



آموزش آنلاین

ریاضی دهم ریاضی و تجربی

مدرس: دکتر سامان سلامیان

درس - نکته - تست - سوالات امتحان نهایی

مقدمه:

به نام خردمند خردآفرین

مجموعه پیش‌رو برای کلاس‌های آنلاین سالانه دهم تجربی و ریاضی دوره متوسطه دوم گردآوری و تنظیم شده‌است. هدف این مجموعه: نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه است. نکات مهم خلاصه‌وار و برای شب امتحان و آزمون آورده شده‌است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم. البته برای حل مثالهای سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد. پس این جزوه؛ خلاصه اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ ابتدا به کمک درسنامه‌ای همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموز قدرت و توان برگه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است. با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور، روش مفهومی و "حل مسئله به کمک حل مسئله" در این مجموعه به کار گرفته شده‌است که در تمام این سال‌ها موفق بوده‌است.

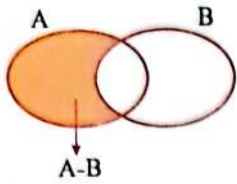
تکلیف: (Homework) در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده‌است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به "هیچ" سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکور آزمایشی برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که "امسال" ریاضی را "می‌خوانم" با من همراه نشوید؛ زیرا اصلاً ریاضی خواندنی نیست؛ بلکه نوشتنی و مسئله حل‌کردنی و توضیح‌دانی است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید. مهمترین ابزار موفقیت در ریاضی؛ تمرین کردن و حل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات تالیفی؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمونهای آزمایشی استاندارد است؛ به‌طوریکه با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد. همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین؛ حضور پررنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه؛ تنها راه گرفتن نمره کامل "بیست" در آزمون و درصد خوب در آزمونهای تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق کردید و یا با خواندن و حل یک تست به طراح آن "آفرین" گفتید که به چه جالبی فلان موضوع را پنهان کرده‌است یا مورد سوال قرار داده؛ یعنی اینکه دارید؛ مسیر را درست می‌روید. تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با حل مسئله و "تکرار و تمرین" ممکن است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند. تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید؛ تکالیف (Homework) پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را؛ خودتان حل کنید و به کمک پاسخنامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود. استفاده با ذکر منبع بلامانع است. در کلاس درس آنلاین ریاضی دهم؛ نحوه بیان موضوع‌های درسی، ورود به مطلب و توضیح درس با این جزوه کاملاً متفاوت است ولی چیدمان مطالب و سوالات، مشابه روند این مجموعه می‌باشد.

بهر روز باشید.

دکتر سامان سلامیان

فهرست مندرجات

عنوان	صفحه
فصل اول:	
BOX 1: مجموعه اعداد - بازه‌ها.....	۱
BOX 2: مجموعه‌ای متناهی و نامتناهی، متمم یک مجموعه، تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه.....	۱۷
BOX 3: الگو و دنباله.....	۳۵
BOX 4: دنباله‌های حسابی و هندسی.....	۴۴
فصل دوم:	
BOX 1: نسبت‌های مثلثاتی.....	۷۲
BOX 2: دایره مثلثاتی.....	۹۰
BOX 3: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی.....	۱۰۴
فصل سوم:	
BOX 1: ریشه و توان.....	۱۱۲
BOX 2: ریشه n ام.....	۱۲۲
BOX 3: توان‌های گویا.....	۱۳۶
BOX 4: عبارتهای جبری.....	۱۴۰
BOX 5: عبارت‌های گویا.....	۱۵۴
فصل چهارم:	
BOX 1: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن.....	۱۶۶
BOX 2: سهمی.....	۱۸۴
BOX 3: تعیین علامت.....	۱۹۸
فصل پنجم:	
BOX 1: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن - دامنه و برد تابع.....	۲۴۶
BOX 2: انواع تابع - رسم تابع به کمک انتقال.....	۲۶۲
فصل ششم:	
BOX 1: شمارش.....	۲۸۵
BOX 2: جایگشت.....	۲۹۱
BOX 3: ترکیب.....	۳۱۵
فصل هفتم:	
BOX 1: پدیده‌های تصادفی - پیشامدهای تصادفی و برخی اعمال روی پیشامدها.....	۳۴۱
BOX 2: احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس).....	۳۴۹
BOX 3: مقدمه‌ای بر علم آمار - جامعه، نمونه، متغیر و انواع آن.....	۳۵۷



در مجموعه گذرار اعضا هم نیست مثلاً $A = \{۷, ۷\}$ با $\{۷\}$ برابری است.

تعریف: اگر $A = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ۶, ۸\}$ دو مجموعه باشند، هر یک از مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را با اعضا مشخص کنید.

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

$$A \cap B = \{۲, ۸\}$$

$$A - B = \{۱, ۴, ۵, ۷\}$$

$$B - A = \{۳, ۶\}$$

در این قسمت با تعریف بازه که یک نماد برای سازه نوشتن مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی می‌باشد، آشنا می‌شویم.

بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} مانند A را که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.



فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۴ باشد، یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۴\}$

مجموعه A را با نماد ساده‌تری به صورت $(۰, ۴)$ نمایش می‌دهیم و آن را بازه باز از ۰ تا ۴ می‌نامیم. بنابراین:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۴\} = (۰, ۴)$$

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ ، آن‌گاه:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

نکته: هر بازه، یک مجموعه است، بنابراین اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها وجود دارد.

تعریف: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \leq ۳\}$ و $B = (۰, ۴)$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.



$$A \cup B: (-۱, ۴)$$

$$A \cap B: (۰, ۳]$$

همه عدد هایی که خنایس -۱ و ۳ آفریده است که می شمارند

همه عدد هایی که خنایس از ۰ تا ۳ آفریده است می شمارند و نتوانیم همه را بنویسیم برای همین به صورت بازه نمایش می‌دهیم

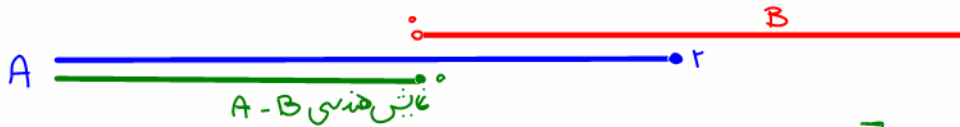
عضوهای حقیقی $\pm \infty$ هیچ بازه باز نیستند.

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

توجه: $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند. $\mathbb{R}: (-\infty, +\infty)$

تعریف: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ باشد، $A - B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.



بازه: $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$ مجموعه

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

نکته: بازه $(-\infty, +\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر:

پرسش‌های تشریحی:

• درست‌ی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۵ کتاب درسی)

$1, \sqrt{2}, \dots = \sqrt{3} \in (1, 2) \rightarrow T$

$\frac{5}{6} \in (0, 1) \rightarrow T$

$-1 \in (-1, 2] \rightarrow F$

$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \rightarrow F$

$(-1, 1) \subseteq [-1, 1] \rightarrow F$

$\emptyset \subseteq [-1, +\infty) \rightarrow T$

$0.10006 = 6 \times 10^{-4} \notin [2, +\infty) \rightarrow F$

$6 \times 10^{-4} \in [2, +\infty) \rightarrow F$

$-6 \times 10^{23} \in (-\infty, 1) \rightarrow T$

۱۰- طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را بنویسید.

۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

۲) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

۳) $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

۴) $\mathbb{W} - \mathbb{Q}' = \mathbb{W}$

۵) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

۶) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

۱۱- هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.

۱) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2\}$

۲) $(-\infty, -2)$

۳) $(1, \sqrt{5})$

۴) $(-2, 2)$

۵) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < \sqrt{5}\}$

۶) $(-\infty, \frac{1}{p})$

۷) $[\sqrt{2}, +\infty)$

۸) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -2\}$

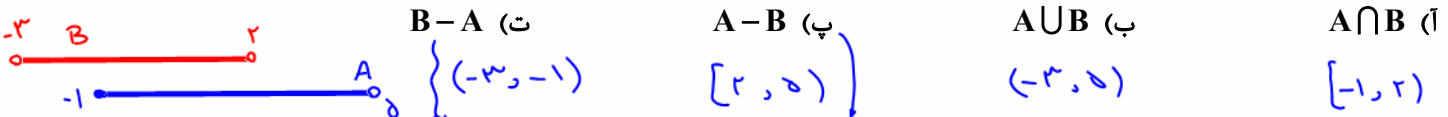
۹) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{1}{p}\}$

۱۰) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq \sqrt{2}\}$

پاوت ۱۲- نمایش هندسی دو بازه $A = [-1, 5]$ و $B = (-3, 2)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۵ کتاب درسی)

سیم برای
انتخاب

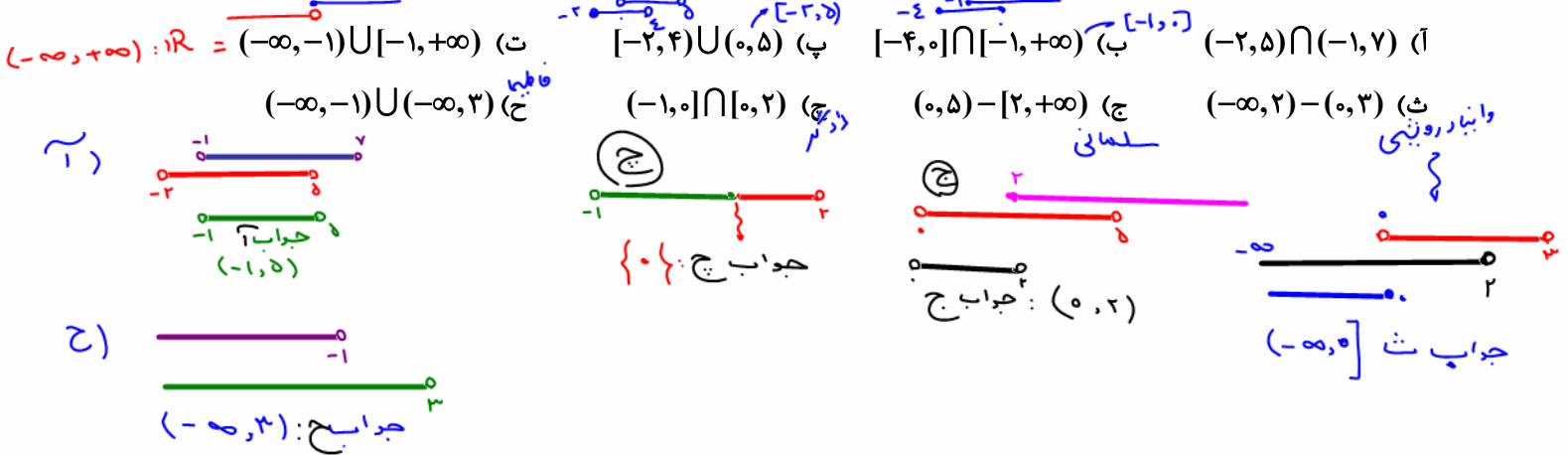


از $B \in A$ را بوزون A را اهدای داغ کن
از B بوزونش
تعمیری از A که
احتمالی B توش نیست

B را اهدای داغ کن بذار رد A بوزون (هر بی که توند جوابه)

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۷ کتاب درسی)

۱۳- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید.

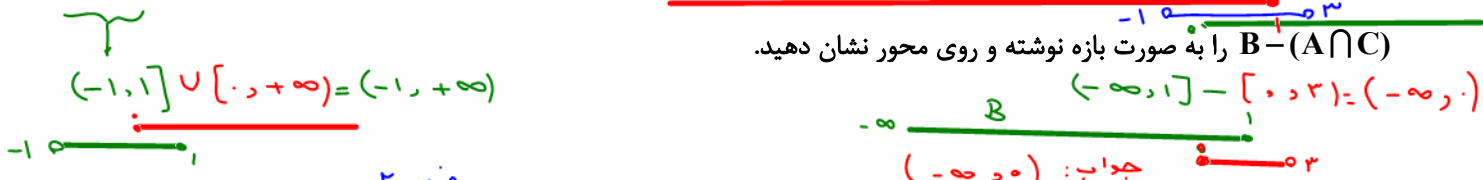


۱۴- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x+1 \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.



از طرفین
یکی کم کن تا حدود معلوم شود

۱۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) \cup C$ و $B - (A \cap C)$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.



ضمیمه

$$-1 < \frac{m+1}{2} < 3$$

$$-2 < m+1 < 6$$

$$-3 < m < 5$$
 یک کم می کنیم

۱۶- اگر $\frac{m+1}{2} \in [-1, 4]$ باشد، حدود m را مشخص کنید.

Homework

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

A نوبی شکم B هت

- ۱ > اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B هم حتماً نامتناهی است.
- ۲ > $\mathbb{Z} - \mathbb{Q}$ مجموعه‌ای متناهی است. جواب \emptyset است و \emptyset متناهی است.
- ۳ ن در بازه $[-2, \sqrt{5}]$ چهار عدد صحیح وجود دارد. غلط چون ۲، ۱، ۰، -۱، -۲ پنج تا است.
- ۴ > اگر $B' \subseteq A'$ باشد آن گاه $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$ هرگز $A \subseteq B$
- ۵ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq 2x - 1 < 7\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ و C آن گاه حاصل مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید و روی محور نشان دهید.

الف $C - B$

ب $A' \in [-3, 0]$



چند مورد از موارد زیر درست است؟

- ۶ غلط $1 \in \{-3, 0\}$ (درست ب) $\emptyset \subseteq (1, +\infty)$ زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است
- غلط $[-5, 4] \subseteq (-5, 4)$ (غلطت) $\sqrt{2} \in (-1, 1)$ ۱، ۴

۴ (۲)

۳ (۱)

۲ (۴)

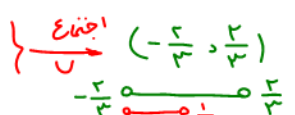
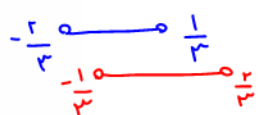
۱ (۳)

۷ **بشتر** اگر $A_n = \left(\frac{-2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ به صورت بازه باشد، مجموعه $A_3 \cup A_6 - A_3$ برابر کدام بازه است؟

$n=2 \rightarrow A_2: \left(-\frac{2}{2}, \frac{2-2}{2}\right)$

(۲) $\left[\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(۱) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$



(۴) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$(A_3 \cup A_2) - A_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(۳) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

۸ اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{4}\right)$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آنگاه مجموعه $(A_1 \cap A_7) \ominus (A_2 \cap A_5)$ به کدام صورت است؟

(۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$

(۱) $[-2, -1] \cup (1, 2]$

$(A_2: [-2, \frac{7}{4}]) \cap A_5: [-5, 2] \ominus (A_1: [-1, \frac{8}{4}] \cap A_7: [-7, 1])$

(۳) $[-1, 1]$



$A_2 \cap A_5 = [-2, 2]$

$(A_1 \cap A_7) \ominus (A_2 \cap A_5) = [-1, 1]$



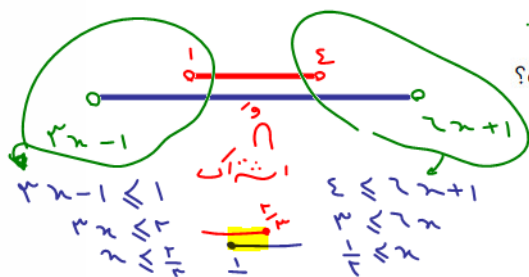
در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

- ۹ اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعه A و B را دو مجموعه می‌گویند.
- ۱۰ اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه $A - B$ یک مجموعه است.
- ۱۱ $\sqrt[3]{64}$ بین دو عدد صحیح و قرار دارد.
- ۱۲ اعداد ۴ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.
- ۱۳ $(-1, 4) - (2, +\infty)$ برابر است با
- ۱۴ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < -2\}$ باشد، آنگاه مجموعه $A \cap B$ شامل چند عدد گویا خواهد بود؟

- ۱ (صفر)
۲ (۱)
۳ (۲)
۴ (بی‌شمار)

- ۱۵ اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ چند عضو صحیح دارد؟

- ۱ (۴)
۲ (صفر)
۳ (۲)
۴ (۱)



- ۱۶ اگر مجموعه $(1, 4)$ زیرمجموعه $(3x-1, 6x+1)$ باشد، حدود کامل x کدام است؟

- ۱ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
۲ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$
۳ $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
۴ $[\frac{1}{2}, 1)$

- ۱۷ اگر $A_i = [-i, 2i+1]$ ، $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_4) - (A_3 \cup A_1)$ به کدام صورت است؟

- ۱ $[-1, 3]$
۲ $[4, 6]$
۳ $[-1, 3] \cup [4, 9]$
۴ \emptyset

- ۱۸ اگر $(-5, 3k+2) \subseteq (-\infty, -4)$ باشد، چند مقدار صحیح برای k یافت می‌شود؟

- ۱ (صفر)
۲ (یک)
۳ (دو)
۴ (سه)

- ۱۹ حاصل $[-3, 7] - (-1, 9]$ کدام است؟

- ۱ \emptyset
۲ $[-3, -1]$
۳ $[-3, -1)$
۴ $(-3, -1]$

۲۰ مجموعه $A = \left\{ \frac{x+5}{2x^2+1} \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x < 2 \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۲۱ اگر $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in (-3, 4] \cap \mathbb{W} \right\}$ باشد، آنگاه A چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۲۲ باتوجه به مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < 2x + 5 < 11\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - 1 < 8\}$ برابر کدام گزینه است؟

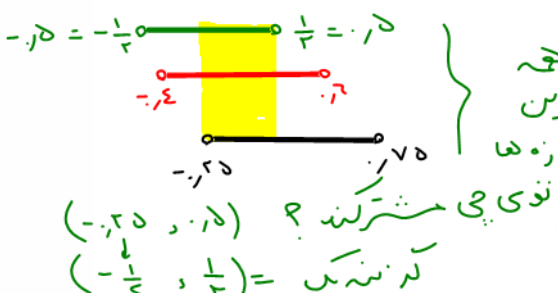
- (۱) $[1, 3)$
(۲) $(-6, 3)$
(۳) $(1, 3)$
(۴) \mathbb{R}

۲۳ باتوجه به مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < 2x + 5 < 11\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - 1 < 8\}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $[1, 3)$
(۲) $(-6, 3)$
(۳) $(1, 3)$
(۴) \mathbb{R}

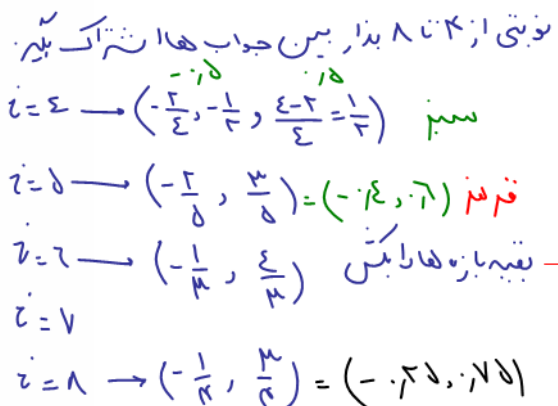
۲۴ اگر عدد ۲ به بازه $[-i + 1, 3i - 7]$ تعلق داشته باشد، آنگاه:

- (۱) $i \geq -1$
(۲) $-1 \leq i < 3$
(۳) $i > 3$
(۴) $1 \leq i \leq 3$



۲۵ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ باشد، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
(۲) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$
(۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
(۴) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$



۲۶ درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف $\{-1, 0, 2\} \subseteq [-1, 3)$

ب اگر $A - B$ متناهی باشد، $B - A$ متناهی است.

۲۷ اشتراک دو مجموعه $[-5, 7]$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶
(۲) ۱۲
(۳) ۴
(۴) ۵

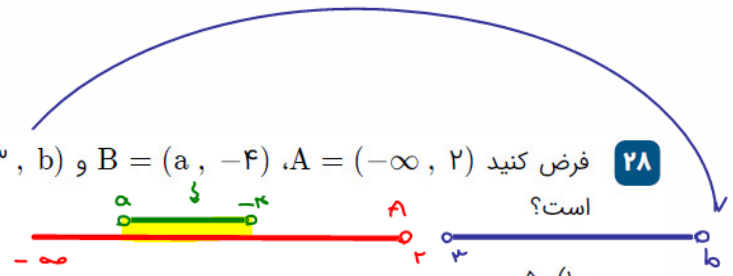
چون $B \subseteq A$ پس اشتراک مینیمم کوپولم
یعنی همان B

فرض کنید $A = (-\infty, 2)$ ، $B = (a, -4)$ و $C = (3, b)$ باشند، اگر $(B \cup C) - (A \cap B) = (3, 5)$ کدام است؟ **۲۸**

$(a, -4) \cup (3, b) - B = (3, 5)$

$(a, -4) \cup (3, b) - (a, -4) = (3, b)$

- ۳ (۲)
- ۵ (۱)
- ۱ (۴)
- ۴ (۳)



اگر اشتراک دو بازه $[3a, 4a - 1]$ و $[-5, 3]$ یک مجموعه تک عضوی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ **۲۹**

- ۱ (۱)
- ۲ (۳)
- ۲ (۲)
- ۲ (۴)

اگر عدد ۳ در بازه $[x - 3, 9x]$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای x کدام است؟ **۳۰**

- $[\frac{1}{3}, 6]$ (۱)
- $[-6, \frac{2}{3}]$ (۳)
- $(\frac{1}{3}, 6]$ (۲)
- $[-6, \frac{2}{3})$ (۴)

کدامیک از اعداد زیر در بازه $[\frac{-28}{10}, \sqrt{20}]$ قرار ندارند؟ **۳۱**

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- $-\sqrt{5}$ (۳)
- π (۲)
- $-\frac{2}{9}$ (۴)

پاسخ نامه Homework

درست ۱

درست ۲

نادرست ۳

درست ۴

الف ۵

ب

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

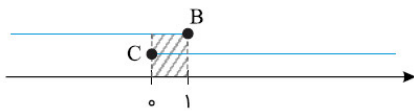
$$B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$\emptyset \cap (A - C) = \emptyset$$

$$-3 \leq 2x - 1 < 7 \xrightarrow{+1} -2 \leq 2x < 8 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x < 4$$

$$A = [-1, 4) B = (-\infty, 1] C = [0, +\infty)$$

$$C - B = (1, +\infty)$$



$$A' = \mathbb{R} - [-1, 4) = (-\infty, -1) \cup [4, +\infty)$$



گزینه ۳

۶

عبارت‌های "آ"، "پ" و "ت" نادرست هستند و شکل صحیح آن‌ها به صورت زیر است:

$$\text{آ)} \quad -1 \in [-3, 0]$$

$$\text{پ)} \quad (-5, 4) \subseteq [-5, 4] \quad \text{یا} \quad (-5, 4) \subseteq (-5, 4)$$

$$\text{ت)} \quad \sqrt{2} \notin (-1, 1) \quad (\text{زیرا: } \sqrt{2} \simeq 1/4)$$

گزینه ۴

۷

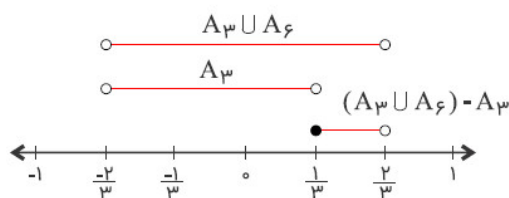
ابتدا باتوجه به رابطه $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ ، مجموعه‌های A_3 و A_6 را به صورت بازه تعیین می‌کنیم. (برای به دست آوردن A_3 ، $n = 3$ و برای به دست آوردن A_6 ، $n = 6$ در نظر گرفته می‌شود.)
در ادامه برای تعیین بازه $A_3 \cup A_6$ ، ابتدای بازه کوچک‌ترین عضو ابتدای A_3 و A_6 و انتهای آن بزرگ‌ترین عضو انتهای A_3 و A_6 در نظر گرفته می‌شود.

$$A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}) \Rightarrow \begin{cases} A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ A_6 = (-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

$$A_3 \cup A_6 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

در صورتی که تعیین اجتماع و اشتراک بازه‌ها برای شما دشوار بود می‌توانید از رسم نمودار هم به شکل زیر استفاده کنید:



گزینه ۱

۸

ابتدا باتوجه به تعریف مجموعه A_i ، مجموعه‌های A_1, A_2, A_5 و A_7 را به صورت بازه مشخص می‌کنیم. برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود. تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلاتان به راحتی حل شود.

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$$

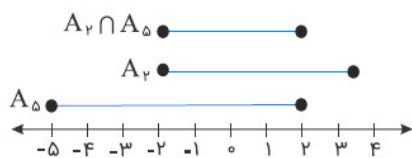
$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{2}\right] = [-1, 4]$$

$$A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{2}\right] = \left[-2, \frac{7}{2}\right]$$

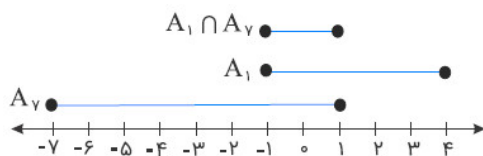
$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{2}\right] = [-5, 2]$$

$$A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{2}\right] = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$



$$A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$



$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

جدا از هم

۹

نامتناهی

۱۰

بین ۳ و ۴

۱۱

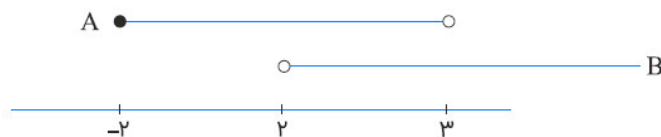
۱۲ -۴ و ۲۵۶

۱۳ -۱، ۲]

گزینه ۴

۱۴

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < -2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} \Rightarrow A \cap B = (2, 3)$$



می‌دانیم بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

گزینه ۳

۱۵

مجموعه‌های A_1, A_2, A_5 و A_7 را مشخص می‌کنیم:

$$A_1 = [-1, 4], \quad A_2 = [-2, \frac{7}{5}]$$

$$A_5 = [-5, 2], \quad A_7 = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_5 = [-2, 3/5] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$

$$A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$

$$\Rightarrow (A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1]$$

$$\Rightarrow [-2, -1) \cup (1, 2]$$

در نتیجه فقط شامل دو عدد صحیح است.

گزینه ۲

۱۶

$$(1, 4) \subseteq (3x - 1, 6x + 1) \Rightarrow \begin{cases} 6x + 1 \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 3x - 1 \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$$

گزینه ۴

۱۷

اعضای مجموعه‌های A_1, A_2, A_3, A_4 را مشخص می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = [-1, 3] \\ A_2 = [-2, 5] \\ A_3 = [-3, 7] \\ A_4 = [-4, 9] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (A_2 \cap A_4) = [-2, 5] \\ (A_1 \cup A_3) = [-3, 7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A_2 \cap A_4) - (A_3 \cup A_1) = [-2, 5] - [-3, 7] = \emptyset$$

باتوجه به اینکه بازه $[-2, 5]$ زیرمجموعه بازه $[-3, 7]$ می‌باشد، لذا: $[-2, 5] - [-3, 7] = \emptyset$

گزینه ۲

۱۸

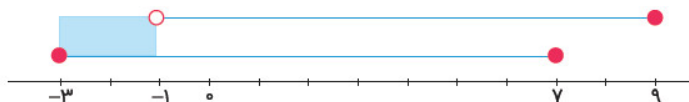
اگر رابطه داده شده برقرار باشد:

$$-5 < 3k + 2 \leq -4 \xrightarrow{-2} -7 < 3k \leq -6 \xrightarrow{\div 3} -\frac{7}{3} < k \leq -2 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2$$

پس به ازای $k = -2$ مسئله جواب دارد.

گزینه ۲

۱۹



$$[-3, 7] - (-1, 9] = [-3, -1]$$

گزینه ۲

۲۰

عددهای طبیعی متعلق به محدوده $-2 < x < 2$ تنها عدد ۱ می‌باشد.

$$A = \left\{ \frac{6}{3} \right\} = \{2\} \Rightarrow n(A) = 1$$

گزینه ۳

۲۱

$$(-3, 4] \cap \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} \Rightarrow n(A) = 4$$

دقت کنید که مخرج نمی‌تواند صفر باشد، پس عضو $\frac{1}{0}$ نداریم.

گزینه ۳

۲۲

ابتدا اعضای مجموعه‌های A، B و C را مشخص می‌کنیم:

$$-7 < 2x + 5 < 11 \Rightarrow -12 < 2x < 6 \Rightarrow -6 < x < 3 \Rightarrow A = \{1, 2\}$$

$$B = [1, +\infty)$$

$$2 < 3x - 1 < 8 \Rightarrow 3 < 3x < 9 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow C = (1, 3)$$

$$(A - B) \cup C = \emptyset \cup C = C = (1, 3)$$

گزینه ۱

۲۳

$$-7 < 2x + 5 < 11 \Rightarrow -12 < 2x < 6 \Rightarrow -6 < x < 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} A = \{1, 2\}$$

$$B = (1, +\infty)$$

$$2 < 3x - 1 < 8 \Rightarrow 3 < 3x < 9 \Rightarrow C = (1, 3)$$

$$A - B = \{1\} \Rightarrow (A - B) \cup C = [1, 3)$$

گزینه ۳

۲۴

$$\begin{cases} -i + 1 \leq 2 \Rightarrow -i \leq 1 \Rightarrow i \geq -1 \\ 2 < 3i - 7 \Rightarrow 3i > 9 \Rightarrow i > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} i > 3$$

گزینه ۱

۲۵

طبق تعریف مجموعهٔ A_i داریم:

$$A_4 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad A_5 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right), \quad A_7 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \quad A_8 = \left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

بنابراین اشتراک این مجموعه‌ها به صورت زیر است:

$$\bigcap_{i=4}^8 A_i = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

درست

الف

۲۶

ب نادرست

$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

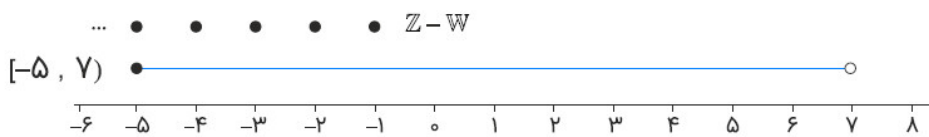
$$A - B = \{1\} \text{ متناهی}$$

$$B - A = \{0, 6, 8, \dots\} \text{ نامتناهی}$$

گزینه ۴

۲۷

باتوجه به نمودار، اشتراک دو مجموعه $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$ است که ۵ عضو دارد.

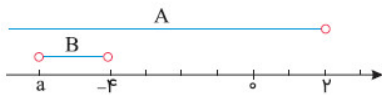


گزینه ۱

۲۸



$$(B \cup C) = (a, -4) \cup (3, b)$$



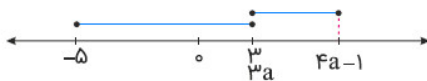
$$(A \cap B) = (-\infty, 2) \cap (a, -4) = (a, -4)$$

$$\Rightarrow (B \cup C) - (A \cap B) = (3, b) \Rightarrow b = 5$$

گزینه ۲

۲۹

اگر اشتراک این دو مجموعه تنها شامل یک عضو باشد، یکی از دو حالت زیر پیش خواهد آمد:
حالت اول:



$$3a = 3a - 1 \Rightarrow a = 1$$

حالت دوم:



$$3a - 1 = -5$$

$$3a = -4 \Rightarrow a = -1$$

گزینه ۲

۳۰

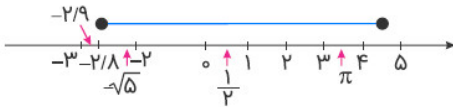
عدد ۳ باید در نامساوی $x - 3 \leq 3 < 9x$ صدق کند، پس:

$$\begin{cases} x - 3 \leq 3 \Rightarrow x \leq 6 \\ 3 < 9x \Rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 6\right]$$

گزینه ۴

۳۱

$$\left[-\frac{28}{10}, \sqrt{20}\right] = [-2/8, 2\sqrt{5}] \xrightarrow{\sqrt{5} \approx 2/2} [-2/8, 4/4]$$

بنابراین عدد $-2/9$ عضو بازه فوق نیست.

BOX 2: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، متمم یک مجموعه، تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه (صفحه‌های ۵ تا ۱۳)

در این BOX، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آورده می‌شود. متمم مجموعه تعریف می‌شود و با فرمول تعداد عضوهای مجموعه‌های متناهی آشنا می‌شویم.

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم. *تجزیه هر متناهی است. زیرا تعداد اعضای آن صفر است.*
 به عنوان مثال، مجموعه اعداد اول یک‌رقمی یک مجموعه متناهی است، زیرا یک مجموعه ۴ عضوی می‌باشد: $A = \{2, 3, 5, 7\}$ مجموعه اعداد اول یک‌رقمی

توجه: تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد. مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

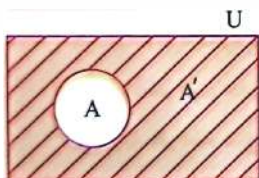
قرارداد: تعداد عضوهای مجموعه متناهی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می‌نامیم. به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی، یک مجموعه نامتناهی است. مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

$$A' = U - A$$

به عبارت دیگر، A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند. در واقع: نمودار ون مجموعه A با مجموعه مرجع U به صورت مقابل است:



تمرین: فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 7\}$ باشند. مجموعه‌های $A' - B$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

$$A' = U - A = \{3, 5, 6, 7\} \quad A' - B = \{7\}$$

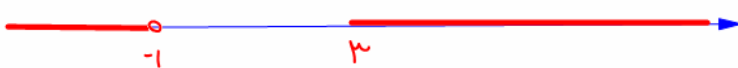
$$B' = U - B = \{1, 2, 6\} \quad A' \cup B' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

تمرین: مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$ را در نظر بگیرید.

(۱) مجموعه A را روی محور نشان دهید.

(۲) با فرض این که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، مجموعه A' را مشخص کنید و آن را روی محور نشان دهید.

خطی داغ را روی \mathbb{R} بکش
بازه $(-1, 3)$ بوزون چیزهایی که می‌خورد:



نکته: اگر A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آن‌گاه:

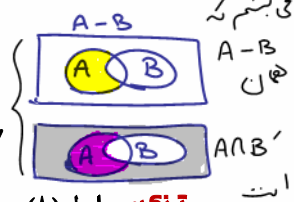
$B - A = B \cap A'$

بسیار مهم :

۳) $A \cup A' = U$

۶) $A - B = A \cap B'$

۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$



تذکره: روابط (۸) و (۹)، قوانین دمورگان نام دارند.

۱) $(A')' = A$

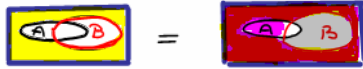
۲) $A \cap A' = \emptyset$

۴) $\emptyset' = U$ *مستم توی مجموعه مرجع*

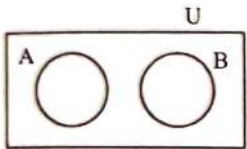
۵) $U' = \emptyset$ *مستم مرجع مجموعه توی است*

۷) $A - B = A - (A \cap B)$

۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$



دو مجموعه جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می گوئیم. نمودار ون دو مجموعه جدا از هم به صورت مقابل است:



$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد طبیعی زوج، دو مجموعه جدا از هم هستند:

$\left\{ \begin{array}{l} O = \{1, 3, 5, \dots\} \\ E = \{2, 4, 6, \dots\} \end{array} \right. \Rightarrow O \cap E = \emptyset \Rightarrow O \text{ و } E \text{ دو مجموعه جدا از هم هستند.}$

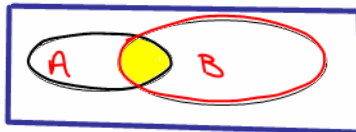
Odd فرد
Even زوج

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

نکته: ۱) اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، آن گاه تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ برابر است با:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A') = n(U) - n(A)$



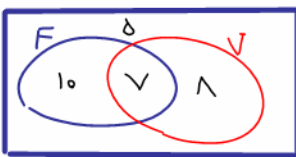
۲) اگر U یک مجموعه متناهی باشد، آن گاه:

مفهوم چند واژه:

۱) **حداقل:** ویژگی A یا ویژگی B به معنای حداقل است و از اجتماع استفاده می کنیم.

۲) **حداکثر:** ویژگی A یا ویژگی B یا هیچ یک از ویژگی های A و B به معنای حداکثر است و از متمم $(A \cap B)$ استفاده می کنیم.

تعریف: در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. ۱۰ نفر فقط فوتبال، ۸ نفر فقط والیبال، چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟ ۲۵ نفر.



$n(U) - n(A \cup B) = 30 - 5 = 25$

$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(V \cap F) = 17 + 15 - 7 = 25$
۲۵ نفر. یا فوتبال یا والیبال یا هر دو

نکته: اگر A و B دو مجموعه متناهی و U مجموعه مرجع باشد، آن گاه:

۱) $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

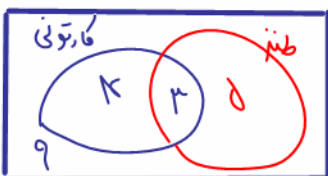
۲) $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$



در فرمول شماره (۲)، U باید مجموعه ای متناهی باشد. *فکره دمورگان*

از نمودار ون برای به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه های $A \cup B$ و ... می توانیم استفاده کنیم.

تعریف: یک دوره جشنواره فیلم کوتاه، با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن ها ۷ فیلم کارتونی و ۸ فیلم طنز وجود دارد به طوری که ۳ تا از فیلم های کارتونی با مضمون طنز هستند. مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که:



$9 = (21 - 12) - (3) = 9$ (کارتونی یا طنز یا هر دو)

۱) کارتونی یا طنزند. ۲) غیرکارتونی و غیرطنزند.

از روی شکل: $4 + 3 + 5 = 12$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 8 - 3 = 12$

پرش های تشریحی:

• در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۱- مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۵ - یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی)

۲- مجموعه اعداد طبیعی چهاررقمی یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی)

۳- $A \cap A' = \emptyset$ ، $A \cup A = U$ ، $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ، $\emptyset' = U$ ، $A \cap A' = \emptyset$ (کار در کلاس ۴ صفحه ۹ کتاب درسی)

۴- اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعه A و B را دو مجموعه جدا از هم می نامیم.

۵- اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آن گاه $A - B$ یک مجموعه نامتناهی است.

• کدام یک از عبارت های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۶- مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعه متناهی است. $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{5}{8}$ ، $\frac{7}{8}$ بین هر دو رتبه بندی شده اند.

> ۷- مجموعه اعداد صحیح بین ۲- و ۱- یک مجموعه متناهی است. صحیح بین ۱- ، ۲- داریم مجموعه است متناهی است.

۸- اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد، آن گاه مجموعه $A \cap B$ یک مجموعه نامتناهی است. $A \cap B$ زیر مجموعه مجموعه A است چون A متناهی است زیر مجموعه آن هم متناهی است.

۹- اگر A دارای یک زیرمجموعه متناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه متناهی است. مثلاً $A = N$ دارای زیر مجموعه متناهی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ است ولی $N = A$ متناهی نیست.

> ۱۰- اگر همه زیرمجموعه های A متناهی باشند، آن گاه A یک مجموعه متناهی است.

> ۱۱- اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه نامتناهی است. مثلاً $A = Z$ و $B = N$ ، $A - B = \{-1, -2, -3, \dots\}$ نامتناهی است.

> ۱۲- اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، آن گاه $A - B$ مجموعه ای متناهی است. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

> ۱۳- اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه:

۱۴- متمم مجموعه اعداد طبیعی نسبت به مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد صحیح منفی است. صفرانگفته $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ جواب متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید. اصل تثلیث: $+$ یا $-$ یا صفر.

۱۵- مجموعه اعداد طبیعی اول و دورقمی $\{11, 13, \dots, 97\}$ متناهی ۱۶- مجموعه مضرب های صحیح ۴ نامتناهی $\{4, 8, 12, \dots\}$

۱۷- مجموعه اعداد صحیح فرد $\{1, 3, 5, \dots\}$ نامتناهی ۱۸- $(-\frac{1}{3}, -1)$ بی سرحد حقیقی و نامتناهی

۱۹- مجموعه تمام چهارضلعی به صورت مربع نامتناهی رسم با منع رنگه ۲۰- مجموعه کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی نامتناهی

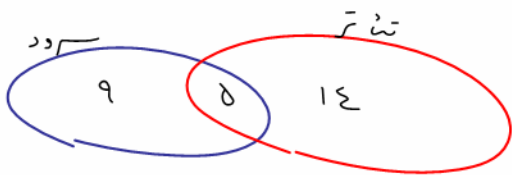
۲۱- در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این

(تمرین ۵ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

آ) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. ۹

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. ۳



$31 - (9 + 14 - 5) = 3$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 14 + 19 - 5 = 28$
 $n(A \cup B) = 31 - 28 = 3$

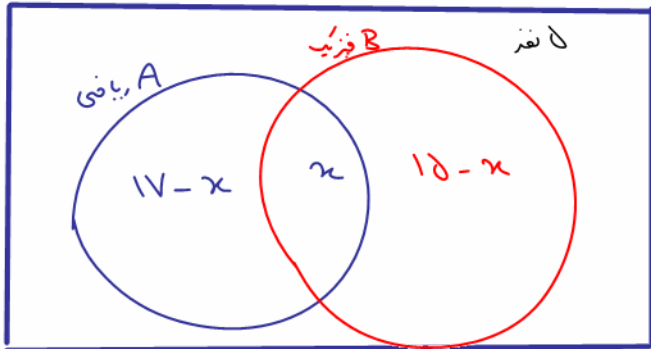
۲۲- از ۳۰ دانش آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

(آ) چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟ اشتراک را می‌خواه که ۷ نفر است.

(ب) چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟ فقط ریاضی $17 - 7 = 10$

(پ) حداکثر چند نفر در یکی از این دو المپیاد شرکت کرده‌اند؟ یا فقط ریاضی یا فقط فیزیک یا هیچ کدام $23 = 10 + 7 + 5$

$(A \cap B)' = U - (A \cap B) = 30 - 7 = 23$



$(17 - x) + (x) + (15 - x) + 5 = 30 \rightarrow x = 7$
 اشتراک هیچ کدام هر دو

لهم المپیاد ریاضیانه هم المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند.

- ۱۰ نفر فقط ریاضی
- ۸ نفر فقط فیزیک
- ۷ نفر هم ریاضی هم فیزیک

نفر $10 + 8 + 7 = 25$ یا المپیاد ریاضی یا فیزیک یا هر دو شرکت کرده‌اند ۵ نفر هم هیچ المپیادی شرکت نکرده‌اند.

حداکثر یک المپیاد: یعنی یا فقط المپیاد ریاضی (۱۰) یا فقط المپیاد فیزیک (۸) یا هیچ کدام (۵) نفر

۲۳ نفر

Homework

۱ مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 5$ و تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

۲ اگر $n(A \cup B) = 57$ و $n(A \cap B) = 3n(A - B) = 4n(B - A)$ باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

- (۱) ۳۳
(۲) ۳۶
(۳) ۴۵
(۴) ۴۸

۳ مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۳

۴ در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند)

- (۱) ۱۰۰
(۲) ۱۳۵
(۳) ۲۳۵
(۴) ۲۷۰

۵ اگر A ، B و C سه مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $C - ((A - B)' - (B - C)) - C$ با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱) $A' - (B \cup C)$
(۲) $B - (A \cup C)$
(۳) $C - (A \cup B)$
(۴) $(A' \cup B') - C$

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۶ اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ می‌گویند.

- ۷ اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه $A - B$ یک مجموعه است.
- ۸ $\sqrt[3]{64}$ بین دو عدد صحیح و قرار دارد.
- ۹ اعداد ۴ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.
- ۱۰ $(2, +\infty) - (-1, 4)$ برابر است با
- ۱۱ اگر تعدادی عضو به مجموعه A اضافه کنیم و مجموعه B بدون تغییر بماند، به تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \cup B$ به ترتیب ۵ و ۲ واحد اضافه می‌شود. در این صورت تعداد اعضای $A - B$ چند واحد افزایش می‌یابد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳
(۳) ۵ (۴) نمی‌توان تعیین کرد.
- ۱۲ اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ ، $B = \{x | x = 4k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ و $B \subseteq A$ ، آنگاه B چند عضو دارد؟
- (۱) ۶ (۲) ۷
(۳) ۲۹ (۴) ۳۰
- ۱۳ اگر A و B دو مجموعه ناتهی در مجموعه U باشند و داشته باشیم $A \cap B' = (A \cap B)'$ ، آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟
- (۱) $A \cap B = \emptyset$ (۲) $A \subseteq B$
(۳) $A' \subseteq B'$ (۴) $A \cup B = B$
- ۱۴ اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} : \frac{6}{x} \in \mathbb{Z}\}$ باشد، تعداد عضوهای مجموعه A کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) ۸
- ۱۵ مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر است با:
- (۱) $B - A$ (۲) B
(۳) \emptyset (۴) A'
- ۱۶ دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. اگر اجتماع آن‌ها ۲۷ عضو و اشتراکشان ۸ عضو داشته باشد، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟
- (۱) ۱۹ (۲) ۲۱
(۳) ۲۷ (۴) ۳۵
- ۱۷ مجموعه $A \cap B$ دارای ۴ عضو، $A - B$ دارای ۲ عضو و $B - A$ دارای ۷ عضو است. $A \cup B$ چند عضو دارد؟
- (۱) ۹ (۲) ۱۱
(۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۸ دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. اگر اجتماع آن‌ها ۲۷ عضو و اشتراک آن‌ها ۸ عضو داشته باشد، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۹
(۲) ۲۱
(۳) ۲۷
(۴) ۳۵

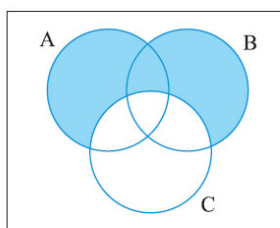
۱۹ اگر مجموعه A دارای ۹ عضو و مجموعه $A - B$ دارای ۳ عضو باشد، تعداد اعضای مجموعه $A \cap B$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۱۲

۲۰ حاصل $[-۳, ۷] - (-۱, ۹]$ کدام است؟

- (۱) \emptyset
(۲) $[-۳, -۱]$
(۳) $[-۳, -۱)$
(۴) $(-۳, -۱]$

۲۱ کدام گزینه برابر با قسمت رنگی نیست؟



- (۱) $C' \cup (A \cap B)$
(۲) $(A - C) \cup (B - C)$
(۳) $(A \cup B) - C$
(۴) $C' - (A' \cap B')$

۲۲ مجموعه $A = \left\{ \frac{x+5}{2x^2+1} \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x < 2 \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۲۳ اگر $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in (-۳, ۴] \cap \mathbb{W} \right\}$ باشد، آنگاه A چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۲۴ در یک مدرسه ۱۱۰ نفری، ۷۱ نفر در المپیاد ریاضی و ۵۷ نفر در المپیاد شیمی شرکت می‌کنند. اگر ۳۲ نفر از آن‌ها در هر دو المپیاد شرکت کنند، تعداد افرادی که فقط در یکی از دو المپیاد شرکت کرده‌اند کدام است؟

- (۱) ۱۲۸
(۲) ۹۶
(۳) ۶۴
(۴) ۵۷

- ۲۵ باتوجه به مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < 2x + 5 < 11\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - 1 < 8\}$ ، $(A - B) \cup C$ برابر کدام گزینه است؟
- (۱) $(1, 3)$
- (۲) $(-6, 3)$
- (۳) $(1, 3)$
- (۴) \mathbb{R}

۲۶ کدام مجموعه زیر، متناهی است؟

- (۱) مجموعه اعداد طبیعی که از معکوس خود کوچک‌ترند.
- (۲) مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و ۱
- (۳) مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲-
- (۴) مجموعه اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۲-

۲۷ اگر $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ باشد، آنگاه تمامی گزینه‌ها همواره درست‌اند به جز گزینه:

- (۱) $A \subseteq B'$
- (۲) $B \subseteq A'$
- (۳) $A' \cap B' = \emptyset$
- (۴) $A - B = A$

۲۸ اگر سه عضو از تعداد عضوهای یک مجموعه کم شود، تعداد زیرمجموعه‌ها چه تغییری می‌کند؟

- (۱) نصف می‌شود.
- (۲) $\frac{1}{4}$ می‌شود.
- (۳) $\frac{1}{8}$ می‌شود.
- (۴) $\frac{1}{16}$ می‌شود.

۲۹ کدامیک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

- (۱) مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از ۹۲۶۵
- (۲) مجموعه اعداد اعشاری بین $0/6$ و $4/3$
- (۳) مجموعه اعداد صحیح ۶۷۵ رقمی
- (۴) مجموعه اعداد صحیح مربع کامل و کوچک‌تر از ۹۹۹۲

۳۰ متمم مجموعه $A - (B - A)'$ نسبت به مجموعه جهانی کدام است؟

- (۱) $A \cup B$
- (۲) $A \cap B$
- (۳) A
- (۴) B

۳۱ اگر $A = \{1, \{1\}\}$ و $B = \{\{1, \{1\}\}\}$ باشد، $A - B$ کدام است؟

- (۱) \emptyset
- (۲) $\{1\}$
- (۳) $\{\{1\}\}$
- (۴) $\{1, \{1\}\}$

۳۲ باتوجه به مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < 2x + 5 < 11\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - 1 < 8\}$ ، $(A - B) \cup C$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $(1, 3)$
 (۲) $(-6, 3)$
 (۳) $(1, 3)$
 (۴) \mathbb{R}

۳۳ مجموعه اعداد طبیعی، طبیعی زوج، طبیعی فرد، حسابی و صحیح را به ترتیب با \mathbb{N} ، \mathbb{E} ، \mathbb{O} ، \mathbb{W} و \mathbb{Z} نمایش می‌دهیم. حاصل کدام گزینه برابر با مجموعه \emptyset است؟

- (۱) $\mathbb{N} - \mathbb{E}$
 (۲) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$
 (۳) $\mathbb{E} - \mathbb{O}$
 (۴) $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$

۳۴ اگر فرض کنیم U مجموعه مرجع باشد و $((A - B)' \cup X)' = \emptyset$ ، آنگاه X کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) A'
 (۲) B
 (۳) A
 (۴) $B - A$

۳۵ از مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ چه تعداد از اعداد نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ هستند؟

- (۱) ۱۰
 (۲) ۱۱
 (۳) ۶
 (۴) ۱۲

۳۶ اگر برای مجموعه‌های A و B داشته باشیم: $n(A) = 4 - x^2$ ، $n(B) = 2x$ و $n(A \cap B) = x$ ، در این صورت $n(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۴
 (۳) ۲ یا ۴
 (۴) ۴ یا ۶

۳۷ اگر $A = \{6 \text{ مضارب دو رقمی و طبیعی}\}$ و $B = \{4 \text{ مضارب دو رقمی و طبیعی}\}$ ، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴
 (۲) ۷
 (۳) ۱۳
 (۴) ۱۵

۳۸ اگر $A = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ باشد، کدامیک عضو مجموعه A نیست؟

- (۱) -۱۶
 (۲) -۲۶
 (۳) -۵۶
 (۴) -۸۶

پاسخنامه Homework

گزینه ۳

۱

برای اینکه تعداد عضوهای A کمترین شود باید اشتراک A و B به حداقل برسد، یعنی: $n(A \cap B) = 0$

$$n(A) = m, \quad n(B) = k$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 \xrightarrow{n(A \cap B) = 0} n(A) + n(B) = 11$$

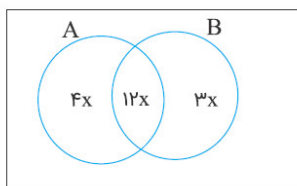
$$\begin{aligned} \Rightarrow m - k &= 5 \\ m + k &= 11 \Rightarrow 2m = 16 \Rightarrow m = 8 \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر تعداد اعضای اشتراک A و B عددی بزرگتر از صفر باشد، مقداری که برای m به دست می‌آید از ۸ بزرگتر می‌شود. امتحان کنید!

گزینه ۴

۲

با فرض $n(A \cap B) = 12x$ داریم:



$$n(A \cup B) = 57 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$$

$$n(A) = 16x = 16 \times 3 = 48$$

گزینه ۴

۳

$$n(A) = m, \quad n(B) = k$$

$$m - k = n(A) - n(B) = 14$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(A \cap B) - (n(B - A) + n(A \cap B)) = 14$$

$$\Rightarrow n(A - B) - n(B - A) = 14 \quad (I)$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 20$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = 20 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I, II} \begin{aligned} n(A - B) - n(B - A) &= 14 \\ n(A - B) + n(B - A) &= 20 \end{aligned} \Rightarrow n(B - A) = 3$$

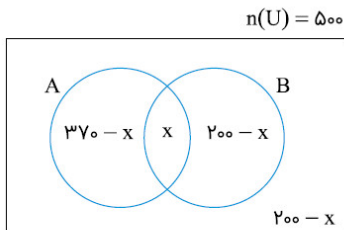
گزینه ۳

۴

مجموعه A: مزرعه‌داران چای

مجموعه B: شالیزارداران

در نمودار و ن زیر تعداد اعضای هر کدام را نوشته‌ایم:



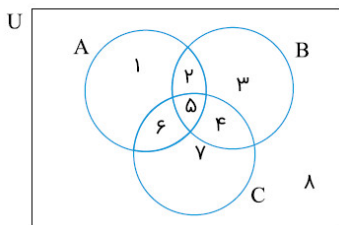
$$(370 - x) + (x) + (200 - x) + (200 - x) = 500 \Rightarrow x = 135$$

$$n(A - B) = 370 - 135 = 235$$

گزینه ۱

۵

روش اول: به صورت زیر ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$$((\underbrace{A - B}_{\{1,6\}})' - \underbrace{(B - C)}_{\{2,3\}}) - \underbrace{C}_{\{4,5,6,7\}}$$

$$= (\underbrace{\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}}_{\{4,5,7,8\}} - \{2, 3\}) - \{4, 5, 6, 7\} = \{8\}$$

$$A' - (B \cup C) = \{3, 4, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{8\}$$

روش دوم:

با استفاده از جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 ((A - B)' - (B - C)) - C &= ((A \cap B')' \cap (B \cap C')') \cap C' \\
 &= ((A' \cup B) \cap (B' \cup C)) \cap C' = (A' \cup B) \cap ((B' \cup C) \cap C') \\
 &= (A' \cup B) \cap ((B' \cap C') \cup \underbrace{(C \cap C')}_{\emptyset}) \\
 &= (A' \cup B) \cap (B' \cap C') = ((A' \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}) \cap C' \\
 &= (A' \cap B') \cap C' = A' \cap (B' \cap C') = A' \cap (B \cup C)' \\
 &= A' - (B \cup C)
 \end{aligned}$$

۶ جدا از هم

۷ نامتناهی

۸ بین ۳ و ۴

۹ -۴ و ۲۵۶

۱۰ $[-1, 2]$

گزینه ۳

۱۱

فرض کنید x عضو به مجموعه A اضافه شده است، پس:

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) + 5 &= n(A) + x + n(B) - (n(A \cap B) + 2) \\
 \Rightarrow n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + x - 7 \\
 \Rightarrow x - 7 &= 0 \Rightarrow x = 7
 \end{aligned}$$

$$\text{اولیه: } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$\text{جدید: } n(A - B) = n(A) + x - (n(A \cap B) + 2)$$

$$\Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) + x - 2 = n(A) - n(A \cap B) + 5$$

یعنی به مجموعه $(A - B)$ ، ۵ عضو جدید اضافه خواهد شد.

گزینه ۲

۱۲

مجموعه B به فرم $B = \{3, 7, 11, \dots\}$ است، اما چون $B \subseteq A$ می‌باشد، پس مجموعه B به صورت $B = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$ است، پس مجموعه B ، ۷ عضو دارد.

گزینه ۳

۱۳

$$A \cap B' = (A \cap B)' \Rightarrow A - B = U - (A \cap B)$$

$$\Rightarrow A - (A \cap B) = U - (A \cap B) \Rightarrow A = U \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq B'$$

گزینه ۴

۱۴

مجموعه A شامل شماره‌های صحیح عدد ۶ است.

$$A = \{1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6\}$$

پس مجموعه A هشت عضو دارد.

گزینه ۱

۱۵

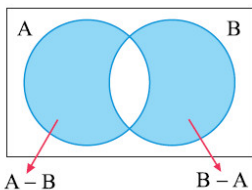
$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' = (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A'$$

$$= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B - A$$

گزینه ۱

۱۶

باتوجه به نمودار ون:

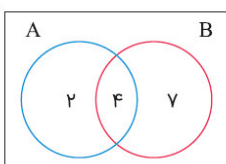


$$\begin{aligned} n((A - B) \cup (B - A)) \\ &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 27 - 8 = 19 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۱۷

طبق نمودار ون:

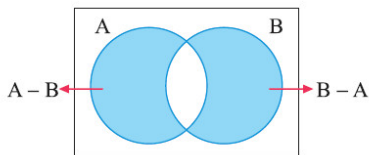


$$n(A \cup B) = 2 + 4 + 7 = 13$$

گزینه ۱

۱۸

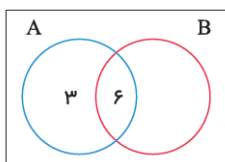
باتوجه به نمودار ون:



$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 27 - 8 = 19$$

گزینه ۳

۱۹

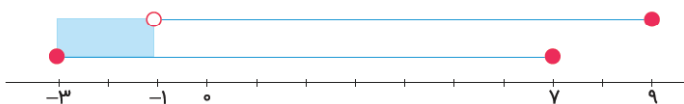


$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$9 = 3 + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

گزینه ۲

۲۰

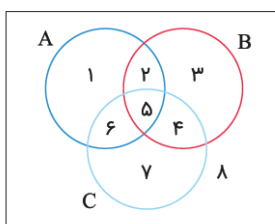


$$[-3, 7] - (-1, 9] = [-3, -1]$$

گزینه ۱

۲۱

از روش عددگذاری استفاده می‌کنیم:



$$C' \cup (A \cap B) = \{1, 3, 2, 8\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 8\}$$

بنابراین گزینه "۱" پاسخ صحیح است.

گزینه ۲

۲۲

عددهای طبیعی متعلق به محدوده $-2 < x < 2$ تنها عدد ۱ می‌باشد.

$$A = \left\{ \frac{6}{3} \right\} = \{2\} \Rightarrow n(A) = 1$$

گزینه ۳

۲۳

$$(-3, 4] \cap \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} \Rightarrow n(A) = 4$$

دقت کنید که مخرج نمی‌تواند صفر باشد، پس عضو $\frac{1}{0}$ نداریم.

گزینه ۳

۲۴

ریاضی : $n(A) = 71$

شیمی : $n(B) = 57$

مشترک : $n(A \cap B) = 32$

در یک آزمون : $n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$
 $= 71 + 57 - 2 \times 32 = 64$

گزینه ۳

۲۵

ابتدا اعضای مجموعه‌های A ، B و C را مشخص می‌کنیم:

$$-7 < 2x + 5 < 11 \Rightarrow -12 < 2x < 6 \Rightarrow -6 < x < 3 \Rightarrow A = \{1, 2\}$$

$$B = [1, +\infty)$$

$$2 < 3x - 1 < 8 \Rightarrow 3 < 3x < 9 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow C = (1, 3)$$

$$(A - B) \cup C = \emptyset \cup C = C = (1, 3)$$

گزینه ۱

۲۶

اعداد طبیعی و معکوس آن‌ها را ببینید:

$$1 \xrightarrow{\text{معکوس}} 1, \quad 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2}, \quad 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3}$$

همان‌طور که می‌بینید، در میان اعداد طبیعی، ۱ با معکوس خود برابر است. در بقیه اعداد از معکوس خود بزرگ‌ترند. بنابراین مجموعه اعداد طبیعی که از معکوس خود کوچک‌ترند، تهی است و تهی متناهی می‌باشد.

گزینه ۳

۲۷

باتوجه به صورت سؤال $n(A \cap B) = 0$ یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، هر سه گزینه "۱"، "۲" و "۴" با عبارت $A \cap B = \emptyset$ معادل هستند.

گزینه ۳

۲۸

می‌دانیم مجموعه‌ای با n عضو، 2^n زیرمجموعه دارد. اگر ۳ عضو از اعضا کم شود، تعداد زیرمجموعه‌ها 2^{n-3} خواهد بود. پس:

$$\frac{2^{n-3}}{2^n} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

گزینه ۲

۲۹

بررسی گزینه‌ها:

گزینه "۱": متناهی می‌باشد، چون از بالا محدود به ۹۲۶۵ و از پایین محدود به ۲ است.
گزینه‌های "۳" و "۴" نیز محدود هستند، پس گزینه "۳" در محدوده اعداد صحیح ۶۷۵ رقمی است و گزینه "۴" نیز از پایین محدود به ۱ و از بالا محدود به ۹۹۹۲ می‌باشد، ولی گزینه "۲" اگرچه محدود است، اما بین $0/6$ و $4/3$ بی‌نهایت عدد اعشاری می‌باشد.

گزینه ۱

۳۰

$$\begin{aligned} ((B - A)' - A)' &= ((B \cap A')' \cap A')' = ((B \cap A')')' \cup (A')' \\ &= (B \cap A') \cup A = (B \cup A) \cap (A' \cup A) \end{aligned}$$

$$= (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

گزینه ۴

۳۱

برای تعیین اعضای مجموعه $A - B$ باید از اعضای مجموعه A عضوهای مشترک بین دو مجموعه A و B را حذف کنیم. مجموعه A دارای دو عضو ۱ و $\{1\}$ است، اما مجموعه B یک تک‌عضوی است و تنها عضو آن $\{1, \{1\}\}$ می‌باشد، پس A و B هیچ عضو مشترکی ندارند.

$$A - B = A = \{1, \{1\}\}$$

گزینه ۱

۳۲

$$-7 < 2x + 5 < 11 \Rightarrow -12 < 2x < 6 \Rightarrow -6 < x < 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} A = \{1, 2\}$$

$$B = (1, +\infty)$$

$$2 < 3x - 1 < 8 \Rightarrow 3 < 3x < 9 \Rightarrow C = (1, 3)$$

$$A - B = \{1\} \Rightarrow (A - B) \cup C = [1, 3)$$

گزینه ۴

۳۳

بررسی گزینه‌ها:

گزینه "۱":

$$\mathbb{N} - \mathbb{E} = \{1, 2, \dots\} - \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

گزینه "۲":

$$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$$

گزینه "۳":

$$\mathbb{E} - \mathbb{O} = \{2, 4, 6, \dots\} - \{1, 3, 5, \dots\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

گزینه "۴":

$$\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \{\}$$

گزینه ۳

۳۴

$$A - B = A \cap B' \Rightarrow (A \cap B')' = A' \cup B \quad (I)$$

از طرفی داریم:

$$((A' \cup B) \cup X)' = ((A' \cup B)' \cap X') \xrightarrow{(I)} (A \cap B') \cap X'$$

$$\Rightarrow (A - B) \cap X' = \emptyset$$

باید امتحان کنیم اشتراک متمم کدام گزینه با $A - B$ برابر \emptyset خواهد شد.

بررسی گزینه‌ها:

$$(A - B) \cap A = A - B \quad \text{گزینه "۱":}$$

$$(A - B) \cap B' = A - B \quad \text{گزینه "۲":}$$

$$(A - B) \cap A' = \emptyset \quad \text{گزینه "۳":}$$

$$(A - B) \cap (B - A)' = A - B \quad \text{گزینه "۴":}$$

گزینه ۲

۳۵

$$n(U) = 20$$

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(A) = 6 \quad \text{مضرب ۳:}$$

$$B = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(B) = 4 \quad \text{مضرب ۵:}$$

$$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 5, 10, 20\} \Rightarrow n(A \cup B) = 9$$

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 20 - 9 = 11$$

گزینه ۲

۳۶

بدیهی است که باید $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(A \cap B)$ نامنفی باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 & (1) \\ x \geq 0 & (2) \\ 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2), (3) \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq x \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 0, 1, 2$$

$$x = 0 \Rightarrow n(A) = 4, n(B) = 0, n(A \cap B) = 0 \Rightarrow n(A \cup B) = 4 + 0 - 0 = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow n(A) = 3, n(B) = 2, n(A \cap B) = 1 \Rightarrow n(A \cup B) = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow n(A) = 0, n(B) = 4, n(A \cap B) = 2$$

این حالت غیرقابل قبول است، زیرا باید $n(A \cap B) \leq n(A)$ و $n(A \cap B) \leq n(B)$ باشد، پس $n(A \cup B)$ فقط می‌تواند برابر ۴ باشد.

گزینه ۲

۳۷

مجموعه $A - B$ شامل اعدادی است که مضارب ۶ باشند و مضرب ۴ نباشند و از طرفی دو رقمی طبیعی نیز باشند:

$$A - B = \{18, 30, 42, 54, 66, 78, 90\} \Rightarrow n(A - B) = 7$$

گزینه ۱

۳۸

بررسی گزینه‌ها:

$$\text{گزینه "۱": } 3x + 1 = -16 \Rightarrow 3x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{گزینه "۲": } 3x + 1 = -26 \Rightarrow 3x = -27 \Rightarrow x = -9 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{گزینه "۳": } 3x + 1 = -56 \Rightarrow 3x = -57 \Rightarrow x = -19 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{گزینه "۴": } 3x + 1 = -86 \Rightarrow 3x = -87 \Rightarrow x = -29 \in \mathbb{Z}$$

BOX 3: الگو و دنباله

(صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰ کتاب درسی)

در این BOX، الگو و دنباله تعریف می‌شوند. دنباله‌های فنی و دنباله درجه دو از دنباله‌های مهم این قسمت هستند.

الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند، رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشند. در این جا ما با الگوهای عددی و شکلی سروکار داریم.

الگوی عددی مقابل را در نظر بگیرید:

جمله اول این الگو را با a_1 (اندیس ۱) نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $a_1 = 2$. هم‌چنین جمله دوم این الگو برابر ۴ است و می‌نویسیم

$a_2 = 4$ و به همین ترتیب جمله n ام این الگو را با a_n نمایش می‌دهیم و داریم $a_n = 2n$

را جمله عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جمله عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به دست آورد. در واقع جمله عمومی یک الگو، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

تعریف: جمله عمومی یک الگو به صورت $a_n = 5n + 3$ است.

(۱) مقدار جمله دهم الگو را مشخص کنید. $n=10 \rightarrow a_{10} = 5(10) + 3 = 53$

(۲) جمله چندم الگو برابر ۱۰۸ است؟

$a_n = 5n + 3$
 $108 = 5n + 3$
 $108 - 3 = 5n$
 $105 = 5n$
 $n = 21$

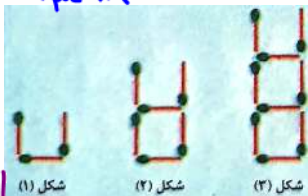
جمله بیست و یکم $n \in \mathbb{N}$ نبود چنین جمله‌ای نداریم.

تعرین: با توجه به الگو، تعداد چوب کبریت‌های به کاررفته در شکل n ام را بنویسید.

نکته: در دنباله درجه یک مثل $U_n = an + b$ ضریب n که a است قدر نسبت نام دارد یعنی دو جمله متوالی با هم a تا اختلاف دارند. مثل در $a_n = 5n + 3$ داریم:

$a_1 = 8$
 $a_2 = 13$
 $a_3 = 18$

تفاوت: $d = \text{difference}$ $5 = d$ \rightarrow $+5$



شماره شکل	تعداد
شکل (۱)	۳
شکل (۲)	۳+۳
شکل (۳)	۳+۳+۳

جواب $a_n = 3n$ تعداد چوب کبریت = (شماره شکل)

الگوی خطی: در الگوی $5, 11, 17, 23, \dots$ هر جمله دقیقاً ۶ واحد از جمله قبل از خودش بیشتر است. چنین الگوهایی را که در آن‌ها اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. **مثلاً: الگوی بالا خطی است.**

جمله عمومی الگوی خطی: الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ باشد را الگوهای خطی می‌گوییم (زیرا شبیه معادله خط هستند) که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. t_n یک عبارت دو جمله‌ای از درجه یک بر حسب n می‌باشد.

مثال: الگوهای $a_n = -\frac{1}{3}n + 2$ و $b_n = 4n + 17$ الگوهای خطی هستند. **ضریب n همان قدر نسبت یا عامل جمله متوالی است.**

تعرین: در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۹ و ۲۳ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید. **راه‌تی**

$a_n = an + b$
 $n=5 \rightarrow a_5 = 5a + b = 9$
 $n=12 \rightarrow a_{12} = 12a + b = 23$

$$\begin{cases} -5a - b = -9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \rightarrow 7a = 32 \rightarrow a = \frac{32}{7}$$

$a_5 = 5a + b = 9 \rightarrow 5(\frac{32}{7}) + b = 9 \rightarrow b = 9 - \frac{160}{7} = \frac{63 - 160}{7} = -\frac{97}{7}$

$a_n = \frac{32}{7}n - \frac{97}{7}$

نکته: اختلاف هر دو جمله متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب n می‌باشد (که همان شیب، در معادله خط است).

هر الگویی که در آن اختلاف هر دو جمله متوالی، مقدار ثابتی نباشد، الگوی خطی نیست. در الگوی زیر، اختلاف دو جمله اول برابر ۴ و اختلاف دو جمله دوم و سوم برابر ۵ می‌باشد. این الگو، یک الگوی غیرخطی است.

الگوی غیر خطی: هر الگویی که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ نباشد را الگوی غیر خطی می‌گوییم.

مثال: الگوهای $a_n = n^2 - 4n$ و $b_n = \frac{1}{n}$ الگوهای غیر خطی‌اند.

دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

مثال: اعداد $1, 3, 5, 7, \dots$ که از الگوی $a_n = 2n - 1$ به دست می‌آیند را یک دنباله می‌گوییم.

هم‌چنین اعداد $4, 10, 18, \dots$ که از الگوی درجه دوم $a_n = n^2 + 3n$ به دست می‌آیند، یک دنباله می‌باشد.

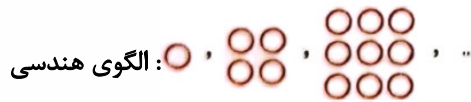
توجه: جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشند، مانند دنباله اعداد اول $2, 3, 5, 7, \dots$

تعریف: جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = n^2 - 4n$ است. پنج جمله اول این دنباله را بنویسید.

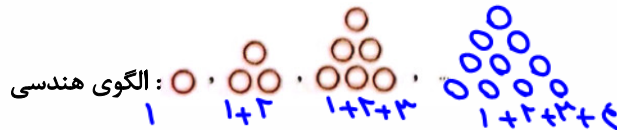
$a_1 = -3, a_2 = -4, a_3 = -3, a_4 = 0, a_5 = 5$

نکته: دو دنباله درجه دوم معروف $a_n = n^2$ (دنباله مربعی) و $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (دنباله مثلثی) وجود دارند که الگوی هندسی آنها به صورت زیر است:

$a_n = n^2 : 1, 4, 9, 16, \dots$



$a_n = \frac{n(n+1)}{2} : 1, 3, 6, 10, \dots$



$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع اعداد طبیعی تا n

نکته: مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است:

$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ مجموع مربعات اعداد طبیعی تا n

مجموع مربعات اعداد طبیعی تا n

$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ مجموع مکعبات اعداد طبیعی تا n

مجموع مکعبات اعداد طبیعی تا n

$\sum_{i=1}^n (ri) = r + 2r + 3r + \dots + rn = n(n+1) = n^2 + n$
 $= r(1 + 2 + 3 + \dots + n) = r \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1) = n^2 + n$ مجموع اعداد زوج $2n$ تا $2n$

مجموع اعداد زوج $2n$ تا $2n$

$\sum_{i=1}^n (ri-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$ مجموع اعداد فرد تا $2n-1$

مجموع اعداد فرد تا $2n-1$

سوال: جمع اعداد فرد تا 13 چقدر است؟ $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ زیر n^2 برای جمع اعداد فرد تا $2n-1$ است

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$ جواب $n^2 = 49$

است پس $n = 7$ و $n^2 = 49$ جواب 49

$2n-1 = 13$
 $2n = 13+1$
 $2n = 14$
 $n = 7$

$2n-1 = 13$
 $2n = 13+1$
 $2n = 14$
 $n = 7$

بنی

راه رد: $3(13) + 7 = 49$ سر تا 13 تا باید رویه 7

Homework

۱ اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

- ۱) $11/6$
- ۲) $9/6$
- ۳) $2/4$
- ۴) $1/4$

۲ اعداد 14 و $17/2$ به ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر ضریب بزرگ‌ترین درجه جمله عمومی، برابر $\frac{1}{70}$ قرینه جمله پنجم باشد، جمله پانزدهم چند برابر جمله اول است؟

- ۱) 2
- ۲) $2/4$
- ۳) $4/6$
- ۴) 5

۳ جمله عمومی الگوی زیر را بنویسید.



۴ در الگوی زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل هفدهم کدام است؟



- ۱) 34
- ۲) 35
- ۳) 36
- ۴) 37

۵ در یک الگوی خطی، جمله چهارم -11 و جمله دهم 7 است. چندمین جمله از این الگو، برابر با 19 است؟

- ۱) دوازدهم
- ۲) سیزدهم
- ۳) چهاردهم
- ۴) پانزدهم

۶ در الگوی عددی $3, 5, 8, 12, 17, \dots$ مجموع جملات نهم و دهم کدام است؟

- ۱) 74
- ۲) 84
- ۳) 94
- ۴) 104

۷ بزرگ‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{14n + 13}{7n + 2}$ کدام است؟

- ۱) 2
- ۲) 3
- ۳) 4
- ۴) 5

۸ دنباله $t_n = \frac{n - 2}{3n + 1}$ چند جمله منفی دارد؟

- ۱) صفر
- ۲) یک
- ۳) دو
- ۴) بی‌شمار

۹ دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = -1$ را در نظر بگیرید، حاصل ضرب صد جمله اول دنباله، کدام است؟

- (۱) -۲۰۱
(۲) -۱۹۹
(۳) -۱۹۷
(۴) ۱۹۷

۱۰ اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$. در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

- (۱) ۱۵۶۳
(۲) ۱۵۸۹
(۳) ۱۶۳۹
(۴) ۱۶۵۱

۱۱ در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل نهم کدام است؟



- (۱) ۱۱۷
(۲) ۱۲۰
(۳) ۱۲۳
(۴) ۱۲۵

۱۲ دو جمله متوالی دنباله $a_n = \begin{cases} 100 - \frac{1}{2}n^2 & ; \text{زوج } n \\ \frac{2}{15}n & ; \text{فرد } n \end{cases}$ برابر هستند. اگر مقدار این دو جمله متوالی، برابر مقدار صحیح k باشد، مقدار $a_{16} - k$ کدام است؟

- (۱) ۲۶
(۲) ۲۸
(۳) ۳۰
(۴) ۳۲

۱۳ جمله ۱۴۰۰ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & ; \text{زوج } n \\ \frac{1}{1+a_n} & ; \text{فرد } n \end{cases}$ ، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) صفر

۱۴ فرض کنید جمله صدم دنباله بازگشتی $1 + \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = 1$ ، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جمله نود و هشتم دنباله، کدام است؟

- (۱) $\frac{k-m}{2m-k}$
(۲) $\frac{k-2m}{k-m}$
(۳) $\frac{k-m}{k-2m}$
(۴) $\frac{2m-k}{k-m}$

پاسخنامه Homework

گزینه ۴

۱

$$t_n = an + b$$

$$\begin{cases} t_5 = 8 \\ t_{10} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 8 \\ 10a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{5} = -0.6$$

$$5a + b = 8 \xrightarrow{a=-0.6} -3 + b = 8 \Rightarrow b = 11$$

$$t_{16} = 16a + b = 16(-0.6) + 11 = 1/4$$

گزینه ۴

۲

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}(-a_5) = -\frac{1}{5}$$

$$a_5 = 14 \Rightarrow -\frac{1}{5}(25) + 5b + c = 14 \Rightarrow -5 + 5b + c = 14$$

$$a_7 = 17/2 \Rightarrow -\frac{1}{5}(49) + 7b + c = 17/2 \Rightarrow -\frac{49}{5} + 7b + c = 17/2$$

از حل دو معادله دو مجهول داریم:

$$b = 4, c = -1$$

$$a_n = \frac{-1}{5}n^2 + 4n - 1$$

$$a_{15} = -45 + 60 - 1 = 14$$

$$a_1 = -\frac{1}{5} + 4 - 1 = \frac{14}{5}$$

$$\frac{a_{15}}{a_1} = \frac{14}{14/5} = 5$$

$$a_n = n^2 + n$$

۳

گزینه ۲

۴

اولین شکل ۳ چوب‌کبریت دارد و در الگو، هر شکل ۲ چوب‌کبریت بیشتر از شکل قبل دارد. بنابراین شکل n ام به تعداد $3 + (n - 1) \times 2$ چوب‌کبریت خواهد داشت:

$$n = 17$$

$$\Rightarrow \text{تعداد چوب‌کبریت‌های شکل } 17\text{ام} = 3 + (17 - 1) \times 2 = 3 + 16 \times 2 = 3 + 32 = 35$$

گزینه ۳

۵

جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت $a_n = an + b$ است. حال داریم:

$$\begin{cases} a_4 = 4 \times a + b = -11 \Rightarrow 4a + b = -11 \\ a_{10} = 10 \times a + b = 7 \Rightarrow 10a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = 11 \\ 10a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow 6a = 18$$

$$\Rightarrow a = 3, \quad b = -23$$

$$\Rightarrow a_n = 3n - 23 \Rightarrow a_n = 19 \Rightarrow 3n - 23 = 19 \Rightarrow n = 14$$

گزینه ۴

۶

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3, & 5, & 8, & 12, & 17, & 23, & 30, & 38, & 47, & 57 \\ +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 \end{array}$$

$$\text{جمله نهم} = 47$$

$$\text{جمله دهم} = 57 \Rightarrow \text{مجموع جملات نهم و دهم} = 47 + 57$$

$$= 104$$

گزینه ۲

۷

$$a_n = \frac{14n + 13}{7n + 2} \Rightarrow a_n = \frac{14n + 4 + 9}{7n + 2} \Rightarrow a_n = \frac{14n + 4}{7n + 2} + \frac{9}{7n + 2}$$

$$\Rightarrow a_n = 2 + \frac{9}{7n + 2}$$

برای آنکه بزرگ‌ترین جمله a_n را پیدا کنیم، باید بیشترین مقدار $\frac{a}{7n + 2}$ را بیابیم و بیشترین مقدار کسر زمانی است که $7n + 2$ کمترین مقدار خود باشد؛ یعنی در $n = 1$.

$$a_1 = \frac{14(1) + 13}{7(1) + 2} = \frac{27}{9} = 3$$

گزینه ۲

۸

چند جمله از این دنباله را به دست می‌آوریم:

$$t_1 = \frac{1-2}{3+1} = -\frac{1}{4}, \quad t_2 = \frac{2-2}{3 \times 2+1} = 0$$

$$t_3 = \frac{3-2}{3 \times 3+1} = \frac{1}{10}$$

و از $n = 3$ به بعد صورت، عددی مثبت می‌شود و حاصل تقسیم آن بر مخرج (که آن هم عددی مثبت است) مثبت خواهد شد، پس این دنباله فقط یک جمله منفی دارد.

گزینه ۲

۹

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 2+1 = 3, \quad a_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, \quad a_4 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}, \quad \dots$$

$$a_n = \begin{cases} -1 & ; n = 1 \\ \frac{2n-1}{2n-3} & ; n \geq 2 \end{cases} \quad \text{دنباله مورد نظر به صورت}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{199} = -1 \times 3 \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{199}{197} = -199$$

گزینه ۳

۱۰

از آنجا که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته است، پس تعداد کل جملات ۴۰ دسته اول برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = 820$$

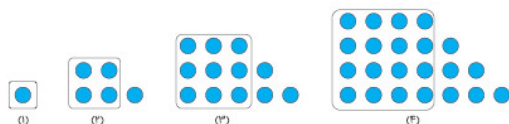
همچنین جمله عمومی اعداد طبیعی فرد متوالی به صورت $a_n = 2n - 1$ است، پس:

$$a_{820} = 2(820) - 1 = 1639$$

گزینه ۱

۱۱

الگوی داده شده را به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:



طبق شکل داریم:

$$a_1 = 1^2 + 0, \quad a_2 = 2^2 + (0+1), \quad a_3 = 3^2 + (0+1+2), \quad \dots$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 + (0+1+2+\dots+(n-1))$$

بنابراین در شکل نهم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$9^2 + (0+1+2+3+\dots+8) = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 81 + 36 = 117$$

گزینه ۳

۱۲

یکی از جملات در ضابطه بالا و دیگری در ضابطه پایین هستند، چون از بین دو عدد متوالی، یک عدد زوج و یک عدد فرد است. k مقداری صحیح است و $\frac{2}{15}n$ باید صحیح باشد، پس n مضرب ۱۵ است؛ خود ۱۵ را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_{15} = 2 \\ a_{14} = 100 - \frac{1}{2}(196) = 2 \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

$$a_{16} = 100 - \frac{1}{2}(256) = -28$$

$$k - a_{16} = 2 - (-28) = 30$$

گزینه ۳

۱۳

مسلماً نمی‌توانیم تا جمله ۴۰۰ام را بنویسیم، پس جملات ابتدایی را می‌نویسیم و به دنبال الگو می‌گردیم:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{1 + a_1} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{1 + a_3} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}$$

پس دنباله به این صورت است:

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

همان‌طور که رؤیت می‌شود، جملات ردیف زوج برابر $\frac{1}{2}$ هستند، پس جمله ۴۰۰ام برابر $\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۱

۱۴

اول جای n ها، ۹۹ قرار می‌دهیم تا a_{99} به دست آید:

$$a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k - m}{m} = \frac{1}{a_{99}} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k - m}$$

الان به جای n ها، ۹۸ می‌گذاریم:

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k - m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m - (k - m)}{k - m} = \frac{1}{a_{98}} \Rightarrow a_{98} = \frac{k - m}{2m - k}$$

BOX 4: دنباله‌های حسابی و هندسی

(صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷ کتاب درسی)

در BOX قبل با الگوی فنی آشنا شده ایم. نام دیگر آن، دنباله حسابی است. در این BOX فرمول دنباله حسابی گفته می‌شود و بر اساس آن مسائل مختلف حل می‌شوند.

دنباله حسابی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی می‌نامیم و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و آن را با d نمایش می‌دهیم.

نکته: (۱) اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی t_n باشد، آن‌گاه:
 $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$

(۲) جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت مقابل است:

تعریف: کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله حسابی است؟ جمله عمومی دنباله حسابی را بنویسید.

(۱) $-2, 4, 10, \dots$ (دنباله حسابی است)
 $t_n = -2 + (n-1)(6) = 6n - 8$

(۲) $3, 7, 12, \dots$ (دنباله حسابی نیست)
 $t_n = 3 + (n-1)(4) = 4n - 1$

تعریف: در یک دنباله حسابی، جملات هفتم و یازدهم به ترتیب ۹ و ۱۷ می‌باشد. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

$t_7 = t_1 + 6d = 9$
 $t_{11} = t_1 + 10d = 17$
 $d = 2$
 $t_1 = -3$
 $t_n = 2n - 5$

توجه: شکل دنباله حسابی، به صورت الگوی خطی است.

تعریف: در دنباله حسابی زیر، جمله بیست و پنجم را مشخص کنید.

$t_{25} = 3(25) - 8 = 67$

نکته: اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه $2b = a + c$ و عدد b را واسطه حسابی دو عدد a و c می‌گوییم.

مثال: واسطه حسابی دو عدد $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ برابر با 1 است.

تعریف: بین دو عدد ۱۱ و ۴۱ با جمله اول ۱۱، پنج واسطه حسابی درج کنید.

$t_1 = 11, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 = 41$
 $d = 5$
 دنباله حسابی با جمع کردن یک عدد ثابت با هر جمله، جمله بعدی را به دست می‌آوریم. در این قسمت با ضرب کردن یک عدد ثابت در هر جمله، جمله بعدی را به دست می‌آوریم. چنین دنباله‌هایی را دنباله هندسی می‌گوییم.

دنباله هندسی: دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید.

این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم و آن را با r نمایش می‌دهیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

نکته: (۱) در دنباله هندسی با جمله عمومی t_n ، داریم:

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$

(۲) جمله n ام دنباله هندسی به صورت مقابل است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد:

$t_n = t_1 r^{n-1}$

تعریف: در دنباله هندسی $2, 6, 18, \dots$ ، قدرنسبت دنباله را به دست آورید و جمله عمومی آن را بنویسید. $r = 9 = \frac{\text{بعدی}}{\text{قبلی}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3$

$$t_n = t_1 r^{n-1} \rightsquigarrow t_n = 2(3)^{n-1}$$

تذکره: اگر $t_1, r > 0$ ، جملات دنباله هندسی مثبت و اگر $r < 0$ ، آن گاه جملات دنباله هندسی، یکی در میان مثبت و منفی و اگر $t_1 < 0$ و

$r > 0$ ، جملات دنباله هندسی منفی هستند. اگر $0 < r < 1$ و $t_1 > 0$ ، جملات دنباله هندسی نزولی اند. $\dots < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$ را در ۲

تعریف: در یک دنباله هندسی، جمله دوم $\frac{1}{3}$ و جمله پنجم ۹ است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

$r = 9 = \frac{1}{3}$ (برای حذف t_1 بر هر دو تقسیم می‌کنیم.)

$$\begin{cases} t_2 = t_1 r = \frac{1}{3} \\ t_5 = t_1 r^4 = 9 \end{cases} \rightsquigarrow \frac{t_5}{t_2} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \rightsquigarrow r^3 = 27 \rightsquigarrow r = 3$$

$t_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$ (با $t_1 = \frac{1}{9}$)

نکته: اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه $b^2 = ac$. اعداد $b = \pm\sqrt{ac}$ را واسطه هندسی دو عدد a و c

می‌گوییم.

مثال: واسطه هندسی بین دو عدد ۳ و ۴۸، عددهای $\pm\sqrt{3 \times 48} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$ می‌باشند.

پرسش‌های تشریحی:

• درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱- هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.

۲- دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۳- دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{2}{5}$ وجود دارد.

۴- بی‌شمار دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ وجود دارد.

۵- دنباله هندسی وجود ندارد که فقط چهار جمله اول آن منفی باشد.

۶- دنباله حسابی وجود ندارد که فقط چهار جمله اول آن منفی باشد.

۷- جمله دهم دنباله حسابی $1, 5, 9, \dots$ برابر ۳۷ است.

۸- واسطه هندسی مثبت دو عدد ۴ و ۹ برابر ۶ است.

• از بین دنباله‌های زیر، کدامیک دنباله حسابی و کدامیک دنباله هندسی می‌باشند؟ قدرنسبت آن‌ها را تعیین کنید. هم‌چنین جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

$$-10 \quad 3, 3, 3, 3, \dots$$

$$-9 \quad 2, 2/4, 2/8, 3/2, \dots$$

$$-12 \quad \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, \dots$$

$$-11 \quad \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$$

• جمله عمومی شش دنباله، داده شده است. کدامیک، دنباله حسابی و کدامیک دنباله هندسی است؟

$$-14 \quad d_n = \frac{n+4}{2n+3}$$

$$-13 \quad a_n = -\frac{n}{3} + 4$$

$$-16 \quad a_n = (n+2)^2 - n^2$$

$$-15 \quad b_n = 2n^2 - 1$$

$$-18 \quad a_n = \frac{n^2 + 4n + 3}{n+1}$$

$$-17 \quad c_n = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

۱۹- اعداد $3x-8$ ، $-x+4$ و $2x+1$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند. مقدار x را به دست آورید.

۲۰- در دنباله حسابی با جمله عمومی t_n ، حاصل $\frac{t_4 + 2t_1 - t_7}{t_8 + t_9}$ را به دست آورید.

۲۱- جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید. (تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی)

۲۲- بین دو عدد ۱ و ۸۱ با جمله اول ۱، هفت واسطه هندسی درج شده است. قدرنسبت دنباله حاصل را مشخص کنید.

۲۳- در دنباله هندسی $2, 4, 8, \dots$ ، حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله را به دست آورید. (تمرین ۵ صفحه ۲۷ کتاب درسی)

۲۴- قیمت یک خودرو به دلیل استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می‌یابد. اگر قیمت اولیه یک خودرو ۴۰ میلیون تومان باشد و قیمت آن در هر سال ۲۰ درصد کاهش پیدا کند:

(آ) قیمت این خودرو را بعد از ۲ سال مشخص کنید.

(ب) قیمت این خودرو بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۲۵- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱۷ و مجموع جملات دوم و چهارم برابر ۶۸ می‌باشد. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

۲۶- در دنباله هندسی روبه‌رو، جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.
 $x-4, 2x-4, 4x+4, \dots$

Homework (1)

۱ مقادیر a ، $2a$ و $1 + a$ و $5 - a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

- (۱) $2/75$ (۲) $4/25$
(۳) $12/25$ (۴) $14/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت d خواهید داشت. مقدار $r + d$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱
(۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳ با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{32}{7}$ (۲) $\frac{64}{7}$
(۳) $\frac{24}{5}$ (۴) $\frac{48}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۴ دنباله‌های هندسی با قدر نسبت (نسبت مشترک) طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول و دوم) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی ... $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, ... میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- (۱) $2304/5$ (۲) $3072/5$
(۳) $4608/5$ (۴) $6144/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ یک دنباله با جملات غیرصفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r + d$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ در دو دنباله حسابی به صورت‌های $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک وجود دارد؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹
(۳) ۶۰ (۴) ۶۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸ یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم‌شده قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶
(۳) ۹ (۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ در دنباله‌های حسابی $2, 9, 16, 23, \dots$ و $12, 17, 22, 27, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶
(۳) ۷ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۰ باتوجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$ کدام است؟

- (۱) $0/15$ (۲) $0/18$
(۳) $0/24$ (۴) $0/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

- (۱) ۴۱۵
(۲) ۴۱۹
(۳) ۴۲۱
(۴) ۴۲۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۲

با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جمله n ام دو دنباله کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۲
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۳

در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a_7 = 5a_3 + 3a_2$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d ، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) $3/5$
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴

جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی کدام است؟ (جملات دنباله ثابت نیستند.)

- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{7}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۵

جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنباله حسابی است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$
(۲) $\frac{8}{5}$
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جمله اول و آخر دسته n ام، کدام است؟

- (۱) ۱۷۰۰
(۲) ۱۷۵۰
(۳) ۱۸۰۰
(۴) ۱۸۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۷ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته نهم واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر، کدام است؟

- (۱) ۷۱
(۲) ۷۲
(۳) ۷۳
(۴) ۷۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۸ جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{9}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۹ در یک دنباله هندسی با جملات متمایز، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آنهاست؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
(۲) $5 + 2\sqrt{3}$
(۳) $5 + 4\sqrt{3}$
(۴) $7 + 4\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخنامه (1) Homework

گزینه ۴

۱

اگر جملات فوق به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند پس:

$$1 + 2a = \frac{a + 5 - a}{2} \Rightarrow 2 + 4a = 5 \Rightarrow 4a = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

بنابراین جملات عبارتند از:

$$\frac{3}{4}, 1 + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{2}, \dots$$

یعنی:

$$d = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

پس:

$$a_9 = a + 8d = \frac{3}{4} + 8 \times \frac{7}{4} = \frac{3}{4} + 14 = 14\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲

اگر جملات دنباله هندسی به صورت زیر باشند:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

بنابراین جملات دنباله حسابی عبارتند از:

$$\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2}, \dots$$

پس:

$$\frac{a_2}{2} = \frac{\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}}{2} \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 2a_1r = a_1 + a_1r^2$$

$$\xrightarrow{a_1 \neq 0} r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

بنابراین دنباله هندسی ثابت است و $d = 0$ ، پس:

$$r + d = 1 + 0 = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گزینه ۲

۳

جملات دنباله هندسی : $a, ar, ar^2 \xrightarrow{\text{در دنباله حسابی}} 4a, 4ar, 16ar^2$

$\xrightarrow{\text{واسطه حسابی } 4ar} 16ar = 4a + 16ar^2$

$$4r = 1 + 4r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

مجموع مربعات : $a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 4a + 4ar + 16ar^2$

$$a^2(1 + r^2 + r^4) = 4a(1 + 2r + 4r^2) \Rightarrow a^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 4a(1 + 1 + 1)$$

$$\Rightarrow a \times \frac{16 + 4 + 1}{16} = 12 \Rightarrow a = \frac{12 \times 16}{21} \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۴

دنباله خواسته شده به صورت زیر است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4$$

باتوجه به سوال اولاً $a_1 \geq 1$ و ثانیاً $a_1q^4 \leq 100$. همچنین $q > 1$:

$$a_1q^4 \leq 100 \xrightarrow{q=2} 16a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a_1q^4 \leq 100 \xrightarrow{q=3} 81a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 = 1$$

برای $q \geq 4$ هیچ دنباله‌ای یافت نمی‌شود؛ پس در مجموع ۷ دنباله با مشخصات داده شده وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

گزینه ۳

۵

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \{13, 14, \dots, 24\}, \dots$$

آخرین و بزرگ‌ترین عضو دسته‌ها (به جز دسته اول) باهم تشکیل دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ می‌دهند:

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 3 \times 2^1 = 6$$

$$a_4 = 3 \times 2^2 = 12$$

⋮

$$a_{12} = 3 \times 2^{10} = 3072$$

$$a_{13} = 3 \times 2^{11} = 6144$$

پس دسته سیزدهم به صورت زیر است:

$$\{3072, 3072, \dots, 6144\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3072 + 6144}{2} = 4608/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

گزینه ۳

۶

دنباله با جملات ناصفر که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله اعداد ثابت به صورت a, a, \dots است که $d = 0$ و $r = 1$ بوده و $r + d = 1$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

گزینه ۳

۷

$$\begin{cases} ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \dots & d_1 = ۵ \\ ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \dots & d_2 = ۳ \end{cases}$$

اولین جمله مشترک دو دنباله ۱۷ است. همچنین قدر نسبت دنباله جملات مشترک ک.م.م d_1 و d_2 یعنی $۱۵ = ۳ \times ۵$ است؛ بنابراین جمله عمومی دنباله جملات مشترک عبارت است از:

$$a_n = ۱۷ + ۱۵(n - 1) = ۱۵n + ۲$$

حال باید تعداد n هایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $۱۰۰ \leq a_n \leq ۹۹۹$:

$$\begin{aligned} ۱۰۰ \leq ۱۵n + ۲ \leq ۹۹۹ &\Rightarrow ۹۸ \leq ۱۵n \leq ۹۹۷ \\ \Rightarrow ۶/... \leq n \leq ۶۶/... &\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{۷, ۸, \dots, ۶۶\} \end{aligned}$$

بنابراین تعداد جملات موردنظر برابر است با:

$$۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گزینه ۱

۸

اگر مساحت هر مربع ۹ برابر قبلی باشد، یعنی طول ضلع آن ۳ برابر مربع درست شده قبلی است. پس محیط این مربع‌ها در هر مرحله سه برابر خواهد شد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۲

۹

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است.

$$\begin{aligned} ۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \dots &\Rightarrow d_1 = ۷ \\ ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \dots &\Rightarrow d_2 = ۵ \end{aligned}$$

اولین جمله مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$\begin{aligned} a_n = a_1 + (n - 1)d &\xrightarrow{d=[۷,۵]=۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n - 1) = ۳۵n + ۲ \\ ۱۰۰ \leq a_n < ۳۰۰ &\Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰ \\ \Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ &\Rightarrow ۲/... \leq n < ۸/... \\ ۳ \leq n \leq ۸ &\Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\} \end{aligned}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

گزینه ۱

۱۰

$$S = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$$

$$3S = \frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \dots + \frac{20-17}{17 \times 20}$$

$$3S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$3S = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 0/15$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۲

۱۱

در دسته اول ۱، دسته دوم ۲ و... و در دسته بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به اندازه $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20}{2}(1 + 20) = 210$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جمله آخر در دسته بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(2n - 1)$ است.

$$2 \times 210 - 1 = 419$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

گزینه ۱

۱۲

به همه جملات ۴ واحد اضافه می‌شود، بنابراین اختلاف جملات برابر ۴ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۱

۱۳

$$a, a + d, a + 2d, \dots$$

$$6(a + d)^2 = 5(a + 2d)a + 3(a + d)a$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 6d^2 + ad = 0, \quad \frac{a}{d} = x \Rightarrow a = dx$$

$$\Rightarrow 2d^2x^2 - 6d^2 + d^2x = 0 \Rightarrow d^2(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -2$$

$$\frac{a_6}{d} = \frac{a + 5d}{d} = \frac{a}{d} + 5 = x + 5 : \begin{cases} x = -2 : x + 5 = 3 \\ x = \frac{3}{2} : x + 5 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۱۴

جمله اول دنباله حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به اینکه $a_{11} = a_1 + 10d$ و $a_5 = a_1 + 4d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_n = a_1 + (n - 1)d$ از طرفی می‌دانیم که اگر x, y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $y^2 = xz$ ؛ پس باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$a_7^2 = a_5 \cdot a_{11} \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 4d) \times (a_1 + 10d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 40d^2 \Rightarrow 2d^2 = 2a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d (*)$$

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_7 = \frac{5}{4}d + 6d = \frac{29}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنباله هندسی، از تقسیم دو جمله متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنباله هندسی مورد نظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_7} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{29}{4}d} = \frac{21}{29} = \frac{7}{9}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گزینه ۴

۱۵

دنباله حسابی را t_n با قدرنسبت d و الگوی خطی را a_n با قدرنسبت d' نمایش دهیم:

$$t_8 - t_4 = a_7 - a_3 \Rightarrow 4d = 4d' \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{4}{4}$$

$$a_{10} = 0 \Rightarrow a_1 + 9d' = 0 \Rightarrow a_1 = -9d'$$

$$\frac{a_{15}}{d} = \frac{a_1 + 14d'}{d} = \frac{-9d' + 14d'}{d} = 5 \frac{d'}{d} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۳

۱۶

دسته سوم دسته دوم دسته اول
 \downarrow \downarrow \downarrow
 ۱ ۲ ۳ , ...

پس تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول} &= 1 + 2 + 3 + \dots + 29 \\ &= \frac{29(29+1)}{2} = \frac{29 \times 30}{2} = 435 \end{aligned}$$

پس اولین جمله دسته سی‌ام، برابر با جمله ۴۳۶ام دنباله اعداد طبیعی فرد است. دنباله اعداد طبیعی فرد، یک دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 2n - 1$ است، بنابراین:

$$\text{اولین جمله دسته ۳۰ام} = a_{436} = 2 \times 436 - 1 = 871 = b_1$$

دسته سی‌ام، ۳۰ جمله دارد، بنابراین جمله آخر این دسته برابر است با:

$$b_{30} = b_1 + 29d \xrightarrow{\substack{b_1=871 \\ d=2}} 871 + 29 \times 2 = 929$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ هستند)، بنابراین:

$$b_1 + b_{30} = 871 + 929 = 1800$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گزینه ۳

۱۷

دسته اول : $\{1\}$ دسته دوم : $\left\{ \underbrace{2}_{1+1}, 3, \underbrace{4}_{2^2} \right\}$ دسته سوم : $\left\{ \underbrace{5}_{2^2+1}, 6, 7, 8, \underbrace{9}_{3^2} \right\}$

⋮

دسته هشتم : $\left\{ \underbrace{50}_{7^2+1}, \dots, \underbrace{64}_{8^2} \right\}$ دسته نهم : $\left\{ \underbrace{65}_{8^2+1}, \dots, \underbrace{81}_{9^2} \right\}$

$$\Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{81 + 65}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

راه حل اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت (اختلاف مشترک) d و جمله اول a_1 برابر است با:

$$\underbrace{a_1 + 2d}_{t_1}, \underbrace{a_1 + 6d}_{t_2}, \underbrace{a_1 + 10d}_{t_3}$$

 t_1, t_2, t_3 سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند، پس داریم:

$$t_2^2 = t_1 t_3 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 10d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 20d^2$$

$$\Rightarrow 6d^2 - 20d^2 = 0 \Rightarrow d(6d - 20d) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (در گزینه‌ها نیست)} \\ 6d - 20d = 0 \Rightarrow d = \frac{5}{6}a_1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$t_1 = a_1 + 2d = a_1 + 2\left(\frac{5}{6}a_1\right) = \frac{8}{3}a_1$$

$$t_2 = a_1 + 6d = a_1 + 6\left(\frac{5}{6}a_1\right) = 6a_1$$

در نتیجه قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{6a_1}{\frac{8}{3}a_1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

راه حل دوم:

نکته: اگر جملات a_k و a_m, a_n از یک دنباله حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت

$$r = \frac{k-m}{m-n} \text{ (نسبت مشترک) دنباله هندسی برابر است با:}$$

 a_3, a_7 و a_{16} جملات یک دنباله هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

$$r = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

سه جمله متوالی دنباله حسابی‌اند، پس:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1q^4 = \frac{a_1q + a_1q^7}{2} \xrightarrow{a_1q \neq 0} 4q^3 = 1 + q^6$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

با فرض صعودی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگ‌ترین جمله است و در نتیجه $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

Homework (2)

۱ در یک دنباله هندسی، جمله دوم و پنجم به ترتیب ۳۶ و $\frac{۹}{۱۶}$ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

در جای خالی عدد یا عبارت مناسب را بنویسید.

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

۲ واسطه هندسی بین دو عدد $۸ - \sqrt{۱۵}$ و $۸ + \sqrt{۱۵}$ برابر است با

۳ جمله عمومی دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{5}, 1, 5$ به صورت می‌باشد.

۴ کمترین مقدار عبارت $\sin x - \frac{۱}{۱۲}$ برابر با است و بیشترین مقدار آن برابر با می‌باشد.

درستی یا نادرستی جمله‌های داده‌شده را مشخص کنید.

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

۵ دنباله $\dots, ۷, ۷, ۷$ یک دنباله هندسی می‌باشد.

۶ مقدار $\tan ۷۰^\circ$ از $\tan ۳۰^\circ$ بیشتر است.

۷ زاویه ۲۷۰° در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

۸ $\sin ۵۰^\circ = ۲ \sin ۲۵^\circ$

۹ جمله پنجم دنباله هندسی داده‌شده برابر $\frac{۵۱۲}{۷۲۹}$ می‌باشد؟

$۱۸, -۱۲, ۸, \dots$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۴

۱۰ بین دو عدد $\frac{۳۲}{۳}$ و ۸۱ چهار واسطه هندسی درج شده است. آن‌ها را مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۱

در یک دنباله حسابی، جملات هفتم و پانزدهم به ترتیب ۲۳ و ۶۳ می‌باشند. جمله چهارم این دنباله را مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۲

بین دو عدد $\frac{۳۲}{۳}$ و ۸۱، چهار واسطه هندسی درج شده است. آن‌ها را مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۳

در یک دنباله حسابی جمله هفتم ۴ برابر جمله سوم است. در این دنباله قدر نسبت (اختلاف مشترک) چند برابر جمله دوم است؟

- | | |
|--------|-------|
| (۱) ۱۱ | (۲) ۹ |
| (۳) ۸ | (۴) ۳ |

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۱۴

در دنباله‌های حسابی "۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ..." و "۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ..." چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۵ | (۲) ۶ |
| (۳) ۷ | (۴) ۸ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

۱۵

کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در هفته اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد. کارفرما متعهد می‌شود که در صورت رضایت کاری در پایان هر هفته، ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰ واحد پول برسد. با رضایت کاری پس از چند هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۴۸ | (۲) ۴۹ |
| (۳) ۵۰ | (۴) ۵۱ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

۱۶

در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟ (قدر نسبت (اختلاف مشترک) دنباله حسابی مخالف صفر است)

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۹ | (۲) ۱۰ |
| (۳) ۱۱ | (۴) ۱۲ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

۱۷

بین دو عدد $۲^{۲۲}$ و $۲^{۲۰}$ ، پنج واسطه حسابی قرار داده‌ایم. در این صورت کوچک‌ترین واسطه حسابی چندبرابر قدر نسبت این دنباله است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۲ | (۲) ۳ |
| (۳) ۴ | (۴) ۵ |

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۳

۱۸ مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگتر سه برابر مجموع سه جمله کوچکتر است. قدرنسبت آن کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۱۹ توپیی را از ارتفاع ۴۰ متری زمین رها می‌کنیم. هربار که توپ زمین می‌خورد به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌آید. توپ بعد از چهارمین بار که زمین می‌خورد تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
(۲) ۵
(۳) $\frac{7}{5}$
(۴) ۱۶

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۲۰ به علت تورم، بر قیمت کالایی به‌طور یکنواخت هر سال ۱۰ درصد اضافه می‌شود. در سال پنجم قیمت این کالا، چند برابر قیمت سال اول می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{3321}$
(۲) $\frac{1}{3761}$
(۳) $\frac{1}{4641}$
(۴) $\frac{1}{4751}$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۲۱ در یک دنباله هندسی با جملات مثبت نسبت جمله ۱۰ام به جمله ۱۶ام برابر ۲۵۶ است. اگر حاصل ضرب جمله چهارم با جمله دوم برابر ۵۱۲ باشد، جمله ۱۴ام کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۸
(۴) $64\sqrt{2}$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

۲۲ جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{7}{3}$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

در یک دنباله هندسی، جمله اول ۳ و جمله عمومی $t_n = \frac{1}{3} t_{n+1}$ است. کدام است؟

۲۳

$$\frac{1}{3^n} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3^n} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{3^{n-1}} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{3^n} \quad (۳)$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

پاسخ نامه (2) Homework

۱

$$\left. \begin{aligned} t_7 = 36 &\Rightarrow t_1 r = 36 \quad (*) \\ t_5 = \frac{9}{16} &\Rightarrow t_1 r^4 = \frac{9}{16} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{از تقسیم دو رابطه} \\ \text{بر هم} \end{array} \rightarrow r^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری می‌کنیم}]{\text{مقدار } r \text{ را در رابطه}} t_1 \left(\frac{1}{4}\right) = 36 \xrightarrow[\times 4]{\text{دو طرف}} t_1 = 144$$

دنباله $144, 36, 9, \dots$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

پاسخ سؤالات ۲ تا ۴

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

$$x^2 = (\lambda + \sqrt{15})(\lambda - \sqrt{15}) = 64 - 15 = 49$$

$$x = \pm 7$$

$$t_n = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5 \times 5^{1-n} = 5^{2-n}$$

$$-1 \leq \sin x < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{بیشترین: } \sin x = 1 \Rightarrow 3 \times 1 - 0/12 = 2/12 \\ \text{کمترین: } \sin x = -1 \Rightarrow 3 \times (-1) - 0/12 = -3/12 \end{cases}$$

پاسخ سؤالات ۵ تا ۸

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

درست

درست ۶

نادرست ۷

نادرست ۸

خواسته سؤال، شماره جمله، یعنی n است. ۹

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \frac{512}{729} = 18 \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر 18}} \frac{512}{729 \times 18} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه اعداد}} \frac{2^9}{3^8 \times 2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^8 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 9$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۴

$$\frac{32}{3}, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, 11$$

$$\frac{a_6}{a_1} = r^5 = \frac{11}{\frac{32}{3}} \Rightarrow r^5 = \frac{11 \times 3}{32} = \frac{33}{32} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$\frac{32}{3}, 16, 24, 36, 54, 11$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

$$\begin{aligned} a_7 = 23 &\Rightarrow a_1 + 6d = 23 \\ a_{15} = 63 &\Rightarrow a_1 + 14d = 63 \Rightarrow d = 5, a_1 = -7 \end{aligned}$$

$$a_{40} = -7 + (40 - 1) \times 5 = 188$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

۱۰

۱۱

۱۲

$$\frac{۳۲}{۳} \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad ۸۱$$

$$a_1 = \frac{۳۲}{۳}, \quad a_6 = ۸۱$$

$$a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow \frac{۳۲}{۳} \times r^5 = ۸۱ \Rightarrow r^5 = \frac{۲۴۳}{۳۲} \Rightarrow r = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۳۲}{۳}, \quad \frac{۳۲}{۳} \times \frac{۳}{۲} = ۱۶, \quad ۱۶ \times \frac{۳}{۲} = ۲۴, \quad ۲۴ \times \frac{۳}{۲} = ۳۶, \quad ۳۶ \times \frac{۳}{۲} = ۵۴, \quad ۸۱$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

گزینه ۴

۱۳

$$a_7 = ۴a_3 \Rightarrow a_1 + ۶d = ۴(a_1 + ۲d) \Rightarrow a_1 + ۶d = ۴a_1 + ۸d \Rightarrow ۳a_1 = -۲d \Rightarrow a_1 = -\frac{۲}{۳}d$$

$$\frac{d}{a_7} = \frac{d}{a_1 + d} = \frac{d}{-\frac{۲}{۳}d + d} = \frac{d}{\frac{۱}{۳}d} = ۳$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

گزینه ۲

۱۴

$$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \dots$$

$$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \dots$$

$$\text{مشترک} \quad a_1 = ۳۷$$

$$d = [۵, ۷] = ۳۵ \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = ۳۵n + ۲$$

$$a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰ \Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/۸ \leq n < ۸/۵$$

$$\Rightarrow n = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸$$

$$\text{تعداد جملات مشترک سه رقمی} = ۸ - ۲ = ۶$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۵

گزینه ۴

۱۵

این مسئله نشان‌دهنده یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 750$ ، قدر نسبت (اختلاف مشترک) $d = 25$ و جمله آخر $a_n = 2000$ است:

$$\begin{aligned} 750, 775, \dots, 2000 &\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \\ \Rightarrow 2000 &= 750 + (n-1) \times 25 \\ \Rightarrow 2000 &= 750 + 25n - 25 \Rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

گزینه ۳

۱۶

جمله عمومی دنباله حسابی به فرم $a_n = a_1 + (n-1)d$ است و اگر a, b و c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ است.

$$\begin{aligned} a_3, a_7, a_9 &\Rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d \\ \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) &= (a_1 + 6d)^2 \\ \Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 2a_1d + 16d^2 &= a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 \Rightarrow 20d^2 + 2a_1d = 0 \\ \xrightarrow{\div 2d} 10d + a_1 &= 0 \Rightarrow a_{11} = 0 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

گزینه ۲

۱۷

پنج واسطه حسابی

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 2^{20} \qquad \qquad \qquad 2^{22} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_7 &= a_1 + 6d \Rightarrow 2^{22} = 2^{20} + 6d \Rightarrow 6d = 2^{22} - 2^{20} \Rightarrow d = 2^{19} \\ \text{کوچک‌ترین واسطه حسابی} &= a_2 = a_1 + d = 2^{20} + 2^{19} \\ &= 2 \times 2^{19} + 2^{19} = 3 \times 2^{19} \\ \Rightarrow \frac{a_2}{d} &= \frac{3 \times 2^{19}}{2^{19}} = 3 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

گزینه ۴

۱۸

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 60 \Rightarrow 5a_1 + 10d = 60 \Rightarrow a_1 + 2d = 12$$

$$a_4 + a_5 = 3(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow 2a_1 + 7d = 3(3a_1 + 3d)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 7d = 9a_1 + 9d \Rightarrow 7a_1 + 2d = 0$$

$$\begin{aligned} a_1 + 2d &= 12 & -7a_1 - 14d &= -84 \\ \Rightarrow 7a_1 + 2d &= 0 & \Rightarrow 7a_1 + 2d &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -12d = -84 \Rightarrow d = 7$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۱

۱۹

دنباله ارتفاع‌های توپ از زمین، یک دنباله هندسی است با $t_1 = 40$ و $r = \frac{1}{4}$ ، بنابراین جمله پنجم این دنباله $2/5$ است.

$$40, 20, 10, 5, 2/5, \dots$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۳

۲۰

قیمت کالا را X در نظر می‌گیریم که قرار است هر سال ۱۰٪ به آن افزوده شود:

$$X + \frac{10}{100}X = 1/1X$$

پس در هر سال قیمت‌ها در $1/1$ ضرب می‌شوند، به عبارت دیگر یک دنباله هندسی با قدرنسبت $1/1$ می‌سازند و داریم:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^F}{a_1} = r^F = (1/1)^F = 1/4641$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲۱

$$\frac{a_{10}}{a_6} = \frac{a_1 q^9}{a_1 q^5} \Rightarrow \frac{a_{10}}{a_6} = \frac{a_1 q^9}{a_1 q^5} = q^4 = 256 \Rightarrow q = 4$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} \Rightarrow a_1^2 q^2 = 512 \xrightarrow{q=4} a_1 = \pm \sqrt{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_4 = a_1 \times 4^3 = 64a_1 = 64\sqrt{2}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲۲

جملات t_5, t_{12}, t_7 از دنباله حسابی، جملات متوالی از دنباله هندسی هستند، بنابراین:

$$\begin{aligned} t_5^2 &= t_7 \times t_{12} \Rightarrow (t_1 + 4d)^2 = (t_1 + d)(t_1 + 11d) \\ &\Rightarrow t_1^2 + 8t_1d + 16d^2 = t_1^2 + 12t_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 - 4t_1d = 0 \\ &\quad d = 0 \\ &\Rightarrow d(5d - 4t_1) = 0 \Rightarrow 5d = 4t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{5}{4}d \end{aligned}$$

پس جملات دنباله حسابی طبق جمله عمومی برابرند با:

$$t_1 + d, t_1 + 4d, t_1 + 11d \xrightarrow{t_1 = \frac{5}{4}d} \frac{9}{4}d, \frac{21}{4}d, \frac{49}{4}d \Rightarrow r = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{7}{3}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲۳

قدرنسبت $\frac{1}{3}$. از طرفی جمله اول برابر ۳ است، پس:

$$t_n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow t_n = 3 \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{3^{n-1}}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴۰۲

فرمول دنباله حسابی یا عددی یا الگوری فضی

درجه یک و به شکل $a_n = t_n = U_n = dn + b$

است a_n یا t_n بر حسب n از درجه یک است

رابطه شبه عدد خط $y = an + b$ است

شیب خط یعنی a در $t_n = dn + b$

همان قدر شیب یا d است. مثلاً

در $t_n = 3n - 7$ داریم:

$t_1 = -4$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 5$...

$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n$

$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots, t_1 + (n-1)d$

فرمول یک $t_n = t_1 + (n-1)d$

فرمول دو $t_n = dn + b$

مثال: جمله عمومی $3, 7, 11, 15, 19, \dots$ را بیابید

فرمول یک $t_n = t_1 + (n-1)d$

$t_n = 3 + (n-1)4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$

فرمول دو $t_n = dn + b$

$t_n = 4n + b$
 $t_1 = 4(1) + b = 3 \rightarrow \boxed{b = -1}$

ی-نیم جمله اول برابر ۳ است

$t_n = dn + b$
 $\boxed{t_n = 4n - 1}$

دنباله عددی یا حسابی یا فضی

$t_n = t_1 + (n-1)d$

یعنی کمتر از اندیس

$t_n = dn + b$

قدرت

در دنباله حسابی یا عددی یا فضی هر جمله از افزودن (کاستن) d واحد به جمله قبلی بدست می آید.

$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots, t_1 + (n-1)d$
 $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n$

$t_n = t_1 + (n-1)d$

$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

صورت دیگر دنباله حسابی $t_n = dn + b$

می دانیم $\begin{cases} t_3 - t_2 = 2d \\ t_2 - t_1 = 5d \end{cases}$

$2, 4, 6 \rightarrow 2 + 6 = 2(4)$

$a, b, c \rightarrow a + c = 2b$

دنباله حسابی $\frac{a+c}{2} = b$

دنباله حسابی ۲ عدد عمل ۲ عدد است

$2, 4, 6, 8$
 t_1, t_2, t_3, t_4

چند مثال و خاصیت دنباله حسابی:

جمع اولین برابر جمع وسطین

$2 + 8 = 4 + 6$
 $a, b, c, d \rightarrow a + d = b + c$

دنباله حسابی

t_1, t_2, t_3, t_4 $1 + 4 = 2 + 3 \rightarrow t_1 + t_4 = t_2 + t_3$

در دنباله حسابی جمع جملات

$$2, 4, 6, 8, 10, 12$$

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$$

متادى الفاسه از وسط برابر: ☺

$$1+6 = 2+5 = 3+4$$

$$t_1+t_6 = t_2+t_5 = t_3+t_4$$

$$2+12 = 4+10 = 6+8$$

$$\begin{cases} m+n = p+q \\ t_m + t_n = t_p + t_q \end{cases}$$

قانون اندیسیها:

به دنباله حسابی مقابل دقت کنید: 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$$

$$1+7 = 2+6 = 3+5 = 2(4)$$

$$t_1+t_7 = t_2+t_6 = t_3+t_5 = 2t_4$$

$$\begin{cases} m+n = 2k \\ t_m + t_n = 2t_k \end{cases}$$

قانون اندیسیها:

$$2+7 = 2(4)$$

$$t_2+t_7 = 2t_4$$

$$4+12 = 2(8)$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

نکته: در هر دنباله حسابی داریم:

مثال در یک دنباله حسابی $a_1 = 5$ و $a_3 = 13$ قدریت: $d = \frac{a_3 - a_1}{3 - 1} = \frac{13 - 5}{2} = 4$

دنباله هندسی: هر چه از ضرب عددی در جمله قبلی بدست می آید. مثل:

قدرت دنباله هندسی را با r نشان می دهیم: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n$$

$$t_1, t_1 r, t_1 r^2, t_1 r^3, \dots, t_1 r^{n-1}$$

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

$$t_n = t_1 r^{n-1} = 2(2)^{n-1}$$

چند خاصیت در دنباله هندسی را با مثال یاد می گیریم:

$a, b, c \rightsquigarrow ac = b^2 \rightsquigarrow b = \sqrt{ac}$ واسطه هندسی

$3 \xrightarrow{3 \times 7} 27 \rightsquigarrow 3(27) = 9^2 \rightsquigarrow 9 = \sqrt{3(27)} = 9$

نکته: برای ۲ عدد a و b واسطه حسابی از واسطه هندسی بزرگتر می آید.

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ \leftarrow 2 و 5 \leftarrow واسطه حسابی $= \frac{2+5}{2} = 3,5$ \leftarrow واسطه هندسی $= \sqrt{2(5)} = \sqrt{10} = 3,16$

آر ۲ در a و b برابر باشند واسطه حسابی و هندسی برابرند $\frac{5+5}{2} = 5 = \sqrt{5(5)} = 5$

$2, 6, 18, 54$
 $2 \times 27 = 54$
 $6 \times 9 = 54$

برای ۴ عدد که دنباله هندسی ساخته اند داریم:

$a, b, c, d \rightarrow ad = bc$
 $t_1, t_2, t_3, t_4 \rightarrow t_1 t_4 = t_2 t_3$
 $1 \times 4 = 2 \times 2$

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$
 $q=2$ $2=2$ $4=2$ $8=2$

به دنباله هندسی قابل توجه کنید:

$1, 2, 4, 8, 16$
 $(1)(16) = 2(8) = 4^2$
 $t_n = 2^{n-1}$
 $t_7 = 2^{7-1} = 2^6 = 64$

$t_n = t_1 q^{n-1} \rightsquigarrow t_n = (یک) 2^{n-1}$

قد رتبت = تفاضل ۲ جمله متوالی

جمله عمومی دنباله حسابی: $t_n = t_1 + (n-1)d$

جمله عمومی دنباله هندسی: $t_n = t_1 r^{n-1} = t_1 q^{n-1}$

رابطه ها شبیه هم اند ولی جمع ها به ضرب، ضرب ها به توان و تقزیق به تقسیم تبدیل شده

قد رتبت تقسیم دو جمله متوالی

دنباله حسابی $t_n = 2n$
 $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$

دنباله هندسی $t_n = 2^n$
 $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$

