

## فصل دوم: مثلثات

### BOX 1: نسبت‌های مثلثاتی

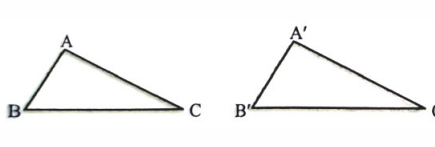
(صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

در این بسته با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا می‌شویم.

برای معرفی مفهوم مثلثات، نیاز به مفهوم تشابه داریم.

**تشابه:** به یاد دارید که دو مثلث، وقتی متشابه هستند که زوایای نظیر آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشد.

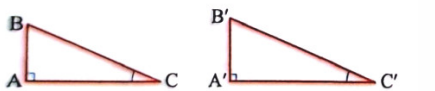
**قضیه:** هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

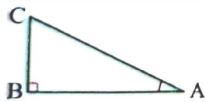
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

**نتیجه:** اگر دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه حاده برابر داشته باشند، آن‌گاه با هم متشابه‌اند.



$$\hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

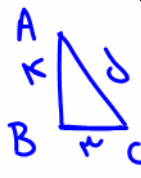
**تانژانت و کتانژانت:** در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ )، تانژانت و کتانژانت زاویه حاده  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

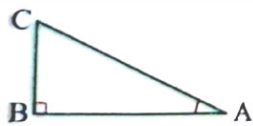
**تعین:** در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ )،  $AB = 4$  و  $AC = 5$  می‌باشند. مقدار  $\tan A$  و  $\cot A$  را به دست آورید.



$$\tan \hat{A} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \hat{A} = \frac{4}{3}$$

**سینوس و کسینوس:** در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ )، سینوس و کسینوس زاویه حاده  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

رابطه بین  $\tan A$  و  $\cot A$  با  $\sin A$  و  $\cos A$  در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ):

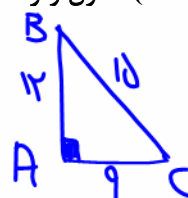
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

متناسب بر وتر سینوس باشد، مجاور بر وتر باشد کسینوس  
سینوس چو بر ادی کسینوس کشید، تانژانت بدست آید و بر عکس کتانژانت

**نسبت‌های مثلثاتی:** در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

**تعین:** در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، طول وتر ۱۵ و  $\sin B = \frac{3}{5}$  است. طول اضلاع قائمه را به دست آورید.

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \rightarrow \text{منع مقابل} = 9 = AC$$



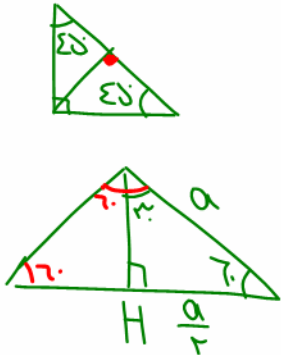
$$(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$$

$$(9)^2 + (AB)^2 = (15)^2$$

$$(AB)^2 = 144 \rightarrow AB = 12$$

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای  $30^\circ$  و  $45^\circ$  و  $60^\circ$ : بدست آوردن اعداد زیر را با رسم  $\Delta$  بلد باش:

مقدار	$A = 30^\circ$	$A = 45^\circ$	$A = 60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

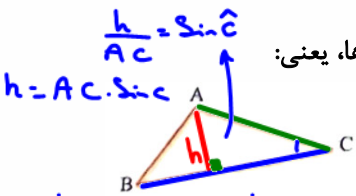


**تمرین:** مقدار عددی عبارت  $3 \sin 30^\circ + 4\sqrt{2} \cos 45^\circ - \sqrt{3} \tan 60^\circ$  را به دست آورید.

$$3\left(\frac{1}{2}\right) + 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{3}{2} + 1 = 2,5$$

**نکته:** مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویه بین آنها، یعنی:

$$S = \frac{(BC)h}{2} = \frac{1}{2}(BC)h = \frac{1}{2}(BC)(AC)\sin C$$



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin C$$

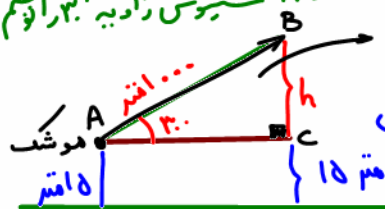
**تمرین:** یک موشک در ارتفاع 15 متری از سطح زمین و با زاویه  $30^\circ$  پرتاب می‌شود. پس از طی 1000 متر با همین زاویه، موشک به چه

ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟  
در مثلث ABC سینوس زاویه 30 دراز است

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{h}{1000} \rightarrow h = 1000 \left(\frac{1}{2}\right) = 500 \text{ متر}$$

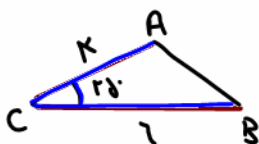
$$H = 500 + 15 = 515 \text{ m}$$

می‌دانیم  $\frac{1}{2} = \sin 30$  است.



**تمرین:** در مثلث ABC،  $AC = 4$ ،  $BC = 6$  و  $\hat{C} = 25^\circ$  می‌باشند. با فرض  $\sin 25^\circ = 0,42$  مساحت مثلث ABC را به دست

آورید.

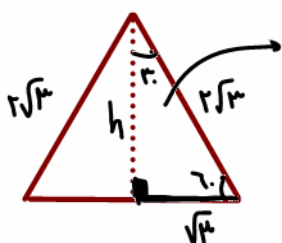


$$S = \frac{1}{2} (AC)(BC) \sin 25 = \frac{1}{2} (4)(6)(0,42) = 5,04 \text{ جواب}$$

پرسش‌های تشریحی:

1- با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $2\sqrt{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را به دست آورید.

(مشابه فعالیت 2 صفحه 31 کتاب درسی)



فینشورت

$$(2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 + h^2$$

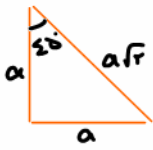
$$12 - 3 = 9 = h^2$$

$$3 = h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 30 = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \cos 60 = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

(فعالیت ۲ صفحه ۳۱ کتاب درسی)

۲- با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، نسبت‌های مثلثاتی  $45^\circ$  را به دست آورید.



$$\sin 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{جاور}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{جانب مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

۳- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید:

(ب)  $4\sqrt{2} \sin 45^\circ + 5 \cot 45^\circ - 3 \cos 60^\circ$

(ا)  $\sqrt{2} \cos 45^\circ + 2\sqrt{3} \sin 60^\circ - \sqrt{3} \tan 30^\circ$

(ت)  $-\sin 60^\circ + 2 \cos 30^\circ + 4 \cot 30^\circ - 2 \tan 45^\circ$

(پ)  $6 \sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ + \tan 60^\circ)$

(ب)  $4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) - \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4 + 5 - 1 = 8$

(پ)  $6 \left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = 3 + 1 + 3 = 7$

(ب)  $-\sin 60^\circ + 2 \cos 30^\circ + 4 \cot 30^\circ - 2 \tan 45^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \left(\sqrt{3}\right) - 2(1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2 = 5\sqrt{3} - 2$

(ت)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \sqrt{3} - 2(1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2 = 5\sqrt{3} - 2$

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 30^\circ$   
 $2\alpha = 60^\circ$

۴- اگر  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید:

(ب)  $4 \cos 2\alpha + \tan(\alpha + 15^\circ)$

(ا)  $-2 \sin \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha$

(ب)  $4 \cos 60^\circ + \tan(30^\circ + 15^\circ) = 4 \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 + 1 = 3$

(ا)  $-2 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ = -2 \left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} (\sqrt{3}) = -1 + 3 = 2$

۵- علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی  $1/5$  متر و طول سایه او در همان لحظه  $0/5$  متر است. ارتفاع درخت چه قدر است؟

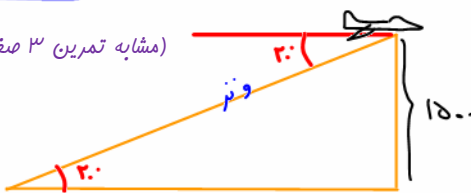
(تمرین ۱ صفحه ۳۴ کتاب درسی)



$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{جاور}} = \frac{1/5}{0/5} = 3$   
 $\tan \alpha = 3 = \frac{\text{مقابل}}{\text{طول درخت}}$   
 $3 = \frac{3}{\text{طول سایه}} = \frac{3}{3} = 1$   
مقابل = طول درخت = ۹

۶- یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق  $20^\circ$  باشد، هواپیما تقریباً چه مسافتی را طی می‌کند تا روی زمین بنشیند؟ ( $\sin 20^\circ = 0/34$ )

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۵ کتاب درسی)



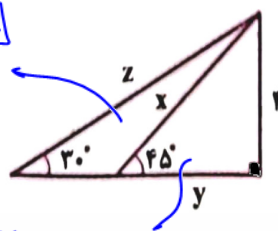
$\sin 20^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1500}{Z} = 0/34$

$Z = \frac{1500}{0/34} = 4412$  متر

۷- در هر قسمت، مقادیر x، y و z را به دست آورید.

$\sin 30^\circ = \frac{4}{Z} = \frac{1}{2} \rightarrow Z = 8$

نکته: در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است.



$\sin 45^\circ = \frac{4}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

$\tan 45^\circ = 1 = \frac{4}{y} \rightarrow y = 4$

$\sin 30^\circ = \frac{y}{Z} = \frac{1}{2} \rightarrow Z = 2y$

$(Z)^2 = y^2 + (4)^2$

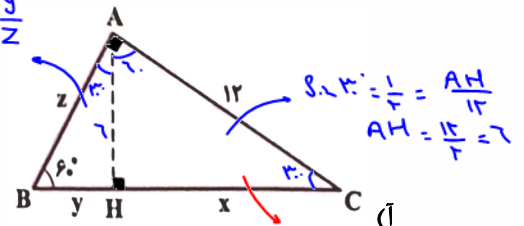
$(2y)^2 - y^2 = 16$

$3y^2 = 16$

$y^2 = \frac{16}{3}$

$y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$Z = 2y = \frac{8\sqrt{3}}{3}$



$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AH}{12} \rightarrow AH = 6$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \frac{AH}{x} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

$z = 12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۵ کتاب درسی)

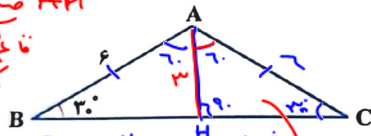
۸- در هر یک از شکل‌های زیر، مساحت مثلث‌ها را به دست آورید:  $(\sin 50^\circ = 0.76)$

دقت: جمع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ است.

۱- ضلع روبه روبه زاویه‌ها برابر است.

۲- تاغ الزاویه  $AHC$  است.

۳- که نصف وتر برابر است.



شکل‌های سابقین است: پس  $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

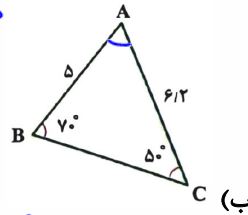
$$\hat{A} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$A = 120^\circ$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (AC)(AH) \sin 90^\circ$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (7)(3) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 2S_1 = 2 \left( \frac{1}{2} (7)(3) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 9\sqrt{3}$$

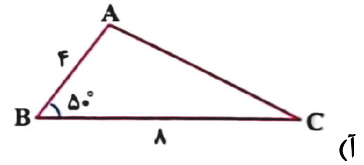


$$\hat{A} = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} (AB)(AC) \sin 60^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} (5)(6.2) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{31}{2} \sqrt{3}$$



$$S = \frac{1}{2} (4)(8) \sin 50^\circ$$

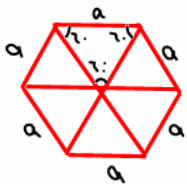
$$S = 16(0.76) = 12.16$$

۹- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{2} a a \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

حفظ باش

۱۰- مساحت شش‌ضلعی منتظمی به ضلع a را به دست آورید.



$$S = 6 \left( a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

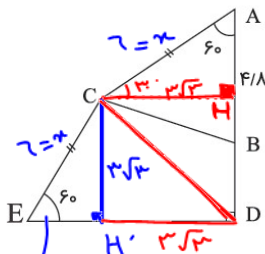
حفظ باش

Homework (1)

$AC = EC = x$

در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر  $7/2\sqrt{3}$  است. فاصله D از C کدام است؟

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (AB=2, \sqrt{3}) (x) \sin 60 = 7/2\sqrt{3}$   
 $2, \sqrt{3} (x) \frac{\sqrt{3}}{2} = 7/2\sqrt{3} \rightarrow 1,2x = 7/2 \rightarrow x = \frac{7/2}{1,2} = 7$



$\Delta ACH: \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{x} \rightarrow CH = x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$

- (1)  $6\sqrt{6}$
- (2)  $3\sqrt{6}$
- (3)  $2\sqrt{2}$
- (4)  $\sqrt{2}$

$\Delta CEH': \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH'}{x}$   
 $CH' = x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$   
 شکل  $CHDH'$  مربع است. فاصله C از D بهمان CD قطر مربع است.  
 $CD = \sqrt{2} \times \text{ضلع مربع} = \sqrt{2} (3\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d، تساوی  $6a_4^2 = 5a_3a + 3a_1a$  برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d کدام می‌تواند باشد؟

- (1) ۱
- (2) ۱/۵
- (3) ۳/۵
- (4) ۴

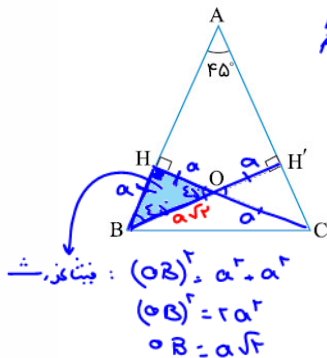
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنباله حسابی است؟

- (1)  $\frac{6}{5}$
- (2)  $\frac{1}{5}$
- (3) ۳
- (4) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



$\Delta ABH': \hat{H} = 90^\circ, \hat{A} = 45^\circ \rightarrow \hat{B} = 45^\circ$   
 $\Delta BHO: \hat{H} = 90^\circ, \hat{B} = 45^\circ \rightarrow \hat{O} = 45^\circ$

$\Delta ABH': \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH'}{AB}$   
 $BH' = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$   
 $(BH' = 4\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + a = a(1 + \sqrt{2})$

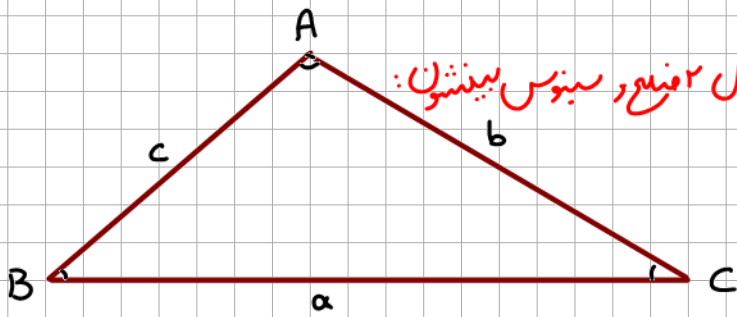
- (1)  $\frac{6}{2 + \sqrt{3}}$
- (2)  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$
- (3)  $\frac{12}{3 + 2\sqrt{2}}$
- (4)  $\frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$

$a = \frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

$S_{\Delta OHB} = \frac{(OH)(OB)}{2} = \frac{a(a)}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16(2)}{1 + 2 + 2\sqrt{2}}\right) = \frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

فرمول جدید مساحت با داشتن طول ۲ ضلع و سینوس بینشون:



مساحت هر مثلث های دینی:

$$S = \frac{1}{2} (AB)(BC) \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$
$$S = \frac{1}{2} (AB)(AC) \sin \hat{A} = \frac{1}{2} cb \sin \hat{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$
$$S = \frac{1}{2} (AC)(BC) \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ba \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

نصف حاصلضرب دو ضلع مزبور سینوس زاویه بینشون