

پرسش‌های تشریحی:

• درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

نادرست ۱- هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.

نادرست ۲- دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست ۳- دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{2}{5}$ وجود دارد.

درست ۴- بی‌شمار دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ وجود دارد.

درست ۵- دنباله هندسی وجود ندارد که فقط چهار جمله اول آن منفی باشد. زیرا اگر ۴ جمله اول منفی است قدرنسبت مثبت بود. دهمی جملات منفی می‌شوند.

نادرست ۶- دنباله حسابی وجود ندارد که فقط چهار جمله اول آن منفی باشد. وجود دارد مثل دنباله $1, 3, 5, 7, \dots$ و $1, -1, -3, -5, \dots$

درست ۷- جمله دهم دنباله حسابی $1, 5, 9, \dots$ برابر ۳۷ است.

درست ۸- واسطه هندسی مثبت دو عدد ۴ و ۹ برابر ۶ است.

• از بین دنباله‌های زیر، کدامیک دنباله حسابی و کدامیک دنباله هندسی می‌باشند؟ قدرنسبت آن‌ها را تعیین کنید. هم‌چنین جمله عمومی

جمله عمومی $a_n = 3$

۱۰- $3, 3, 3, 3, \dots$ هم حسابی با $d = 0$ هم هندسی با $q = 1$

۱۲- $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, \dots$ حسابی با $d = -\sqrt{2}$

$a_n = -\sqrt{2}n + 2\sqrt{2}$

$a_n = 0.6n + 1.7$

دنباله را مشخص کنید.

۹- $2, 2/4, 2/8, 3/2, \dots$ حسابی $d = 0.6$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ $\frac{5}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{8}$

$\frac{3}{32} - \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$ $\frac{5}{32} - \frac{3}{32} = \frac{1}{16}$

$\frac{3}{64} - \frac{1}{64} = \frac{1}{32}$ $\frac{5}{64} - \frac{3}{64} = \frac{1}{32}$

$\frac{3}{128} - \frac{1}{128} = \frac{1}{64}$ $\frac{5}{128} - \frac{3}{128} = \frac{1}{64}$

$\frac{3}{256} - \frac{1}{256} = \frac{1}{128}$ $\frac{5}{256} - \frac{3}{256} = \frac{1}{128}$

$\frac{3}{512} - \frac{1}{512} = \frac{1}{256}$ $\frac{5}{512} - \frac{3}{512} = \frac{1}{256}$

$\frac{3}{1024} - \frac{1}{1024} = \frac{1}{512}$ $\frac{5}{1024} - \frac{3}{1024} = \frac{1}{512}$

$\frac{3}{2048} - \frac{1}{2048} = \frac{1}{1024}$ $\frac{5}{2048} - \frac{3}{2048} = \frac{1}{1024}$

$\frac{3}{4096} - \frac{1}{4096} = \frac{1}{2048}$ $\frac{5}{4096} - \frac{3}{4096} = \frac{1}{2048}$

$\frac{3}{8192} - \frac{1}{8192} = \frac{1}{4096}$ $\frac{5}{8192} - \frac{3}{8192} = \frac{1}{4096}$

$\frac{3}{16384} - \frac{1}{16384} = \frac{1}{8192}$ $\frac{5}{16384} - \frac{3}{16384} = \frac{1}{8192}$

$\frac{3}{32768} - \frac{1}{32768} = \frac{1}{16384}$ $\frac{5}{32768} - \frac{3}{32768} = \frac{1}{16384}$

$\frac{3}{65536} - \frac{1}{65536} = \frac{1}{32768}$ $\frac{5}{65536} - \frac{3}{65536} = \frac{1}{32768}$

$\frac{3}{131072} - \frac{1}{131072} = \frac{1}{65536}$ $\frac{5}{131072} - \frac{3}{131072} = \frac{1}{65536}$

$\frac{3}{262144} - \frac{1}{262144} = \frac{1}{131072}$ $\frac{5}{262144} - \frac{3}{262144} = \frac{1}{131072}$

$\frac{3}{524288} - \frac{1}{524288} = \frac{1}{262144}$ $\frac{5}{524288} - \frac{3}{524288} = \frac{1}{262144}$

$\frac{3}{1048576} - \frac{1}{1048576} = \frac{1}{524288}$ $\frac{5}{1048576} - \frac{3}{1048576} = \frac{1}{524288}$

$\frac{3}{2097152} - \frac{1}{2097152} = \frac{1}{1048576}$ $\frac{5}{2097152} - \frac{3}{2097152} = \frac{1}{1048576}$

$\frac{3}{4194304} - \frac{1}{4194304} = \frac{1}{2097152}$ $\frac{5}{4194304} - \frac{3}{4194304} = \frac{1}{2097152}$

$\frac{3}{8388608} - \frac{1}{8388608} = \frac{1}{4194304}$ $\frac{5}{8388608} - \frac{3}{8388608} = \frac{1}{4194304}$

$\frac{3}{16777216} - \frac{1}{16777216} = \frac{1}{8388608}$ $\frac{5}{16777216} - \frac{3}{16777216} = \frac{1}{8388608}$

$\frac{3}{33554432} - \frac{1}{33554432} = \frac{1}{16777216}$ $\frac{5}{33554432} - \frac{3}{33554432} = \frac{1}{16777216}$

$\frac{3}{67108864} - \frac{1}{67108864} = \frac{1}{33554432}$ $\frac{5}{67108864} - \frac{3}{67108864} = \frac{1}{33554432}$

• جمله عمومی شش دنباله، داده شده است. کدامیک، دنباله حسابی و کدامیک دنباله هندسی است؟ جمله عمومی دنباله حسابی یا هندسی را به دست آورید.

۱۴- $d_n = \frac{n+4}{2n+3}$ حسابی نه هندسی

۱۳- $a_n = \frac{n}{3} + 4$ حسابی $d = \frac{1}{3}$

۱۵- $b_n = 2n^2 - 1$ حسابی نه هندسی

۱۷- $c_n = 4(-\frac{2}{3})^n$ هندسی $q = -\frac{2}{3}$

در دنباله هندسی $a_n = a_1 q^{n-1}$ در صورت توانی است.

۱۹- اعداد $2x+1$ و $-x+4$ و $3x-8$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. مقدار x را به دست آورید. $a + c = 2b$

$(2x+1) + (3x-8) = 2(-x+4)$
 $5x - 7 = -2x + 8$
 $7x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{7}$

رقت:

۲۰- در دنباله حسابی با جمله عمومی t_n ، حاصل $\frac{t_4 + 2t_1 - t_7}{t_8 + t_9}$ را به دست آورید. در دنباله حسابی می‌توان هر صدها بر صدها t_1 و d نوشت:

$t_n = t_1 + (n-1)d$

$t_8 = t_1 + (8-1)d$

$\frac{(t_1 + 3d) + 2(t_1 + d) - (t_1 + 6d)}{(t_1 + 7d) + (t_1 + 8d)} = \frac{t_1 + 3d + 2t_1 + 2d - t_1 - 6d}{2t_1 + 15d} = \frac{2t_1 + 15d}{2t_1 + 15d} = 1$

$= \frac{2t_1 + 15d}{2t_1 + 15d} = 1$ یک

کسی که صورت و مخرج برابر دارد برابر یک است.

دقت: در دنباله هندسی می توان هر صدمه را بر حسب t_1, q, t_n

نوشت: $t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$

(تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی)

۲۱- جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

برهم تنبیه کنید $\frac{t_3}{t_2} = \frac{9^2}{9^1} = \frac{12}{96} \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{q^3} \rightarrow q^3 = 8 \rightarrow q = 2$

۲۲- بین دو عدد ۱ و ۸۱ با جمله اول ۱، هفت واسطه هندسی درج شده است. قدرنسبت دنباله حاصل را مشخص کنید.

$t_1 = 1$ و $t_7 = 81$
 $t_n = t_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow t_7 = t_1 \cdot q^{6} \rightarrow 81 = 1 \cdot q^6 \rightarrow q^6 = 81 \rightarrow q = \sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

(تمرین ۵ صفحه ۲۷ کتاب درسی)

۲۳- در دنباله هندسی ... ۲، ۴، ۸، ... حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله را به دست آورید.

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{20} = t_1 \cdot (t_1 \cdot q) \cdot (t_1 \cdot q^2) \cdot \dots \cdot (t_1 \cdot q^{19}) = t_1^{20} \cdot q^{1+2+\dots+19} = t_1^{20} \cdot q^{\frac{20 \cdot 19}{2}} = 2^{20} \cdot 2^{\frac{20 \cdot 19}{2}} = 2^{20} \cdot 2^{190} = 2^{210}$

راه تری: $P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$ $P_{20} = \sqrt{(t_1 \cdot t_{20})^{20}} = (t_1 \cdot t_{20})^{10} = (1 \cdot 81)^{10} = 81^{10} = 3^{40} = 2^{20} = 2^{210}$

۲۴- قیمت یک خودرو به دلیل استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می یابد. اگر قیمت اولیه یک خودرو ۴۰ میلیون تومان باشد و قیمت آن برای n جمله اول دنباله هندسی

در هر سال ۲۰ درصد کاهش پیدا کند: یعنی هر سال ۰.۸ از قیمتش کم می شود.
 (آ) قیمت این خودرو را بعد از ۲ سال مشخص کنید. $t_0 = 40, t_1 = 32, t_2 = 25.6$
 (ب) قیمت این خودرو بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟
 $t_n = (40) \cdot (0.8)^n$

فرمول دنباله هندسی $t_n = t_1 \cdot q^{n-1} = (t_1 \cdot q) \cdot q^{n-2} = t_0 \cdot q^{1+(n-1)} = t_0 \cdot q^n = (40) \cdot (0.8)^n$

۲۵- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱۷ و مجموع جملات دوم و چهارم برابر ۶۸ می باشد. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

مشخص کنید: $t_1 + t_3 = 17 \rightarrow t_1 + (t_1 \cdot q^2) = 17 \rightarrow t_1(1 + q^2) = 17$
 $t_2 + t_4 = 68 \rightarrow (t_1 \cdot q) + (t_1 \cdot q^3) = 68 \rightarrow t_1(q + q^3) = 68$
 $\frac{t_1(1+q^2)}{t_1(q+q^3)} = \frac{17}{68} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1+q^2}{q(1+q^2)} = \frac{1}{4} \rightarrow q = 4 \rightarrow t_1(1+4^2) = 17 \rightarrow t_1 = 1$
 $t_n = t_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow t_n = 4^{n-1}$

۲۶- در دنباله هندسی روبه رو، جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.
 $q = 3, t_1 = 4$

در هر دنباله هندسی داریم:
 $b^2 = a \cdot c \rightarrow (2x - 4)^2 = (x - 4)(4x + 4)$
 $(2(x-2))^2 = (x-4) \cdot 4(x+1)$
 $4(x-2)^2 = (x-4) \cdot 4(x+1)$
 $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x - 4$
 $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$
 $4x + 4 = 20, 2x - 4 = 8, x - 4 = 4$
 $4, 12, 36$
 $q = 3, t_1 = 4$

Homework (1)

۱ مقادیر a ، $1 + 2a$ و $5 - a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

a ، $1 + 2a$ ، $5 - a$ $\xrightarrow{a = \frac{3}{2}}$ $\boxed{\frac{3}{2}}$ ، $1 + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$ ، $5 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{17}{2}}$

$a + c = 2b$ در هر دنباله حسابی

$a + 5 - a = 2(1 + 2a)$
 $5 = 2 + 4a \rightarrow a = \frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{2}$ ، $\frac{17}{2}$ ، ...
 $d = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$\frac{4}{25}$ (۲)

$\frac{2}{75}$ (۱)

$\frac{14}{75}$ (۴)

$\frac{12}{25}$ (۳)

$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_9 = \frac{3}{2} + 8(1) = \frac{19}{2} = \frac{59}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 15 - 0.5 = 14.5$

۲ اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت d خواهید داشت. مقدار $r + d$ کدام است؟

۱ (۲)

صفر (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳ با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

$\frac{64}{7}$ (۲)
 $\frac{48}{5}$ (۴)

$\frac{32}{7}$ (۱)
 $\frac{24}{5}$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۴ دنباله‌های هندسی با قدر نسبت (نسبت مشترک) طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشد؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول و دوم) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی ... $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, ... میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- (۱) $2304/5$ (۲) $3072/5$
(۳) $6608/5$ (۴) $6144/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ یک دنباله با جملات غیرصفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r + d$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ در دو دنباله حسابی به صورت‌های $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک وجود دارد؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹
(۳) ۶۰ (۴) ۶۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸ یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم‌شده قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶
(۳) ۹ (۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ در دنباله‌های حسابی $2, 9, 16, 23, \dots$ و $12, 17, 22, 27, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶
(۳) ۷ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۰ باتوجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$ کدام است؟

- (۱) $0/15$ (۲) $0/18$
(۳) $0/24$ (۴) $0/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

- (۱) ۴۱۵
(۲) ۴۱۹
(۳) ۴۲۱
(۴) ۴۲۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۲

با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جمله n ام دو دنباله کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۲
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۳

در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a_7 = 5a_3 + 3a_2$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d ، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) $3/5$
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴

جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی کدام است؟ (جملات دنباله ثابت نیستند.)

- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{7}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۵

جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنباله حسابی است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$
(۲) $\frac{8}{5}$
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جمله اول و آخر دسته n ام، کدام است؟

- (۱) ۱۷۰۰
(۲) ۱۷۵۰
(۳) ۱۸۰۰
(۴) ۱۸۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۷ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته نهم واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر، کدام است؟

- (۱) ۷۱
(۲) ۷۲
(۳) ۷۳
(۴) ۷۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۸ جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{9}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۹ در یک دنباله هندسی با جملات متمایز، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌هاست؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
(۲) $5 + 2\sqrt{3}$
(۳) $5 + 4\sqrt{3}$
(۴) $7 + 4\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخنامه (1) Homework

گزینه ۴

۱

اگر جملات فوق به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند پس:

$$1 + 2a = \frac{a + 5 - a}{2} \Rightarrow 2 + 4a = 5 \Rightarrow 4a = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

بنابراین جملات عبارتند از:

$$\frac{3}{4}, 1 + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{2}, \dots$$

یعنی:

$$d = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

پس:

$$a_9 = a + 8d = \frac{3}{4} + 8 \times \frac{7}{4} = \frac{3}{4} + 14 = 14\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲

اگر جملات دنباله هندسی به صورت زیر باشند:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

a_1, r (with a bracket under a_1)
 a_1, r^2 (with an arrow pointing from a_1 to r^2)

بنابراین جملات دنباله حسابی عبارتند از:

$$\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2}, \dots$$

پس:

$$\frac{a_2}{2} = \frac{\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}}{2} \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 2a_1r = a_1 + a_1r^2$$

$$\xrightarrow{a_1 \neq 0} r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$(r-1)^2 = 0$$

$$2a_1r = a_1(1+r^2)$$

$$2r = 1+r^2$$

حاصلین نسبت به a_1 :

بنابراین دنباله هندسی ثابت است و $d = 0$ پس:

$$r + d = 1 + 0 = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گزینه ۲

۳

جملات دنباله هندسی: $a, ar, ar^2 \xrightarrow{\text{در دنباله حسابی}} 4a, 4ar, 16ar^2$
 $\xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} 16ar = 4a + 16ar^2$

$$4r = 1 + 4r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

مجموع مربعات: $a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 4a + 4ar + 16ar^2$

$$a^2(1 + r^2 + r^4) = 4a(1 + 2r + 4r^2) \Rightarrow a^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 4a(1 + 1 + 1)$$

$$\Rightarrow a \times \frac{16 + 4 + 1}{16} = 12 \Rightarrow a = \frac{12 \times 16}{21} \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۴

دنباله خواسته شده به صورت زیر است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4$$

باتوجه به سوال اولاً $a_1 \geq 1$ و ثانیاً $a_1q^4 \leq 100$. همچنین $q > 1$:

$$a_1q^4 \leq 100 \xrightarrow{q=2} 16a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a_1q^4 \leq 100 \xrightarrow{q=3} 81a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 = 1$$

برای $q \geq 4$ هیچ دنباله‌ای یافت نمی‌شود؛ پس در مجموع ۷ دنباله با مشخصات داده شده وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

گزینه ۳

۵

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \{13, 14, \dots, 24\}, \dots$$

آخرین و بزرگ‌ترین عضو دسته‌ها (به جز دسته اول) باهم تشکیل دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ می‌دهند:

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 3 \times 2^1 = 6$$

$$a_4 = 3 \times 2^2 = 12$$

⋮

$$a_{12} = 3 \times 2^{10} = 3072$$

$$a_{13} = 3 \times 2^{11} = 6144$$

پس دسته سیزدهم به صورت زیر است:

$$\{3072, 3072, \dots, 6144\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3072 + 6144}{2} = 4608/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

گزینه ۳

۶

دنباله با جملات ناصفر که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله اعداد ثابت به صورت a, a, \dots است که $d = 0$ و $r = 1$ بوده و $r + d = 1$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

گزینه ۳

۷

$$\begin{cases} ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \dots & d_1 = ۵ \\ ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \dots & d_2 = ۳ \end{cases}$$

اولین جمله مشترک دو دنباله ۱۷ است. همچنین قدر نسبت دنباله جملات مشترک ک.م.م d_1 و d_2 یعنی $۱۵ = ۳ \times ۵$ است؛ بنابراین جمله عمومی دنباله جملات مشترک عبارت است از:

$$a_n = ۱۷ + ۱۵(n - 1) = ۱۵n + ۲$$

حال باید تعداد n هایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $۱۰۰ \leq a_n \leq ۹۹۹$:

$$\begin{aligned} ۱۰۰ \leq ۱۵n + ۲ \leq ۹۹۹ &\Rightarrow ۹۸ \leq ۱۵n \leq ۹۹۷ \\ \Rightarrow ۶/... \leq n \leq ۶۶/... &\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{۷, ۸, \dots, ۶۶\} \end{aligned}$$

بنابراین تعداد جملات موردنظر برابر است با:

$$۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گزینه ۱

۸

اگر مساحت هر مربع ۹ برابر قبلی باشد، یعنی طول ضلع آن ۳ برابر مربع درست شده قبلی است. پس محیط این مربع‌ها در هر مرحله سه برابر خواهد شد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۲

۹

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است.

$$\begin{aligned} ۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \dots &\Rightarrow d_1 = ۷ \\ ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \dots &\Rightarrow d_2 = ۵ \end{aligned}$$

اولین جمله مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$\begin{aligned} a_n = a_1 + (n - 1)d &\xrightarrow{d=[۷,۵]=۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n - 1) = ۳۵n + ۲ \\ ۱۰۰ \leq a_n < ۳۰۰ &\Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰ \\ \Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ &\Rightarrow ۲/... \leq n < ۸/... \\ ۳ \leq n \leq ۸ &\Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\} \end{aligned}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

گزینه ۱

۱۰

$$S = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$$

$$3S = \frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \dots + \frac{20-17}{17 \times 20}$$

$$3S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$3S = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 0/15$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۲

۱۱

در دسته اول ۱، دسته دوم ۲ و... و در دسته بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به اندازه $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20}{2}(1 + 20) = 210$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جمله آخر در دسته بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(2n - 1)$ است.

$$2 \times 210 - 1 = 419$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

گزینه ۱

۱۲

به همه جملات ۴ واحد اضافه می‌شود، بنابراین اختلاف جملات برابر ۴ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۱

۱۳

$$a, a + d, a + 2d, \dots$$

$$6(a + d)^2 = 5(a + 2d)a + 3(a + d)a$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 6d^2 + ad = 0, \quad \frac{a}{d} = x \Rightarrow a = dx$$

$$\Rightarrow 2d^2x^2 - 6d^2 + d^2x = 0 \Rightarrow d^2(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -2$$

$$\frac{a_6}{d} = \frac{a + 5d}{d} = \frac{a}{d} + 5 = x + 5 : \begin{cases} x = -2 : x + 5 = 3 \\ x = \frac{3}{2} : x + 5 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۱۴

جمله اول دنباله حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به اینکه $a_{11} = a_1 + 10d$ و $a_5 = a_1 + 4d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_n = a_1 + (n - 1)d$ از طرفی می‌دانیم که اگر x, y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $y^2 = xz$ ؛ پس باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$a_7^2 = a_5 \cdot a_{11} \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 4d) \times (a_1 + 10d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 40d^2 \Rightarrow 2d^2 = 2a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{1}{2}d (*)$$

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_7 = \frac{1}{2}d + 6d = \frac{13}{2}d \\ a_5 = \frac{1}{2}d + 4d = \frac{9}{2}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنباله هندسی، از تقسیم دو جمله متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنباله هندسی مورد نظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_7} = \frac{\frac{9}{2}d}{\frac{13}{2}d} = \frac{9}{13} = \frac{9}{13}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گزینه ۴

۱۵

دنباله حسابی را t_n با قدرنسبت d و الگوی خطی را a_n با قدرنسبت d' نمایش دهیم:

$$t_8 - t_4 = a_7 - a_3 \Rightarrow 4d = 4d' \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{4}{4}$$

$$a_{10} = 0 \Rightarrow a_1 + 9d' = 0 \Rightarrow a_1 = -9d'$$

$$\frac{a_{15}}{d} = \frac{a_1 + 14d'}{d} = \frac{-9d' + 14d'}{d} = 5 \frac{d'}{d} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۳

۱۶

دسته سوم دسته دوم دسته اول
 \downarrow \downarrow \downarrow
 ۱ ۲ ۳ , ...

پس تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول} &= 1 + 2 + 3 + \dots + 29 \\ &= \frac{29(29+1)}{2} = \frac{29 \times 30}{2} = 435 \end{aligned}$$

پس اولین جمله دسته سی‌ام، برابر با جمله ۴۳۶ام دنباله اعداد طبیعی فرد است. دنباله اعداد طبیعی فرد، یک دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 2n - 1$ است، بنابراین:

$$\text{اولین جمله دسته ۳۰ام} = a_{436} = 2 \times 436 - 1 = 871 = b_1$$

دسته سی‌ام، ۳۰ جمله دارد، بنابراین جمله آخر این دسته برابر است با:

$$b_{30} = b_1 + 29d \xrightarrow{\substack{b_1=871 \\ d=2}} 871 + 29 \times 2 = 929$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ هستند)، بنابراین:

$$b_1 + b_{30} = 871 + 929 = 1800$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

دسته اول : $\{1\}$

دسته دوم : $\{\underbrace{2}_{1+1}, 3, \underbrace{4}_{2^2}\}$

دسته سوم : $\{\underbrace{5}_{2^2+1}, 6, 7, 8, \underbrace{9}_{3^2}\}$

⋮

دسته هشتم : $\{\underbrace{50}_{7^2+1}, \dots, \underbrace{64}_{8^2}\}$

دسته نهم : $\{\underbrace{65}_{8^2+1}, \dots, \underbrace{81}_{9^2}\}$

$$\Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{81 + 65}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

راه حل اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت (اختلاف مشترک) d و جمله اول a_1 برابر است با:

$$\underbrace{a_1 + 2d}_{t_1}, \underbrace{a_1 + 6d}_{t_2}, \underbrace{a_1 + 10d}_{t_3}$$

 t_1, t_2, t_3 سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند، پس داریم:

$$t_2^2 = t_1 t_3 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 10d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 20d^2$$

$$\Rightarrow 6d^2 - 2a_1d = 0 \Rightarrow d(6d - 2a_1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (در گزینه‌ها نیست)} \\ 6d - 2a_1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{3}a_1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$t_1 = a_1 + 2d = a_1 + 2\left(\frac{1}{3}a_1\right) = \frac{5}{3}a_1$$

$$t_2 = a_1 + 6d = a_1 + 6\left(\frac{1}{3}a_1\right) = 3a_1$$

در نتیجه قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3a_1}{\frac{5}{3}a_1} = \frac{9}{5}$$

راه حل دوم:

نکته: اگر جملات a_k و a_m, a_n از یک دنباله حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت

$$r = \frac{k-m}{m-n} \text{ (نسبت مشترک) دنباله هندسی برابر است با:}$$

 a_3, a_7 و a_{16} جملات یک دنباله هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

$$r = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

سه جمله متوالی دنباله حسابی‌اند، پس:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1q^4 = \frac{a_1q + a_1q^7}{2} \xrightarrow{a_1q \neq 0} 4q^3 = 1 + q^6$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

با فرض صعودی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگ‌ترین جمله است و در نتیجه $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

Homework (2)

۱ در یک دنباله هندسی، جمله دوم و پنجم به ترتیب ۳۶ و $\frac{۹}{۱۶}$ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

در جای خالی عدد یا عبارت مناسب را بنویسید.

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

۲ واسطه هندسی بین دو عدد $۸ - \sqrt{۱۵}$ و $۸ + \sqrt{۱۵}$ برابر است با

۳ جمله عمومی دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{5}, 1, 5$ به صورت می‌باشد.

۴ کمترین مقدار عبارت $\sin x - \frac{۱}{۱۲}$ برابر با است و بیشترین مقدار آن برابر با می‌باشد.

درستی یا نادرستی جمله‌های داده‌شده را مشخص کنید.

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

۵ دنباله $\dots, ۷, ۷, ۷$ یک دنباله هندسی می‌باشد.

۶ مقدار $\tan ۷۰^\circ$ از $\tan ۳۰^\circ$ بیشتر است.

۷ زاویه ۲۷۰° در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

۸ $\sin ۵۰^\circ = ۲ \sin ۲۵^\circ$

۹ جمله پنجم دنباله هندسی داده‌شده برابر $\frac{۵۱۲}{۷۲۹}$ می‌باشد؟

$۱۸, -۱۲, ۸, \dots$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

۱۰ بین دو عدد $\frac{۳۲}{۳}$ و ۸۱ چهار واسطه هندسی درج شده است. آن‌ها را مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۱

در یک دنباله حسابی، جملات هفتم و پانزدهم به ترتیب ۲۳ و ۶۳ می‌باشند. جمله چهارم این دنباله را مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۲

بین دو عدد $\frac{۳۲}{۳}$ و ۸۱، چهار واسطه هندسی درج شده است. آن‌ها را مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۳

در یک دنباله حسابی جمله هفتم ۴ برابر جمله سوم است. در این دنباله قدر نسبت (اختلاف مشترک) چند برابر جمله دوم است؟

- | | |
|--------|-------|
| (۱) ۱۱ | (۲) ۹ |
| (۳) ۸ | (۴) ۳ |

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۱۴

در دنباله‌های حسابی "۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ..." و "۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ..." چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۵ | (۲) ۶ |
| (۳) ۷ | (۴) ۸ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

۱۵

کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در هفته اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد. کارفرما متعهد می‌شود که در صورت رضایت کاری در پایان هر هفته، ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰ واحد پول برسد. با رضایت کاری پس از چند هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۴۸ | (۲) ۴۹ |
| (۳) ۵۰ | (۴) ۵۱ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

۱۶

در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟ (قدر نسبت (اختلاف مشترک) دنباله حسابی مخالف صفر است)

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۹ | (۲) ۱۰ |
| (۳) ۱۱ | (۴) ۱۲ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

۱۷

بین دو عدد $۲^{۲۲}$ و $۲^{۲۰}$ ، پنج واسطه حسابی قرار داده‌ایم. در این صورت کوچک‌ترین واسطه حسابی چندبرابر قدر نسبت این دنباله است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۲ | (۲) ۳ |
| (۳) ۴ | (۴) ۵ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

۱۸ مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگتر سه برابر مجموع سه جمله کوچکتر است. قدرنسبت آن کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۹ توپیی را از ارتفاع ۴۰ متری زمین رها می‌کنیم. هربار که توپ زمین می‌خورد به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌آید. توپ بعد از چهارمین بار که زمین می‌خورد تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟

- (۱) ۲/۵
(۲) ۵
(۳) ۷/۵
(۴) ۱۶

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۲۰ به علت تورم، بر قیمت کالایی به‌طور یکنواخت هر سال ۱۰ درصد اضافه می‌شود. در سال پنجم قیمت این کالا، چند برابر قیمت سال اول می‌شود؟

- (۱) ۱/۳۳۲۱
(۲) ۱/۳۷۶۱
(۳) ۱/۴۶۴۱
(۴) ۱/۴۷۵۱

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۲۱ در یک دنباله هندسی با جملات مثبت نسبت جمله ۱۰ام به جمله ۱۶ام برابر ۲۵۶ است. اگر حاصل ضرب جمله چهارم با جمله دوم برابر ۵۱۲ باشد، جمله ۱۴ام کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۸
(۴) $64\sqrt{2}$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۲۲ جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{7}{3}$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

در یک دنباله هندسی، جمله اول ۳ و جمله عمومی $t_n = \frac{1}{3} t_{n+1}$ است. کدام است؟

۲۳

$$\frac{1}{3^n} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3^n} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{3^{n-1}} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{3^n} \quad (۳)$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

پاسخ نامه (2) Homework

۱

$$\left. \begin{aligned} t_7 = 36 &\Rightarrow t_1 r = 36 \quad (*) \\ t_5 = \frac{9}{16} &\Rightarrow t_1 r^4 = \frac{9}{16} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{از تقسیم دو رابطه} \\ \text{بر هم} \end{array} \rightarrow r^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری می‌کنیم}]{\text{مقدار } r \text{ را در رابطه}} t_1 \left(\frac{1}{4}\right) = 36 \xrightarrow[\times 4]{\text{دو طرف}} t_1 = 144$$

دنباله $144, 36, 9, \dots$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

پاسخ سؤالات ۲ تا ۴

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

$$x^2 = (\lambda + \sqrt{15})(\lambda - \sqrt{15}) = 64 - 15 = 49$$

$$x = \pm 7$$

$$t_n = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5 \times 5^{1-n} = 5^{2-n}$$

$$-1 \leq \sin x < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{بیشترین: } \sin x = 1 \Rightarrow 3 \times 1 - 0/12 = 2/12 \\ \text{کمترین: } \sin x = -1 \Rightarrow 3 \times (-1) - 0/12 = -3/12 \end{cases}$$

پاسخ سؤالات ۵ تا ۸

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

درست

درست ۶

نادرست ۷

نادرست ۸

خواسته سؤال، شماره جمله، یعنی n است. ۹

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \frac{512}{729} = 18 \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر 18}} \frac{512}{729 \times 18} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه اعداد}} \frac{2^9}{3^8 \times 2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^8 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 9$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

$$\frac{32}{3}, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, 11$$

$$\frac{a_6}{a_1} = r^5 = \frac{11}{\frac{32}{3}} \Rightarrow r^5 = \frac{11 \times 3}{32} = \frac{33}{32} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$\frac{32}{3}, 16, 24, 36, 54, 11$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} a_7 = 23 &\Rightarrow a_1 + 6d = 23 \\ a_{15} = 63 &\Rightarrow a_1 + 14d = 63 \Rightarrow d = 5, a_1 = -7 \end{aligned}$$

$$a_{40} = -7 + (40 - 1) \times 5 = 188$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

۱۰

۱۱

۱۲

$$\frac{۳۲}{۳} \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad ۸۱$$

$$a_1 = \frac{۳۲}{۳}, \quad a_6 = ۸۱$$

$$a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow \frac{۳۲}{۳} \times r^5 = ۸۱ \Rightarrow r^5 = \frac{۲۴۳}{۳۲} \Rightarrow r = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۳۲}{۳}, \quad \frac{۳۲}{۳} \times \frac{۳}{۲} = ۱۶, \quad ۱۶ \times \frac{۳}{۲} = ۲۴, \quad ۲۴ \times \frac{۳}{۲} = ۳۶, \quad ۳۶ \times \frac{۳}{۲} = ۵۴, \quad ۸۱$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

گزینه ۴

۱۳

$$a_7 = ۴a_3 \Rightarrow a_1 + ۶d = ۴(a_1 + ۲d) \Rightarrow a_1 + ۶d = ۴a_1 + ۸d \Rightarrow ۳a_1 = -۲d \Rightarrow a_1 = -\frac{۲}{۳}d$$

$$\frac{d}{a_7} = \frac{d}{a_1 + d} = \frac{d}{-\frac{۲}{۳}d + d} = \frac{d}{\frac{۱}{۳}d} = ۳$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

گزینه ۲

۱۴

$$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \dots$$

$$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \dots$$

$$\text{مشترک} \quad a_1 = ۳۷$$

$$d = [۵, ۷] = ۳۵ \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = ۳۵n + ۲$$

$$a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰ \Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/۸ \leq n < ۸/۵$$

$$\Rightarrow n = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸$$

$$\text{تعداد جملات مشترک سه رقمی} = ۸ - ۲ = ۶$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

گزینه ۴

۱۵

این مسئله نشان‌دهنده یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 750$ ، قدر نسبت (اختلاف مشترک) $d = 25$ و جمله آخر $a_n = 2000$ است:

$$\begin{aligned} 750, 775, \dots, 2000 &\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \\ \Rightarrow 2000 &= 750 + (n-1) \times 25 \\ \Rightarrow 2000 &= 750 + 25n - 25 \Rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

گزینه ۳

۱۶

جمله عمومی دنباله حسابی به فرم $a_n = a_1 + (n-1)d$ است و اگر a, b و c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ است.

$$\begin{aligned} a_3, a_7, a_9 &\Rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d \\ \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) &= (a_1 + 6d)^2 \\ \Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 2a_1d + 16d^2 &= a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 \Rightarrow 20d^2 + 2a_1d = 0 \\ \xrightarrow{\div 2d} 10d + a_1 &= 0 \Rightarrow a_{11} = 0 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

گزینه ۲

۱۷

پنج واسطه حسابی

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & a_5 & , & a_6 & , & a_7 \\ \downarrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\ 2^{20} & & & & & & & & & & & & 2^{22} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_7 &= a_1 + 6d \Rightarrow 2^{22} = 2^{20} + 6d \Rightarrow 6d = 2^{22} - 2^{20} \Rightarrow d = 2^{19} \\ \text{کوچک‌ترین واسطه حسابی} &= a_2 = a_1 + d = 2^{20} + 2^{19} \\ &= 2 \times 2^{19} + 2^{19} = 3 \times 2^{19} \\ \Rightarrow \frac{a_2}{d} &= \frac{3 \times 2^{19}}{2^{19}} = 3 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

گزینه ۴

۱۸

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 60 \Rightarrow 5a_1 + 10d = 60 \Rightarrow a_1 + 2d = 12$$

$$a_4 + a_5 = 3(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow 2a_1 + 7d = 3(3a_1 + 3d)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 7d = 9a_1 + 9d \Rightarrow 7a_1 + 2d = 0$$

$$\begin{aligned} a_1 + 2d &= 12 & -7a_1 - 14d &= -84 \\ \Rightarrow 7a_1 + 2d &= 0 & \Rightarrow 7a_1 + 2d &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -12d = -84 \Rightarrow d = 7$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۱

۱۹

دنباله ارتفاع‌های توپ از زمین، یک دنباله هندسی است با $t_1 = 40$ و $r = \frac{1}{4}$ ، بنابراین جمله پنجم این دنباله $2/5$ است.

$$40, 20, 10, 5, 2/5, \dots$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۳

۲۰

قیمت کالا را X در نظر می‌گیریم که قرار است هر سال ۱۰٪ به آن افزوده شود:

$$X + \frac{10}{100}X = 1/1X$$

پس در هر سال قیمت‌ها در $1/1$ ضرب می‌شوند، به عبارت دیگر یک دنباله هندسی با قدرنسبت $1/1$ می‌سازند و داریم:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^F}{a_1} = r^F = (1/1)^F = 1/4641$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲۱

$$\frac{a_{10}}{a_6} = \frac{a_1 q^9}{a_1 q^5} \Rightarrow \frac{a_{10}}{a_6} = \frac{a_1 q^9}{a_1 q^5} = q^4 = 256 \Rightarrow q = 4$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} \Rightarrow a_1^2 q^2 = 512 \xrightarrow{q=4} a_1 = \pm \sqrt{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_4 = a_1 \times 4^3 = 64a_1 = 64\sqrt{2}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲۲

جملات t_5, t_{12}, t_7 از دنباله حسابی، جملات متوالی از دنباله هندسی هستند، بنابراین:

$$\begin{aligned} t_7^2 &= t_5 \times t_{12} \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 4d)(t_1 + 11d) \\ &\Rightarrow t_1^2 + 12t_1d + 36d^2 = t_1^2 + 15t_1d + 44d^2 \Rightarrow 3d^2 - 3t_1d = 0 \\ &\quad d = 0 \\ &\Rightarrow d(3d - 3t_1) = 0 \Rightarrow 3d = 3t_1 \Rightarrow t_1 = d \end{aligned}$$

پس جملات دنباله حسابی طبق جمله عمومی برابرند با:

$$t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d \xrightarrow{t_1=d} \frac{9}{4}d, \frac{11}{4}d, \frac{13}{4}d \Rightarrow r = \frac{\frac{11}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{11}{9}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲۳

قدرنسبت $\frac{1}{3}$. از طرفی جمله اول برابر ۳ است، پس:

$$t_n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow t_n = 3 \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{3^{n-1}}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲