (۵)

۱۸° (۱)

۱۴۴° (۴)

۳۶° (۳)

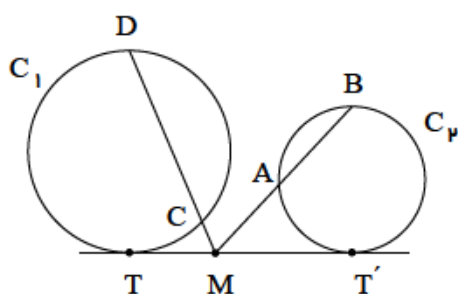
۴۱. در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $MT = \frac{1}{3}MT'$ باشد، حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ کدام است؟

۳ (۵)

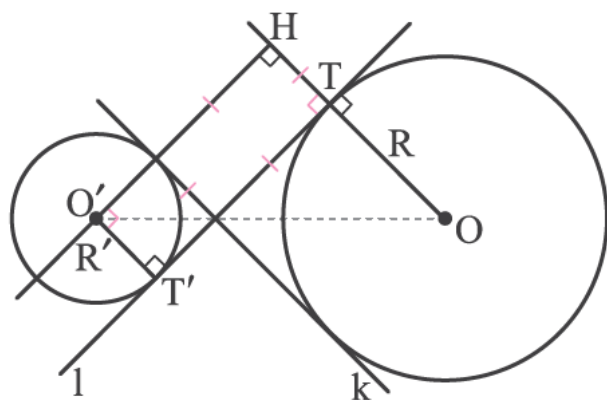
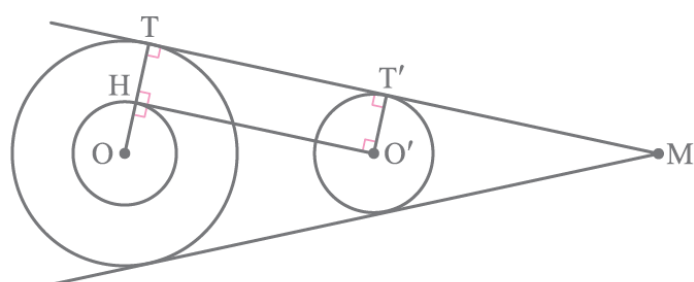
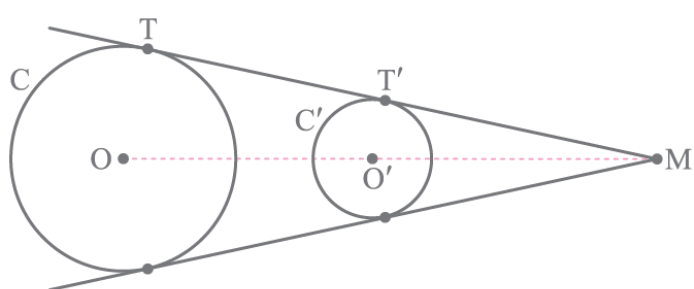
۴ (۱)

$\frac{1}{9}$ (۴)

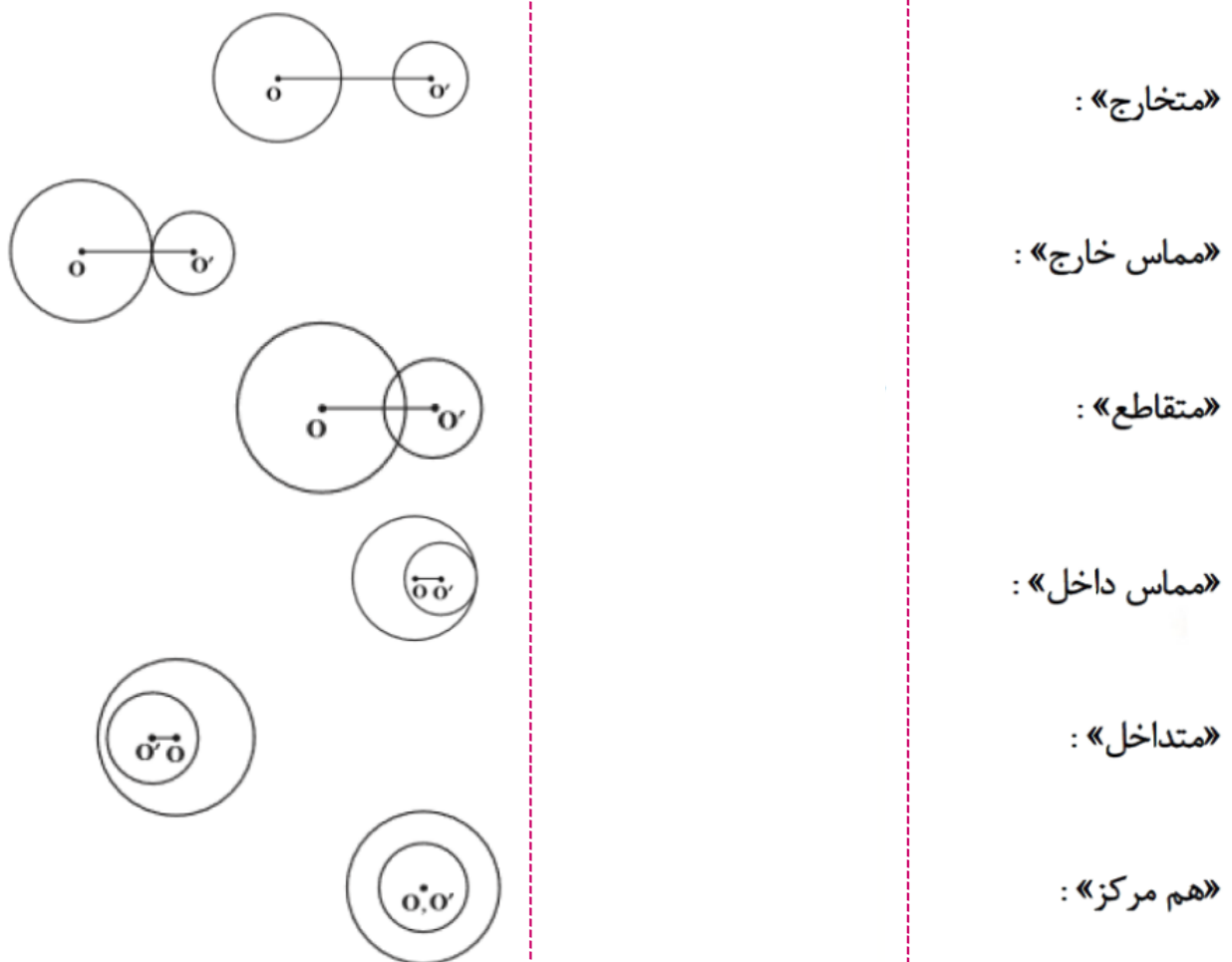
۹ (۳)



مماس مشترک



فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:



۴۲ اگر دو دایره را به مراکز $O(2, -3)$ و $O'(1, 4)$ داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی دوم ۳ باشد، دو دایره در چه وضعیتی نسبت به هم قرار دارند؟

۴۳

دو دایره $C(O, 17)$ و $C'(O, 10)$ مفروضند. خط قاطع d که در دایره C وترى به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایره C' وترى با کدام طول پدید می‌آورد؟
 ۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

۴۴

کند؟

۱۴ بی شمار

۳۳ ۴

۶۲ ۲

۱ صفر

۴۵

هم چقدر است؟

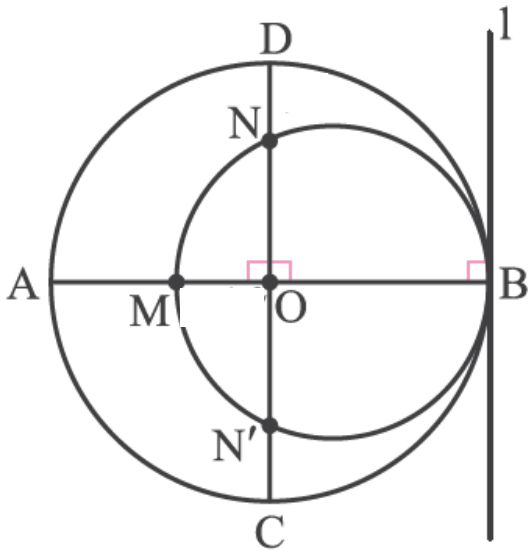
۲۳ ۱۴

۳۲ ۲۲

۲۱ ۶۲

۲۰ ۱

۴۶ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

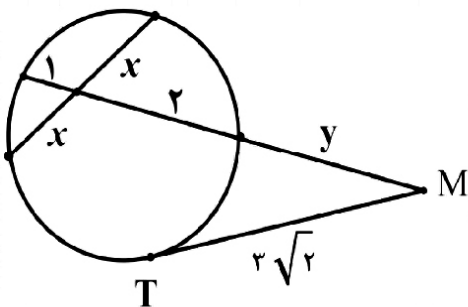


ثابت کنید هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: خرداد ۱۴۰۳

۱/۵ نمره $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

در شکل زیر MT به طول $۳\sqrt{۲}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید. خرداد ۱۴۰۳

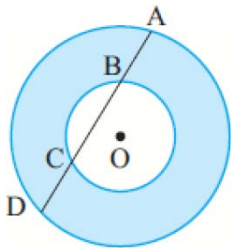
۱/۲۵ نمره



دکترها مسیح



۴۷ در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایره بزرگ‌تر، دایره کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB = 4$ و



$BC = 5$ ، آنگاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۲) 6π (۱) 20π (۴) 25π (۳) 16π

۴۸ نقطه P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۴ تقسیم کرده است.

(سراسری ریاضی - ۸۲)

طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه P کدام است؟

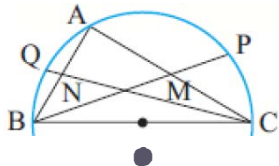
(۴) ۱۵

(۳) ۱

(۲) ۹



۴۹ در شکل روبه‌رو، $BC = 6$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM \cdot MP + CN \cdot NQ$ برابر با کدام است؟



(۱) ۴

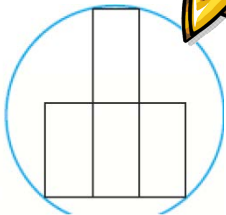
(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۳۶

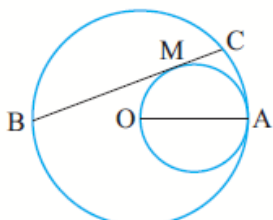


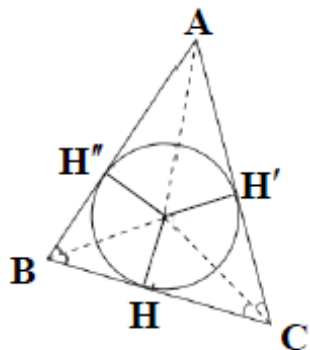
۵۰ چهار تا مستطیل 2×4 مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟

(۲) $\sqrt{15}$ (۱) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{17}$ (۳) $\sqrt{16}$

۵۱ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \cdot MC$ برابر کدام است؟

(سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۴)

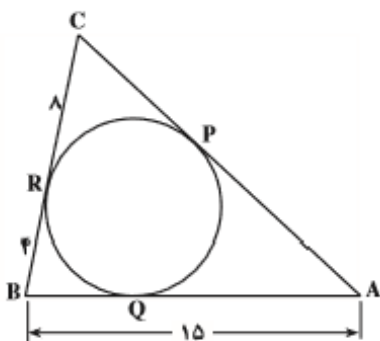
(۱) MO^2 (۲) MA^2 (۳) OA^2 (۴) $MA \cdot MO$



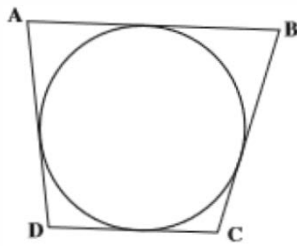
$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$r_b = \frac{S}{P-b}$$

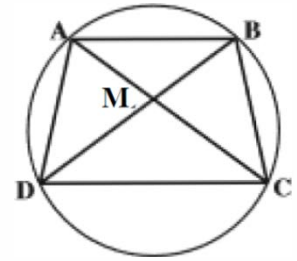
$$r_c = \frac{S}{P-c}$$

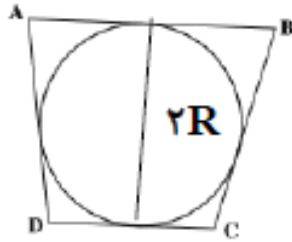


چند ضلعی محیطی



چند ضلعی محاطی





$$(2R)^2 = AB \times CD$$

ارتفاع

۵۲ یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۳

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۵۴

یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۵

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ ، طول خط المکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟

۵۶ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

- (۱) $4/8$ (۲) ۵ (۳) $9/6$ (۴) ۱۰

۵۷ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۵۸

اگر در یک مثلث قائم الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

$$(۱) \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \quad (۲) \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \quad (۳) \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad (۴) \frac{5-\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$$

۵۹

در مثلث ABC اگر $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 40$ باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

$$(۱) 1 \quad (۲) 4 \quad (۳) \sqrt{5} \quad (۴) \sqrt{3}$$

نمره ۱/۲۵

در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید. **خرداد ۱۴۰۳**

جاست تست

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و تعاریف و قضایای اولیه

۱ یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

تیر ماه ۱۴۰۲

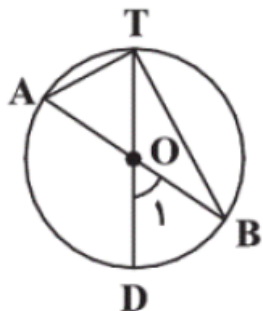
۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

۲ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ است. اندازه زاویه O_1 کدام است؟

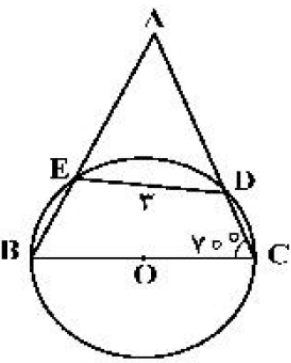


۶۵° (۱)

۶۰° (۲)

۵۰° (۳)

۴۵° (۴)



۳ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ریاضی ۱۴۰۰

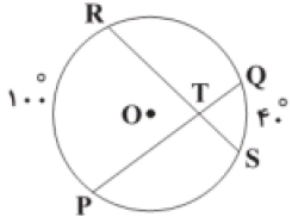
(۱) ۸۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۴ در دایره $C(O, r)$ ، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP} = 100^\circ$ و $\widehat{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟

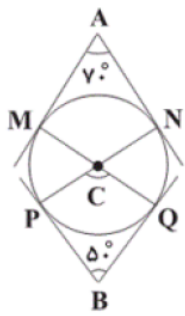


(۱) 70° (۲) 35° (۳) 30° (۴) 40°

۵ دایره $C(O, r)$ و خط ℓ به فاصله $ra + 1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

دکترها مسیح

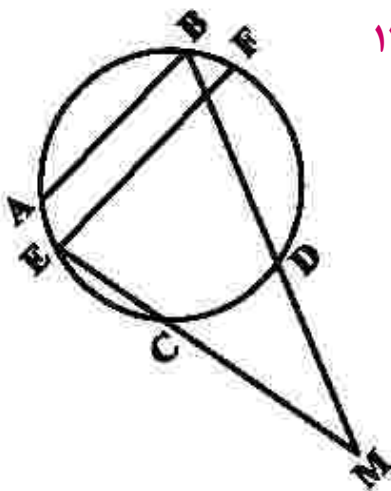


۶ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

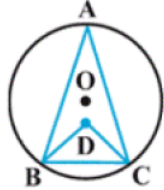
(۱) 100° (۲) 120° (۳) 80° (۴) 140°

۷ در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 80^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر $\angle BME = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\angle ABD$ چند درجه است؟

تیرماه ۱۴۰۱

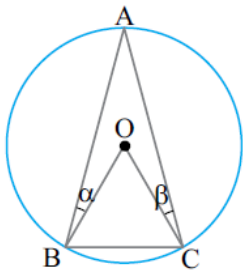
(۱) $71, 25$ (۲) 74 (۳) 75 (۴) $78, 75$

۸ در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\hat{BDC} = 100^\circ$ ، آن گاه کمان BC چند درجه است؟



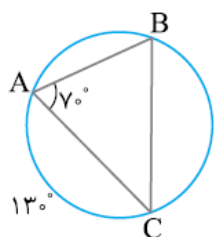
- (۱) ۲۰
(۲) ۸۰
(۳) ۶۰
(۴) ۴۰

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی الاضلاع است. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



- (۱) 10°
(۲) 20°
(۳) 30°
(۴) 40°

۱۰ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟



- (۱) 70°
(۲) 60°
(۳) 65°
(۴) 45°

۱۱ دایره‌ی $C(O, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد

و از M بگذرد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

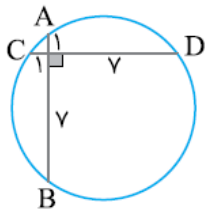
۱۲ مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۵

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۶



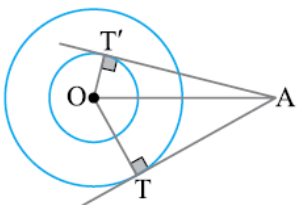
۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

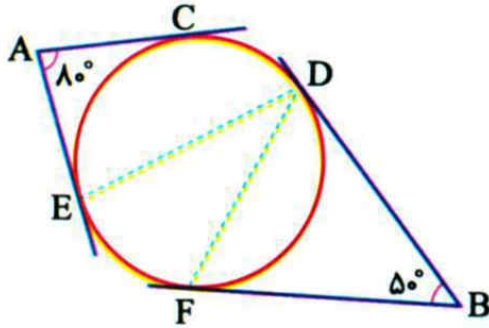
(۴) ۲۰

(۳) ۱۶



۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه EDF چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

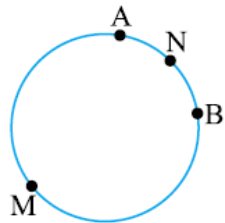
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵

در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

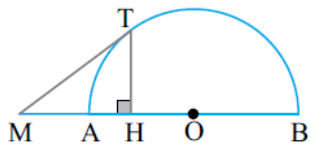


$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۳)



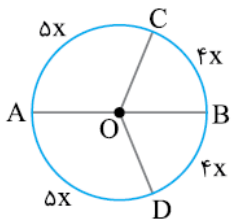
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $1/6$

(۱) $1/5$

(۴) $1/8$

(۳) $1/4$



۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

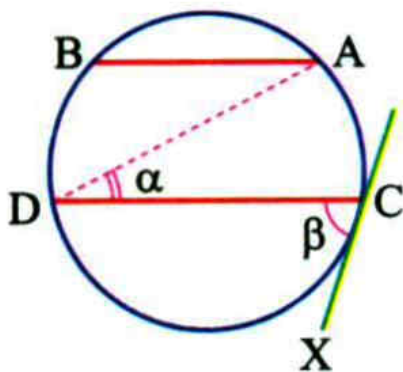
(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۸ در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟



سراسری ۹۸

(۱) ۵۰

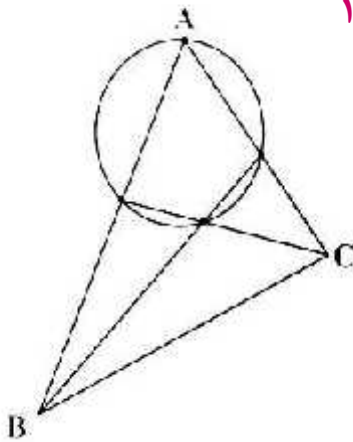
(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵

۱۹ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره معاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

۲۰ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴

جاست تست

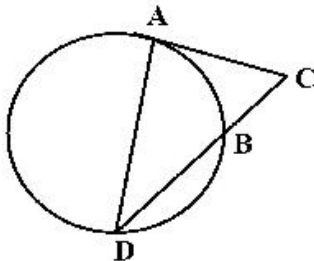
دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی در دایره

۱ فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۲ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۲
(۴) ۳

سراسری ۱۴۰۰

۳ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ است. خط‌المركزین دو دایره چند واحد است؟

$$7\sqrt{6} \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$12\sqrt{2} \quad (1)$$

سراسری ریاضی ۱۳۹۱

۴ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

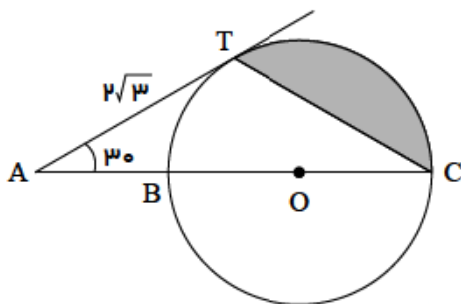
$$10 \quad (4)$$

$$9/6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4/8 \quad (1)$$

۵ در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشورخورده چقدر است؟



$$\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (p)$$

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \quad (k)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

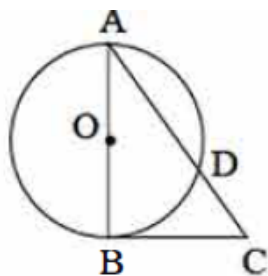
۶ در شکل روبه‌رو پاره‌خط BC مماس بر دایره، زاویه $\hat{C} = 60^\circ$ و اندازه CD برابر $2\sqrt{3}$ واحد می‌باشند. مساحت دایره چقدر است؟

۲۴π (۲)

۳۶π (۱)

۴۰π (۴)

۱۸π (۳)



۷ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$

است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

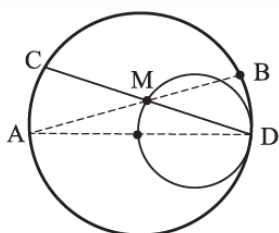
۸ (۱)

۹ (۲)

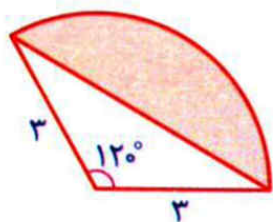
۶ (۳)

۱۲ (۴)

سراسری
ریاضی ۹۹



۸. مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

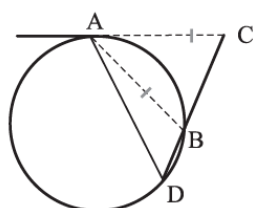
۹. اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, ۱۳)$ و $C'(O', ۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۱۰. در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی

باشد، زاویه A چند درجه است؟

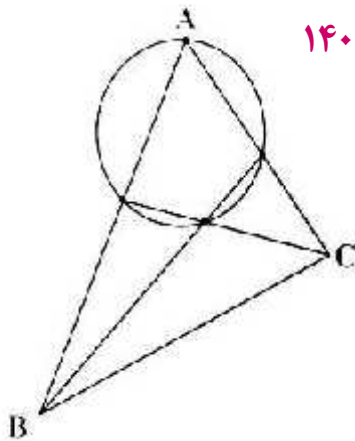
(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

دی ماه ۱۴۰۱



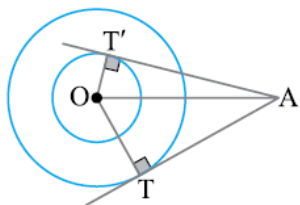
۱۲ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

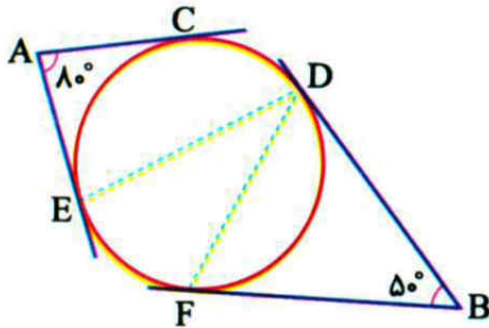
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

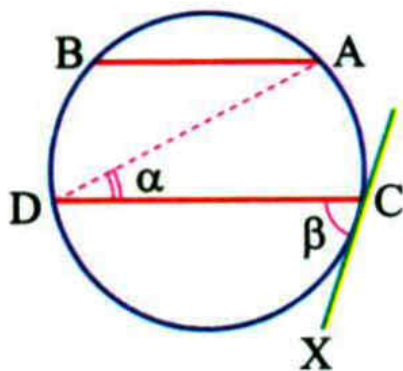
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۵. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸

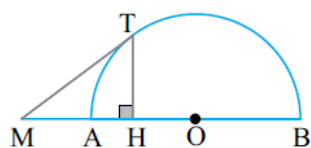


۵۰ (۱)

۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)



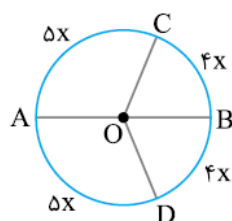
۱۶ در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$



۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۸ فرض کنید خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهای یک دایره و خط $4x+3y+5=0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

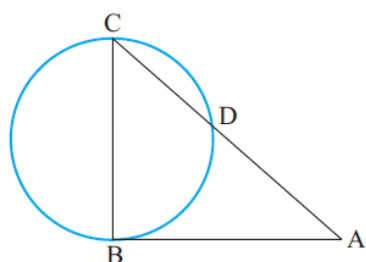
(۴) $\sqrt{5}-2$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}-1$

سراسری ۱۴۰۰



۹ خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = 6$ مماس است. اگر $CD = 4$ ، طول پاره خط AD کدام است؟

(۱) ۳

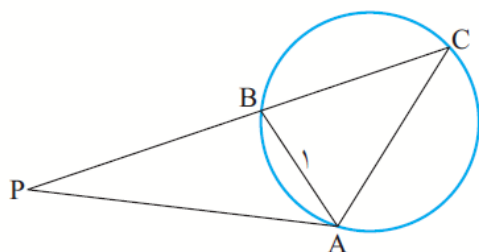
(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹



۲۰ در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = 1$. طول AC چقدر است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(۴) ۲

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی و چند ضلعی محاطی و محیطی

۱ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟

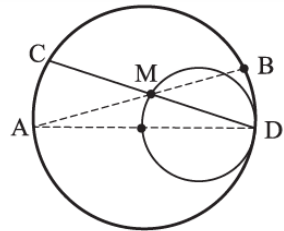
۸ (۱)

۶ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۴)

سراسری
ریاضی ۹۹



۲ فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های $a-1$ و a^2-2 ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

۳ (۱)

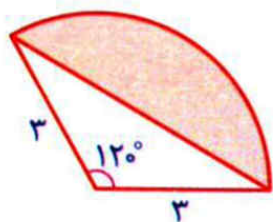
$\frac{13}{3}$ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

سراسری ۱۴۰۰

۳ مساحت قسمت رنگ شده شکل مقابل چقدر است؟



$$9\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad (۲)$$

$$3\pi - 2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\pi - 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

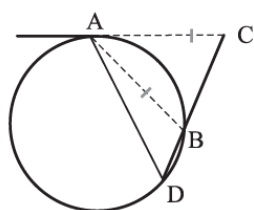
۴ اگر زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره $C(O, ۱۳)$ و $C'(O', ۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره چقدر است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$



۵ - در شکل مقابل، اندازه قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟

$$BC = BA \quad (۱)$$

$$BD = AC \quad (۲)$$

$$BC = BD \quad (۳)$$

$$DA = DC \quad (۴)$$

سراسری
ریاضی ۹۹

۶ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی

باشد، زاویه A چند درجه است؟

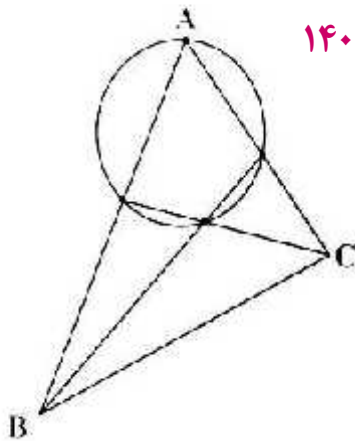
(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

دی ماه ۱۴۰۱



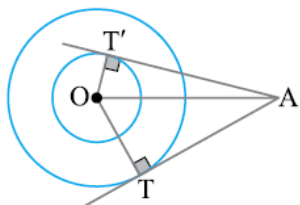
۷ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳ یا ۸

(۲) ۴ یا ۷

(۱) ۴



۸ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره

رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

(۲) ۱۲

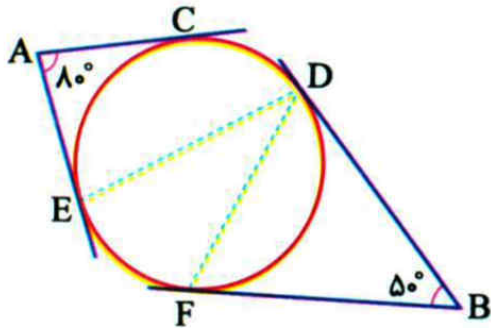
(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

۹. در شکل زیر اضلاع زاویه های A و B بر دایره مماس اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۲۵ (۱)

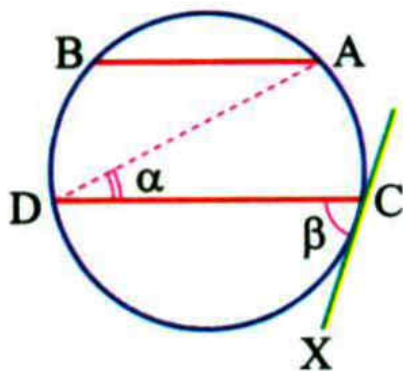
۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)

۱۰. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸



۵۰ (۱)

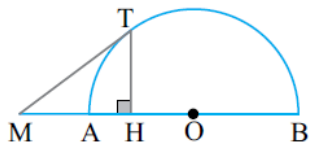
۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۷۵ (۴)

۱۱

در نیم دایره‌ی شکل مقابل $AB=3$ و $AM=1$. اگر MT بر نیم دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



(۲) $\frac{1}{6}$

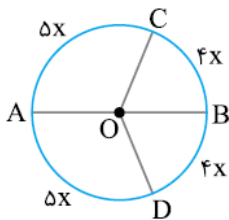
(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۱۲

در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



(۲) 150°

(۱) 160°

(۴) 130°

(۳) 140°

۱۳

یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های ۸ و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت 15π محیط است. مقدار h کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) $\frac{32}{3}$

(۲) ۸

(۱) $\frac{25}{3}$

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

۱۴

طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

(۴) 2.75

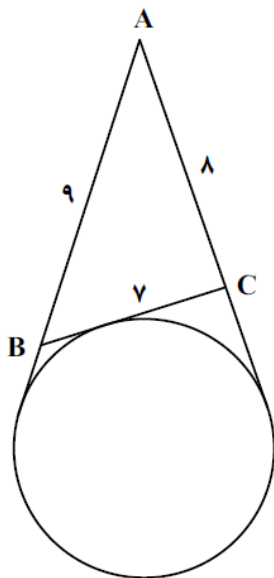
(۳) 2.25

(۲) 1.75

(۱) 1.25

۱۵

در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

(۱) $7.2\sqrt{2}$

(۲) $4.8\sqrt{5}$

(۳) $3.6\sqrt{2}$

(۴) $2.4\sqrt{5}$

۱۶

یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

(۱) ۵۴۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۳۶۰

سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

۱۷

یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۱) $\frac{12}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

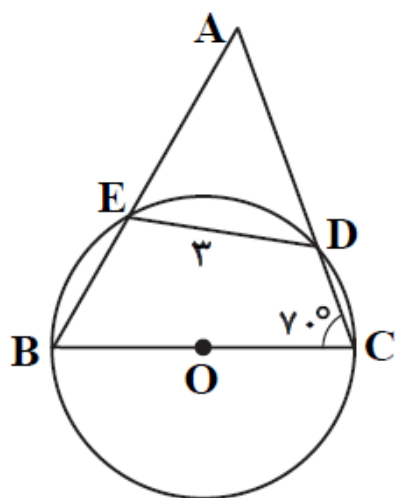
(۳) $\frac{24}{\sqrt{3}}$

(۴) $\frac{32}{\sqrt{3}}$

سراسری
دی ماه ۱۴۰۱

۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) ۸۰

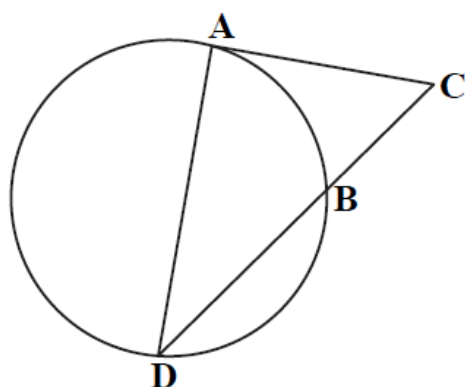
(۲) ۹۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۲۰

۱۹ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۰



(۱) $\sqrt{2}$

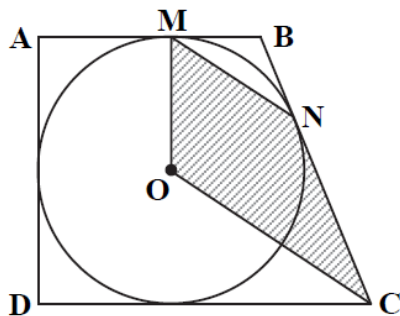
(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۰. مطابق شکل زیر ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است.

اگر زاویه $\hat{MBN} = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی $OMNC$ کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

(۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

(۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

(۴) $۹\sqrt{۳}$

نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آزمون اول هندسه یازدهم - زوایا و روابط طولی در دایره

پایه تحصیلی :

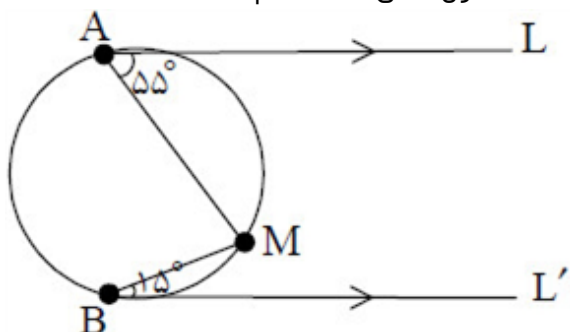
زمان آزمون :

نام دبیر : رها مسیح

تاریخ برگزاری

کارنامه خرد

۱ در شکل مقابل $L \parallel L'$ و شعاع دایره برابر 30° واحد است. با فرض $\pi = 3$ ، طول کمان $\widehat{AB}$ کدام است؟



۶۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

۲ در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ طول مماس مشترک خارجی 12 و طول مماس مشترک داخلی $2\sqrt{15}$ و اندازه خط مرکزین $4\sqrt{10}$ است. اختلاف مساحت دو دایره C و C' ، کدام است؟

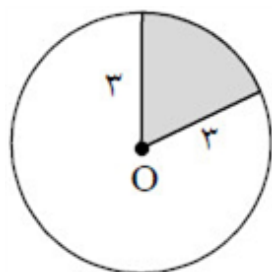
50π (۴)

40π (۳)

30π (۲)

20π (۱)

۳ اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، محیط قسمت سایه خورده کدام است؟ (در محاسبه نهایی محیط π را 3 فرض کنید.)



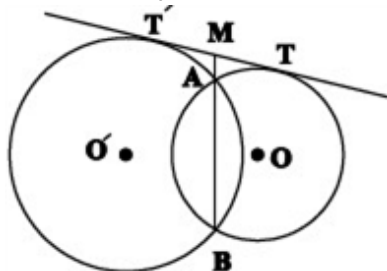
۷ (۴)

۶ (۳)

$10/5$ (۲)

$7/5$ (۱)

۴ در شکل مقابل فاصله مراکز دو دایره متقاطع برابر $OO' = 9$ است. وتر مشترک $AB = 5$ را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در نقطه M قطع کند. اگر $AM = 2$ باشد، اختلاف اندازه شعاع‌های دو دایره کدام است؟



$4\sqrt{2}$ (۴)

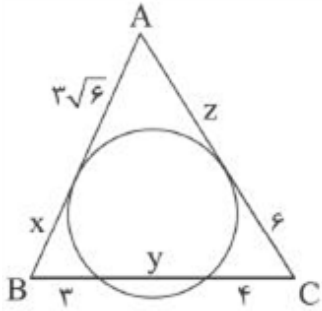
۵ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۱)

۵

در دایره شکل زیر، دو ضلع AB و AC از مثلث ABC بر دایره مماس‌اند. حاصل $x + y + z$ برابر کدام است؟



۴ $5 + 8\sqrt{6}$

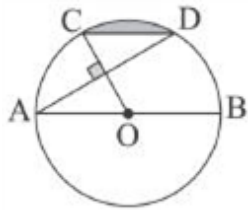
۳ $8\sqrt{6}$

۲ $5\sqrt{6}$

۱ $5 + 5\sqrt{6}$

۶

در دایره به مرکز O و شعاع ۶، دو وتر AB و CD موازی‌اند. مساحت قطعه رنگ‌شده برابر کدام است؟



۴ $6\pi - 9\sqrt{3}$

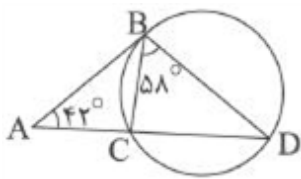
۳ $6\pi - 6\sqrt{3}$

۲ $8\pi - 8\sqrt{3}$

۱ $8\pi - 4\sqrt{3}$

۷

در شکل زیر اندازه زاویه ظلی $\widehat{ABC}$ برابر کدام است؟



۴ 29°

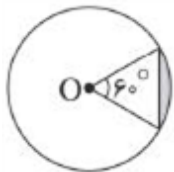
۳ 21°

۲ 36°

۱ 40°

۸

در شکل زیر مساحت قطعه رنگی برابر $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ است. مساحت دایره کدام است؟



۴ π

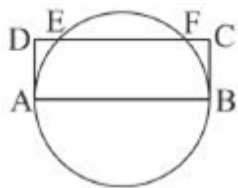
۳ 4π

۲ 6π

۱ 9π

۹

در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF برابر کدام است؟



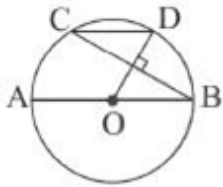
۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

۱۰ در دایره $C(O, 3)$ $CD \parallel AB$ است. طول کمان $\widehat{CD}$ کدام است؟



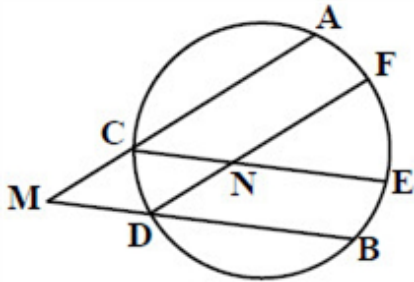
۴ π

۳ $\frac{\pi}{2}$

۲ $\frac{3\pi}{2}$

۱ 2π

۱۱ در شکل مقابل، $BD \parallel CE$ ، $AC \parallel DF$ ، $\widehat{AC} = 85^\circ$ و $\widehat{BD} = 75^\circ$ است. اگر $\widehat{CNF} = 135^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{EF}$ چند درجه است؟



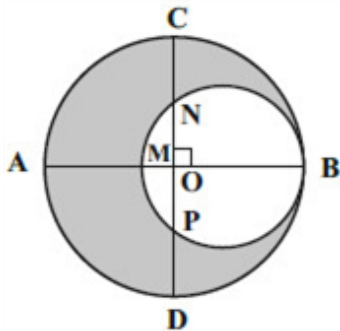
۴ ۳۰

۳ ۳۵

۲ ۴۰

۱ ۴۵

۱۲ در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = 8$ و $CN = 6$ باشد، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟



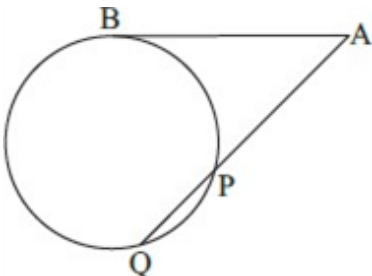
۴ 66π

۳ 64π

۲ 56π

۱ 54π

۱۳ در دایره $C(O, 5)$ پاره خط AB در نقطه B بر دایره مماس است. اگر $AB = 6$ و $AP = 4$ باشند، آنگاه طول کمان PQ برابر کدام است؟



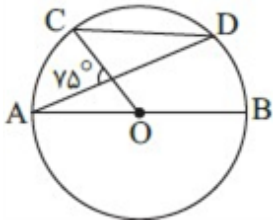
۴ $\frac{5}{6}\pi$

۳ $\frac{6}{5}\pi$

۲ $\frac{4}{3}\pi$

۱ $\frac{5}{3}\pi$

۱۴ در شکل مقابل وتر CD با قطر AB موازی است. زاویه $\widehat{DBA}$ چند درجه است؟



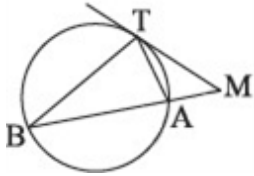
۶۰ (۴)

۶۵ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۱۵ در شکل، MT بر دایره مماس است. اگر $AT = ۲$ ، $BT = ۴$ و $MA = ۱/۵$ باشند، آنگاه اندازه AB کدام است؟



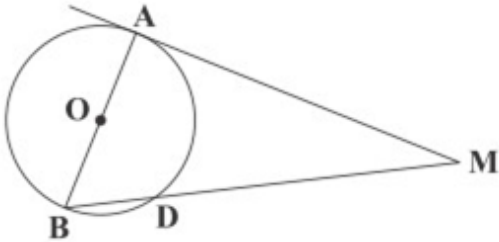
۴ (۴)

۴/۵ (۳)

۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۱۶ در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع آن ۴ واحد است. اگر $BD = ۴$ باشد، طول مماس MA کدام است؟



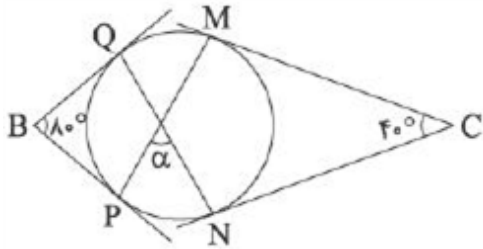
$۱۶\sqrt{۳}$ (۴)

$\sqrt{۳}$ (۳)

$۴\sqrt{۳}$ (۲)

$۸\sqrt{۳}$ (۱)

۱۷ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه α چند درجه است؟



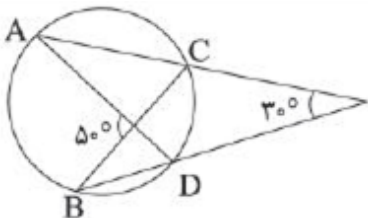
۳۰° (۴)

۵۰° (۳)

۶۰° (۲)

۴۵° (۱)

۱۸ در دایره $C(O, ۶)$ ، طول کمان AB برابر کدام است؟



۳π (۴)

$\frac{۸}{۳}\pi$ (۳)

$\frac{۳}{۲}\pi$ (۲)

۶π (۱)

19



6. $\circ$ 2

۲۰

31 (1)

21



95 2

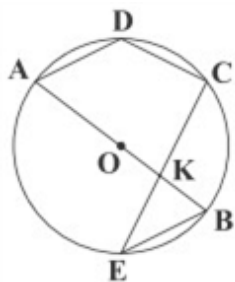
22



۳۳° (۱)

۲۳

در شکل زیر O مرکز و AB قطر دایره و $AD = DC = BE$ می‌باشد. اگر $\widehat{AKE} = 75^\circ$ باشد، زاویه ADC چند درجه است؟



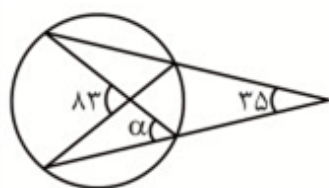
۱۰۰ (۴)

۱۰۵ (۳)

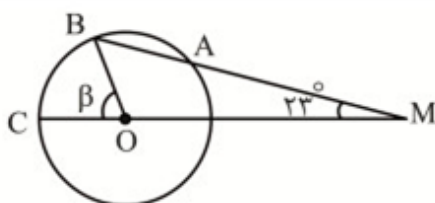
۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

۲۴ با فرض $MA = R$ (R شعاع دایره) در شکل‌های زیر، اندازه $\alpha + \beta$ کدام است؟



۱۳۲ (۴)

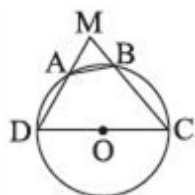


۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۱۸ (۱)

۲۵ در شکل زیر O مرکز دایره است و $CD = 2AD$. اگر $\widehat{BCD} = 50^\circ$ باشد، زاویه M چند درجه است؟



۷۰° (۴)

۶۰° (۳)

۵۰° (۲)

۴۵° (۱)

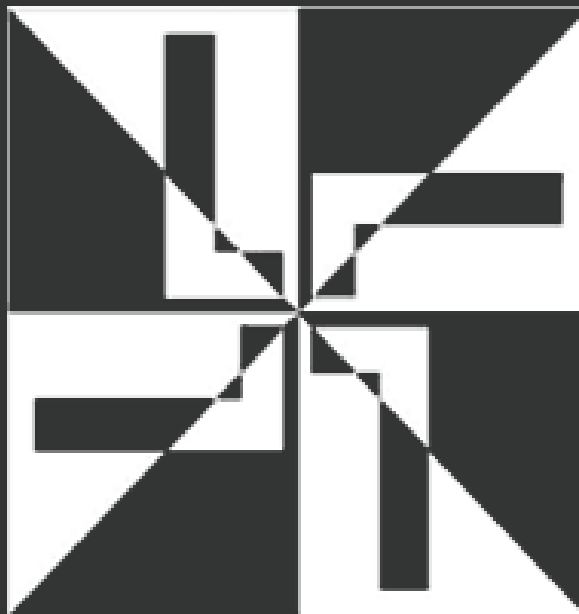
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴

تبدیلات هندسی

نمره در امتحان نهایی
شش نمره

تعداد تست
یک تست

پیش نیاز
تبدیلات هفتم



فصل دو هندسه یازدهم

انتقال، بازتاب،
دوران و تجانس

$$F(x) = y$$

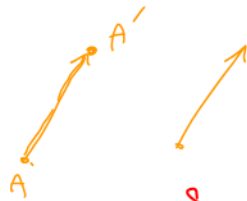
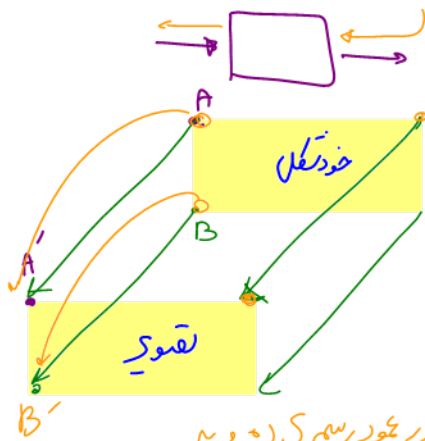
ورودی $\uparrow$ $\downarrow$ خروجی

$$F(x, y) = (x', y')$$

تبدیل هندسی

رابطه ای است که به هر نقطه از صفحه یک نقطه را تغییر می‌دهد (تصویر)

انتقال و هر نقطه تصویر دقیقاً از یک نقطه به دست آمده است

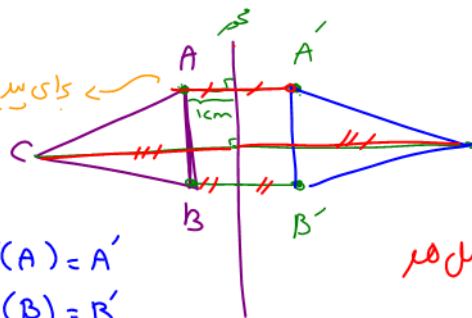


$$\vec{v} \text{ بردار انتقال}$$

$$\vec{AA'} = \vec{v} \quad T(A) = A'$$

بردار واحد هر نقطه به تصویرش

جای پیدا کردن تصویر به محور محور رسم کردن و به همان اندازه امتداد می‌دهیم



$$S(A) = A'$$

معور بازتاب

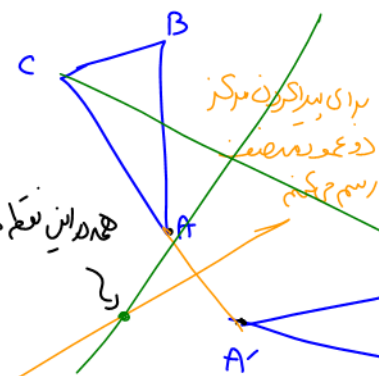
عود مسافت پاره خط واصل هر نقطه و تصویرش

$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

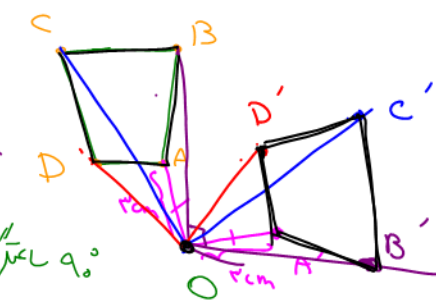
$$T(C) = C'$$

۳۰° پاد ساعتگرد نسبت به O



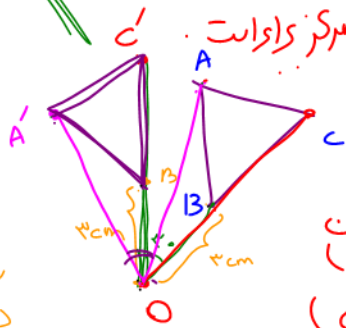
برای پیدا کردن مرکز دو عود مسافت رسم می‌کنیم

همه در این نقطه همساز



۹۰° ساعتگرد

فاصله نقطه تا مرکز و تصویرش تا مرکز برابر است



$$R(A) = A'$$

$$|OA| = |OA'|$$

مرکز دوران

$$\angle AOA' = \alpha$$

α زاویه دوران (زاویه بین نیم خط رأس و مرکز دوران) و (تصویر و مرکز دوران)

مرکز دوران روی محور مسافت

پاره خط واصل هر نقطه و تصویرش قرار دارد

جهت ساعتگرد یا پاد ساعتگرد

$$T(A) = A'$$

تبدیل T نقطه A را به نقطه A' تغییر کرده است

تجانس

اگر از جنس هم روی به اندازه مختلف

مرکز تجانس O و A و A' در یک سمت O

نسبت تجانس K که O بین A و A' است

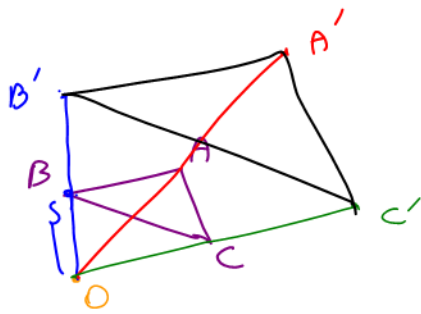
انتقال $|K| < 1$! اندازه کوچکتر
انقباض $|K| > 1$
تولید $|K| = 1$

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = |K|$$

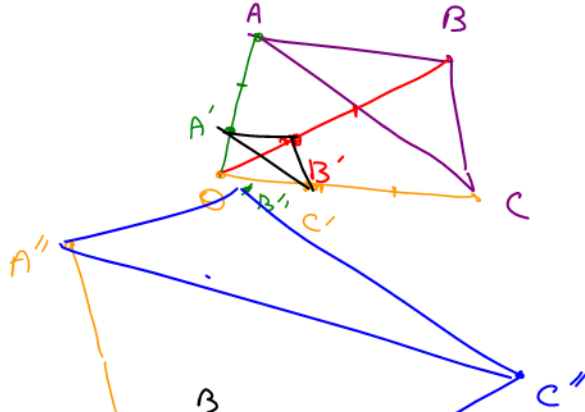
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = K$$

تعبیر مستقیم

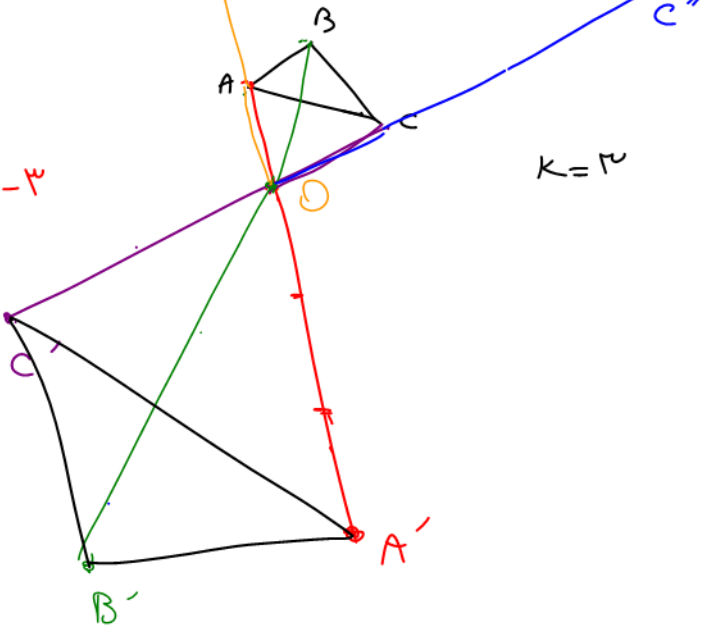
$$K = 2$$



$$K = \frac{1}{2}$$

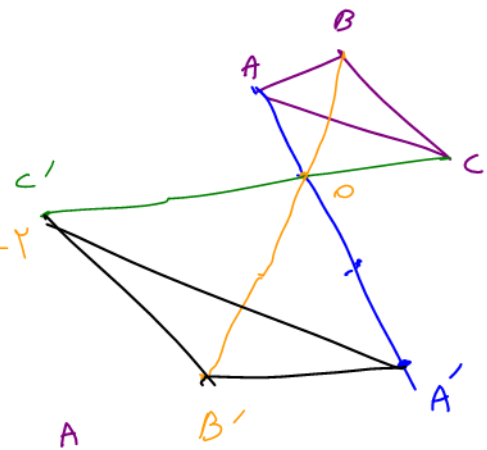


$$K = -3$$

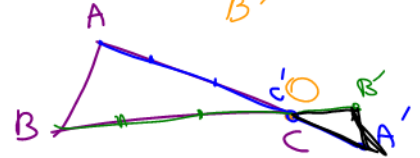


$$K = 2$$

$$K = -2$$



$$K = -\frac{1}{2}$$



دکترها مسیح
هر رابطی می تونه باشه!

$$f(x, y) = (x + y, x - 3y)$$

$$f(1, 2) = (1 + 2, 1 - 3 \times 2) = (3, -5)$$

$$A(0, 0)$$

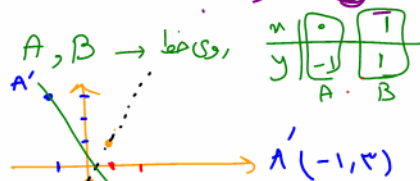
$$f(A) = A'$$

$$A'(3, -5)$$

$$f(n) = 2n$$

$$f(n) = \frac{3n-1}{2}$$

تحت تبدیل f خط $y = 2x - 1$ به چه خطی تبدیل می شود؟



$$f(0, -1) = (0 + (-1), 0 - 3(-1)) = (-1, 3)$$

$$f(1, 1) = (1 + 1, 1 - 3(1)) = (2, -2)$$

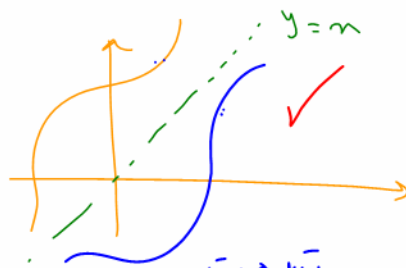
۱ کدام یک از تبدیل های زیر یک انتقال است؟

$$T(x, y) = (x + 1, 1 - y) \quad (1)$$

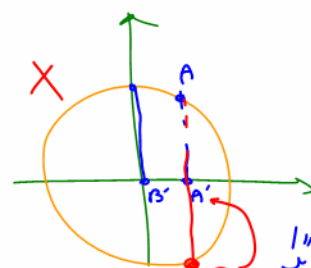
$$T(x, y) = (y + 2, x - 1) \quad (2)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+1}{2}, \frac{3y+5}{3} \right) \quad (4)$$

$$T(x, y) = (2x + 1, 1 + y) \quad (3)$$



تبدیل هست
چون هر نقطه یک تصویر
و هر تصویر متعلق به یک نقطه



هر نقطه دقیقاً یک
تصویر دارد
ولی هر تصویر
لزوماً متعلق
به یک نقطه نیست
هر نقطه را به نقطه ای با طول یک
روی محور n نظم کنید
آیا این یک تبدیل است؟

۲ تصویر خط $2x - 3y = 1$ را تحت تبدیل $T(x, y) = (1 - y, 2x + 2)$ به دست آورید.

حفظ شیب	ایزومتري	نقطه ثابت
		انتقال
		بازتاب
		دوران
		تجانس

۵	سه خط دوجه دو ناموازی L_1 و L_2 و L_3 داریم. توضیح دهید که چگونه می توان پاره خطی به طول ۵ واحد رسم کرد که دو سر آن روی L_1 و L_2 باشند و موازی L_3 باشد.	۲
۶	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ واحد باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.	۲
۷	نقطه B تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AB = ۱۶$ و نقطه O روی خط L باشد و $OA = ۱۰$ ، فاصله نقطه A از خط OB را بیابید.	۱/۵
۸	فقط درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) تجانس همواره اندازه زاویه را حفظ می کند. ب) بازتاب همواره شیب خط را حفظ می کند.	۱

۲ یکی از نقاط تلاقی دو دایره C و C' نقطه‌ی A می‌باشد برای رسم خطی از نقطه‌ی A گذشته به‌طوری‌که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی کوچک‌تر.
 (۲) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز A .
 (۳) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر.
 (۴) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز وسط خط‌المركزین دو دایره.

۳ دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ و نقطه‌ی A بیرون آن‌ها مفروضند برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به رأس A بطوریکه دو رأس بعدی در دایره C و C' قرار داشته باشند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) انتقال (۲) دوران (۳) تجانس (۴) بازتاب

۴ دوران یافته‌ی خط $3x - y = 2$ به مرکز مبدأ و زاویه‌ی -90° کدام است؟

(۱) $3y - x = 2$ (۲) $3y + x = 2$ (۳) $3y - x + 2 = 0$ (۴) $3y + x + 2 = 0$

۵

در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی

بزرگ‌تر کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۶

تحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص

است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

(۳) بازتاب نسبت به نقطه (۴) بازتاب نسبت به خط

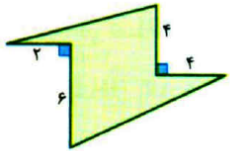
(۲) دوران

(۱) تجانس

کاربرد تبدیل هم پیرامونی

هرون

۷ زمینی به شکل زیر حصار کشی شده است و مساحت آن ۶۰ مترمربع است اگر بخواهیم بدون تغییر محیط زمین و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، حصارها را طوری جابه‌جا کنیم تا مساحت زمین بیش‌ترین مقدار ممکن شود، در این صورت حداکثر مساحت زمین چند مترمربع است؟



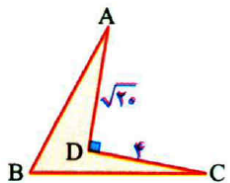
۸۸ (۴)

۸۶ (۳)

۸۴ (۲)

۸۲ (۱)

۸ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟



$8\sqrt{5}$ (۲)

$4\sqrt{5}$ (۱)

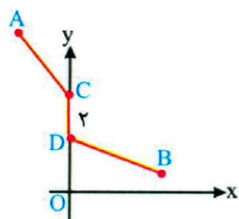
$16\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

۹ دو نقطه $A|-4$ و $B|4$ در طرفین محور y ها قرار دارند، دو نقطه C و D به فاصله دو واحد از هم روی محور y ها قرار دارند، حداقل طول خط

(مشابه داخل - ۹۹)

شکسته $ACDB$ کدام است؟



۹ (۱)

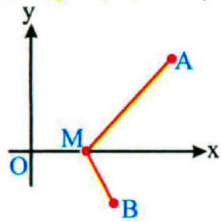
۱۰ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)

دکترها مسیح

۱۰) نقاط $A(4, 6)$ و $B(1, -2)$ در طرفین محور x ها قرار گرفته اند و نقطه M روی محور x هاست. حداکثر $|MA - MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



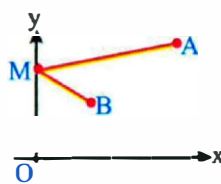
۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۱۱) نقاط $A(5, 7)$ و $B(1, 4)$ در یک طرف محور y ها قرار گرفته اند و نقطه M روی محور y هاست. حداکثر $|MA - MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۴ (۴)

دکتررها مسیح

انتقال

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

همانی:

حفظ جهت

ویژگی:

بازتاب

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

همانی:

حفظ جهت

ویژگی:

دوران

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

همانی:

حفظ جهت

ویژگی:

تجانس

ایزومتريک

نقاط ثابت:

حفظ شیب

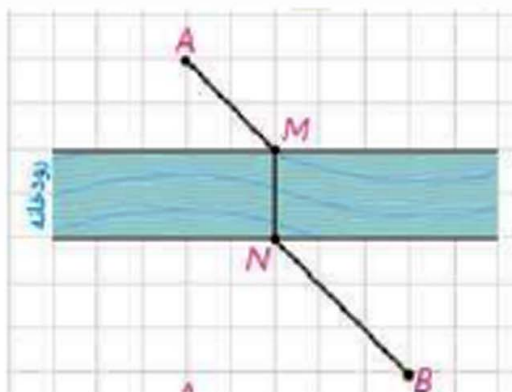
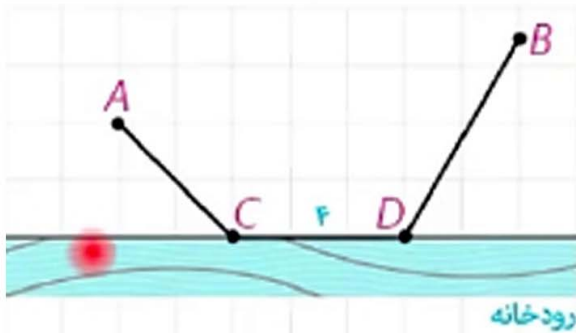
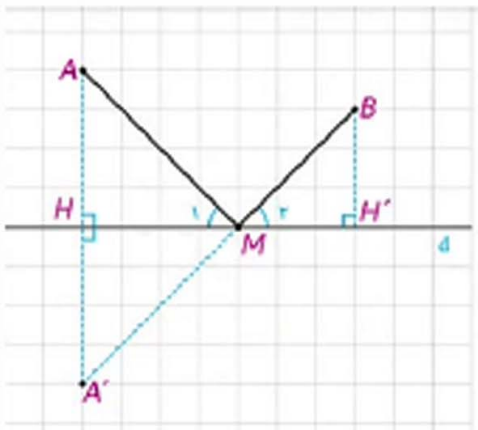
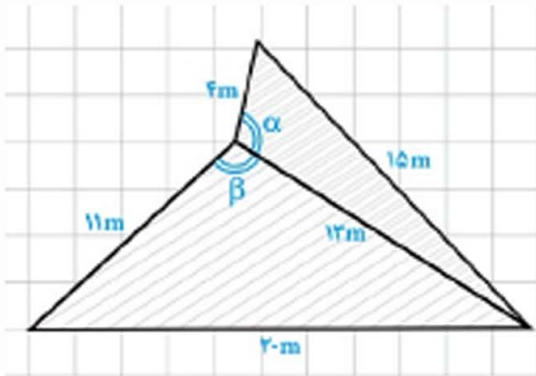
همانی:

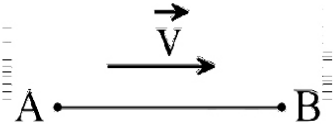
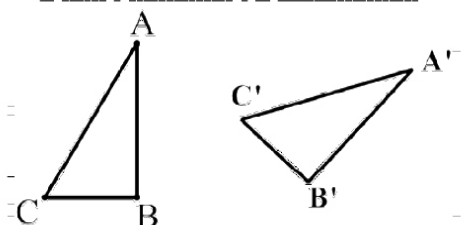
حفظ جهت

ویژگی:

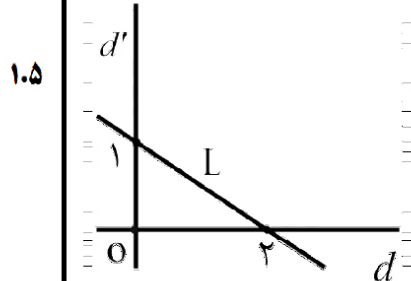
تبدیل ها

کاربرد تبدیل ها



ردیف	۱۴۰۳ خرداد	سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	۱۴۰۳ خرداد	نمره										
۷	۰.۷۵	سؤالات فصل ۲ برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است). <table border="1"> <thead> <tr> <th>گروه A</th> <th>گروه B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:</td> <td>دوران</td> </tr> <tr> <td>ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:</td> <td>همانی</td> </tr> <tr> <td>پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:</td> <td>بازتاب</td> </tr> <tr> <td></td> <td>انتقال</td> </tr> </tbody> </table>	گروه A	گروه B	الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران	ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی	پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب		انتقال		
گروه A	گروه B													
الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران													
ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی													
پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب													
	انتقال													
۸	۱	با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند. ($\vec{V} \parallel AB$ و اندازه $\vec{V}$ از اندازه پاره خط AB کوچک تر است). 												
۹	۰.۵	نقاط A'، B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید. 												

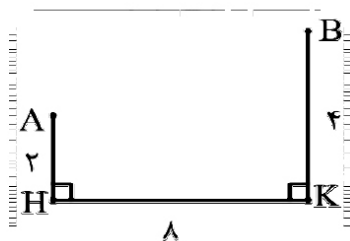
در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟



۱.۵

۱۰

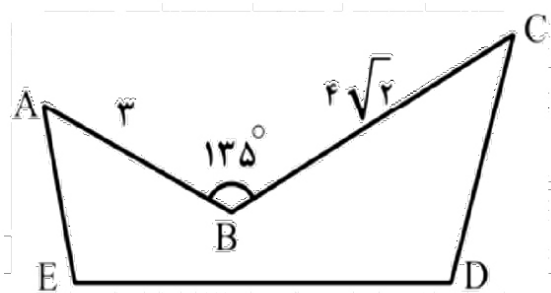
با توجه به شکل، نقطه M روی پاره‌خط $HK=8$ را به گونه‌ای بیابید که:
الف) مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.
ب) کمترین مقدار عددی $AM+MB$ را محاسبه کنید.



۱.۲۵

۱۱

در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید.



۱

۱۲

روابط طولی

نمره در امتحان نهایی

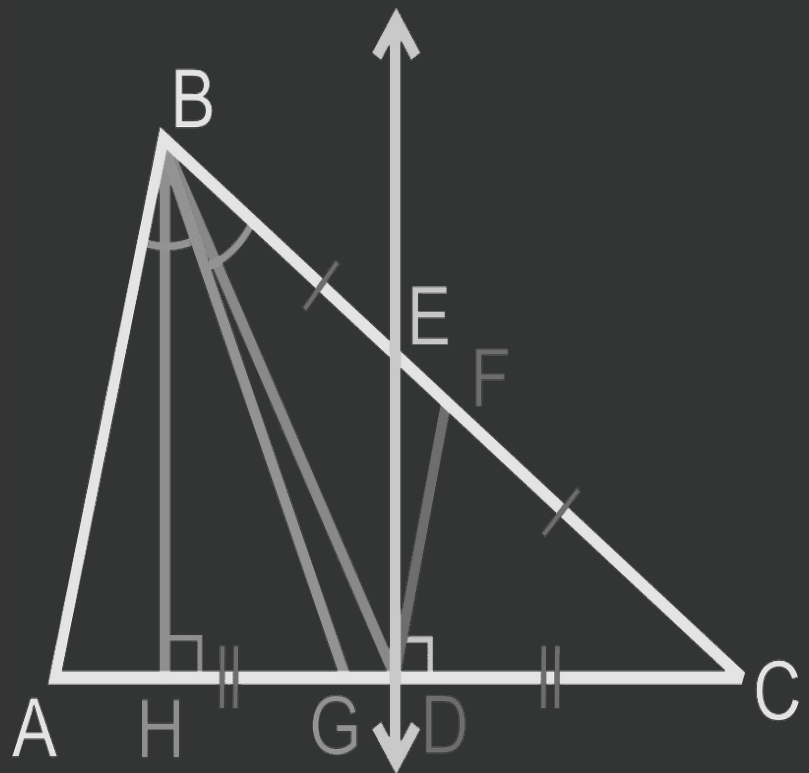
نش نمره

تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

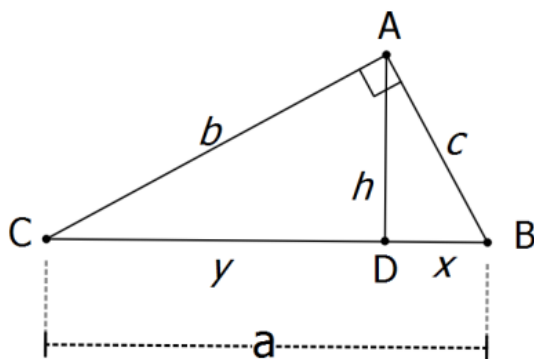
نسبت های مثلثاتی فصل ۲ ریاضی دهم
هندسه دهم فصل ۱



فصل سوم هندسه یازدهم

قضیه سینوس و کسینوس
قضیه نیمساز
قضیه هرون

مثلث قائم الزاویه



$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

قضیه کسینوس ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

۱ در مثلث ABC، زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و $b = a\sqrt{2}$ ، زاویه C چند درجه است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۲۰

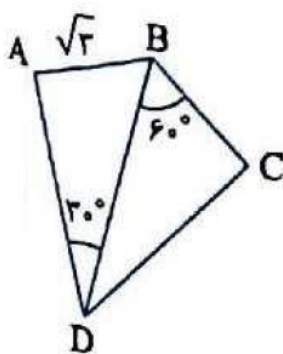
۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD محاطی است. طول ضلع CD کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



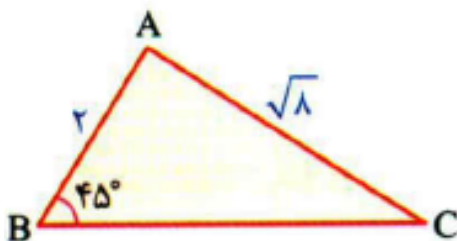
۳ در شکل مقابل اندازه زاویه A چقدر است؟

(۱) 135°

(۳) 75°

(۲) 105°

(۴) 60°



۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ اندازه شعاع دایره محیطی کدام است؟

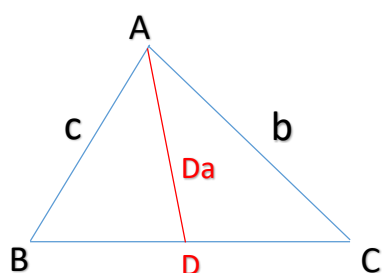
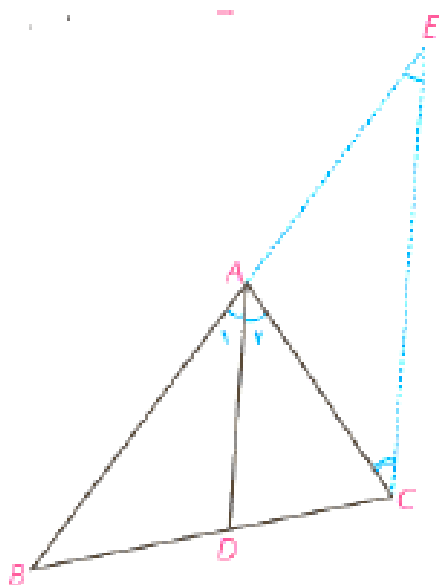
(۱) $8/5$

(۲) $7/5$

(۳) $9/5$

(۴) ۹

قضیه نیمساز و روابط مرتبط با آن



$$da = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

رابطه های میانه

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2ma^2$$

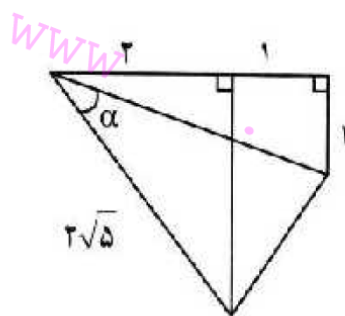
$$ma^2 = b^4 - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

قضیه هرون

در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟ سراسری دی ۱۴۰۱

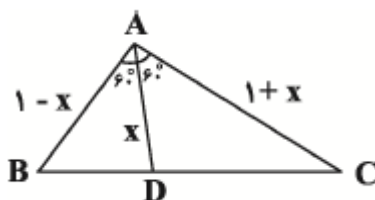
۵



sanjesh

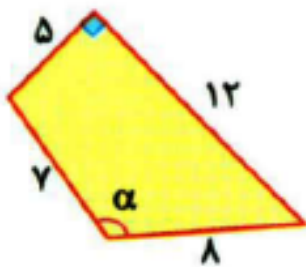
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{10}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

۶ در شکل مقابل، اندازه x کدام است؟



۱. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳. $2 - 1$
۴. $3 - 1$

۷ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع برهم عمودند، $\sin \alpha$ کدام است؟ خارج کشور ۹۸



$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

۸ در مثلث ABC، حاصل $b^2 \cos^2 \hat{C} + c^2 \sin^2 \hat{B}$ برابر با کدام است؟

a^2 (۱)

b^2 (۲)

c^2 (۳)

bc (۴)

۹ در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

سراسری ۹۵

$2/8$ (۲)

$2/1\sqrt{2}$ (۴)

$1/4\sqrt{2}$ (۱)

$2/1$ (۳)

۱۰ مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹، ۱۲ کدام است؟

$14\sqrt{5}$ (۴)

$12\sqrt{5}$ (۳)

$14\sqrt{3}$ (۲)

$15\sqrt{2}$ (۱)

دکترها مسیح

۱۱ در مثلثی با اضلاع x ، 5 ، $2x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{2}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

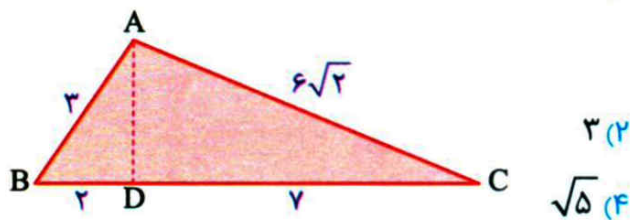
۱۵ (۲)

۱۷ (۱)

۱۲ در مثلثی با اضلاع 7 ، 10 ، 13 طول میانه وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

 $3\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{21}$ (۱)

۱۳ در شکل مقابل طول AD چقدر است؟

۳ (۲)

 $2\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۳)

۱۴ در مثلث ABC اگر $BC=10$ و میانه‌های $BM=12$ و $CN=9$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱۰۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۷۲ (۲)

۳۶ (۱)

۱۵ در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۳ و ۴ و زاویه بین آن‌ها 150° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

 $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

سوالات فصل ۳

خرداد ۱۴۰۳

◀ در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟ $0/5$ نمره

الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

◀ در مثلث ABC که $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $1/5$ نمره

◀ مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید. 1 نمره

◀ در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه C را محاسبه کنید. $1/5$ نمره

◀ در مثلث ABC که $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 8$ ، نقطه M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را به دست آورید. $1/5$ نمره

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

هندسه (۲)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه یازدهم

دوره دوم متوسطه





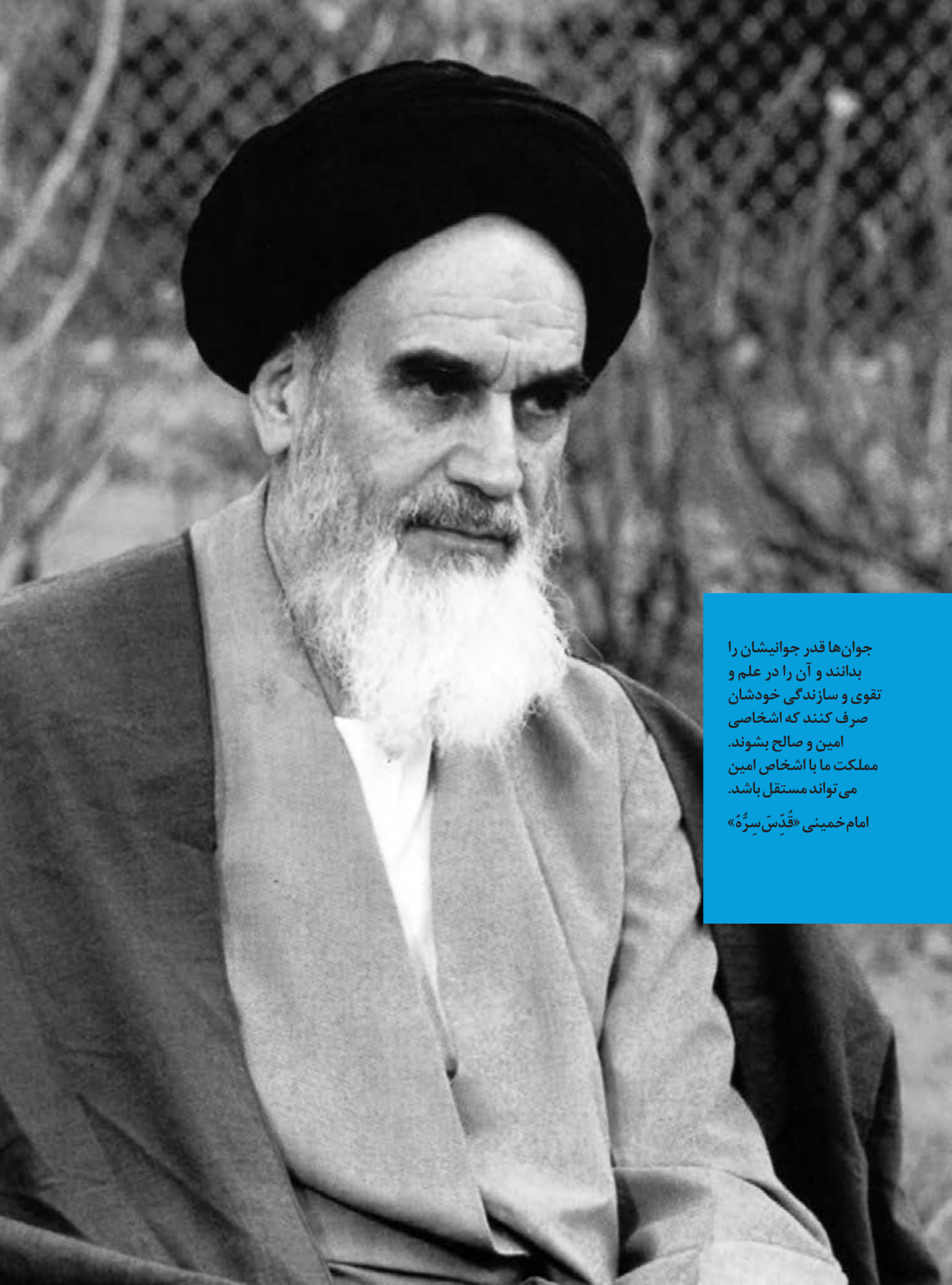
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: هندسه (۲) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۱۲۱۳
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: محمدحسن بیژن‌زاده، زهرا رحیمی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی و محمود نصیری (اعضای گروه تألیف) - محمد دانشگر (ویراستار)
شناسه افزوده آماده‌سازی: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
نشانی سازمان: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسام) - افسانه امیر احمدی، سیده‌فاطمه طباطبایی، سیفالله بیک‌محمد دلیوند، علی نجمی، کبری اجابتی (امور آماده‌سازی)
ناشر: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
چاپخانه: تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
سال انتشار و نوبت چاپ: وبگاه: www.irtxtbook.ir و www.chap.sch.ir
شابک: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
ISBN: ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۷۸۳-۲

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۷۸۳-۲

ISBN: 978-964-05-2783-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.
امام خمینی «قُدَسِ سِرَّة»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱: دایره	۹
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره	۱۰
درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره	۱۸
درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و محیطی	۲۴
فصل ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها	۳۱
درس اول: تبدیل‌های هندسی	۳۲
درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها	۵۰
فصل ۳: روابط طولی در مثلث	۵۹
درس اول: قضیه سینوس‌ها	۶۰
درس دوم: قضیه کسینوس‌ها	۶۴
درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها	۶۸
درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)	۷۱

پیشگفتار

کتاب حاضر در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دوره دوم متوسطه تألیف شده است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به این که کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به طور جدی توصیه می‌شود.

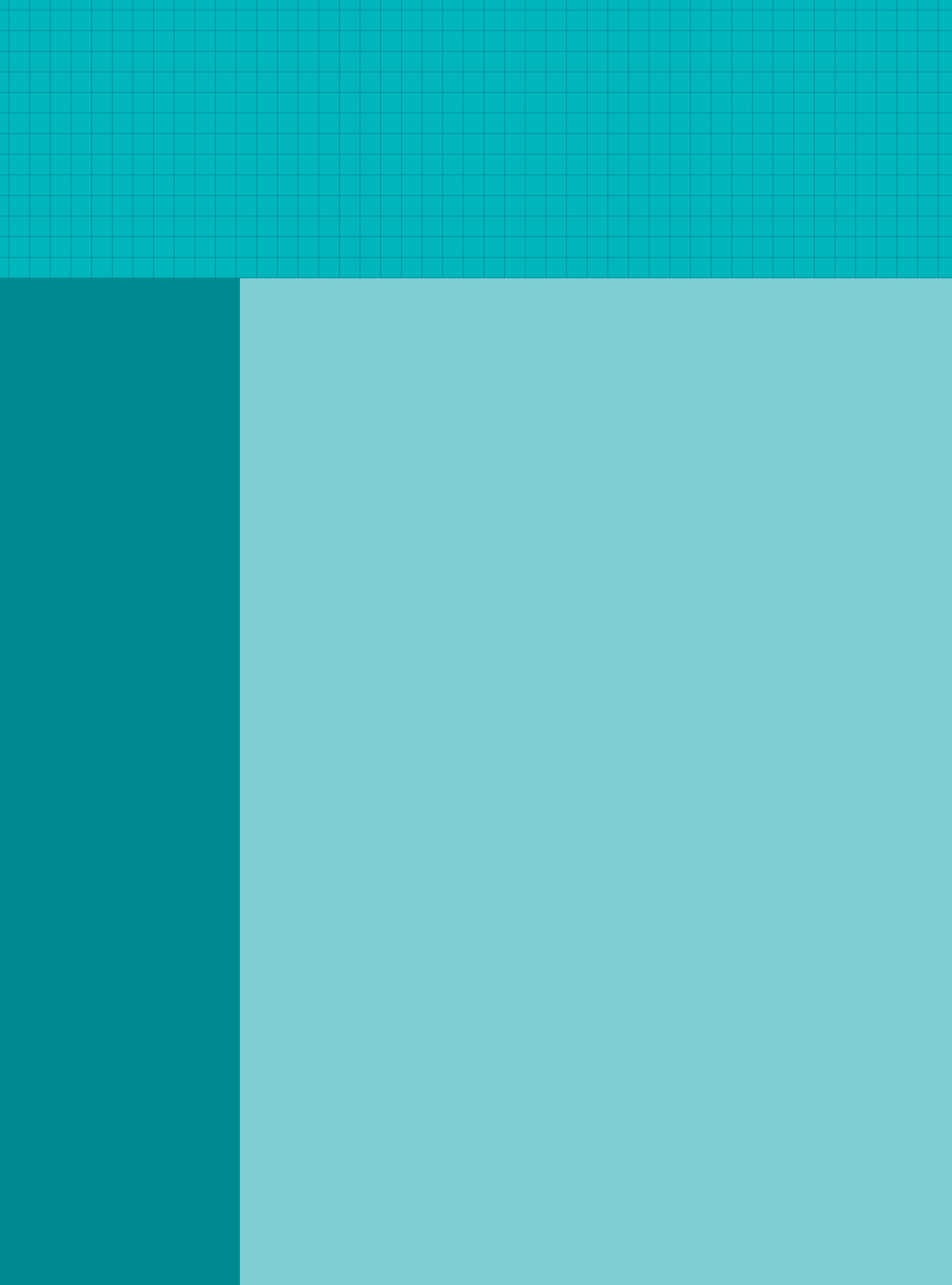
زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که باید به این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی توجه شود. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که گاهی پیش از این سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالا دستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، سایت گروه ریاضی دفتر تألیف، ایمیل، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب را نیز دبیران ریاضی استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال کرده‌اند. لازم است از زحمات تمامی عزیزان همراه تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پست الکترونیکی و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۱ دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان



دایره



هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیهٔ بنیادی در هندسه موسوم به «قضیهٔ هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعهٔ فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دورهٔ ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونهٔ گویایی از همین کاربردهاست.



مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصله ثابت (اندازه شعاع دایره) هستند. معمولاً دایره C به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که:

الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره است.

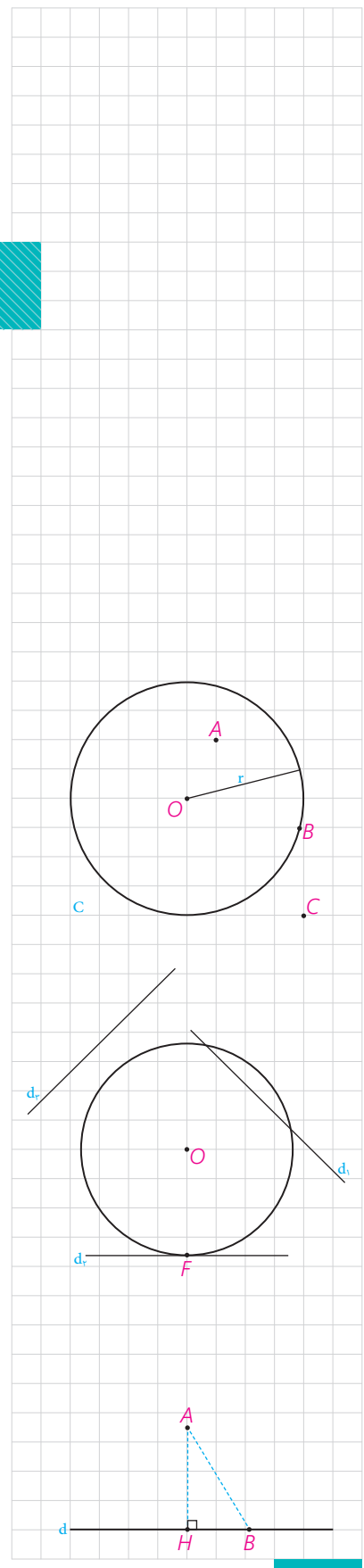
پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره شعاع دایره است.

■ اوضاع نسبی خط و دایره

در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته، و یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است و در حالتی که خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، خط و دایره را متقاطع می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.

✿ یادآوری

اگر خط d و نقطه A غیرواقع بر d داده شده، و نقطه H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازه پاره خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصله نقطه A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است ($AB > AH$).

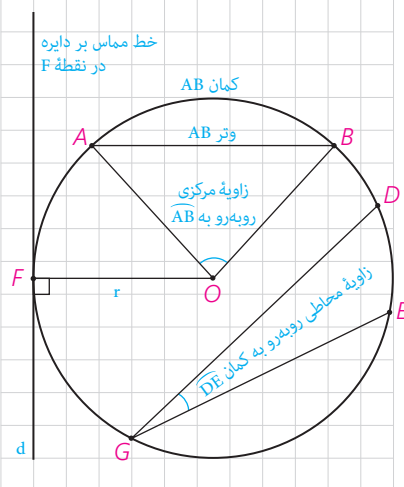
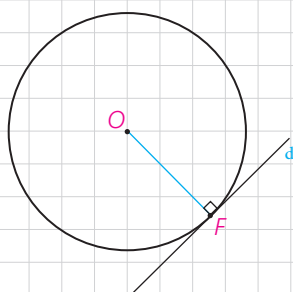
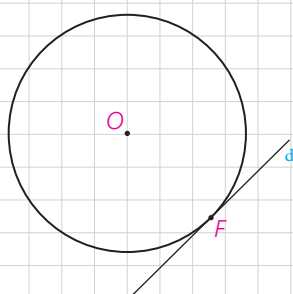
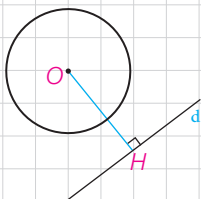
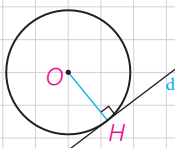
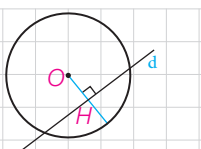


اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع اند

ب) اگر فاصله خط d از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره نقطه اشتراک دارند؛ یعنی

پ) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره



فعالیت

۱- فرض کنیم خط d بر دایره C در نقطه F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O کدام است؟ چرا؟

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

پ) نتیجه: اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F نقطه

۲- خط d در نقطه F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همه نقاط خط

d نسبت به دایره C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

۳- با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد،

چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره را در نقطه F رسم کنید؟

بنابراین:

یک خط و یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

زاوای مرکزی، محاطی و ظلی

با تعاریف زاوای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید.

در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

۱- شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی

دایره باشد.

۲- وتر دایره: پاره خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

۳- قطر دایره : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

۴- زاویه مرکزی : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵- زاویه محاطی : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

۶- کمان : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\widehat{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\widehat{AB}$ کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

۷- اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

۸- با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

کاردکلاس

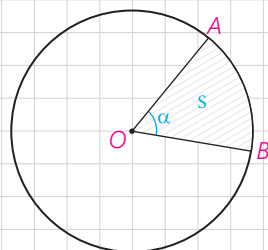
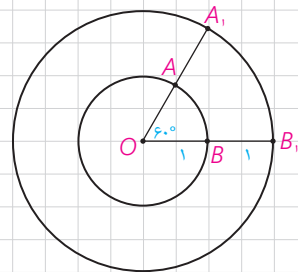
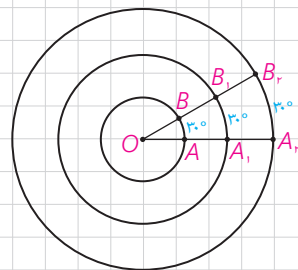
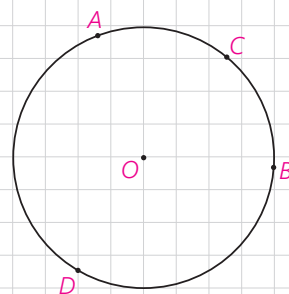
۱- با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه 360° است، خواهیم داشت :

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \widehat{AB} = \text{---}^\circ & \widehat{AB} \text{ طول} = \text{---} \\ \widehat{A_1B_1} = \text{---}^\circ & \widehat{A_1B_1} \text{ طول} = \text{---} \end{array}$$

۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با : $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha$



فعالیت

۱- فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره $C(O, r)$ باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

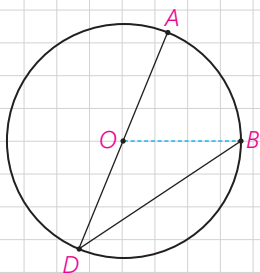
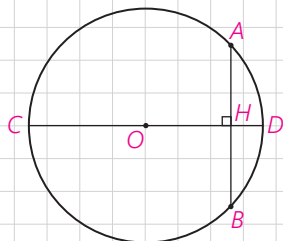
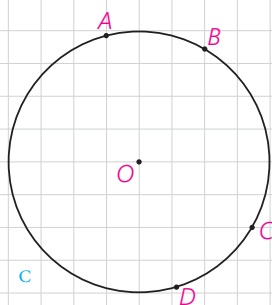
۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

۳- وتر AB و قطری از دایره، که بر وتر AB عمود است، مانند شکل مقابل داده شده است. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

۴- این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



فعالیت

۱- در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

- اگر از B به O وصل کنیم، زاویه AOB یک زاویه خارجی برای مثلث OBD است.

بنابراین: $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \dots = 2\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$$

۲- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

- اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2} \widehat{AOE} \\ \widehat{EDB} = \frac{1}{2} \widehat{EOB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

۳- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

- اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2} \widehat{AOE} \\ \widehat{BDE} = \frac{1}{2} \widehat{EOB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

■ زاویه ظلّی

نوع دیگری از زاویه، که در دایره مطرح است، زاویه ظلّی است. زاویه ظلّی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $\widehat{BAC}$ یک زاویه ظلّی است.

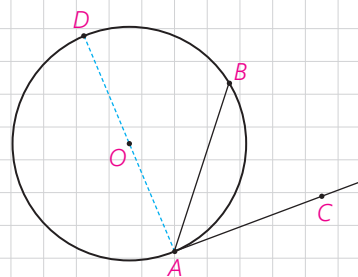
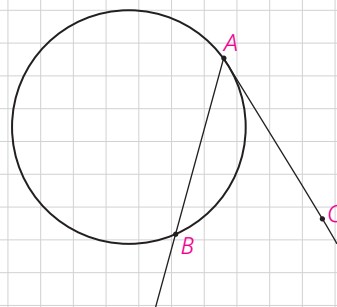
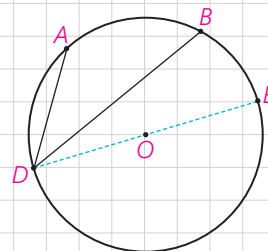
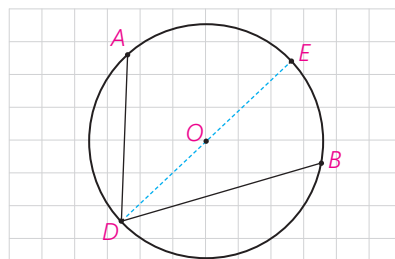
فعالیت

۱- زاویه ظلّی $\widehat{CAB}$ را در نظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطه A هست.

الف) $\widehat{DAC} = \dots\dots\dots^\circ$ و بنابراین: $\widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DOC}$

ب) زاویه $\widehat{DAB}$ یک زاویه محاطی است.

بنابراین: $\widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DOB}$



(پ) از (الف) و (ب) داریم :
 $\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{\dots\dots\dots} - \widehat{\dots\dots\dots})$
و بنابراین
 $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{\dots\dots\dots}$
(ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.
بنابراین :

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.
(الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
(ب) کمان‌های BD و AC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۲- در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم اندازه‌اند.
(الف) وترهای EF و GH و پاره خط EH را رسم کنید.
(ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
(پ) وترهای EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

نتیجه

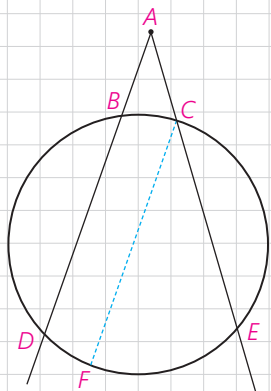
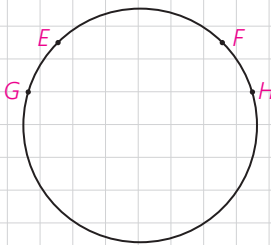
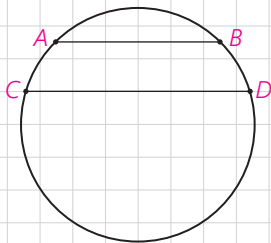
دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آنها روی دایره باشد و رابطه اندازه این زاویه‌ها را با اندازه کمان‌های ایجاد شده توسط آنها مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند.

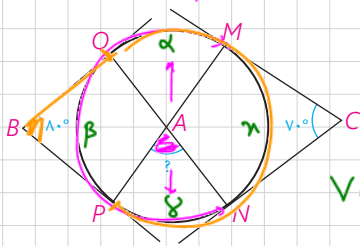
فعالیت

۱- فرض کنید رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده، و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویه موردنظر مشخص شده باشد.
(الف) از نقطه C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$



$$\hat{A} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$



۳- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

$$\begin{aligned} 140 &= \alpha + \beta + \gamma - \alpha \\ 140 &= \alpha + \gamma + \delta - \beta \\ \frac{280}{2} &= \frac{2\alpha + 2\gamma}{2} \\ \gamma + \alpha &= \hat{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha}{2} \\ \alpha_0 &= \frac{\alpha + \gamma + \delta - \beta}{2} \end{aligned}$$

۴- در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.

$$\begin{aligned} V\alpha &= \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\alpha = V\alpha \\ \alpha &= 50 \end{aligned}$$

$$E_1 = A + O \quad \text{نقطه فرضی}$$

۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

ثابت کنید: $AC = BD$

$$\widehat{CB} = \widehat{AD} \rightarrow 180 - \widehat{CB} = 180 - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

وترهای نظیر مکان‌های برابر، برابر

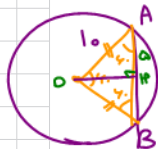
۶- دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

$$\widehat{AC} = \alpha \quad \text{مترکی}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \\ \alpha &= \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = \beta - \alpha \\ 3\alpha &= \beta \end{aligned}$$

$$OA = AM \xrightarrow{\text{مترکی}} O_1 = M = \alpha \quad \text{مترکی} \quad O_2 = BD = \beta$$

۷- در دایره $C(O, R)$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.



$$\begin{aligned} \widehat{AB} = 60^\circ &\rightarrow AB = R = 10 \\ OH^2 + 5^2 &= 10^2 \rightarrow OH^2 = 75 \rightarrow OH = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

۸- در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ (اگر و تنها اگر $OH < OH'$) (OH و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند).

راهتمایی: از O به B و C وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

$AB > CD$ فرض

$OH < OH'$ حکم

$$PH^2 + \frac{AB^2}{4} = OH^2 + \frac{CD^2}{4}$$

$OH < OH'$ فرض

$AB > CD$ حکم

$$OH^2 + \frac{AB^2}{4} = OH'^2 + \frac{CD^2}{4}$$

$$\frac{OH < OH'}{OH^2 < OH'^2} \rightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \rightarrow AB > CD$$

$$AB > CD \rightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4}$$

$$OH^2 < OH'^2 \rightarrow OH < OH'$$

* اگر فرض کنیم $AB < CD$ و $OH > OH'$ خواهیم داشت $AB < CD$ و $OH > OH'$ که با فرض ما در تناقض است.

رابطه‌های طولی در دایره

اگر خط‌های شامل دو وتر از یک دایره، یکدیگر را در درون یا بیرون دایره قطع کنند بین اندازه‌ی پاره‌خط‌های حاصل روابطی داریم که به بررسی آنها می‌پردازیم.

فعالیت

۱- دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MBC و MAD متشابه‌اند.

ب) با توجه به تشابه این دو مثلث داریم: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$

۱ و در نتیجه: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$

۲- خط‌های شامل دو وتر AB و CD در نقطه M خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطه A را به D و نقطه C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC باهم متشابه‌اند.

ب) با توجه به این تشابه داریم: $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$

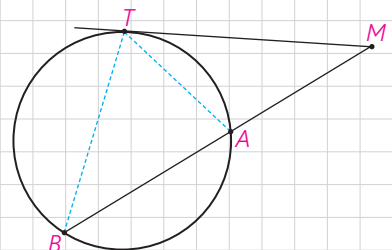
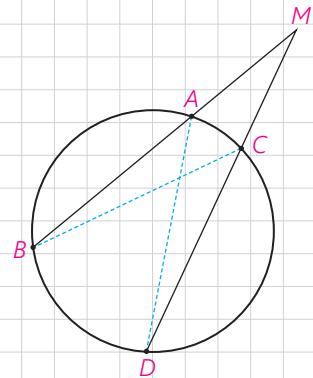
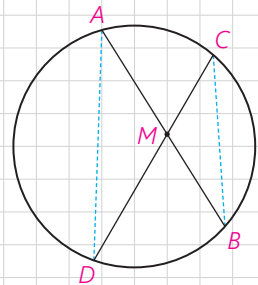
۲ و در نتیجه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

قضیه: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M

(درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آنگاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

۳- فرض کنیم از نقطه M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل، و مشخص کنید چرا؟ $\widehat{MTA} = \widehat{TBM}$



ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص، و با توجه به این تشابه رابطه زیر را کامل کنید.

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{\dots\dots}$$

و در نتیجه: $MT^2 = \dots\dots\dots$

بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع

یعنی طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطه T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دو طرف نقطه T باشد، هرکدام از پاره خط‌های MT و AT بر دایره مماس اند.

اگر O مرکز دایره باشد، $\triangle OMT$ در رأس T قائم‌الزاویه است؛ چرا؟

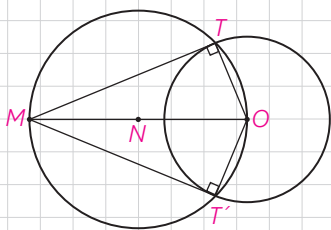
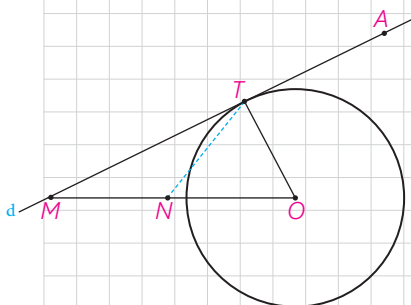
اگر N وسط پاره خط OM باشد، $NM = NO = NT$ باشد؛ چرا؟

بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T می‌گذرد.

از این ویژگی می‌توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

پس برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OM (O مرکز دایره) رسم می‌کنیم.

این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می‌کند. خط‌های MT و MT' بر دایره مماس اند؛ چرا؟



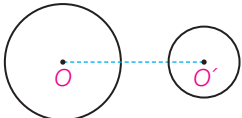
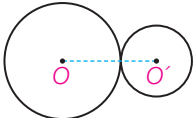
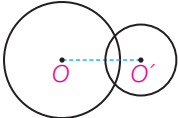
هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید :

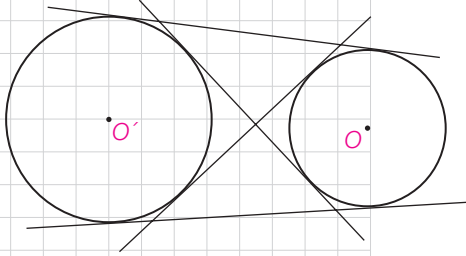
الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

■ حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است :

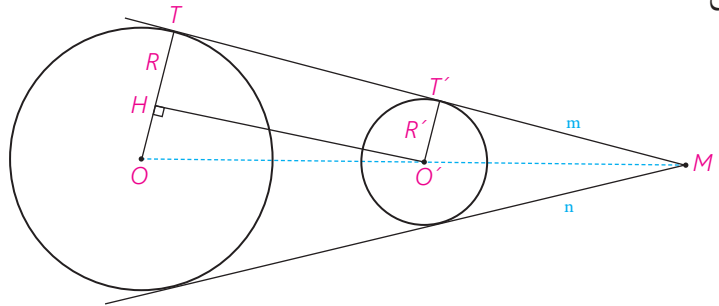
	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم مرکز



هر خطی یا پاره خطی که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره است. اگر دو دایره در یک طرف خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی، و اگر دو دایره در دو طرف خط باشند آن را مماس مشترک داخلی می نامند.

فعالیت

۱- فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع های OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می کنیم تا شعاع OT را در نقطه ای مانند H قطع کند.



الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ ، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

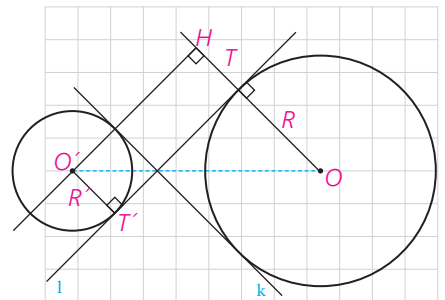
پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطه تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

ت) به مرکز O و به شعاع $R=R'$ دایره ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره رسم شده چگونه خطی است؟

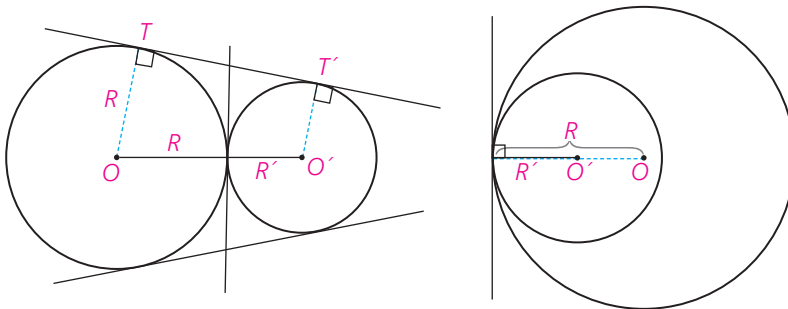
ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع های دو دایره معلوم است، می توان دایره مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این صورت چگونه می توانید مماس TT' را رسم کنید؟

۲- دو مماس مشترک داخلی l و k بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در $\triangle O'O'H$ نشان دهید^۱:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



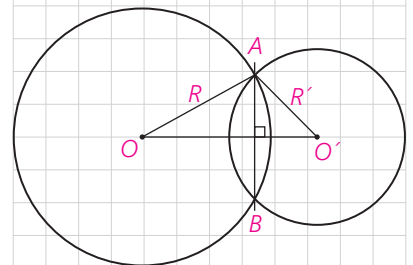
۳- دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دو طرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



مماس خارج اند؛
سه مماس مشترک دارند.
 $OO' = R + R'$

مماس داخل اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
 $OO' = |R - R'|$

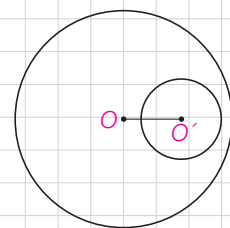
با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = 2\sqrt{RR'}$



۴- دو دایره متقاطع. دو دایره را که دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

$$|R - R'| < OO' < R + R' \quad ; \text{ چرا؟}$$

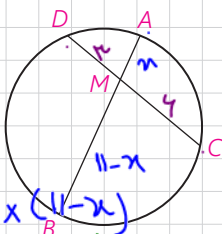
پاره خط AB ، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است؟



$$OO' < |R - R'|$$

۵- دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$

۱- رسم مماس مشترک داخلی دو دایره از اهداف این کتاب نیست.



$$\frac{9}{3} = 3$$

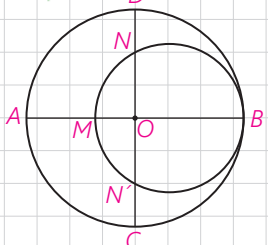
۱- در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

$$3 \times 9 = x \times (11 - x)$$

$$18 = 11x - x^2$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \quad (x-2)(x-9) = 0$$

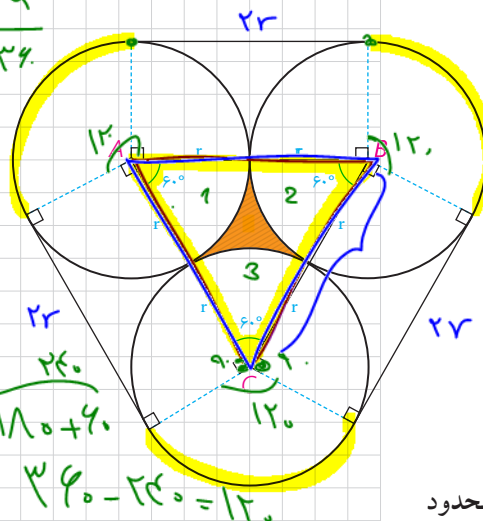
۲- از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول های PB و PC را به دست آورید.



۳- در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$

۵- طول شعاع های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المרכזین آنها مساوی ۸ واحد است.

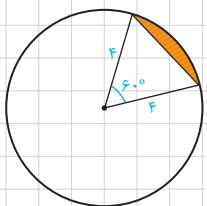


۶- سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو برهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2$ است.



۷- طول خط المרכזین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

۸- مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

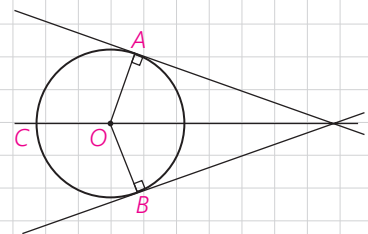
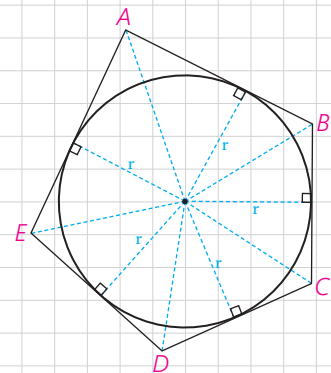
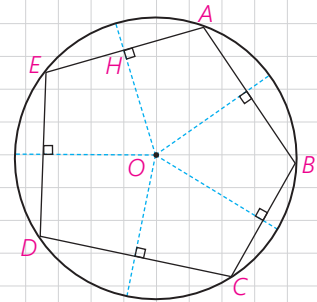


چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چند ضلعی را **محاطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را **دایره محیطی** آن چند ضلعی می‌نامیم. به طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است. می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین:

یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.

این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است. چرا؟
چند ضلعی را **محیطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را **دایره محیطی** این چند ضلعی می‌نامیم.



فعالیت

فرض کنید دایره C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.
(الف)

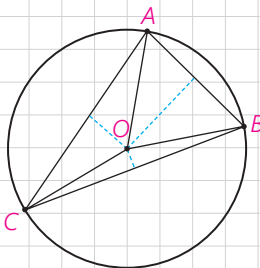
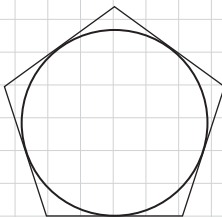
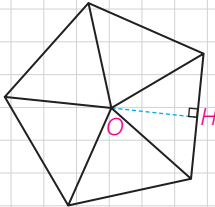
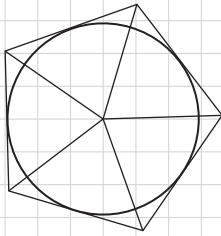
۱- پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OA و OB بنامید.

۲- پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی هستند؟

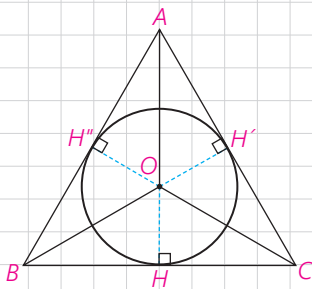
۳- فاصله نقطه O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

۴- با توجه به (۲) و (۳) فاصله مرکز دایره از دو ضلع زاویه و بنابراین نقطه O روی

۵- فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟



$$OA=OB=OC=R$$



$$OH=OH'=OH''=r$$

ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟

بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کاردکلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید $S=rp$. راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه و با هم جمع کنید.

▲ دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

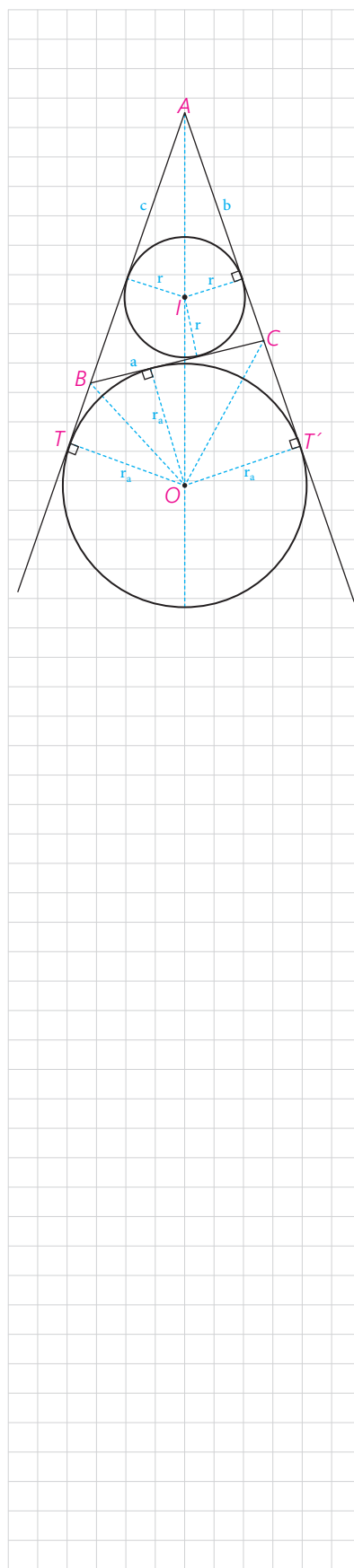
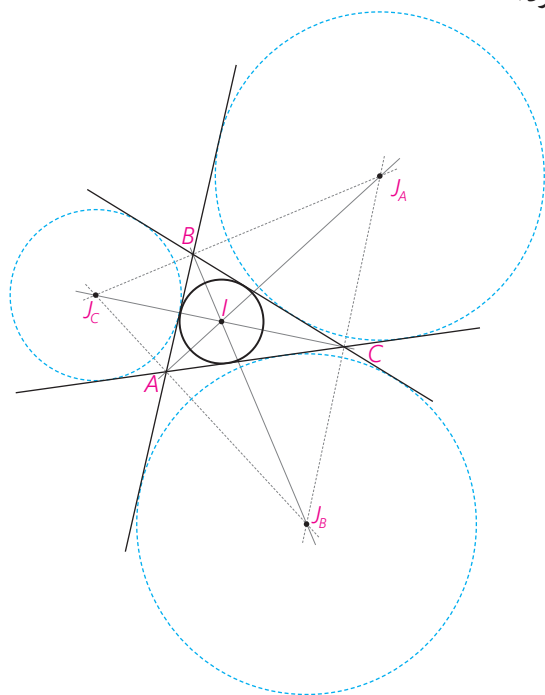
قبلاً هم‌رسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه هم‌رسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.

همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

اگر نیمساز زاویه A از ΔABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟ بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



اکنون در فعالیت زیر محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.

فعالیت

در شکل داریم: $S(ABC) = S(OAC) + S(OAB) - S(OBC)$: اگر مساحت ΔABC را به S نشان دهیم، $S = \frac{1}{2} r_a (a + b + c)$. اگر محیط مثلث را با $2p$ نشان دهیم، داریم، $2p = a + b + c$ ؛ پس $2p - 2a = b + c$ ؛ در نتیجه $S = r_a(p - a)$ و بنابراین $r_a = \frac{S}{p - a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

$r_b = \dots\dots\dots$ $r_c = \dots\dots\dots$

برخلاف مثلث، همه چند ضلعی‌های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می‌پردازیم.

■ چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

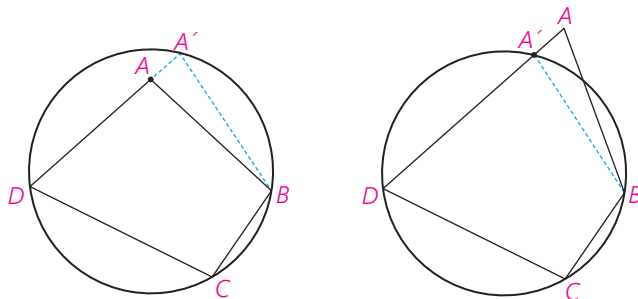
اثبات

۱- فرض کنیم چهار ضلعی $ABCD$ محاطی باشد؛ مجموع اندازه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه‌های این دو کمان است و در نتیجه مجموع اندازه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ برابر است.
به همین ترتیب $\hat{B}$ ، $\hat{D}$ مکمل‌اند.

۲- فرض کنیم $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. از سه نقطه B ، C و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه‌ای دیگری مانند A' قطع می‌کند که A' بین A و D یا A' بین A و D است. اکنون چهارضلعی $A'BCD$ است؛ پس $\hat{C}$ و $\widehat{BA'D}$ مکمل‌اند؛ در نتیجه باید $\hat{A}$ و $\widehat{BA'D}$ هم‌اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟

در نتیجه A' همان A است.



قضیه: یک چهار ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم‌اندازه‌اند.

اثبات

۱- اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB+CD=AM+\dots+PC+\dots=AQ+\dots+CN+\dots=AD+BC$$

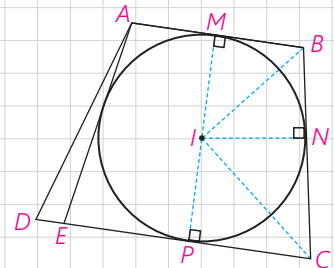
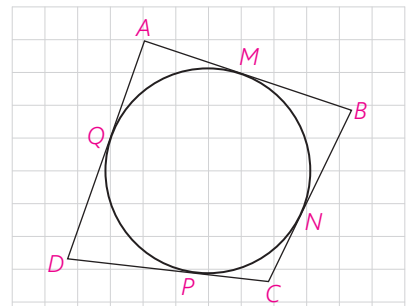
عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می شود.

۲- فرض کنید : $AB+CD=BC+AD$.

نیمسازهای دوزاویه B و C همدیگر را در نقطه ای مانند I قطع می کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطه I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟ ($IM=IN=IP$)
چرا دایره ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟ حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می کنیم تا خط CD را در نقطه ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می شود. پس، $AB+EC=AE+BC$ ؛ (چرا؟) از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می گیرید : $AD=DE+AE$ ؟

این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟) پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.



کاردرکلاس

جدول زیر را کامل کنید.

کایت	دوزنقه متساوی الساقین	دوزنقه	متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
...	...	...	...	...	...	✓	محاطی
...	...	...	...	...	...	✓	محیطی

از دیگر چندضلعی های محاطی و محیطی، چند ضلعی های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند، هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.

مثلاً متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است :

فعالیت

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم $ABCD \dots$ ، 2α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می‌کنیم. فرض کنیم در O متقاطع‌اند. بنابراین $OA = \dots = OC$.

پس $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$ چرا؟ $\triangle OAB \cong \triangle OBC$ اکنون از O به D وصل می‌کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا $\triangle OCD \cong \triangle OCB$ ؟ و $OA = OB = OC = OD$ ؟

با ادامه این روند داریم :

$OA = OB = OC = OD = \dots$ و $OH = ON = OM = \dots$ بنابراین، O از همه رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.



تمرین

۱- ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۴- یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۵- اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N، K باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :

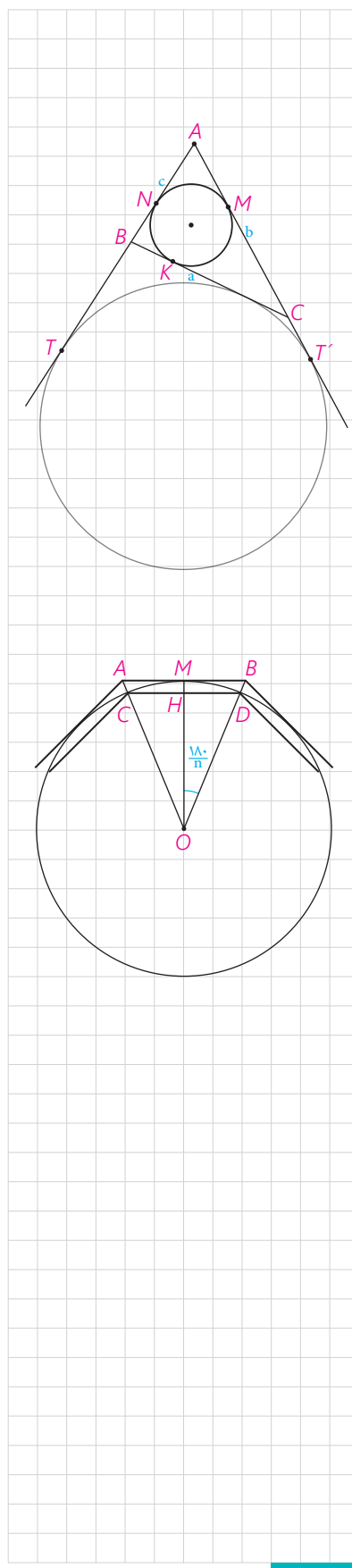
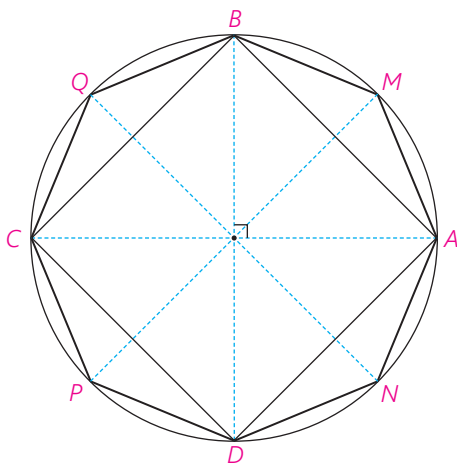
$$AM=AN=P-a$$

$$BN=BK=P-b, CM=CK=P-c$$

$$AT=AT'=P$$

۷- یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = r \tan \frac{180^\circ}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$.

۸- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



تبدیل‌های هندسی و کاربردها



عکس: محمد رضا دومیری کاشی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.



تبدیل‌های هندسی

در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی‌کاری، گچ‌بری و... شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاط در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکاتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را تبدیل‌های هندسی می‌نامیم.

تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند **موقعیت^۱** (جایگاه شکل در صفحه) یا **اندازه^۲** شکل را تغییر دهد. تبدیل‌یافته یک شکل را، **تصویر** آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

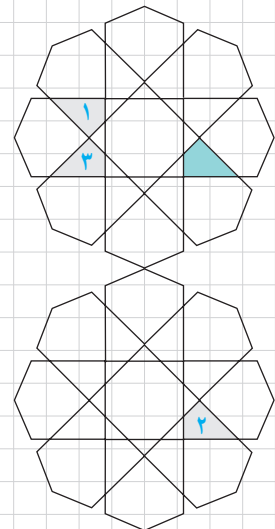
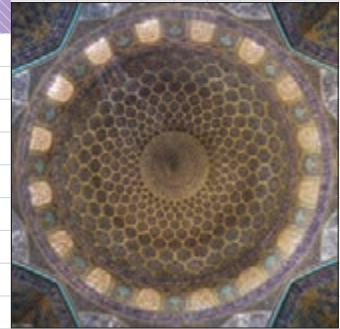
فعالیت

۱- به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته چهارضلعی رنگ شده بدانیم:
الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است؟

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟

پ) کدام شکل، دوران یافته شکل رنگ شده است؟



۱ - Position

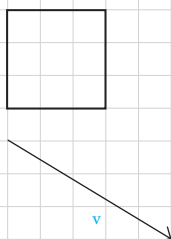
۲ - Size

۲- الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.
(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)



ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟
اندازه‌ها را چگونه؟

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

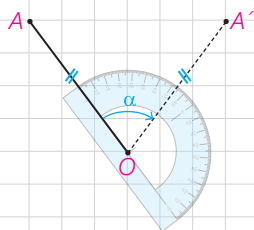


۳- الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).

در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
اندازه‌ها را چگونه؟

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟
ت) آیا با انجام این تبدیل اندازه زاویه‌ها ثابت می‌ماند؟



۴- در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطه A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازه OA جدا کنیم تا نقطه A' به دست آید.

می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O ، 90° درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.

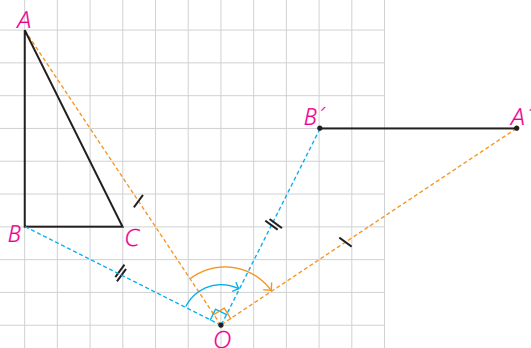
الف) به همین ترتیب تصویر نقطه C را پیدا، و شکل را کامل کنید.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟
اندازه‌ها را چگونه؟

پ) آیا در این تبدیل، همواره شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط

تصویر آن برابر است؟

ت) آیا می‌توانید زاویه دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟



ایزومتریکی = طولی = تبدیلی اندازه بارهفت
تراخیز ندهد

به طور شهودی می توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره خطها و زاویه ها را تغییر نمی دهند.

در ادامه این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن اندازه زاویه ها حفظ می شود ولی برخلاف سه تبدیل صفحه قبل، اندازه پاره خطها می تواند تغییر کند. این تبدیل را تجانس می نامیم. حال که به طور شهودی، برخی ویژگی های تبدیل های مختلف را مرور کردیم در ادامه با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می کند و برعکس؛ هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از همان صفحه است.

وردی

اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می نویسیم:

حرفی $T: P \rightarrow P$

$$T(A) = A'$$

پیش از این به طور شهودی دریافتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره خط را حفظ می کنند؛ یعنی اندازه پاره خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازه پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً طولیایی یا ایزومتری می نامیم.

تعریف: تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، تبدیلات طولی (ایزومتری) نامیده می شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن گاه داریم: $AB = A'B'$
 $|AB| = |A'B'|$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیلی هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می شود. در این فعالیت برای تبدیلات طولی این ادعا را اثبات می کنیم و در ادامه طولی بودن بازتاب، انتقال و دوران را به طور دقیق تر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فعالیت

می خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولی اندازه زاویه را حفظ می کند.

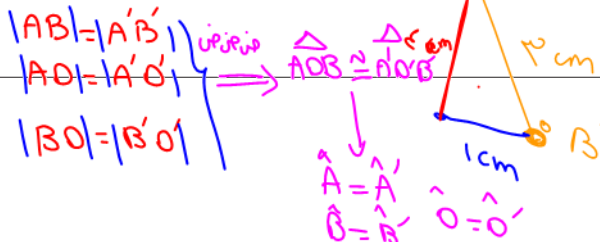
فرض کنید T تبدیلی طولی است.

و داریم:

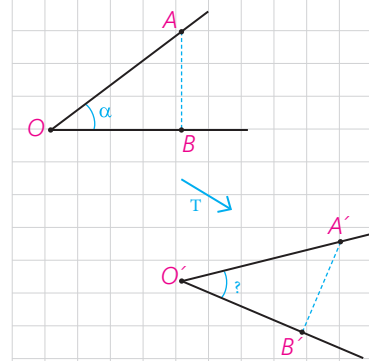
$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

$$T(O) = O' \text{ و}$$



۱- Transformation



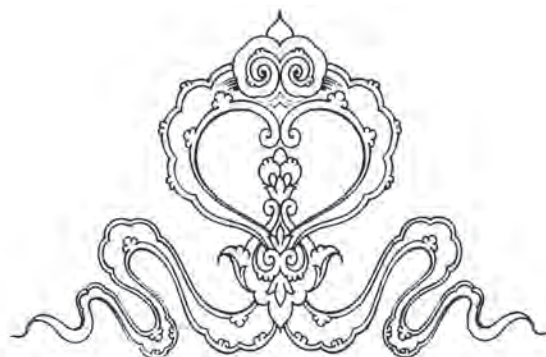
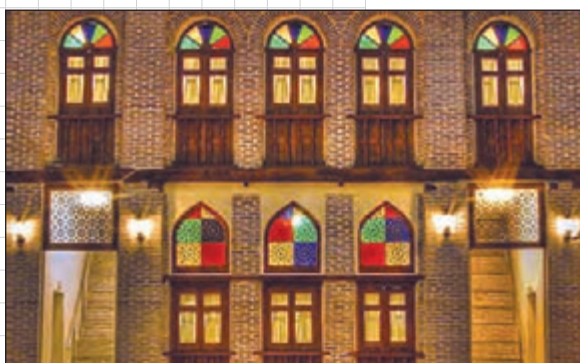
دلیل همنهستی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه: در هر تبدیل طولیا، تبدیل‌یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.

در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌یافته هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافته یک خط، کافی است تبدیل‌یافته دو نقطه دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم. این مطلب برای یک پاره‌خط هم صادق است. کافی است تبدیل‌یافته دو نقطه ابتدا و انتهای پاره‌خط را به‌دست آوریم و به هم وصل کنیم^۱.

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

■ بازتاب



همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید.

در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم:
 $S(A) = A'$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.
خط d ، **خط بازتاب یا محور بازتاب** نامیده می‌شود.

۱- اثبات این مطلب که تبدیل یافته یک خط (یک پاره‌خط)، یک خط (یک پاره‌خط) است، جزء اهداف درسی این کتاب نیست و برای نشان دادن این مطلب، استناد به همین کادر کافی است.

اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.

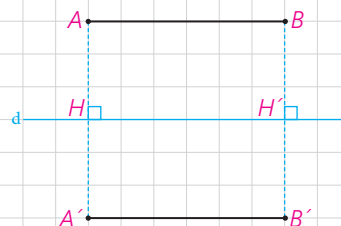
$$T(A) = A$$

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت

می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیلی طولی است. حالت‌های مختلف یک پاره خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازه پاره خط با اندازه تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.



چهارضلعی $ABA'B'$ چه چهارضلعی است؟ چرا؟

طول پاره خط‌های AB و $A'B'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

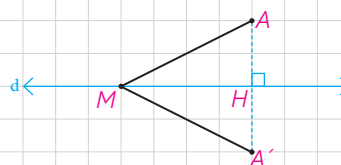
(اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)



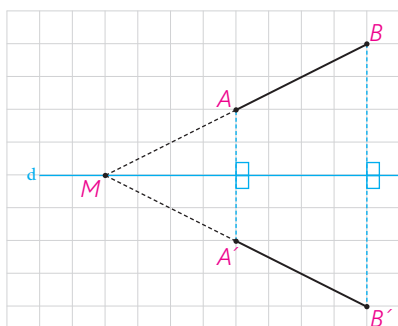
بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' و بازتاب M ، خود M است.

به عبارتی: $S(A) = A'$ و $S(M) = M$

آیا می‌توانید به کمک هم نهستی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA = MA'$ ارائه کنید؟



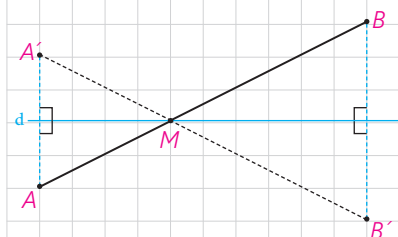
آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)



(پ) در حالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d ، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطه M قطع کند. نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره خط MB' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟

حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = MB - \dots\dots \\ A'B' = \dots\dots - \dots\dots \\ MA = \dots\dots \text{ و } MB = \dots\dots \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots = \dots\dots$$



(ت) در حالتی که پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم. پاره خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = AM + \dots\dots \\ A'B' = \dots\dots + \dots\dots \\ AM = \dots\dots \text{ و } MB = \dots\dots \text{ با توجه به قسمت ب} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots = \dots\dots$$

تذکر: حالتی که پاره خط AB بر خط بازتاب عمود است، به‌عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

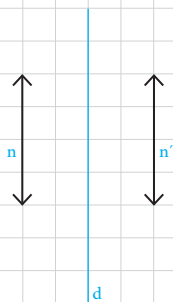
نتیجه این مراحل را می‌توان در قالب این قضیه بیان کرد:

قضیه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

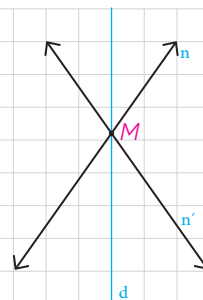
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که بازتاب، تبدیلی طولی است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

فعالیت

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند. مسئله را برای سه حالت کلی در نظر می‌گیریم: وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد، وقتی عمود باشد و وقتی نه عمود باشد و نه موازی. الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟ آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟



ب) اگر خط n بر خط بازتاب d عمود باشد، تصویر آن تحت بازتاب چگونه خواهد بود؟
 آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می کند؟
 پ) اگر خط n با خط بازتاب d عمود و موازی نباشد، خط های d ، n و n' در
 نقطه ای مثل M متقاطع می شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب،
 شیب خط را بنابراین؛



در حالت کلی، بازتاب شیب خط را

دیدیم که طولها اندازه زاویه را هم حفظ می کنند. بنابراین به طور کلی هر چندضلعی
 و تصویر آن تحت تأثیر یک طول یا از جمله بازتاب با هم همنهشت هستند.

کاردرکلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

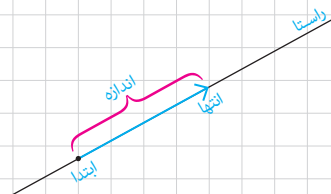
الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d ، کدام
 نقطه است؟ چرا؟
 ب) قرینه قرینه هر نقطه چیست؟
 در واقع : $S(S(A)) = S(\dots) = \dots$ و به زبان ساده تر $(A')' = \dots$
 پ) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک است که با مثلث
 اولیه است.
 ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب
 باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می کند.
 ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافته تمام نقاط روی خط،
 است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب است.
 در ادامه به کمک ویژگی های انتقال و دوران ثابت می کنیم که این دو تبدیل نیز طولها
 هستند.

انتقال

یادآوری



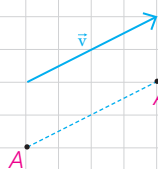
- ۱- در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه
 و راستای آن مشخص شده است.
- ۲- دو بردار، که هم اندازه، هم راستا و هم جهت
 باشند، دو بردار برابر هستند.



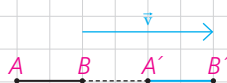
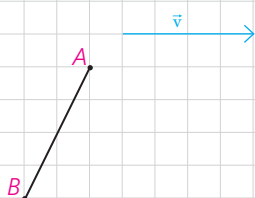
در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطه A' تصویر نقطه A باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

تعریف: انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

هم‌اندازه
هم‌راستا
هم‌جهت



$\parallel$



فعالیت

۱- می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولیاست.

الف) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل یافته AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB = A'B'$.
راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره‌خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB = A'B'$.
(۱)

$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' + \dots \\ A'B' = \dots + \dots \\ AA' = \dots \text{ طبق تعریف انتقال} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

(۲)

$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' - \dots \\ A'B' = \dots - \dots \\ AA' = \dots \text{ طبق تعریف انتقال} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره‌خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

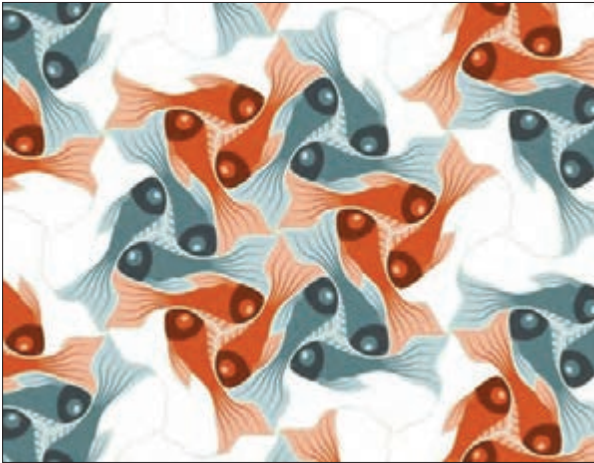
بنابراین:

قضیه: در هر انتقال، اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولی است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

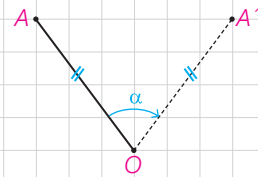
۲- در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

دوران



دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره خطی به اندازه OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

بدین ترتیب :

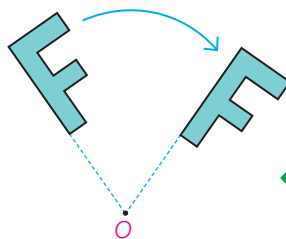
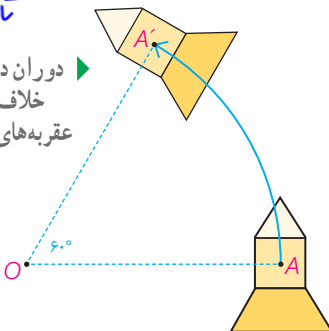


تعریف: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

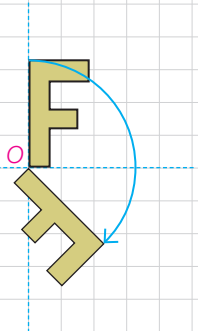
$$OA = OA' \text{ و } \angle AOA' = \alpha$$

فاصله برای نقطه و مقدار
تا مرکز

دوران در جهت
خلاف حرکت
عقربه‌های ساعت



دوران در جهت حرکت
عقربه‌های ساعت

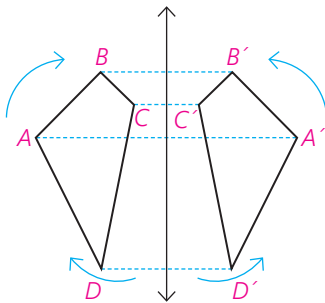


فعالیت

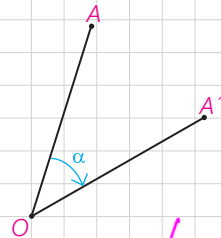
می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیلی طولیاست.
برای دوران دادن هر پاره خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود و پاره خط $A'B'$ را رسم کنیم.

۱- در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم اندازه اند.

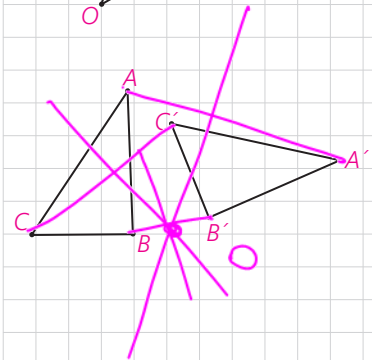
۲- در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B ، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



۳- به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) در شکل مقابل نقطه A' دوران یافته نقطه A در دوران به مرکز O و زاویه α است. نشان دهید عمود منصف AA' از نقطه O می‌گذرد.



ب) اگر بدانیم $A'B'C'$ دوران یافته ABC است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟

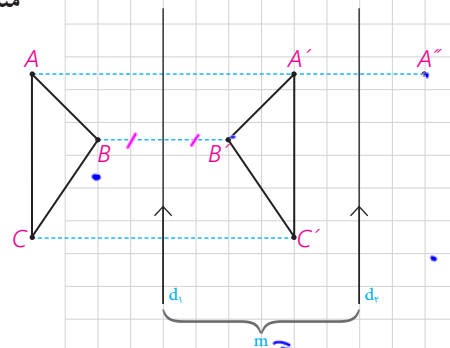


۴- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



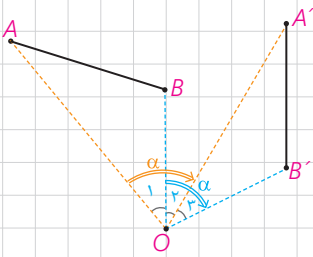
مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم :

الف) مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.

با توجه به شکل $O_1 + \dots = O_r + \dots = \alpha$

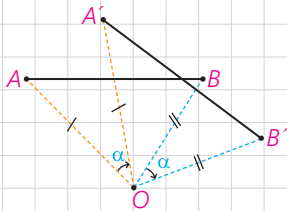
پس می‌توان مدعی شد که $\dots = \dots$

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و OA'B' نشان دهید AB و A'B' هم اندازه‌اند.



ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره خط AB واقع نباشد ولی زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

تذکر: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

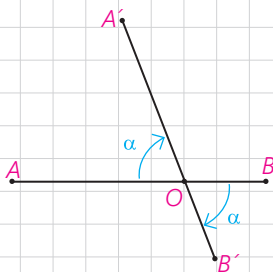


پ) اگر نقطه O روی پاره خط AB باشد :

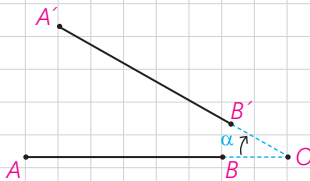
$$AB = AO + \dots$$

$$A'B' = \dots + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} AO = \dots \text{ و } OB = \dots \\ \text{طبق تعریف دوران} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots = \dots$$



ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB باشد، حکم برقرار است.



بنابراین :

قضیه: در هر دوران، اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیلی طولی است و برای هر دو نقطه A

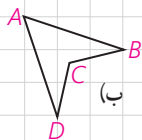
و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

کاردکلاس

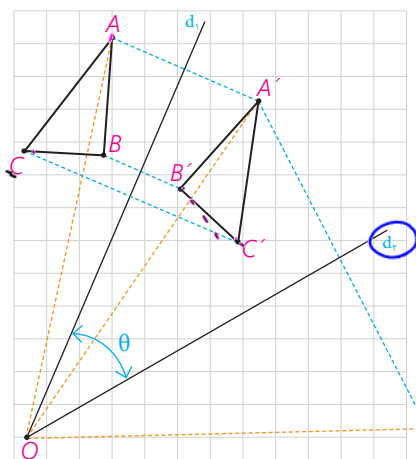
دوران یافته هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

ب) دوران به مرکز O و با زاویه 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت



ب)



۵- در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = 2\theta$

ب) اندازه $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶- نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d ، نقطه A' می‌نامیم. نقطه A را حول نقطه A' به اندازه 120° درجه دوران می‌دهیم تا نقطه A'' حاصل شود. طول پاره خط AA'' را محاسبه کنید.

۷- نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = 16$ و نقطه O روی خط l و $OA = 10$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟

■ تجانس

در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازه همه پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را تجانس می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k \neq 0$ ، آن را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود. تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است:



تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k| \cdot OM$

پ) اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

مثال: $k = 2$ $OM' = 2 OM$

$k = \frac{1}{2}$ $OM' = \frac{1}{2} OM$

اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $k = -2$ $OM' = 2 OM$

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM ، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k \cdot OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k| \cdot OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

فعالیت

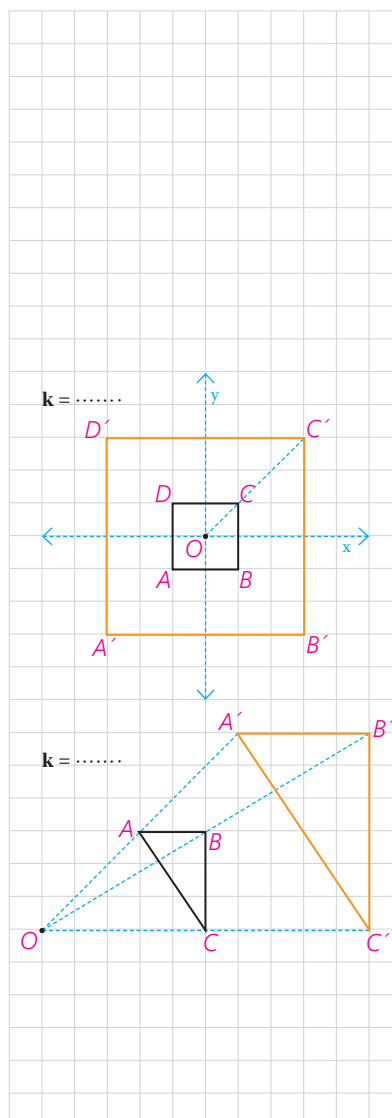
۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.
الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

ب) آیا تجانس طولیاست؟ چرا؟

پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $k > 1$.
حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می‌کنیم.
الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.



k	$k = 1$	$0 < k < 1$	$-1 < k < 0$
مثال		$k = \frac{1}{3}$	$k = -\frac{1}{3}$

k	$k = -1$	$k < -1$
مثال		$k = -2$

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

طولپاست	اندازه زاویه حفظ می شود.	شیب خط حفظ می شود.	جهت شکل حفظ می شود.	مساحت شکل حفظ می شود.
$\times$				
$k > 1$				
$k = 1$				
$0 < k < 1$				
$-1 < k < 0$		✓		
$k = -1$				
$k < -1$				

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می کند، یعنی خطوط AA' ، BB' و ... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ث) اگر $A'B'C'$ مجانس ABC باشد، مرکز تجانس را چگونه می توان پیدا کرد؟

در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر $k > 0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل **کوچکتر** می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر $|k| > 1$ تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

$$-1 < k < 1$$

$$k > 1 \cup k < -1$$

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) نقطه O روی خط AB است.

حل: در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین A'B' بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB است.

حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

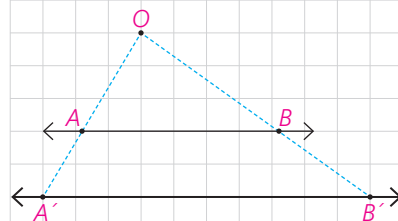
$$\begin{cases} OA' = k \cdot OA \\ OB' = \dots \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \dots = \dots$$

$$\Rightarrow AB \parallel A'B' \quad (\text{چرا؟})$$

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

تذکر: حالتی که $k < 0$ به عنوان تمرین به شما واگذار شده است.



فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.
مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.
به کمک قضیه قبل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

نتیجه این فعالیت را در قالب قضیه زیر مطرح می‌کنیم:

قضیه: تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

تذکر: اثبات در حالتی که $k < 0$ به عنوان تمرین به شما واگذار شده است.

کاردرکلاس

۱- الف) فرض کنید پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = |k|$ (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید).

ب) اگر n ضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه‌اند.

۲- با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$ ؛ این نقاط را نقاط نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل همانی می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را **تبدیل همانی** گوییم، هر گاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A ، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

ب) آیا تبدیل همانی طولیاست؟

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱- انتقال غیرهمانی :

۲- دوران غیرهمانی :

۳- تجانس غیرهمانی :

کاردکلاس

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

طول پاره خط را حفظ می‌کند.	اندازه زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.

بازتاب

انتقال

دوران

تجانس

تمرین

۱- در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۲- دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

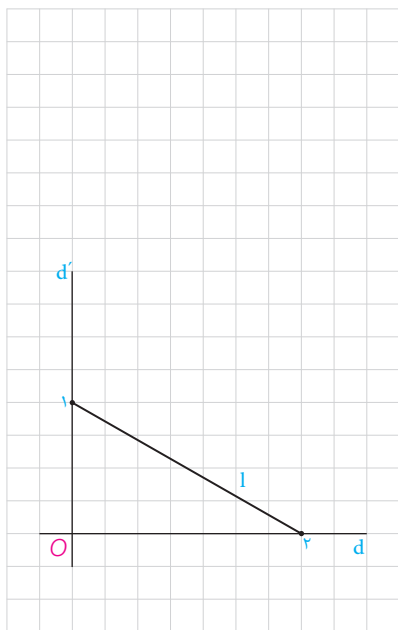
(راهنمایی: تصویر مرکز و یک نقطه دلخواه از دایره را تحت تجانس پیدا کنید.)

الف) $k=2$

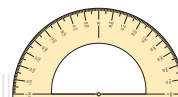
ب) $k=-2$

پ) $k = \frac{1}{2}$

۳- یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محلی تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.



۴- در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟



مجله ریاضی

تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.



کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیرمستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به کار رفته‌اند؟

به این تصاویر دقت کنید. کدام یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



■ کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

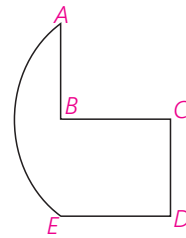
بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینه تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.



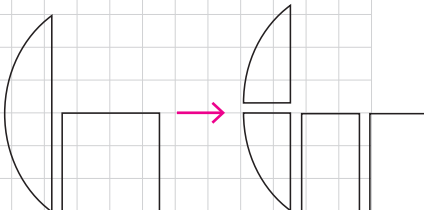
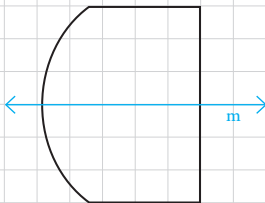
دریاچه‌ای در قلعه سبیلان | استان اردبیل



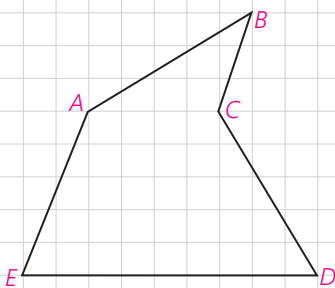
۱- می‌خواهیم کیک به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع $BCDE$ و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری که A و B روی یک خط هستند.



اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کنیم.



این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



۲- یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی معروف است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی $ABCDE$ داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک این تصویر توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC'DE یکی است؟

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصله زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد. او با این مسئله روبه‌رو شده بود که:

«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل^۱ ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطه M روی خط d است به گونه‌ای که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.

هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی A'B خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و $AM+MB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم:

۱- برای هر نقطه دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به همین ترتیب $AM=AM'$)؛ چرا؟

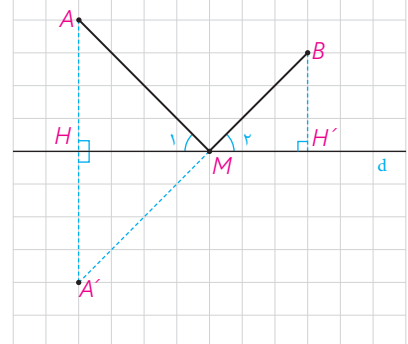
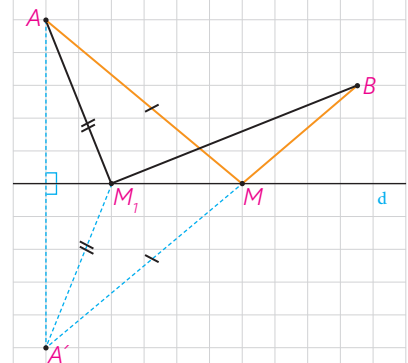
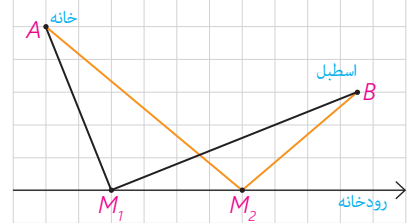
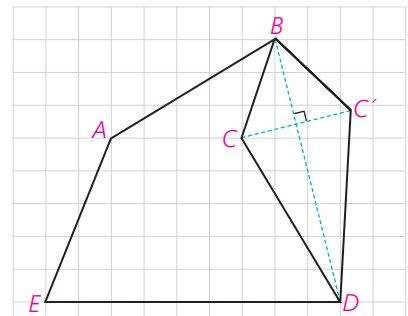
۲- در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$ ؛ چرا؟

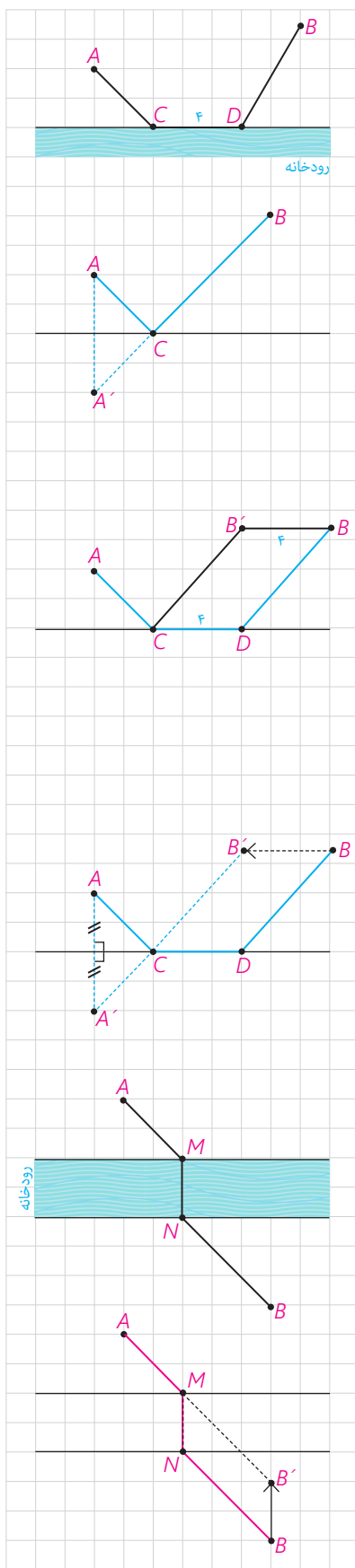
از تساوی $A'B = AM + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

سؤال: در روش هرون نقطه A' طرف دیگر رودخانه قرار دارد. اگر در عمل به دنبال یافتن کوتاه‌ترین مسیر مورد نظر باشیم و امکان رفتن به طرف دیگر رودخانه نباشد، چگونه نقطه M را می‌توان پیدا کرد؟

(راهنمایی: از تشابه دو مثلث AHM و BH'M کمک بگیرید و توجه داشته باشید که اندازه‌های AH و BH دو مقدار معلوم هستند).

۱- جایی سربوشیده برای چهارپایان به ویژه اسب





ب) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

حل: مسئله را در چند مرحله حل می کنیم.

۱- اگر جاده ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر $CD=0$ ، این مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده اید؟

۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر مورد نظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما:

چرا؟) طول مسیر $ACB'B$ = طول مسیر ACDB

بنابراین: $4 + \text{طول مسیر } ACB' = \text{طول مسیر ACDB}$

۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه ترین طول ممکن باشد.

۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه رو توضیح دهید که رسم کوتاه ترین مسیر ACDB چگونه است.

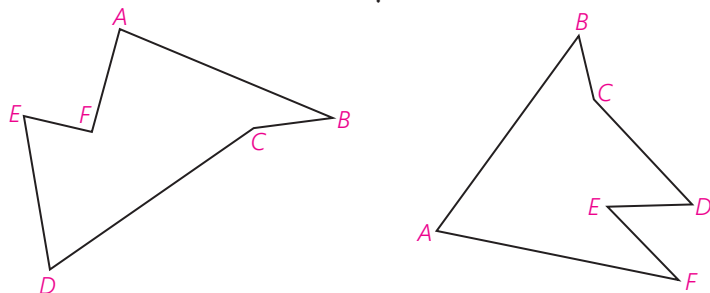
کاردکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

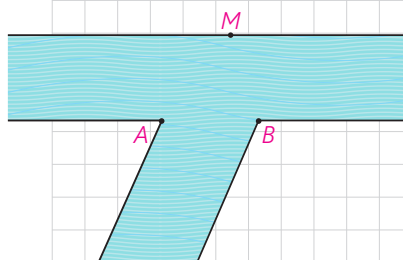
راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقه رسم مسیر AMNB را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه ترین مسیر ممکن است.

۱- دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

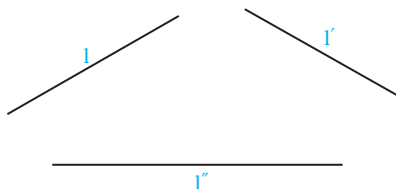
(الف) (ب)



۲- می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



۳- سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l' ، و موازی l'' باشد.

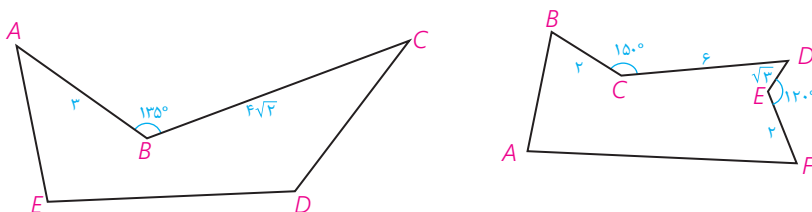


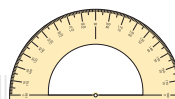
۴- فرض کنید G محل برخورد میان‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{1}{3}$ باشد.

(الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

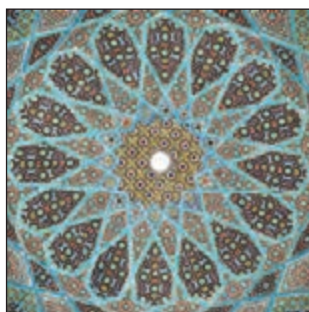
(ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۵- زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.

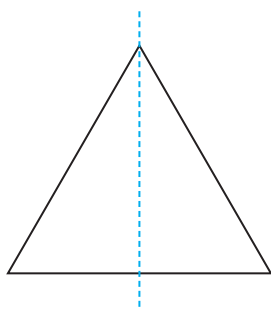




تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی



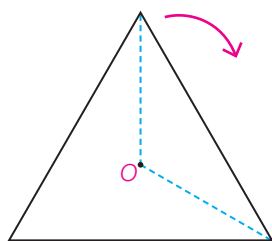
در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این بخش تبدیل‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحه بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.



مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید :

- (الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟.....
 (ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟.....
 (پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟
 (ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟.....
 این مثلث چند خط بازتاب دارد؟.....

(ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟.....



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه همرسی نیمسازها) می توانید دوران هایی معرفی کنید که شکل را بر خودش منطبق کند؟.....
اگر $0 < \alpha \leq 36^\circ$ زاویه دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویه α می توانید مشخص کنید؟.....

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویه $0 < \alpha \leq 36^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

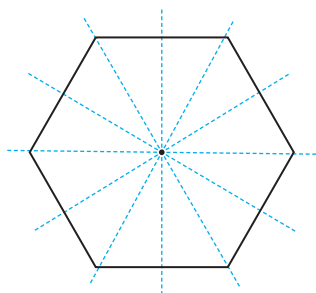
به عبارتی، تحت این تبدیل ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می شود؛ چنین تبدیل هایی را تبدیل های تقارنی این مثلث می نامیم. در اینجا برای شناسایی تبدیل های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه های ساعت) دوران می دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است. دقت کنید که دوران 36° ، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$ ، علاوه بر اینکه هر شکل را به خود آن شکل نظیر می کنند هر نقطه از شکل را نیز به خود آن نقطه نظیر می کنند. که پیش از این، آنها را «تبدیل های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل های همانی فقط یک تبدیل تقارنی به شمار می رود.

تعریف: تبدیل طولپای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می نامیم به شرط اینکه تبدیل یافته شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می نامند. در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می گویند.

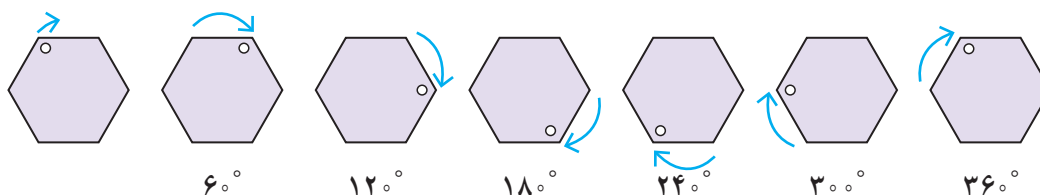
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.



تقارن های بازتابی :

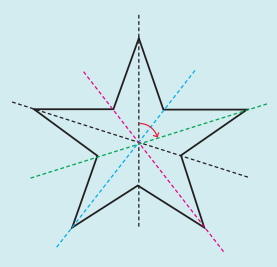
تقارن های دورانی :



همان طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویه 36° ، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس $k=1$ تبدیل های همانی هستند.

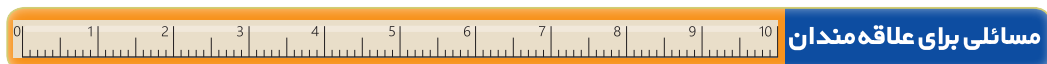
تبدیل های همانی را تقارن همانی نیز می نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

شکل های زیر را به عنوان تصویر دو بعدی در نظر بگیرید و جدول را کامل کنید :

		
تعداد کل تقارن ها	تعداد تقارن های بازتابی	تقارن های دورانی
.....		72° ،

تعداد تبدیل های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره خط ب) خط پ) دایره



مسائلی برای علاقه مندان

۱- الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل های تقارنی n ضلعی منتظم را مشخص کنید.

	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	...	n
n ضلعی منتظم								
تعداد تقارن های بازتابی								
تعداد تقارن های دورانی								
تعداد کل تبدیل های تقارنی								
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟								

ب) n ضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه های دوران در تقارن های دورانی یک n ضلعی منتظم ارائه کنید.

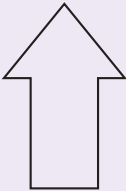
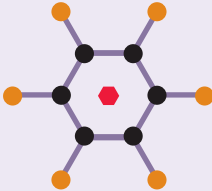
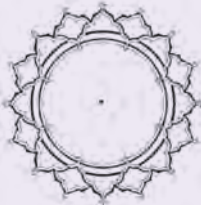
۲- تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و دوزنقه متساوی‌الساقین را مشخص کنید و در جدولی بنویسید.
کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

۳- الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

۴- نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

۵- جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی					
تقارن دورانی					
تعداد تبدیل‌های تقارنی					

۳

فصل سوم

روابط طولی در مثلث



عکس: فرهاد کولیوند



تئودولیت (زاویه‌یاب)
یکی از ابزارهای لازم
برای این‌گونه محاسبات
عملی است.

■ محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جمله آنها محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.



قضیه سینوس ها

یادآوری

منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم:

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad ۱-$$

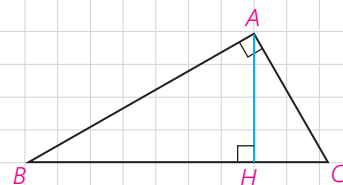
$$AC^2 = BC \cdot CH \quad ۲-$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \quad ۳-$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad ۴-$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad ۵-$$

اینک به ادامه بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.



۱ فعالیت

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، جاهای خالی را پر کنید:

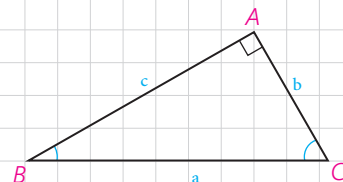
$$\sin B = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \dots$$

$$\sin C = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \dots$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = \dots \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \dots$$

بنابراین داریم:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر به برابر است با اندازه
.....



۲ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رساند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه دایره محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

۳ فعالیت

الف) مثلث ABC با زاویه‌های حاده، A و B و C و دایره محیطی آن به مرکز O (که درون مثلث است) را در نظر می‌گیریم. قطر BD را رسم و D را به A وصل می‌کنیم.

۱- زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin C = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{C}{\sin C} = \frac{2R}{1}$$

۴- به‌طور مشابه (با وصل کردن A و C به مرکز و رسم قطرهای گذرنده از آن نقاط)

خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = \dots \text{ و } \frac{b}{\sin B} = \dots$$

ب) حال فرض می‌کنیم یکی از زوایای مثلث، مثلاً $\hat{A}$ ، منفرجه باشد ($\hat{A} > 90^\circ$)، در این صورت O، مرکز دایره محیطی مثلث، بیرون مثلث است و نقطه A' را روی کمان BC طوری در نظر می‌گیریم که O درون مثلث $A'BC$ بیفتد (یعنی مثلث $A'BC$ حاده‌الزاویه باشد).

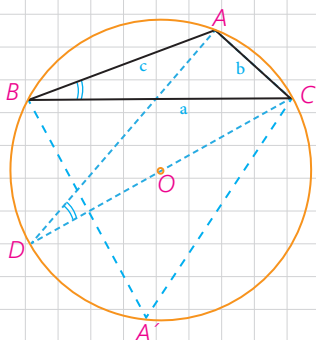
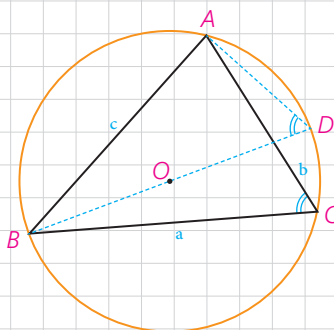
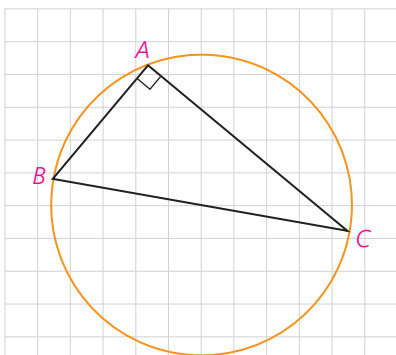
۱- زوایای $\hat{A}$ (از مثلث ABC) و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین با توجه به آن چه از مثلثات می‌دانیم، نتیجه می‌شود:

$$\sin A = \sin(\dots - \hat{A}') = \dots$$

و در مثلث $A'BC$ مطابق نتیجه قسمت (الف) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A'} = \dots \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \dots$$



- ۲- قطر CD را رسم می‌کنیم، چرا مثلث ADC در رأس A قائم‌الزاویه است؟ زاویه $\hat{D}$ در این مثلث، با کدام زاویه از مثلث ABC برابر است؟ چرا؟
- ۳- با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ADC می‌توان نوشت:

$$\sin D = \frac{\text{مقابل}}{\text{مکمل}} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{2R}$$

و به‌طریق مشابه (با رسم قطر گذرنده از B) می‌توان ثابت کرد:

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر به زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با

قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

مثال ۱: در مثلث ABC، $BC=10\text{ cm}$ و $\hat{A}=120^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

حل: به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت:

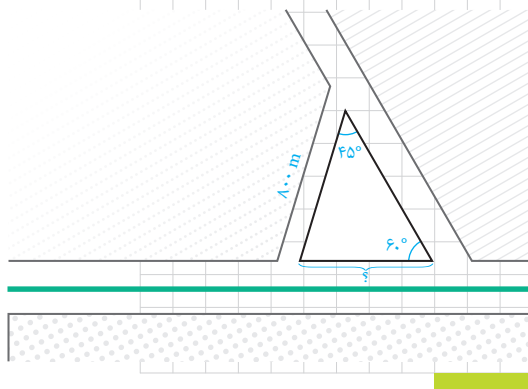
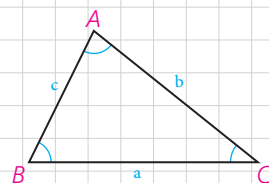
$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ} = 2R \text{ و } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

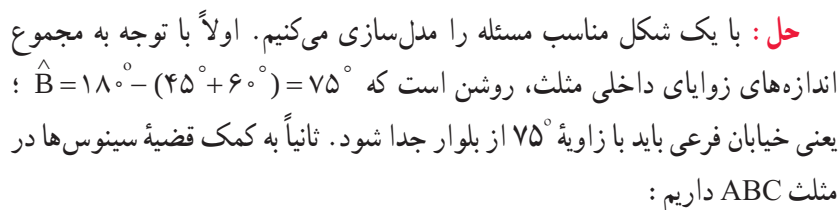
$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A}=120^\circ \Rightarrow \hat{B}=45^\circ \Rightarrow \hat{C}=15^\circ$$

مثال ۲: از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ 6° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول 80 متر بنا کند تا با زاویهٔ 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ 6° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟





$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{\Lambda^{\circ \circ}}{\sin 9^{\circ}} = \frac{BC}{\sin 45^{\circ}} \Rightarrow BC = \frac{\Lambda^{\circ \circ} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{6}}{3} \approx 953/3 \text{ m}$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی $۶۵۳/۲$ متر با زاویه ۷۵° بنا کنیم.

می‌خواهیم روی یک رودخانه عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه‌گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه یاب (تئودولیت) زاویه دید AC از نقطه B ($\hat{B}$) و زاویه دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه‌گیری می‌گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصله AB را به دست آورد:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (\angle C + \angle A))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{\sin C \times BC}{\sin(\angle C + \angle A)}$$

اگر $BC=3\text{km}$ و $\hat{B}=7^\circ$ و $\hat{C}=6^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.



۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$). با داشتن طول های دو ضلع ($AB=c$) و ($AC=b$) می توانیم اندازه وتر مثلث ($BC=a$) را بر حسب b و c به دست آوریم: $a^2 = b^2 + c^2$ حال می بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

فعالیت ۱

در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزاویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow AH = \dots \times \dots \quad \text{و} \quad CH = b - AH = \dots$$

$$\sin A = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow BH = \dots \times \dots$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$$

حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ، نشان دهید:

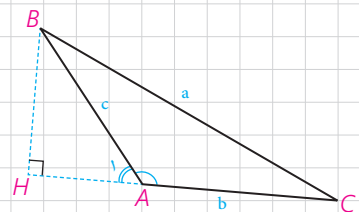
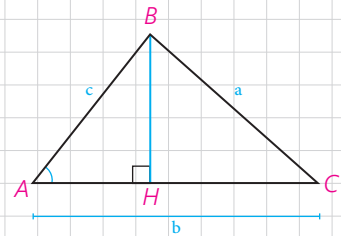
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

اکنون در مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می کنیم. اگر $\hat{A}_1$ زاویه خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ داریم: $\sin A_1 = \dots$ و $\cos A_1 = \dots$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی می توان نوشت:

$$\cos A_1 = \frac{\dots}{\dots} \quad \text{و} \quad \sin A_1 = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow AH = \dots \times \dots$$

$$BH = \dots \times \dots \quad \text{و} \quad CH = b + AH = \dots$$

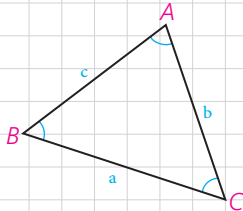
$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$$



و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

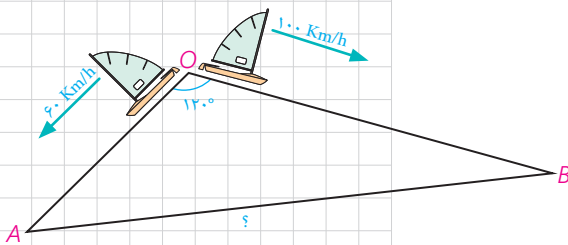
سؤال : در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟



قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = \dots + \dots - \dots$$

$$c^2 = \dots + \dots - \dots$$



مثال : دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰ km/h و ۱۰۰ km/h و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

و ۱۰۰ km/h و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل : با توجه به نقطه شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

$$OA = 60 \times \frac{1}{2} = 30 \text{ و } OB = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ \text{ و } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow$$

$$AB = 70 \text{ km}$$

کاردرکلاس

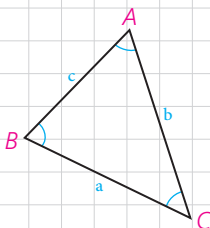
در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$

۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots^2 + \dots^2 - 2 \times \dots \times \dots \times \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots + \dots - \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots \text{ و } BC = \dots$$



۲- اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \dots \text{ و } \hat{C} = \dots$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = \dots$$



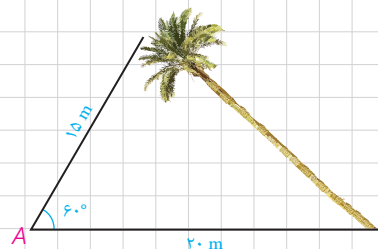
تمرین

۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

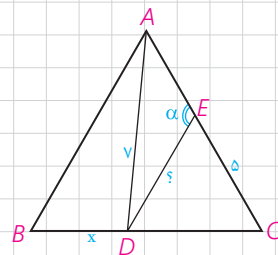
الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد.

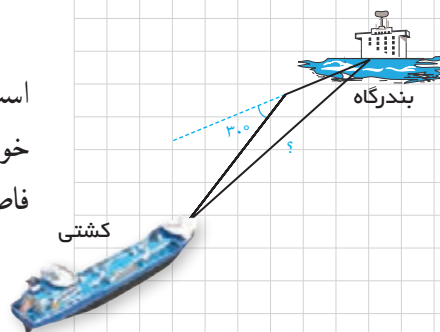
پ) فاصله نوک درخت از زمین

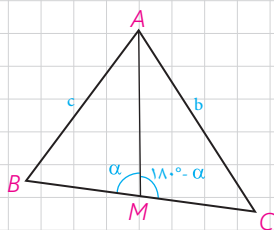


۲- در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ (CD > BD)، نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت 60° کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت 40° کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

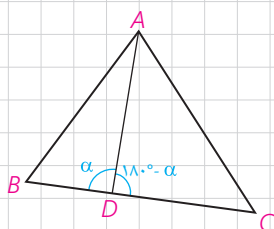




۴- در مثلث ABC ، میانه AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC ، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

در حالت خاص $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.



۵- در مثلث ABC ، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} : \text{فرض}$$

$$\text{حکم} : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا $\widehat{A_1} = \widehat{E}$ و چرا $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ ؟

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟
مثلث AEC چه نوع مثلی است؟

پ) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AB + BE}$$

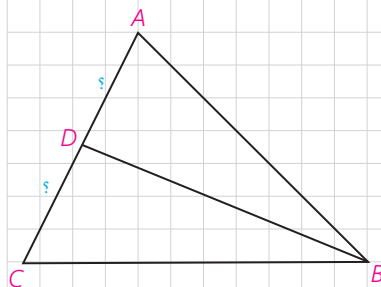
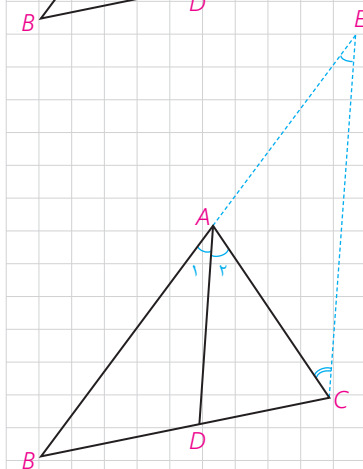
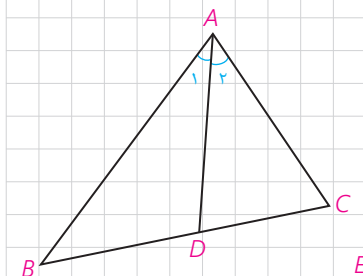
یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد:

مثال: در مثلث ABC، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

حل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$



در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه A ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$ ؟

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{\dots} = \frac{AE}{\dots} = \frac{BD}{\dots}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟) بنابراین:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال: در مثلث ABC، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

حل: به کمک قضیه (۱) طول‌های BD و CD را به دست می‌آوریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD + CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

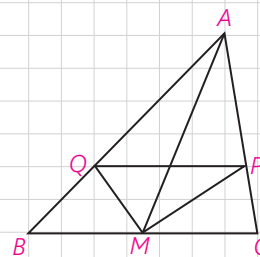
$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} =$$

$$15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$



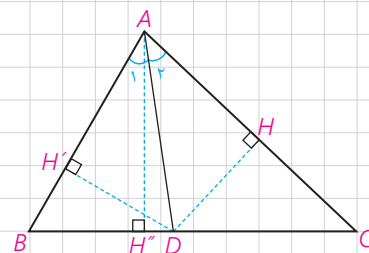
تمرین

۱- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



۲- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=4$ و $BC=10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:
الف) چرا $DH = DH'$ ؟



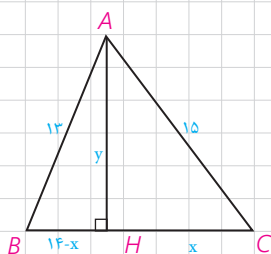
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times \dots}{\frac{1}{2} DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (1)$$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times \dots}{\frac{1}{2} CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود: $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

قضیه هرون (محاسبه ارتفاعها و مساحت مثلث)



با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلثهای AHB و AHC اندازه‌های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\left. \begin{aligned} CH^2 + AH^2 &= \dots \\ BH^2 + AH^2 &= \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dots \\ (14-x)^2 + y^2 = \dots \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف y^2 معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^2 - (14-x)^2 = \dots \Rightarrow x^2 - 196 - x^2 + 28x = \dots$$

$$\Rightarrow x = \dots, y = \dots, S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \dots$$

اگر همین روش را در حالت کلی در مثلث ABC، که $AC=b$ و $AB=c$ ، $BC=a$ به کار ببریم، نتیجه می‌شود :

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

$$\text{که در این دستور } P = \frac{a+b+c}{2} \text{ نصف محیط مثلث است.}$$

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجله ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال : مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :

$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^4} = 84$$

و طول های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2 \times 14}{14} = 12, \quad h_b = \dots\dots, \quad h_c = \dots\dots$$

کاردکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه گیری، و اندازه های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید :

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می آورید؟
 $BD^2 = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots \Rightarrow BD = \dots$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می آورید؟

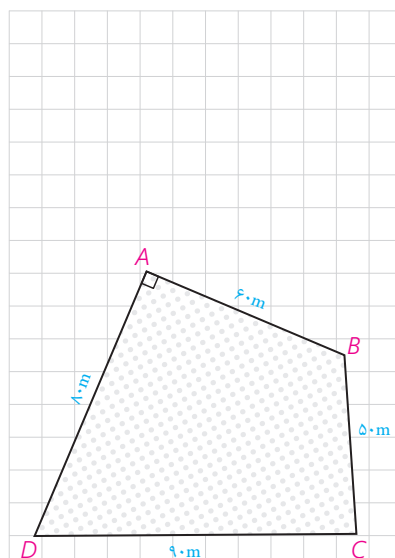
$$S_{ABD} = \frac{\dots \times \dots}{2} = \dots$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{\dots + \dots + \dots}{2} = \dots, \quad S_{CBD} = \dots$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S = \dots + \dots = \dots$$



فعالیت

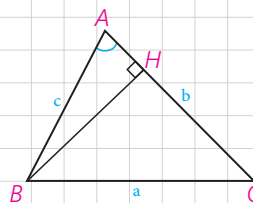
می خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت های مثلثاتی به دست آوریم.

۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده ایم.

$$\sin A = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow BH = \dots$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

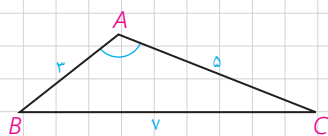
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \dots$$



نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

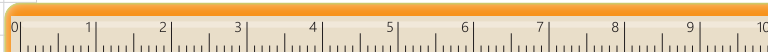


۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{\dots + \dots + \dots}{2} = \dots \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \dots$$

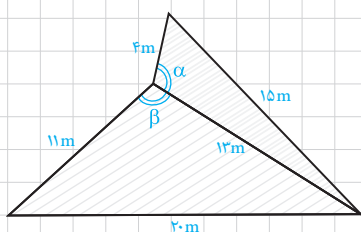
۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه $\hat{A}$ را به دست آورید.



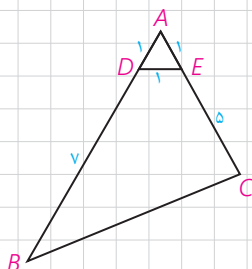
تمرین

۱- در مثلث ABC، $AB=10$ ، $AC=6$ و $\hat{A}=60^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.



۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد زمین ها هم در شکل مشخص شده اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازد. ($\alpha=\beta$)

۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.



۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

۵- در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است. با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (\dots + \dots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots \Rightarrow (A \text{ نیمساز رأس } A) d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.
راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۹- به کمک قضیه کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

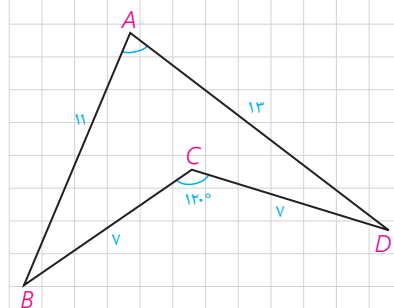
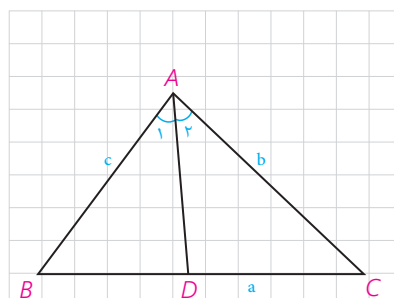
پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

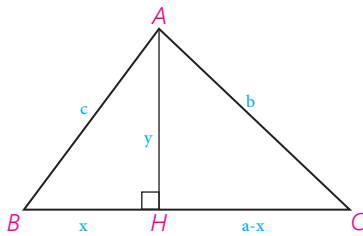
۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=10$ ، $AC=6$ ، $BC=9$

ب) $AB=8$ ، $AC=4$ ، $BC=9$

پ) $AB=8$ ، $AC=15$ ، $BC=17$





اثبات دستور هرون (برای محاسبه مساحت مثلث)

در مثلث ABC، $AB=c$ و $AC=b$ و $AH=y$ و $BH=x$ و $CH=a-x$ و $BC=a$ با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH و تفاضل روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ (a-x)^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - c^2 = (a-x)^2 - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 = a^2 - 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیه آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود:

$$y = AH = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a} \sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{2a} \sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]} =$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض $a+b+c=2p$ خواهیم داشت:

$$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2(p-b)$$

و به همین صورت:

$$b+c-a=2(p-a) \quad , \quad b+a-c=2(p-c)$$

و بنابراین:

$$AH = \frac{1}{2a} \sqrt{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)} =$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad S = \frac{1}{2} AH \cdot a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

منابع

- ادوین ا، موئیز، هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته، ترجمه امیر خسروی و محمود نصیری (۱۳۷۷)، انتشارات مبتکران : تهران.
- حاجی بابایی، جواد و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۲ پایه سوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ هجدهم.
- حسن‌زاده ماکویی، علی، طاهری، هوشنگ و فیروزنیا، احمد، (۱۳۷۱)، کتاب درسی مثلثات پایه سوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- خسروی، امیر، دارابی، ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۱، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- خسروی، امیر، دارابی، ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۲، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- گرینبرگ، ماروین. جی. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه م. ه. شفیع‌پور، (۱۳۶۱)، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی : تهران.
- گویا، زهرا و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۱ پایه دوم ریاضی و فیزیک، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ بیستم.
- نصیری، محمود، (۱۳۹۴)، هندسه متوسطه مبانی و مفهومی‌ها، انتشارات مبتکران.
- هاورد، ایوز، (۱۳۷۹). آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول)، ترجمه : محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، چاپ چهارم.

- Byer, O., Lazebnik, F., & Smeltzer, D. L. (2010). Methods for Euclidean geometry. MAA.
- Dodge, C. W. (2012). Euclidean geometry and transformational. Courier Corporation.
- Hvidsten. M. (2005). Geometry with geometry explorer™. McGraw–Hill,
- Kinsey, L. C., Moore. T. E., & Prassidis. S. (2011). Geometry & symmetry. John Wiley & Sons.
- Libeskind, S. (2008). Euclidean and transformational geometry: A deductive inquiry. Jones & Bartlett Publishers.
- Martin, G. E. (2012). The foundations of geometry and the non–Euclidean plane. Springer Science & Business Media.
- O'Leary, M.L. (2010). Revolutins of Geometry (Vol. 87). John Wiley & Sons.
- Posamentier. A. S. (1984). Excursions in advanced Euclidean geometry Addison – Wesley.
- Tapp, K. (2011). Symmetry: a mathematical exploration. Springer Science & Business Media.
- Umble, R. N., & Han, Z. (2014). Transformational Plane Geometry. CRC Press.



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی، دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

کتاب هندسه ۲ با کد ۱۱۱۲۱۳

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	محمد نیازی	چهارمحال و بختیاری	۲۳	اکرم حبیب الهی	سمنان
۲	زهرای صیدی	ایلام	۲۴	مولود حاج رفیعی	قزوین
۳	لیلی دوستی	آذربایجان شرقی	۲۵	زهرای اصلانی	شهرستانهای تهران
۴	مرضیه خدایی	سمنان	۲۶	محمدسعید حکیمی	کردستان
۵	ماریا عزیزی	ایلام	۲۷	میترا سلماسی	خراسان شمالی
۶	نرگس اصلانی	آذربایجان شرقی	۲۸	علی خالقی	فارس
۷	عیسی دار	هرمزگان	۲۹	فاطمه محمدیها	شهر تهران
۸	کیانوش کمانی	مرکزی	۳۰	معصومه مؤذن زاده	هرمزگان
۹	جمال نوین	یزد	۳۱	علی نصیری	قزوین
۱۰	نسرین رنجبران	همدان	۳۲	کمیل ایزدپناه	گلستان
۱۱	شهریار ساکنیان دهکردی	چهارمحال و بختیاری	۳۳	معصومه سمیع انارستانی	گیلان
۱۲	حمیدرضا مومنی	کرمان	۳۴	یوسف کرمی	اردبیل
۱۳	معصومه عرب پور داهوئی	کرمان	۳۵	راضیه کاظمی	خراسان جنوبی
۱۴	علی مراد سبزه کار	خراسان جنوبی	۳۶	فرخ حسن زاده	کهگیلویه و بویراحمد
۱۵	قاسم شعبانی چاوسر	مازندران	۳۷	محمد نبرد رحمانی	کردستان
۱۶	ایرج پویا	آذربایجان غربی	۳۸	جابر عامری	خوزستان
۱۷	قباد خالدی کوره	آذربایجان غربی	۳۹	لیلا محرابی نسب	خراسان شمالی
۱۸	نسرین دخت نجیبی	فارس	۴۰	مسعود منعمی	مازندران
۱۹	شیرین جهانگیری	کرمانشاه	۴۱	کبری پور قبادی	لرستان
۲۰	سیما حقیقی اذر	گلستان	۴۲	بهرام وره نوی	اردبیل
۲۱	محسن حجابی	شهر تهران	۴۳	حامد رنجبر کهخا	سیستان و بلوچستان
۲۲	شهناز مترجم	کرمانشاه			

