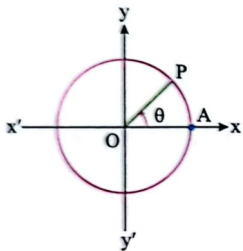


**BOX 2: دایره مثلثاتی**

(صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی)

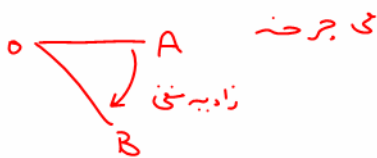
در BOX قبل، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حاده در مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده است. در این قسمت با تعریف دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی را برای هر زاویهٔ دلخواه تعریف می‌کنیم.



**دایرهٔ مثلثاتی:** دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک که در آن نقطهٔ A مطابق شکل به عنوان مبدأ حرکت برای رسم زاویه در نظر گرفته شده است را دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

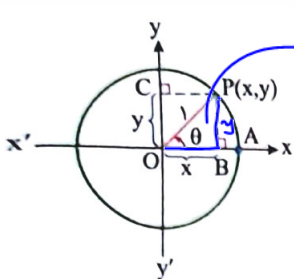
**قرارداد:** اگر با حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند P برسیم، زاویهٔ AOP مثبت و اگر با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت به نقطهٔ P برسیم، زاویهٔ AOP منفی است.

**تعرین:** هر یک از زاویه‌های  $60^\circ$  و  $-30^\circ$  را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید. **که زاویهٔ منفی** : OA ثابت OB در جهت عقربه‌های ساعت



**نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی**

فرض کنیم  $P(x,y)$  نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی (شعاع دایره برابر یک است) بوده و  $\theta$  زاویه‌ای باشد که نیم‌خط  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{Ox}$  می‌سازد. از نقطهٔ P، خطوط PB و PC را بر محورهای  $\overrightarrow{Ox}$  و  $\overrightarrow{Oy}$  عمود می‌کنیم، در این صورت:



پیشاخذت  $x^2 + y^2 = 1^2$   
 $x^2 + y^2 = 1$

$$\sin \theta = \frac{PB}{OP} = PB = y, \quad \cos \theta = \frac{OB}{OP} = OB = x$$

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

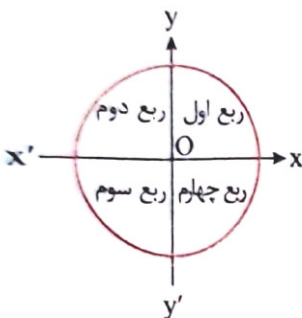
$$\tan \theta = \frac{PB}{OB} = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{OB}{PB} = \frac{x}{y}$$

بنابراین داریم:  $P(x,y) = (\cos \theta, \sin \theta)$  ،  $x = \cos \theta$  = طول نقطهٔ P ،  $y = \sin \theta$  = عرض نقطهٔ P

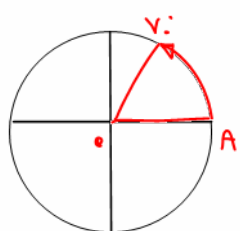
**نکته:** (۱)  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  ،  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$   $\Rightarrow -1 \leq x, y \leq 1$

(۲) محور  $x'Ox$  یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور  $y'Oy$  یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم.

(۳) دو محور عمود بر هم  $x'Ox$  و  $y'Oy$  صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر یک از آن‌ها را یک ربع مثلثاتی می‌گوییم. ناحیهٔ xOy را ربع اول، ناحیهٔ x'Oy را ربع دوم، ناحیهٔ x'Oy' را ربع سوم و ناحیهٔ xOy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.



**تعرین:** مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی قرار می‌گیرد؟



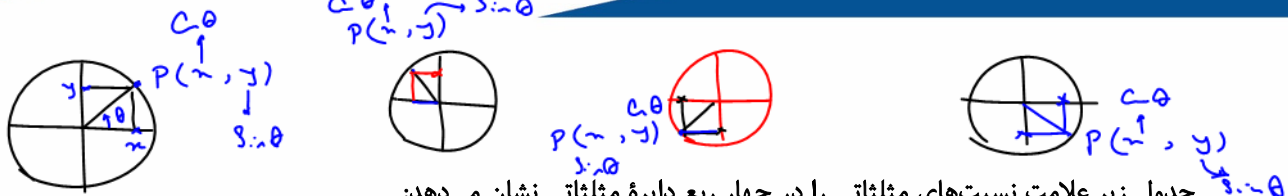
(۴)  $70^\circ$  اول

(۳)  $-110^\circ$  سوم

(۲)  $189^\circ$  دوم

(۱)  $-50^\circ$  چهارم





جدول زیر علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی نشان می‌دهد:

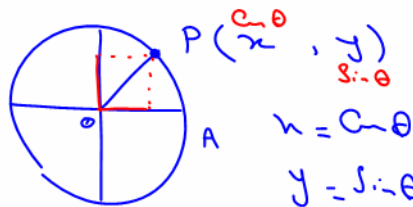
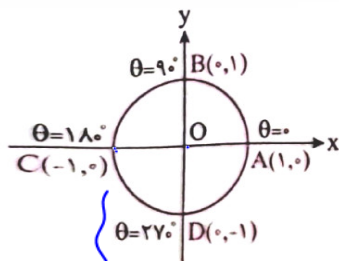
مقدار	ربع اول $x > 0, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

در هشتگ  
رَبْت‌ها مَثَبَتند



ه: ه  
س: س  
ت: ت  
ک: ک

**تعریف:** اگر  $\sin \theta > 0$  و  $\tan \theta > 0$ ، آن‌گاه  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟  
 نکته: زاویه‌های  $0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ$  و  $36^\circ$  زوایایی مرزی هستند و آن‌ها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های چهارگانه در نظر نمی‌گیریم.



$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

**تعریف:** نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $180^\circ$  را به دست آورید.

$$\sin 180^\circ = y = 0$$

$$\cos 180^\circ = x = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

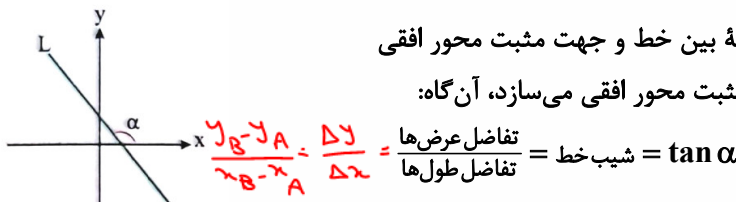
$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{تعریف نشده}$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مرزی

مقدار	$0^\circ$	$9^\circ$	$18^\circ$	$27^\circ$	$36^\circ$
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی است. به عبارت دیگر، اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:



**تعریف:** معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور xها  $45^\circ$  است و از نقطه  $(2, -1)$  می‌گذرد.

$$\text{شیب خط} = m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y = mx + h$$

$$A(2, -1) \in y = 1x + h$$

$$-1 = 2 + h \Rightarrow h = -3$$

$$y = x - 3$$

پرسش‌های تشریحی:

۱- انتهای هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی نشان دهید و سپس مشخص کنید که در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرند.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۴۰ کتاب درسی)

(آ)  $50^\circ$  اول  
(ب)  $-75^\circ$  چهارم  
(ج)  $240^\circ$  سوم  
(د)  $120^\circ$  دوم  
(ه)  $-180^\circ$  در هیچ ناحیه‌ای نیست  
(و)  $-300^\circ$  اول  
(ز)  $175^\circ$  دوم

نقطه‌مزیات

۲- نقطه P به طول  $\frac{-1}{\sqrt{5}}$  روی دایره مثلثاتی و در ناحیه دوم قرار دارد. اگر  $\theta$  زاویه بین نیم‌خط  $\overline{OP}$  با محور  $\overline{Ox}$  باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

می‌دانیم:

$$x = \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{5} + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

در ناحیه دوم  $y = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sin \theta$

مثلثاتی زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$

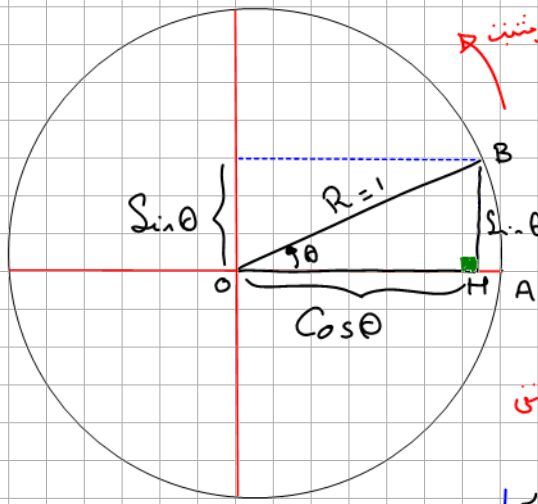
$$\tan \theta = -2$$

۳- اگر  $\cos \alpha = \frac{3}{y}$  و  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  را به دست آورید.

۴- در هر یک از قسمت‌های زیر روی دایره مثلثاتی، نقطه‌ای (نقاطی) مانند P پیدا کنید که اگر  $\theta$  زاویه بین نیم‌خط  $\overline{OP}$  و محور  $\overline{Ox}$  باشد، آن‌گاه داشته باشیم:

(ب)  $\cos \theta = -\frac{1}{4}$

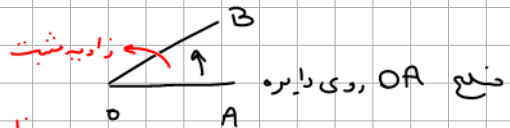
(آ)  $\sin \theta = \frac{1}{3}$



دایره مثلثاتی: دایره ای به شعاع واحد

(واحد یعنی یک) و  $R=1$

جهت دایره جهت + دایره مثبت



ضلع OA روی دایره

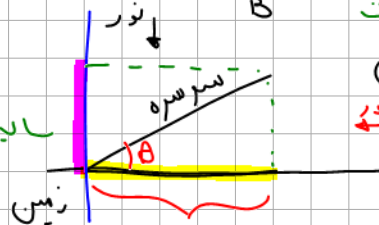
در مثلث OAB که تمام الزامات

میتانورث می نویسیم:  $(OH)^2 + (BH)^2 = 1^2$

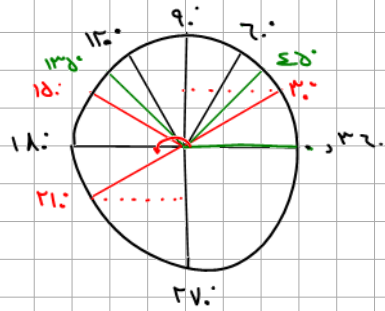
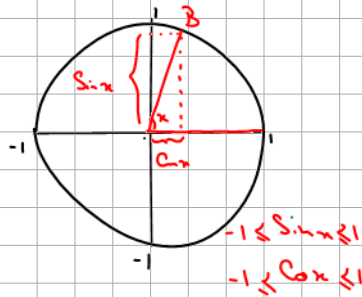
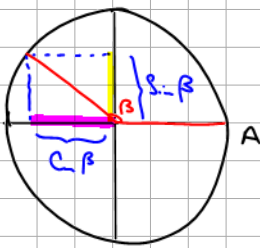
$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = (R=1)^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

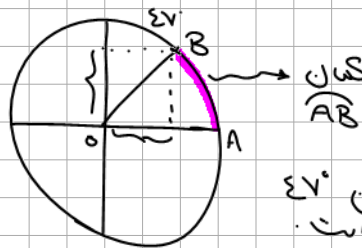
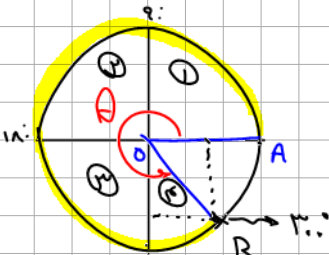
محد سینوسها  
سایه سه روی دیوار = سینوس theta



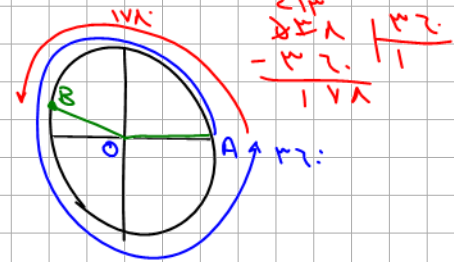
سایه سه روی زمین: سینوس theta



زادیه هایی داریم که  
سینوس یا  
سینوس آب  
منفی باشد



زادیه 538° را روی دایره مشخص کنید  
یا انتهی کمان 538° در کدام ناحیه مثلثاتی است

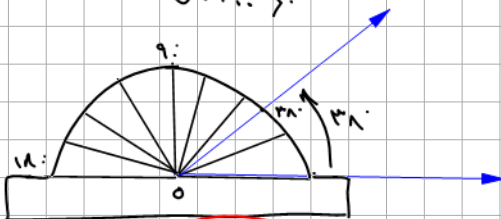


$$\begin{array}{r} 538 \\ - 360 \\ \hline 178 \end{array}$$

$$360 + 178 = 538$$

کمان دایره یک دور کامل زاویه

نقشه: دایره ای است برای تعیین دقیق اندازه زاویه



علامت نسبت های مثلثاتی زاویه: 76° - را بنویسید

اول باید معلوم کنید انتهی کمان 76° در کدام ناحیه مثلثاتی است

