BOX 4: نامعادله
صفحه‌های ۸۸ تا ۹۲ کتاب درسی

به کمک تعیین علامت می‌توانیم نامعادلات درجه دوم و گویا را حل کنیم. در این BOX با مسائل آن آشنا می‌شویم. هم‌چنین نامعادلات قدرمطلقی را حل می‌کنیم.

اگر **A** و **B** دو عبارت جبری باشند، نامعادلاتی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت‌های زیر هستند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	**A** کوچک‌تر از **B** است.
$A \leq B$	**A** کوچک‌تر یا مساوی **B** است.
$A > B$	**A** بزرگ‌تر از **B** است.
$A \geq B$	**A** بزرگ‌تر یا مساوی **B** است.

برای حل نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱) خاصیت جمع

برای عبارت‌های جبری **A**، **B** و **C**، اگر $A < B$، آن‌گاه $A + C < B + C$

۲) خاصیت ضرب

آ) اگر $C > ۰$ و $A > B$، آن‌گاه $AC > BC$ ‏ ‏ ‏ ب) اگر $C < ۰$ و $A > B$، آن‌گاه $AC < BC$

تمرین: نامعادلهٔ $۴x - ۱ \geq ۷x + ۵$ را حل کنید و مجموعه جواب به دست‌آمده را روی محور نمایش دهید.

$-۱ - ۵ \geq ۷x - ۴x$

$-۶ \geq ۳x$

$-۲ = \frac{-۶}{۳} \geq x$

$x \leq -۲$

ناحیه جواب

-۲

نامعادلات دوگانه: برای حل نامعادلاتی مانند $-۴ < -۲x + ۳ \leq ۲$ که به آن نامعادلهٔ دوگانه می‌گوییم، می‌توانیم به دو روش عمل کنیم:

نامعادله توأمان

روش اول: نامعادله را به صورت دو نامعادلهٔ جدا از هم در یک دستگاه نامعادلات نوشته و جواب هر کدام را پیدا می‌کنیم، سپس بین جواب‌های به دست آمده، اشتراک می‌گیریم:

$\cap$ و

$$\begin{cases} -۲x + ۳ \leq ۲ \Rightarrow -۲x \leq -۱ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \\ -۴ < -۲x + ۳ \Rightarrow -۷ < -۲x \Rightarrow x < \frac{۷}{۲} \end{cases} \xrightarrow[\cap \text{ و}]{\text{اشتراک}} \frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۷}{۲}$$

$\frac{۷}{۲} = \frac{-۷}{-۲} > x$

$\frac{۱}{۲} = ۰/۵$

$\frac{۷}{۲} = ۳/۵$

روش دوم: نامعادله را به همین شکل داده شده و با استفاده از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها حل کنیم:

$$-۴ < -۲x + ۳ \leq ۲ \xrightarrow{\text{طرفین را با } (-۳) \text{ جمع می‌کنیم}} -۴ - ۳ < -۲x + ۳ - ۳ \leq ۲ - ۳$$

$$\Rightarrow -۷ < -۲x \leq -۱ \xrightarrow[\text{(جهت نامساوی عوض می‌شود.)}]{\text{طرفین را بر } (-۲) \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۷}{۲}$$

همان‌طور که می‌بینید جواب به دست آمده از هر دو روش، یکسان است.

نکته: برای حل نامعادلهٔ غیر درجه اول، ابتدا نامعادله را به یکی از صورت‌های $P(x) > ۰$ یا $P(x) \geq ۰$ یا $P(x) < ۰$ یا $P(x) \leq ۰$ می‌نویسیم. سپس با تعیین علامت $P(x)$ و با توجه به علامت نامساوی، محدودهٔ جواب را مشخص می‌کنیم. اول همه رو ببر یه طرف:

تمرین: نامعادلهٔ $۲x^۲ - ۵x \geq -۳$ را حل کنید. مهم

$۲x^۲ - ۵x + ۳ \geq ۰$

$۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$

جمع ضرایب صفر $\longrightarrow x = ۱ \,,\, x = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۲}$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۳}{۲}$	
$۲x^۲ - ۵x + ۳ \geq ۰$		+ جواب	۰	−	۰	+ جواب

$x \in (-\infty, ۱] \overset{\text{یا}}{\cup} [\frac{۳}{۲}, +\infty)$

درجه ۲ زمانی همواره + است که $\Delta<0$ که علامتش همواره موافق علامت ضریب x^2 می‌شود. چون ضریب x^2 برابر ۱ و مثبت است اگر $\Delta<0$.

مقدار بالا یا بیشتر از ۰ باشد

مهم **تمرین:** به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟ (تمرین ۲ صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی)

جواب: $\frac{9}{4} < k \longleftarrow 9 < 4k$ $\quad$ $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \longrightarrow 9 - 4k < 0$ همواره + است.

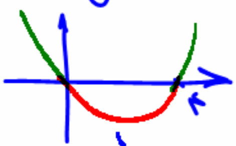
نکته: برای حل نامعادلات درجه دوم می‌توان از روش هندسی (رسم نمودار) نیز استفاده کرد. برای این کار نمودار $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ را رسم کرده و با توجه به نمودار، محدودهٔ x را مشخص می‌کنیم.

تمرین: نامعادلهٔ $x^2 - 4x \leq 0$ را به روش هندسی حل کنید.

سهمی $y = x^2 - 4x$ که $a=1>0$ دهانه به بالاست را رسم می‌کنیم.

$y = x^2 - 4x = x(x-4) = 0$

$x = 0, 4$ ریشه‌ها



در کدام x ها سهمی زیر محور x هاست یا صفر؟

جواب $x \in [0, 4]$

نامعادلات قدرمطلقی

برای حل نامعادلات قدرمطلقی از نکتهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:

۱) اگر $|u| \leq a$، آن‌گاه $-a \leq u \leq a$ $\quad$ وقتی کوچکتری کیر میوفتی بین سر و ته کوچه

۲) اگر $|u| \geq a$، آن‌گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$ $\quad$ وقتی بزرگتری از سر کوچه به بعد از ته کوچه به قبل

در هر یک از این نامعادلات، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ‌کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

تمرین: هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

۱) $|3x - 5| \leq 4$

$-4 \leq 3x - 5 \leq 4$

$1 = 5 - 4 \leq 3x \leq 4 + 5 = 9$

$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{9}{3} = 3$

۲) $|2 - x| > 4$

$2 - x > 4$ یا $2 - x < -4$

$-2 > x$ یا $6 < x$

$-2 \quad 6$

نکته: ۱) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه نامعادلهٔ $|x| \leq a$ جواب ندارد. به عنوان مثال، نامعادلهٔ $|x| < -4$ جواب ندارد، زیرا $|x|$ عددی نامنفی است و نمی‌تواند از عدد -4 کوچک‌تر باشد.

$x \in \varnothing$

۲) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه نامعادلهٔ $|x| \geq a$ همواره جواب دارد. به عنوان مثال، نامعادلهٔ $|4x + 3| \geq -1$ همواره جواب دارد، زیرا $|4x + 3|$ همواره عددی نامنفی است که قطعاً از -1 بزرگ‌تر است.

$x \in \mathbb{R}$

۳) برای حل معادلات $|u| \leq |v|$ یا $|u| \geq |v|$، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان ۲ برسانیم و با توجه به تساوی $|u|^2 = u^2$، قدرمطلق را حذف کرده و سپس نامعادله را حل کنیم.

دو طرف را

تمرین: نامعادلهٔ $|x + 2| \leq |x - 1|$ را حل کنید. ۲ طرف نامعادله قدرمطلق است به توان ۲ می‌رسانیم:

$|x+2|^2 \leq |x-1|^2 \rightarrow (x+2)^2 \leq (x-1)^2 \rightarrow (x+2)^2 - (x-1)^2 \leq 0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} ((x+2)-(x-1))((x+2)+(x-1)) \leq 0$

$3(2x+1) \leq 0 \rightsquigarrow 2x + 1 \leq 0 \quad 2x \leq -1 \quad x \leq -\frac{1}{2}$ جواب

نکته: اگر بخواهیم نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسیم که مجموعه جواب آن به صورت بازهٔ (a, b) باشد آن‌گاه نامعادله به صورت $|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$ است و اگر بخواهیم نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسیم که مجموعه جواب آن به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، آن‌گاه نامعادله به صورت $|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{b-a}{2}$ است.

مهم برای تست

$a \quad b$

تمرین: نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید که مجموعهٔ جواب آن به صورت $(-2, 6)$ باشد.

$|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

$|x - \frac{-2+6}{2}| < \frac{6-(-2)}{2} = 4$

$|x - 2| < 4$

امتحان کردن جواب: $|x - 2| < 4$

$-4 < x - 2 < 4$ $)+2$

$-2 < x < 6$

پرسش‌های تشریحی:

۱- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید. مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید و سپس آن را روی محور نشان دهید.

آ) $4x+11 \ge 5x+3$
جواب $8 \ge x$

ب) $\frac{x}{3}-4x<\frac{x}{2}+1$

پ) $0 \le \frac{3-2x}{5} \le 1$

ت) $\frac{2x+1}{5}-\frac{x-1}{4} \ge \frac{x}{3}$

پ) ضرب در ۵: $0 \le 3-2x \le 5$
منهای ۳: $-3 \le -2x \le 2$
تقسیم بر -2: $\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2} \ge x \ge \frac{2}{-2}=-1$
$-1 \le x \le \frac{3}{2}$

ب) $\frac{x}{3}-4x<\frac{x}{2}+1$
$\frac{x}{3}-\frac{4x}{1}-\frac{x}{2}<1$
$\frac{2x-24x-3x}{6}<1 \quad \times 6$
$-25x<6$
$x>\frac{6}{-25}$

ت) $\frac{4(2x+1)-5(x-1)}{20}-\frac{x}{3}\ge 0$
$\frac{8x+4-5x+5}{20}-\frac{x}{3}\ge 0$
$\frac{3(3x+9)-20x}{60}\ge 0$
$-11x+27\ge 0 \quad 27\ge 11x \quad \frac{27}{11}\ge x$

۲- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.
برای حل نامعادلات ساده کن:

آ) $(x+2)^2-(2x-1)^2 \ge 8$

ب) $x(x-4)=\frac{x^2-4x}{2x+1} \le 0$
$x \in (-\infty,-\frac{1}{2}) \cup [0,4]$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		4	$+\infty$
x^2-4x	+		+	0	−	0	+
$2x+1$	−	0	+		+		+
ب ≤ 0	− جواب	∞	+		− جواب		+

پ) $\frac{-x^2(x+3)}{x^2-x+1}>0$

ت) $\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x-7}>0$

ث) $\frac{2x-4}{x+2}<2$

ج) $\frac{x^3-4x}{x^2+5} \le 0 \quad x\in(-\infty,-2]\cup[0,2]$

آ) $x^2+4x+4-(4x^2-4x+1)\ge 8$
$\cancel{x^2}+4x+4-\cancel{4x^2}+4x-1\ge 8$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-3x^2+8x-5\ge 0$		−	0	+	0	−	

$1\le x\le \frac{5}{3}$ جواب

$\underbrace{-3x^2+8x-5}_{\text{جمع ضرایب صفر}}$
$x_1=1 \quad x_2=\frac{c}{a}$

ج) $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)=0$
$\frac{}{x^2+5}\le 0$ همواره مثبت
ریشه‌های صورت $x=0,\pm 2$
ولی مخرج ریشه ندارد زیرا $x^2+5=0 \to x^2=-5$ در مخرج x^2 نامنفی ۵ مثبته
همیشه مثبته لذا x^2+5 مثبته برای این‌که کسر منفی یا صفر باشه صورتش باید - یا صفر باشه

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$(x+2)x(x-2)\le 0$		− جواب	0	+	0	− جواب	0	+	

۳- حدود x را طوری تعیین کنید که:

آ) نمودار $y=x^2-4x$ بالاتر از خط $y=x-4$ قرار بگیرد.

ب) سهمی $y=2x^2-7x+3$ پایین‌تر از سهمی $y=-x^2+2x+3$ قرار بگیرد.

آ) بالاتر
$x^2-4x>x-4$
$x^2-4x-x+4>0$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2-5x+4>0$		+ جواب	0	−	0	+ جواب	

جمع ضرایب صفر
$x=1$
$x=4$
$x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

ب) $2x^2-7x+3<-x^2+2x+3$
$3x^2-9x<0$

x	$-\infty$		0 (ریشه)		3 (ریشه)		$+\infty$
$3x(x-3)<0$		+	0	− جواب	0	+	

$0<x<3$

(آ) $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(m+1)(1) > 0 \rightsquigarrow 1 - 4m - 4 = -3 - 4m < 0 \rightarrow -3 < 4m$
$-\frac{3}{4} < m$

۴- به ازای چه مقادیری از m:

(مشابه تمرین‌های ۲ و ۳ صفحه ۹۳ کتاب درسی)

بسیار مهم

آ) معادلهٔ $\underbrace{(m+1)}_{a}x^2 + \underset{b=1}{x} + \underset{c=1}{1} = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

ب) معادلهٔ $\underset{a=1}{x^2} + \underbrace{(m+1)}_{b}x + \underbrace{m+4}_{c} = 0$ فاقد ریشهٔ حقیقی است؟

پ) خط به معادلهٔ $y = mx$ منحنی به معادلهٔ $y = -x^2 + 2x - 4$ را در دو نقطه قطع می‌کند؟

ت) سهمی $y = mx^2 + (m+1)x + m$ همواره پایین محور xها قرار می‌گیرد؟

ث) سهمی $y = x^2 - mx + m + \frac{5}{4}$ همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد؟

(ب) $\Delta = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(1)(m+4) < 0$
$m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 = m^2 - 2m - 15 < 0$

m	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$m^2 - 2m - 15 < 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(m+3)(m-5)$
$-3 \quad 5$

جواب تست (ب)
$-3 < m < 5$

پ) کافی است خط $y=mx$ را با سهمی قطع دهیم (برابر قرار دهیم) و همه را یک طرف بیاوریم تا معادله برخورد، نقاط برخورد یا تلاقی خط و سهمی به دست آید که درجه دو است برای این که خط و سهمی در ۲ نقطه یکدیگر را قطع کنند باید معادله تلاقی ۲ ریشه داشته باشد یعنی $\Delta > 0$ باشد.

$-x^2 + 2x - 4 = mx \rightarrow -x^2 + 2x - mx - 4 = 0 \rightarrow \underbrace{-x^2 + (2-m)x - 4 = 0}_{\text{معادله تلاقی خط و سهمی}}$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \longrightarrow \Delta = (2-m)^2 - 4(-1)(-4) = 4 - 4m + m^2 - 16 > 0 \longrightarrow m^2 - 4m - 12 > 0 \quad (m-6)(m+2) > 0$
$6 \quad -2$

m		-2		6	
$m^2 - 4m - 12 > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

$m \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

۵- دو سهمی به معادلات $y = x^2 - 2x - m$ و $y = -x^2 - (m+1)x + \frac{1}{2}$ همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. حدود m را مشخص کنید.

۶- یک جسم از بالای ساختمان به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h = -4t^2 + 20t + 15$ به دست آید، آن‌گاه:

(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی)

آ) ارتفاع ساختمان را به دست آورید.

ب) در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع جسم از سطح زمین بیشتر از ۱۵ متر خواهد بود؟

پ) در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع جسم از سطح زمین کم‌تر از ۳۱ متر خواهد بود؟

تعیین علامت عبارت های جبری در یک خط (روش سریع) در امتحان مدرسه و نهایی ننویسید.

اول نام ریشه ها را باید یاد گرفت:

۱) $ax+b=0 \longrightarrow x=-\frac{b}{a}$ ساده $\qquad 2x+5=0 \longrightarrow x=-\frac{5}{2}$ ساده

۲) $x^2-a^2=0 \longrightarrow (x+a)(x-a)=0 \longrightarrow x=a$ ساده یا $x=-a$ ساده $\sim\sim$ $x^2-4=0 \longrightarrow (x+2)(x-2)=0$

$x=-2\ ,\ x=2$ هر دو ریشه ساده

۳) $(x-a)^{2n}=0 \longrightarrow x=a$ ریشه مکرر مرتبه زوج اگر $n=2$ بود ریشه مضاعف داریم.

$(x+1)^2=0 \longrightarrow (x+1)(x+1)=0$

$x=-1 \quad x=-1$

$x=-1$ ریشه تکرار شده است مکرر ۲ بار تکرار شده.

پس مکرر مرتبه ۲ یا مضاعف است.

$(x-6)^4=0 \longrightarrow (x-6)(x-6)(x-6)(x-6)=0$ $\quad x=6$ ۴ بار

۴) $(x-a)^{2n+1}=0 \longrightarrow x=a$ ریشه مکرر مرتبه فرد

$(x+2)^3=0 \longrightarrow (x+2)(x+2)(x+2)=0$ $\quad x=-2$ ۳ بار

۵) $ax^2+bx+c=0 \longrightarrow$

- $\Delta>0$ ۲تا ریشه ساده $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta=0$ ریشه مضاعف $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$
- $\Delta<0$ ریشه ندارد

در امتحان نهایی ننو.

روش تعیین علامت سریع: عبارات صورت، مخرج را تجزیه کنید، برابر صفر قرار دهید و ریشه های صورت و مخرج را به همراه نام آن ها پیدا کنید در جدول تعیین علامت ریشه ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم و نام آن ها روی سرشان می نویسیم. یک عدد بزرگتر از بزرگترین ریشه در نظر می گیریم و آن را به همه عبارت می دهیم و علامت عبارت را پیدا کرده در اولین خانه سمت راست زیر $+\infty$ می نویسیم. عبارت ها در ریشه ساده و مکرر مرتبه فرد تغییر علامت می دهند اما در ریشه مضاعف و مکرر مرتبه زوج تغییر علامت نمی دهند. یعنی اگر همه ریشه ها ساده یا فرد بودند علامت یک در میان عوض شده اما اگر یه ریشه زوج یا مضاعف داشتیم علامت عبارت وقتی از روی آن ریشه عبور می کنیم عوض نمی کند. به دو مثال هم زیر توجه کنید.

الف) $x^3-4x\geq 0$

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$x=0\ ,\ -2\ ,\ 2$

ریشه ها ساده اند

x	$-\infty$		ساده -2		ساده 0		ساده 2		مثلاً 3	$+\infty$
$x^3-4x\geq 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
				جواب				جواب		

ب) $\frac{x^3-4x^2}{(x-1)^4}\leq 0$

$x^3-4x^2=x^2(x-4)=0$

$x=0$ مضاعف $\qquad x=4$ ساده

$(x-1)^4=0 \longrightarrow x=1$ زوج

x	$-\infty$		مضاعف 0		زوج 1		ساده 4		مثلاً 5	$+\infty$
$\frac{x^3-4x^2}{(x-1)^4}\leq 0$		$-$	0	$-$	تن	$-$	0	$+$		

جواب $x\in(-\infty,1)\cup(1,4]$

نامعادلات زیر را حل کنید. (از جزوه درسی صفحه ۲۰۹)

پ) $\dfrac{-x^2(x+3)}{x^2-x+1} > 0$

راه امتحان مدرسه

$-x^2(x+3)=0 \longrightarrow x=0 \,,\, x=-3$

$x^2-x+1=0 \longrightarrow \Delta=(-1)^2-4<0$ ریشه ندارد،

عبارت درجه دو با Δ منفی علامتش همواره موافق ضریب x^2 و مثبت است

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$	
پ		$+$		$-$		$-$	
		جواب					

$x \in (-\infty, -3)$

راه تستی در یک خط:

x	$-\infty$		ساده -3		مضاعف 0	مثلاً ۱	$+\infty$
$\dfrac{-x^2(x+3)}{x^2-x+1}>0$		$+$	0	$-$	0	$-$	

ضمناً در تعیین علامت (پ) می‌توان اصلاً مخرج را در نظر نگرفت زیرا همواره مثبت است

$x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta<0$

همواره موافق ضریب x^2 و مثبت است.

ت) $\dfrac{x^2-6x+5}{\underbrace{-x^2+2x-7}} > 0$

$\Delta=(2)^2-4(-1)(-7)<0$

همواره موافق علامت ضریب x^2 و منفی است

$\dfrac{(x-1)(x-5)}{\text{منفی}} > 0 \leadsto (x-1)(x-5)<0$

$x^2-6x+5<0$

x		1		5	
$(x-1)(x-5)<0$	$+$	0	$-$	0	$+$
			جواب		

$1<x<5$

ث) $\dfrac{2x-4}{x+2} < 2$

نکته: برای حل نامعادله آن‌ها را طرفین ــ وسطین نکنید. همه عبارات را یک طرف ببرید، ساده کنید و تعیین علامت کنید.

$\dfrac{2x-4}{x+2}-\dfrac{2}{1}<0 \leadsto$ مخرج مشترک $\dfrac{2x-4-2(x+2)=2x-4-2x-4}{x+2}=\dfrac{-8}{x+2}<0$

کسر منفی است صورت هم منفی است باید مخرج مثبت باشد:

$x+2>0$

$\boxed{x>-2}$