فصل دوم: مثلثات

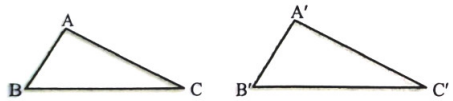
BOX 1: نسبت‌های مثلثاتی (صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

در این بسته با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا می‌شویم.

برای معرفی مفهوم مثلثات، نیاز به مفهوم تشابه داریم.

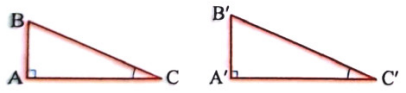
تشابه: به یاد دارید که دو مثلث، وقتی متشابه هستند که زوایای نظیر آن‌ها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشد.

قضیه: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



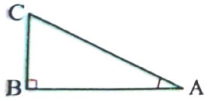
$$\hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$
$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{A}',\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه: اگر دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویهٔ حادهٔ برابر داشته باشند، آن‌گاه با هم متشابه‌اند.



$$\hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تانژانت و کتانژانت: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حادهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}=\frac{BC}{AB}$$

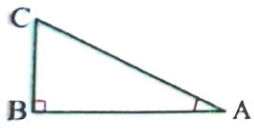
$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}=\frac{AB}{BC}$$

تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، $AB=4$ و $AC=5$ می‌باشند. مقدار $\tan A$ و $\cot A$ را به دست آورید.

$\tan\hat{A}=\frac{۳}{۴}$

$\cot\hat{A}=\frac{۴}{۳}$

سینوس و کسینوس: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، سینوس و کسینوس زاویهٔ حادهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}}=\frac{BC}{AC}$$

$$\cos A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{AC}$$

رابطهٔ بین $\tan A$ و $\cot A$ با $\sin A$ و $\cos A$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$:

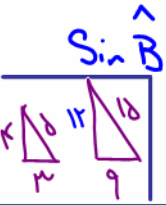
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \quad , \quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

مقابل بر وتر سینوس باشد — مجاور بر وتر با تکسینوس

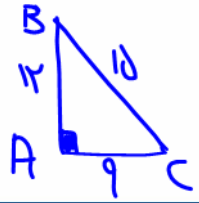
سینوس جو بر وی کسینوس نشیند — تانژانت به ست آید و به عکس کتانژانت

نسبت‌های مثلثاتی: در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، طول وتر ۱۵ و $\sin B=\frac{۳}{۵}$ است. طول اضلاع قائمه را به دست آورید.



$\sin\hat{B}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۳}{۵}$ → ضلع مقابل $=۹=AC$



$(AC)^۲+(AB)^۲=(BC)^۲$

$(۹)^۲+(AB)^۲=(۱۵)^۲$: فیثاغورس

$(AB)^۲=۱۴۴ \rightarrow AB=۱۲$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

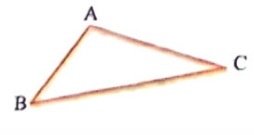
مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 45° و 60° : بدست آوردن اعداد زیر را با رسم $\triangle$ بله باش :

مقدار	$A=30^\circ$	$A=45^\circ$	$A=60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین: مقدار عددی عبارت $3\sin 30^\circ + 4\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ$ را به دست آورید.

$3\left(\frac{1}{2}\right)+4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}+4-3=\frac{3}{2}+1=2,5$

نکته: مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها، یعنی:



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A=\frac{1}{2}BA\times BC\times\sin B=\frac{1}{2}\times CA\times CB\times\sin C$$

تمرین: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ 30° پرتاب می‌شود. پس از طی ۱۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

تمرین: در مثلث ABC، $AC=4$، $BC=6$ و $\hat{C}=25^\circ$ می‌باشند. با فرض $\sin 25^\circ = 0/42$، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

پرسش‌های تشریحی:

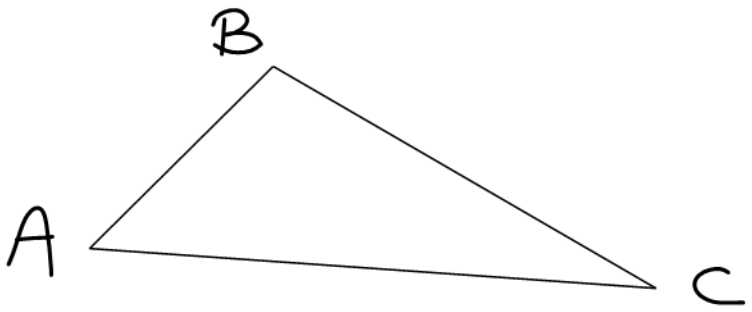
۱- با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$، نسبت‌های مثلثاتی 30° و 60° را به دست آورید.

(مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)

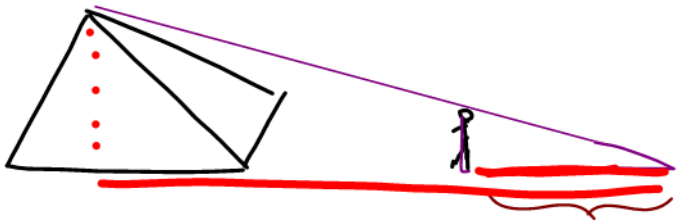
Trigonometry

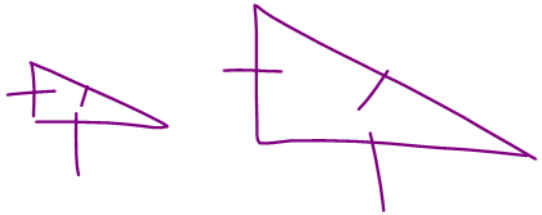
اندازه‌گیری مثلث (۳ بر)

مثلثات (سه برسنجی)

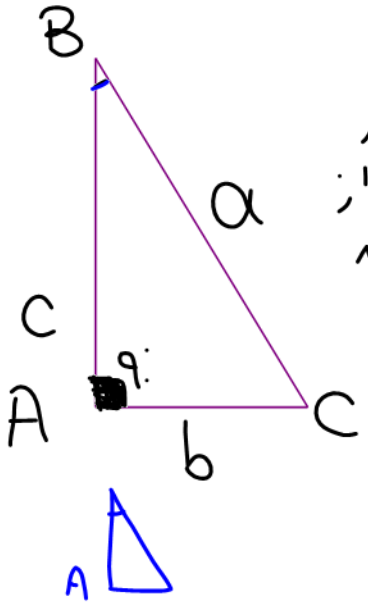


نام‌ها:





قول‌نامه ۲ برابر برنده خودش



کسر، کسر، کسر، واحد

$$\sin\hat{B} = \frac{b}{a} \qquad \sin\hat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \qquad \cos\hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{b}{c} \qquad \tan\hat{C} = \frac{c}{b}$$

$$\cot\hat{B} = \frac{c}{b} \qquad \cot\hat{C} = \frac{b}{c}$$

تعاریف نسبت های مثلثی:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\sin\hat{B} = \cos\hat{C}$$

$$\cos\hat{B} = \sin\hat{C}$$

$$\tan\hat{B} = \cot\hat{C}$$

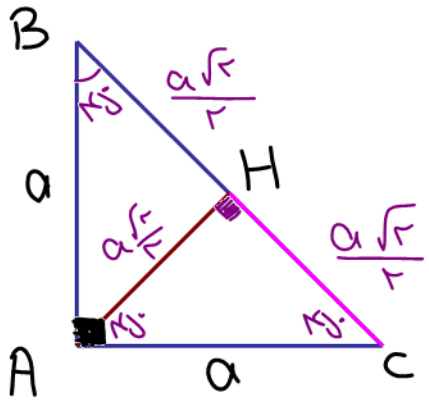
$$\cot\hat{B} = \tan\hat{C}$$

نسبت‌های مثلثاتی ۴۵°:

یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ساق a در نظر می‌گیریم، رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$(\text{وتر})^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\text{وتر} = a\sqrt{2}$$



در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{AHC}$ که $\hat{H} = 90°$ است:

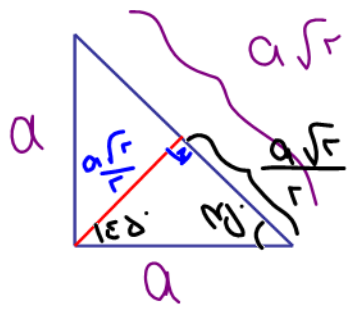
$$\sin\hat{C} = \sin 45° = \frac{\text{مقابل}: AH}{\text{وتر}: AC = a} \overset{*}{=\!=} \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در مثلث متساوی‌الساقین $\hat{ABC}$ ارتفاع AH نیمساز هم هست پس $\hat{A_1} = 45°$ و مثلث $\hat{ACH}$ متساوی‌الساقین می‌شود و $* AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{AHC}$ داریم:

$$\cos\hat{C} = \cos 45° = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

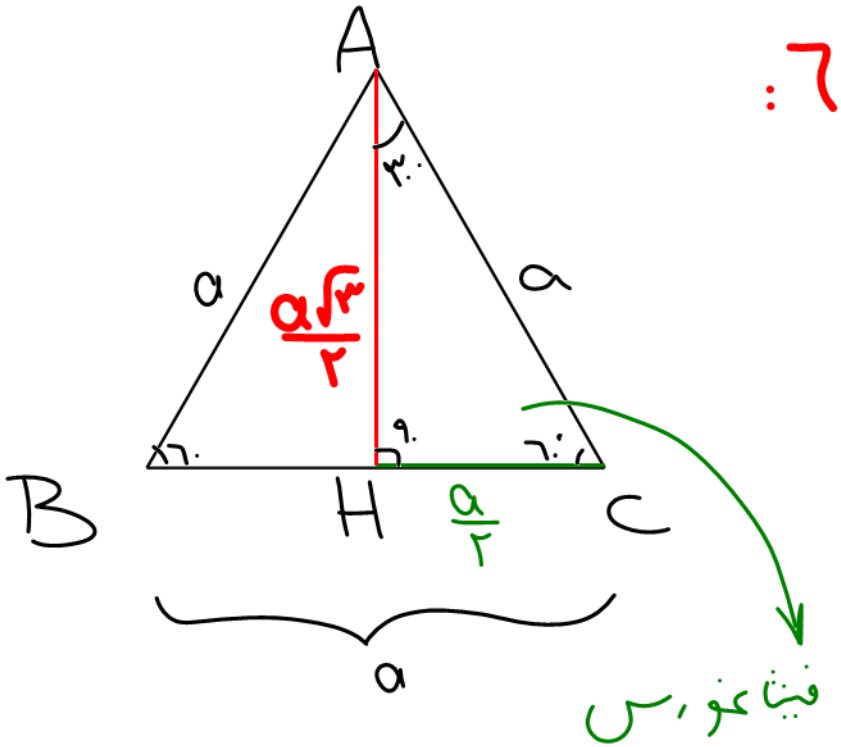
$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$



$$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\cot\tan 45° = 1$$

یافتن سینوس و کسینوس ۳۰° و ۶۰°:



مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle ABC$ را در نظر گرفته و ارتفاع AH که نیمساز $\hat{A} = ۶۰°$ است را رسم می‌کنیم:

$$(AH)^2 = (a\cdot\sin ۶۰°)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (AH)^2$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = (AH)^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = (AH)^2 \longrightarrow AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos ۶۰° = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos ۳۰° = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan ۶۰° = \frac{\sin ۶۰°}{\cos ۶۰°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$\triangle AHC$: $\sin ۳۰° = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$

$\sin ۶۰° = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

در دو زاویه با جمع ۹۰° (مثل ۳۰° و ۶۰°) سینوس این کسینوس اونه و برعکس.

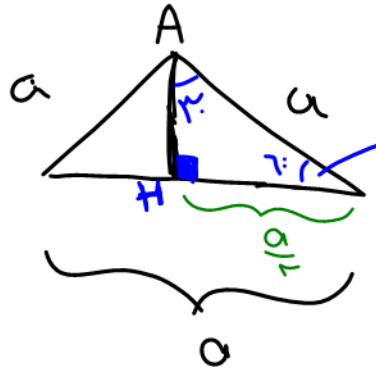
$30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \longrightarrow$

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$



$\cos 60^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$

فيثاغورس $(AH)^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = a^2 \frac{3}{4} \longrightarrow AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$