منفی بودن یعنی زیر محور x بودن.

مثبت بودن یعنی بالای محور xها بودن.

صفر بودن یعنی روی محور xها بودن یا ریشه داشتن یا به محور x برخورد کردن یا مماس شدن

BOX 3: تعیین علامت (صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸ کتاب درسی)

در این قسمت می‌خواهیم علامت یک عبارت جبری را از نظر مثبت یا منفی، یا صفربودن مشخص کنیم که به این عمل، تعیین علامت می‌گوییم. با تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم آشنا می‌شویم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

صفر کن معادله رو. مثلاً در $2x+4=0$ ، $x=-2$ ریشه است.

برای تعیین علامت $y=ax+b$ ابتدا معادلهٔ $ax+b=0$ را حل می‌کنیم، $x=-\frac{b}{a}$ ریشهٔ این معادله است، سپس از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$ (ریشه)	$x>-\frac{b}{a}$
$y=ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

جلوی ریشه پایین میره

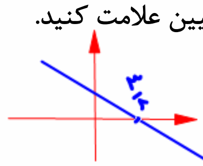
شیب خط ۴- و خط نزولیه.

تمرین: عبارت $P=-4x+6$ را تعیین علامت کنید.

$0=-4x+6$

$4x=6$

$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$



x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$P=-4x+6$		+	۰	−	
		شکل بالای محور xها		شکل زیر محور xها	

$a=-4$

نکته: برای تعیین علامت عبارت‌هایی که به صورت ضرب و یا تقسیم چند عبارت درجه اول هستند، ابتدا ریشهٔ هر یک از عبارت‌ها را به دست می‌آوریم و ریشه‌ها را در جدول از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. هر عبارت را در یک سطر قرار می‌دهیم و آن‌ها را با توجه به ریشهٔ آن عبارت تعیین علامت می‌کنیم. علامت کل عبارت، بر اساس ضرب و تقسیم علامت هر یک از عبارت‌ها به دست می‌آید.

تمرین: عبارت $A=\frac{x-1}{5-2x}$ را تعیین علامت کنید.

سؤال: عبارت A در کدام بازه مثبت است؟ $1<x<2.5$

x	$-\infty$		۱		$2.5=\frac{5}{2}$		$+\infty$
$x-1$		−	۰	+		+	
$5-2x$		+		+	۰	−	
$A=\frac{x-1}{5-2x}$		−	۰	+	ت ن	−	

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

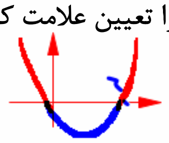
چندجمله‌ای درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی‌اند و $a\neq 0$ است را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادلهٔ $P=0$ را حل می‌کنیم. سپس برحسب این که معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی $(\Delta>0)$ یا فقط یک ریشهٔ مضاعف $(\Delta=0)$ و یا فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، علامت P را تعیین می‌کنیم.

۱) اگر معادلهٔ $P=0$ دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2، $(x_1<x_2)$ داشته باشد $(\Delta>0)$، جدول تعیین علامت P به صورت مقابل است:

x		x_1		x_2	
P	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

سهمی دهانه به بالا $a=1>0$

تمرین: عبارت $P=x^2-6x$ را تعیین علامت کنید.



$0=x^2-6x$

$0=x(x-6)$

$x=0\ ,\ 6$ دو تا ریشه

x	$-\infty$		۰		۶		$+\infty$
$P=x^2-6x$		+	۰	−	۰	+	

۲) اگر معادلهٔ $P=0$ ریشهٔ مضاعفی برابر با $x=-\frac{b}{2a}$ داشته باشد $(\Delta=0)$، جدول تعیین علامت P به صورت مقابل است:

x		$-\frac{b}{2a}$	
P	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

اگر عبارت درجه ۲ (سهمی) ریشه مضاعف دارد و $\Delta=0$ علامتش همواره موافق علامت a (ضریب x^2) است.

$a=-1<0$ سهمی دهانه به پایین

$\Delta=b^2-4ac=0$

$\Delta=(6)^2-4(-1)(-9)=0$

تمرین: عبارت $P=-x^2+6x-9$ را تعیین علامت کنید.

$0=-x^2+6x-9$

$0=-(x^2-6x+9)$

$0=-(x-3)^2 \to x=3$ مضاعف

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$P=-x^2+6x-9$	$-$	0	$-$

همواره موافق علامت a

نکته: اگر $\Delta=0$ و $a>0$، آن‌گاه همواره داریم: $ax^2+bx+c\ge 0$ و اگر $\Delta=0$ و $a<0$، آن‌گاه همواره داریم: $ax^2+bx+c\le 0$

۳) اگر معادلهٔ $P=0$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد $(\Delta<0)$، آن‌گاه جدول تعیین علامت P به صورت مقابل است:

x	به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x
P	موافق علامت a

اگر $\Delta<0$ علامت همواره موافق علامت a (ضریب x^2) است.

همواره بالای محور xها

تمرین: عبارت $P=x^2+5x+7$ را تعیین علامت کنید.

$a=1>0$ دهانه به بالا

$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(1)(7)<0$ همواره موافق علامت a و مثبت است.

x	$-\infty$	$+\infty$
P	$+$	

تمرین: عبارت $P=\frac{-x(x+2)}{x^2-5x+6}$ را تعیین علامت کنید.

$-x^2-2x=0 \to x=0,-2$

$x^2-5x+6=0$، $(x-2)(x-3)=0$، $x=2$ و 3

x	$-\infty$	-2		0		2		3	$+\infty$
$-x^2-2x$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$
x^2-5x+6	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
P	$-$	0	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$

عبارت P در $x=2,3$ تعریف نشده (ت.ن) است.

نکته: در عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$، اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ و $a>0$، آن‌گاه P به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، مثبت و اگر $\Delta<0$ و $a<0$، آن‌گاه P به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ منفی می‌باشد.

در عبارت درجه ۲ با $\Delta<0$ علامتش همواره موافق علامت ضریب x^2 است.

تمرین: ثابت کنید عبارت $P=-x^2+4x-9$ به ازای تمام مقادیر حقیقی x، منفی می‌باشد.

$a=-1<0$ دهانه به پایین

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(-1)(-9)=16-36=-20<0$ عبارت همواره موافق علامت $a=-1$ و منفی است.

x	$-\infty$	$+\infty$
P	$-$	

پرسش‌های تشریحی:

۱- هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

آ) $A=-x+4$

x		4	
	$+$	0	$-$

ب) $A=x^3(4-x)$ — $x=0$، $x=4$ ریشه‌ها

پ) $A=\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$ — $x(x-3)=0$، $(x-2)(x-3)$

ت) $A=\frac{-x^2-1}{x^2+x-12}$ — $-(x^2+1)=0$، $(x-3)(x+4)$

$-x^2-1$ ریشه ندارد و $\Delta<0$ همواره منفی است

ث) $A=\frac{(x^2-4)(-3x+5)}{(x+3)(x^2+x+1)}$

ج) $A=(-x^2+2x)(x+2)^2$

چ) $A=\frac{x^3+x}{(x^2+4)(x-2)}$

ح) $A=\frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$

تمرین جلسه بعد ث، ج، چ، ح

ب)

x		0		4	
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
A	$-$		$+$		$-$

پ)

x		0		2		3	
x^2-3x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-5x+6	$+$		$+$		$-$		$+$
A	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$	ت.ن	$+$

ت)

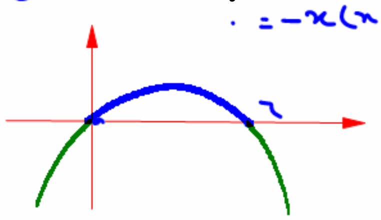
x		-4		3	
$-x^2-1$	$-$		$-$		$-$
x^2+x-12	$+$	0	$-$	0	$+$
A	$-$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$

۲- با رسم هر یک از سهمی‌های زیر، y را تعیین علامت کنید.

آ) $y = -x^2 + 6x$

دهانه به پایین

$= -x(x-6)$



x		0		6	
y	−	0	+	0	−

بالای x ها

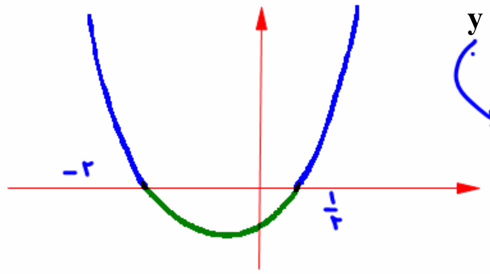
ب) $y = (2x-1)(x+2)$

$= (2x-1)(x+2)$

$x = \frac{1}{2} \quad x = -2$

$y = 2x^2 + \cdots$

سهمی دهانه به بالا



x		-2		1/2	
y	+		−		+

زیر x ها

۳- به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، ثابت کنید:

آ) $2x^2 - 8x + 9 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4(2)(9)$

$\Delta = 64 - 72 < 0$

علامت عبارت درجه دو همواره موافق ضریب x^2 و مثبت است

ب) $-x^2 + mx - m^2 - 5 < 0$

$a = -1 \quad b = m \quad c = -m^2 - 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = m^2 - 4(-1)(-m^2-5)$

$\Delta = m^2 - 4m^2 - 20$

$\Delta = -3m^2 - 20 = -(3m^2+20) < 0$

علامت عبارت درجه دوم همواره، موافق ضریب x^2 و منفی است.

Homework

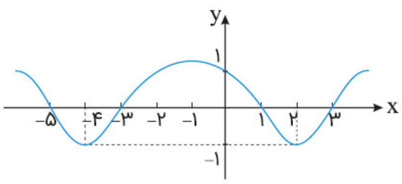
۱ سهمی $y=-mx^{۲}+mx+۱$ و خط $y=-m-x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۲ عبارت $\dfrac{x-x^{۲}-۸}{x^{۲}-x-۶}$ در چه بازه‌ای منفی است؟

۱) $[-۲\,,\,+\infty)$
۲) $(-\infty\,,\,-۲]\cup(۳\,,\,+\infty)$
۳) $(-\infty\,,\,-۲)\cup(۳\,,\,+\infty)$
۴) $(-\infty\,,\,۳)$

۳ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که عبارت $A=\dfrac{f^{۳}(x)-۳f^{۲}(x)+۵f(x)}{x^{۳}-۴x^{۲}+۳x}$ در آن همواره مثبت است، کدام می‌باشد؟



۱) $(-۴\,,\,-۳)\cup(۱\,,\,۲)$
۲) $(۰\,,\,۱)$
۳) $[-۵\,,\,-۳]\cup(۱\,,\,۳)$
۴) $(-۵\,,\,-۳)\cup(۰\,,\,۱)\cup(۱\,,\,۳)\cup(۳\,,\,+\infty)$

۴ عبارت $\dfrac{۲}{x}-۳$ در کدام بازه نامنفی است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $(۰,+\infty)$
۳) $(-\infty,\dfrac{۲}{۳})$
۴) $(-\infty,۰)\cup[\dfrac{۲}{۳},+\infty)$

۵ تابع $y=\dfrac{(x+۱)^{۲}(x-۱)^{۳}(x+۲)}{(x-۲)^{۵}}$ در چند نقطه تغییر علامت می‌دهد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۶ به‌ازای چه مقادیری از m معادله $2x^2 - mx - m = 0$ ریشه حقیقی ندارد؟

۱) $m > 0$
۲) $m > 8$
۳) $-8 < m < 0$
۴) $0 < m < 8$

۷ عبارت $P(x) = 6mx^2 + 2x - 1$ همواره منفی است. حدود m کدام است؟

۱) $m < 0$
۲) $m < -\frac{1}{6}$
۳) $-\frac{1}{6} < m < 0$
۴) $m > -\frac{1}{6}$

باتوجه‌به جدول تعیین علامت، عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۸
$$A = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)(-x+2)}$$

۹
$$B = \frac{(1-x)^5(-x^2 + 3x - 4)}{|2x-1|}$$

۱۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟ (با تغییر)

۱) $\{-2 < m < 2/5\} - \{\frac{1}{2}\}$
۲) $-1 < m < 3/5$
۳) $\{-1 < m < 3/5\} - \{\frac{1}{2}\}$
۴) $-1 < m < 2/5$

پاسخ Homework

۱

گزینه ۴

$$-mx^{۲}+mx+۱=-m-x \Rightarrow mx^{۲}-(۱+m)x-m-۱=۰$$

$$\Delta<۰ \Rightarrow (۱+m)^{۲}+۴m(m+۱)<۰ \Rightarrow (۱+m)(۱+۵m)<۰$$

$$\Rightarrow -۱<m<-\frac{۱}{۵} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} \text{هیچ مقدار}$$

۲

گزینه ۳

$$\frac{-x^{۲}+x-۸}{x^{۲}-x-۶}<۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^{۲}+x-۸=۰ \;\Rightarrow\; \Delta=۱-۴(-۱)(-۸)<۰ \;\Rightarrow\; \text{ریشه ندارد}\ (*) \\ x^{۲}-x-۶=۰ \;\Rightarrow\; (x-۳)(x+۲)=۰ \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x=۳ \\ x=-۲ \end{matrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} a<۰ \;\Rightarrow\; \text{همواره منفی}$$

x		−۲		۳	
$-x^{۲}+x-۸$	−		−		−
$x^{۲}-x-۶$	+	۰	−	۰	+
y	−	تن	+	تن	−

۳

گزینه ۴

$$A=\frac{f(x)(f^{۲}(x)-۳f(x)+۵)}{x(x-۳)(x-۱)}$$

عبارت $f^{۲}(x)-۳f(x)+۵$ همواره مثبت است، زیرا:

$$\begin{cases}\Delta=۹-۲۰<۰\\ a=۱>۰\end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را برای A رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۱		۳		$+\infty$
$f(x)$		+	۰	−	۰	+		+	۰	−	۰	+	
$x^{۳}-۴x^{۲}+۳x$		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+	
A		−	۰	+	۰	−	ت ن	+	ت ن	+	ت ن	+	

$$\Rightarrow A>۰\Rightarrow(-۵\,,\,-۳)\cup(۰\,,\,۱)\cup(۱\,,\,۳)\cup(۳\,,\,+\infty)$$

۴

گزینه ۴

$$۳-\frac{۲}{x}\geq ۰\Rightarrow\frac{۳x-۲}{x}\geq ۰\Rightarrow\begin{cases}۳x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\\ x=۰\end{cases}$$

		۰		$\frac{۲}{۳}$	
$۳x-۲$	−		−	۰	+
x	−	۰	+		+
$\frac{۳x-۲}{x}$	+	ت ن	−	۰	+

$$\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup[\frac{۲}{۳},+\infty)$$

۵

گزینه ۴

تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۲		-۱		۱		۲		$+\infty$
$(x+۱)^۲$		+		+	∘	+		+		+	
$(x-۱)^۳$		−		−		−	∘	+		+	
$x+۲$		−	∘	+		+		+		+	
$(x-۲)^۵$		−		−		−		−	ن ت	+	
y		−	∘	+	∘	+	∘	−	ن ت	+	

در سه نقطه $x=-۲$ و $x=۱$ و $x=۲$ تغییر علامت می‌دهد.

۶

گزینه ۳

وقتی $\Delta < ۰$ باشد، آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد، پس:

$$(-m)^۲ - ۴(۲)(-m) < ۰ \Rightarrow m^۲ + ۸m < ۰ \Rightarrow m(m+۸) < ۰$$

		-۸		۰	
$m^۲+۸m$	+	∘	−	∘	+

$$\Rightarrow -۸ < m < ۰$$

۷

گزینه ۲

برای اینکه عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی و Δ نیز منفی باشد، پس:

$$۶m < ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$\Delta = ۴ + ۲۴m < ۰ \Rightarrow ۲۴m < -۴ \Rightarrow m < -\frac{۱}{۶}$$

بنابراین به ازای $m < -\frac{۱}{۶}$ عبارت موردنظر همواره منفی است.

۸ تعیین ریشه:

$$-x^{۲}+۲x+۳=۰ \Rightarrow x_{۱}=۳\,,\ x_{۲}=-۱$$

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$-x+۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

x		-۱		۱		۲		۳	
$-x^{۲}+۲x+۳$	−	۰	+		+		+	۰	−
$x-۱$	−		−	۰	+		+		+
$-x+۲$	+		+		+	۰	−		−
A	+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	+

۹ تعیین ریشه:

$$-x^{۲}+۳x-۴=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۱۶=-۷ \quad \text{ریشه ندارد}$$

$$(۱-x)^{۵}=۰ \Rightarrow ۱-x=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$|۲x-۱|=۰ \Rightarrow ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

x		$\frac{۱}{۲}$		۱	
$-x^{۲}+۳x-۴$	−		−		−
$(۱-x)^{۵}$	+		+	۰	−
$\|۲x-۱\|$	+	۰	+		+
B	−	ت ن	−	۰	+

۱۰ گزینه ۳

مسئله را با این شرط که ضریب $x^{۲}$ مخالف صفر است، حل می‌کنیم. ($۲m-۱\neq ۰$)
شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد این است که $\Delta>۰$.

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۶)^{۲}-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۹-\left(۲m^{۲}-۴m-m+۲\right)>۰ \Rightarrow ۲m^{۲}-۵m-۷<۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(۲m-۷)(m+۱)}_{P(m)}<۰ \Rightarrow m=-۱,\ \frac{۷}{۲}$$

m		-۱		$\frac{۷}{۲}$	
$P(m)$	+	۰	−	۰	+

$$P(m)<۰ \Rightarrow -۱<m<\frac{۷}{۲}$$

از طرفی $m\neq\frac{۱}{۲}$، پس: $\{-۱<m<۳/۵\}-\{\frac{۱}{۲}\}$

BOX 4: نامعادله — صفحه‌های ۸۸ تا ۹۲ کتاب درسی

به کمک تعیین علامت می‌توانیم نامعادلات درجه دوم و گویا را حل کنیم. در این BOX با مسائل آن آشنا می‌شویم. هم‌چنین نامعادلات قدرمطلقی را حل می‌کنیم.

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادلاتی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت‌های زیر هستند:

می‌خوانیم	نامعادله
A کوچک‌تر از B است.	$A < B$
A کوچک‌تر یا مساوی B است.	$A \le B$
A بزرگ‌تر از B است.	$A > B$
A بزرگ‌تر یا مساوی B است.	$A \ge B$

برای حل نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱) خاصیت جمع

برای عبارت‌های جبری A، B و C، اگر $A < B$، آن‌گاه $A + C < B + C$

۲) خاصیت ضرب

آ) اگر $C > ۰$ و $A > B$، آن‌گاه $AC > BC$ — ب) اگر $C < ۰$ و $A > B$، آن‌گاه $AC < BC$

تمرین: نامعادلهٔ $۴x - ۱ \ge ۷x + ۵$ را حل کنید و مجموعه جواب به دست‌آمده را روی محور نمایش دهید.

$-۱ - ۵ \ge ۷x - ۴x$

$-۶ \ge ۳x$

$-۲ = \frac{-۶}{۳} \ge x$

$x \le -۲$

ناحیه جواب

-۲

نامعادلات دوگانه: برای حل نامعادلاتی مانند $-۴ < \boxed{-۲x + ۳} \le ۲$ که به آن نامعادلهٔ دوگانه می‌گوییم، می‌توانیم به دو روش عمل کنیم:

نامعادله توأمان

روش اول: نامعادله را به صورت دو نامعادلهٔ جدا از هم در یک دستگاه نامعادلات نوشته و جواب هر کدام را پیدا می‌کنیم، سپس بین جواب‌های به دست آمده، اشتراک می‌گیریم:

$\cap$ و

$$\begin{cases} -۲x + ۳ \le ۲ \Rightarrow -۲x \le -۱ \Rightarrow x \ge \frac{۱}{۲} \\ -۴ < -۲x + ۳ \Rightarrow -۷ < -۲x \Rightarrow x < \frac{۷}{۲} \end{cases} \xrightarrow[\cap \text{ و}]{\text{اشتراک}} \frac{۱}{۲} \le x < \frac{۷}{۲}$$

$\frac{۷}{۲} = \frac{-۷}{-۲} > x$

$\frac{۱}{۲} = ۰/۵$

$\frac{۷}{۲} = ۳/۵$

روش دوم: نامعادله را به همین شکل داده شده و با استفاده از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها حل کنیم:

$$-۴ < -۲x + ۳ \le ۲ \xrightarrow{\text{طرفین را با } (-۳) \text{ جمع می‌کنیم}} -۴ - ۳ < -۲x + ۳ - ۳ \le ۲ - ۳$$

$$\Rightarrow -۷ < -۲x \le -۱ \xrightarrow[\text{(جهت نامساوی عوض می‌شود.)}]{\text{طرفین را بر } (-۲) \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{۱}{۲} \le x < \frac{۷}{۲}$$

همان‌طور که می‌بینید جواب به دست آمده از هر دو روش، یکسان است.

نکته: برای حل نامعادلهٔ غیر درجه اول، ابتدا نامعادله را به یکی از صورت‌های $P(x) > ۰$ یا $P(x) \ge ۰$ یا $P(x) < ۰$ یا $P(x) \le ۰$ می‌نویسیم. سپس با تعیین علامت $P(x)$ و با توجه به علامت نامساوی، محدودهٔ جواب را مشخص می‌کنیم. اول همه رو ببر یه طرف:

تمرین: نامعادلهٔ $۲x^۲ - ۵x \ge -۳$ را حل کنید. مهم

$۲x^۲ - ۵x + ۳ \ge ۰$

$۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰ \longrightarrow x = ۱ ,\ x = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۲}$

جمع ضرایب صفر

x	$-\infty$		۱		$\frac{۳}{۲}$	
$۲x^۲ - ۵x + ۳ \ge ۰$		+	۰	−	۰	+
		جواب				جواب

$x \in (-\infty, ۱] \cup [\frac{۳}{۲}, +\infty)$ یا

درجه ۲ زمانی همواره + است که $\Delta<0$ که علامتش همواره موافق علامت ضریب x^2 می‌شود. چون ضریب x^2 برابر ۱ و مثبت است اگر $\Delta<0$

نمودار بالای محور x باشد

مهم

تمرین: به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟ (تمرین ۲ صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی)

جواب: $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \to 9 - 4k < 0 \qquad 9 < 4k \to \frac{9}{4} < k$ همواره + است.

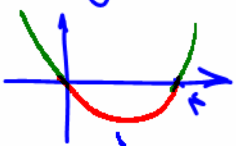
نکته: برای حل نامعادلات درجه دوم می‌توان از روش هندسی (رسم نمودار) نیز استفاده کرد. برای این کار نمودار $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ را رسم کرده و با توجه به نمودار، محدودهٔ x را مشخص می‌کنیم.

تمرین: نامعادلهٔ $x^2 - 4x \le 0$ را به روش هندسی حل کنید.

سهمی $y = x^2 - 4x$ که $a = 1 > 0$ دهانه به بالاست را رسم می‌کنیم.

$y = x^2 - 4x = x(x-4) = 0$

$x = 0, 4$ ریشه‌ها



در کدام x ها سهمی زیر محور x هست یا صفر

$x \in [0, 4]$ جواب

نامعادلات قدرمطلقی

برای حل نامعادلات قدرمطلقی از نکتهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:

۱) اگر $|u| \le a$، آن‌گاه $-a \le u \le a$ ۲) اگر $|u| \ge a$، آن‌گاه $u \ge a$ یا $u \le -a$

وقتی کوچیکتری گیر میوفتی بین سر و ته کوچه

وقتی بزرگتری از سر کوچه به بعد از ته کوچه به قبل

در هر یک از این نامعادلات، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ‌کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

تمرین: هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

۱) $|3x - 5| \le 4$ ۲) $|2 - x| > 4$

۱) $-4 \le 3x - 5 \le 4$

$1 = 5 - 4 \le 3x \le 4 + 5 = 9$

$\frac{1}{3} \le x \le \frac{9}{3} = 3$

۲) $2 - x > 4$ یا $2 - x < -4$

$-2 > x$ یا $6 < x$

نکته: ۱) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه نامعادلهٔ $|x| \le a$ جواب ندارد. به عنوان مثال، نامعادلهٔ $|x| < -4$ جواب ندارد، زیرا $|x|$ عددی نامنفی است و نمی‌تواند از عدد ۴− کوچک‌تر باشد.

$x \in \varnothing$

۲) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه نامعادلهٔ $|x| \ge a$ همواره جواب دارد. به عنوان مثال، نامعادلهٔ $|4x + 3| \ge -1$ همواره جواب دارد، زیرا $|4x + 3|$ همواره عددی نامنفی است که قطعاً از ۱− بزرگ‌تر است.

$x \in \mathbb{R}$

۳) برای حل معادلات $|u| \le |v|$ یا $|u| \ge |v|$، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان ۲ برسانیم و با توجه به تساوی $|u|^2 = u^2$، قدرمطلق را حذف کرده و سپس نامعادله را حل کنیم.

دو طرف را

تمرین: نامعادلهٔ $|x + 2| \le |x - 1|$ را حل کنید. ۲ طرف نامعادله قدرمطلق است به توان ۲ می‌رسانیم:

$|x+2|^2 \le |x-1|^2 \to (x+2)^2 \le (x-1)^2 \to (x+2)^2 - (x-1)^2 \le 0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} ((x+2)-(x-1))((x+2)+(x-1)) \le 0$

$3(2x+1) \le 0 \to 2x + 1 \le 0 \quad 2x \le -1 \quad x \le -\frac{1}{2}$ جواب

نکته: اگر بخواهیم نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسیم که مجموعه جواب آن به صورت بازهٔ (a,b) باشد آن‌گاه نامعادله به صورت $|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$ است و اگر بخواهیم نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسیم که مجموعه جواب آن به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، آن‌گاه نامعادله به صورت $|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{b-a}{2}$ است.

مهم برای تست

تمرین: نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید که مجموعهٔ جواب آن به صورت $(-2, 6)$ باشد.

$|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

$|x - \frac{-2+6}{2}| < \frac{6-(-2)}{2} = 4$

$|x - 2| < 4$

امتحان کردن جواب: $|x - 2| < 4$

$-4 < x - 2 < 4 \quad)+2$

$-2 < x < 6$

پرسش‌های تشریحی:

۱- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید. مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید و سپس آن را روی محور نشان دهید.

آ) $4x + 11 \geq 5x + 3$

جواب $8 \geq x$

ب) $\frac{x}{3} - 4x < \frac{x}{2} + 1$

پ) $0 \leq \frac{3-2x}{5} \leq 1$

ضرب در ۵

$0 \leq 3 - 2x \leq 5$

منهای ۳

$-3 \leq -2x \leq 2$

تقسیم بر ۲-

$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \geq x \geq \frac{2}{-2} = -1$

$-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

ت) $\frac{2x+1}{5} - \frac{x-1}{4} \geq \frac{x}{3}$

ب) $\frac{x}{3} - 4x < \frac{x}{2} + 1$

$\frac{x}{3} - \frac{4x}{1} - \frac{x}{2} < 1$

$\frac{2x - 24x - 3x}{6} < 1 \quad) \times 6$

$-25x < 6$

$x > \frac{6}{-25}$

ت) $\frac{4(2x+1) - 5(x-1)}{20} - \frac{x}{3} \geq 0$

$\frac{8x + 4 - 5x + 5}{20} - \frac{x}{3} \geq 0$

$\frac{3(3x+9) - 20x}{60} \geq 0$

$-11x + 27 \geq 0 \quad 27 \geq 11x \quad \frac{27}{11} \geq x$

۲- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

آ) $(x+2)^2 - (2x-1)^2 \geq 8$

ب) $\frac{x^2 - 4x}{2x+1} \leq 0$

پ) $\frac{-x^2(x+3)}{x^2 - x + 1} > 0$

ت) $\frac{x^2 - 6x + 5}{-x^2 + 2x - 7} > 0$

ث) $\frac{2x-4}{x+2} < 2$

ج) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5} \leq 0$

۳- حدود x را طوری تعیین کنید که:

آ) نمودار $y = x^2 - 4x$ بالاتر از خط $y = x - 4$ قرار بگیرد.

ب) سهمی $y = 2x^2 - 7x + 3$ پایین‌تر از سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ قرار بگیرد.