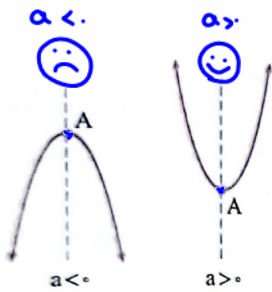


معادله محور تقارن سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی $A(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a})$

(صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲ کتاب درسی)

$\Delta = b^2 - 4ac$

BOX 2: سهمی



در این BOX، با نمودار معادله $y = ax^2 + bx + c$ که به آن سهمی می‌گوییم و همچنین ویژگی‌های آن، آشنا می‌شویم.

سهمی: نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a, b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:

نقطه A را در شکل‌ها رأس سهمی می‌گوییم. اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است. هم‌چنین خط عمودی را که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی می‌نامیم.

نکته: در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ ، طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است. عرض رأس سهمی برابر

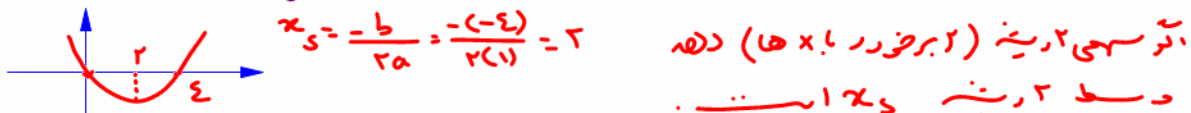
$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ می‌باشد و معادله محور تقارن، $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی نیز به دست آورد.

تعریف: رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 + 4x - 1$ را مشخص کنید. معادله خط تقارن آن را بنویسید.

رسم سهمی: برای رسم سهمی باید رأس سهمی و دو نقطه کمکی در دو طرف رأس مشخص کنیم. با توجه به علامت a و با وصل کردن این نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم.

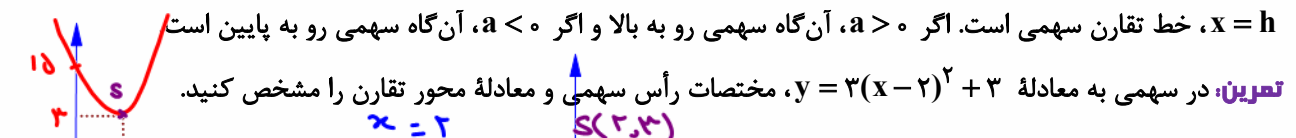
نکته: می‌توان از محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات نیز به عنوان نقاط کمکی استفاده کرد.

تعریف: سهمی به معادله $y = x^2 - 4x$ را رسم کنید. دهانه به بالا، $y = x^2 - 4x = x(x-4)$ به ریشه $x=0$ و $x=4$ به ریشه $x=4$.

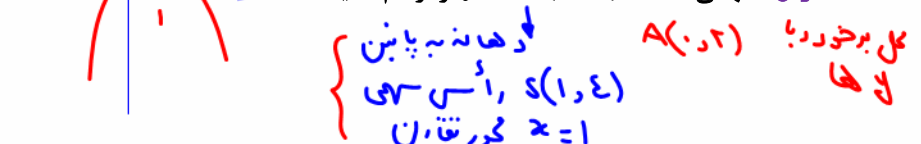


معادله سهمی که به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است را می‌توان با مربع کامل کردن، به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ نوشت.

نکته: معادله هر سهمی را می‌توان به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، نوشت. رأس سهمی نقطه $A(h, k)$ و خط به معادله



تعریف: سهمی $y = -2(x-1)^2 + 4$ را رسم کنید.



نکته: در سهمی اگر دو نقطه $A(x_1, y)$ و $B(x_2, y)$ (دو نقطه با عرض‌های یکسان) روی آن باشند، آن گاه خط $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ، معادله

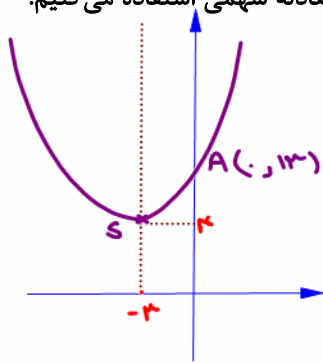
محور تقارن سهمی است. به عنوان مثال؛ اگر دو نقطه $(3, 5)$ و $(-1, 5)$ روی یک سهمی باشد، آن گاه خط $x = \frac{-1 + 3}{2} = 1$ ، معادله محور

تقارن است. $x = \frac{-1 + 3}{2} = 1$

نوشتن معادله سهمی

اگر مختصات سه نقطه روی سهمی داده شده باشد و بخواهیم معادله آن را بنویسیم، از معادله $y = ax^2 + bx + c$ استفاده می‌کنیم. مختصات سه نقطه را در معادله به جای x و y قرار می‌دهیم و با به دست آوردن a ، b و c معادله به دست می‌آید.

اما اگر مختصات رأس سهمی داده شده باشد، از معادله $y = a(x-h)^2 + k$ برای به دست آوردن معادله سهمی استفاده می‌کنیم. **تمرین:** معادله یک سهمی را بنویسید که رأس آن نقطه $(-3, 4)$ باشد و از نقطه $(-2, 5)$ بگذرد.



$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = a(x-(-3))^2 + 4 = a(x+3)^2 + 4$$

$$5 = a(-2+3)^2 + 4$$

$$5 = a + 4$$

$$a = 1 \rightarrow \text{پرسش‌های تشریحی: } y = (x+3)^2 + 4$$

۱- مختصات رأس و معادله خط تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را مشخص کنید.

پ) $y = -2x^2 + 10x + 7$ (مشابه تمرین ۱ صفحه ۸۱ کتاب درسی)

ب) $y = x^2 - 4x$

آ) $y = 3(x+2)^2 - 4$

$S(-\frac{b}{2a} = 2, -4)$

$S(-2, -4)$

$x = -2$

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2(-2)} = \frac{5}{2}$ $S(\frac{5}{2}, \frac{39}{2})$

$f(\frac{5}{2}) = -2(\frac{25}{4}) + 10(\frac{5}{2}) + 7 = (-\frac{25}{2} + \frac{25}{1} + \frac{14}{2}) = \frac{39}{2}$

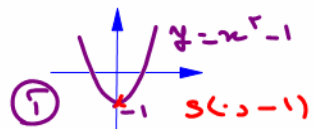
$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(100 - 4(-2)(7))}{4(-2)} = \frac{-156}{-8} = \frac{39}{2}$

۲- سهمی به معادلات زیر را رسم کنید.

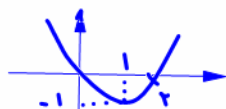
پ) $y = x^2 - 2x$

ب) $y = -(x-2)^2 + 3$

آ) $y = x^2 - 1$



پ) $y = x^2 - 2x$
 $y = x(x-2)$



ث) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$

ت) $y = -2x^2 + 8x - 1$

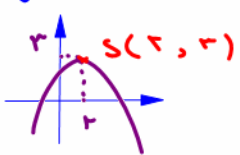
ت) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = 2$

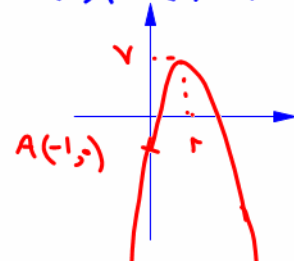
$S(2, 7)$

$f(2) = -2(4) + 8(2) - 1 = 7$

ب) $y = -(x-2)^2 + 3$



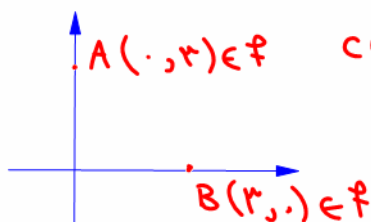
ث) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$
 $x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{-1} = 1$
 $y_s = -\frac{1}{2} + 1 + 3 = 3.5$



۳- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از

نقطه $(-1, 2)$ نیز بگذرد، معادله سهمی را بنویسید.

$A(0, 3) \in \varphi$ $C(3, -1) \in \varphi$



$B(3, 0) \in \varphi$

$a = 3, b = -1, c = -3$
 $y = 3x^2 - 1x - 3$

$f(x) = ax^2 + bx + c$
 $f(0) = \dots + \dots + c = 3 \rightarrow c = 3$
 $f(3) = 9a + 3b + 3 = 0 \rightarrow 3a + b + 1 = 0$
 $f(-1) = a - b + 3 = 2 \rightarrow a - b = -1$
 $3a + b = -1$
 $a - b = -1$
 $4a = -2 \rightarrow a = -1/2$
 $b = -1 - 3a = -1 - 3(-1/2) = 1/2$
 $3a + b = -1 \rightarrow 3(-1/2) + b = -1 \rightarrow -3/2 + b = -1 \rightarrow b = 1/2$

۴- معادله یک سهمی را بنویسید که نقطه (۲, ۵) رأس آن باشد و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند.

$$y = a(x-h)^2 + k$$

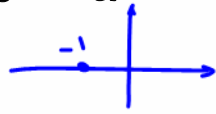
$$y = a(x-2)^2 + 5$$

$$= a(-1-2)^2 + 5$$

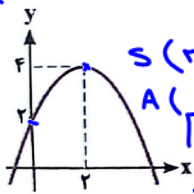
$$-5 = 9a$$

$$-\frac{5}{9} = a$$

$$y = -\frac{5}{9}(x-2)^2 + 5$$



۵- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقادیر a, b و c را به دست آورید.



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$f(2) = 4 \rightarrow 4a + 2b + c = 4 \rightarrow 4a + 2b = 4 - c = 4 - 2 = 2 \rightarrow 2a + b = 1 \quad (*)$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow -b = 4a \rightarrow b = -4a$$

$$2a + (-4a) = 1$$

$$-2a = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = -2(-\frac{1}{2}) = 1$$

$$c = 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

۶- اگر (۱, -۴) و (۳, -۴) دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۸۱ کتاب درسی)

$$x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۷- رأس سهمی $y = x^2 - 4x + m$ روی خط $2x + y = 5m$ قرار دارد. مقدار m را به دست آورید.

$$S(2, m-4)$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_s = (2)^2 - 4(2) + m = m - 4$$

$$2(2) + (m-4) = 5m$$

$$4 + m - 4 = 5m$$

$$m = 5m$$

$$m = 0$$

۸- به سوالات زیر پاسخ دهید:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 \\ y = 3x^2 + x - 2 \end{cases}$$

(آ) دو سهمی به معادلات $y = -x^2 + 4x - 1$ و $y = 3x^2 + x - 2$ همدیگر را با چه طول‌هایی قطع می‌کنند؟

(ب) خط $y = 2x + 5$ ، سهمی $y = x^2 - 6x + 9$ را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

$$3x^2 + x - 2 = -x^2 + 4x - 1$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$a=4 \quad b=-3 \quad c=-1$$

جمع ضرایب منفی

$$x = 1, \quad x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}$$

عاده برخورد دو سهمی

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2x + 5$$

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(4) = 64 - 16 = 48$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{3} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

ببرخورد

نکته: چون عاده برخورد ۲ سهمی یا یک خط و سهمی یک عاده

درجه ۲ است لذا ۲ تا سهمی یا یک خط و یک سهمی می‌توانند

(الف) برخورد داشته باشند ($\Delta < 0$) عاده برخورد

(ب) بهم تماس شوند ($\Delta = 0$) عاده برخورد

(ج) در ۲ نقطه برخورد کنند ($\Delta > 0$) عاده برخورد

معرفی سهی:

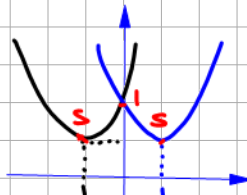
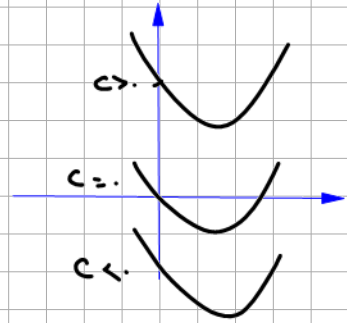
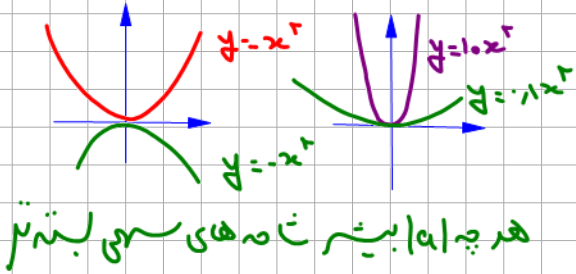
$$y = ax^2 + bx + c$$

$a >$
 $a <$
 $a =$
 خط $y = bx + c$

$x = -\frac{b}{2a}$
 طول رأس نه
 b به نصف a
 رأس را چپ
 در انت
 می برد

c سهی را بالا و
 پایین می برد
 (c و) A عمل بر خورد
 سهی با محور ها
 یا عرض از مبدأ

سهی را بالا و
 پایین می برد



$y = x^2 - x + 1$
 $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$
 $y_s = \frac{4}{4} = 1$

$y = x^2 + x + 1$
 $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(1)} = -\frac{1}{2}$
 $y_s = \frac{3}{4}$

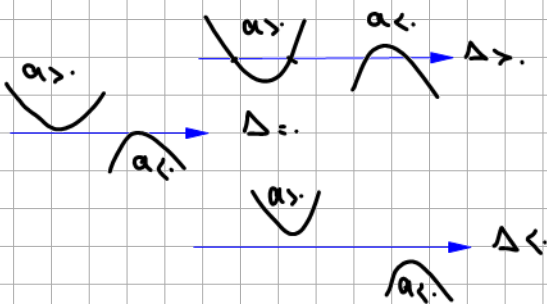
مقدار تقارن سهی:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

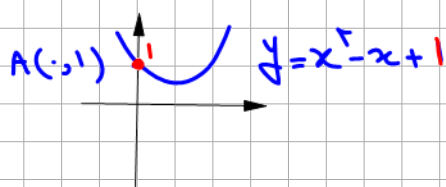
مختصات رأس S:

$$S \left(x_s = -\frac{b}{2a}, y_s = -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



دال، کار، c در $y = ax^2 + bx + c$ چه می بینیم؟ سهی در $A(c, 0)$ حتماً به محور y همانی خوره. c عرض بر خورد سهی



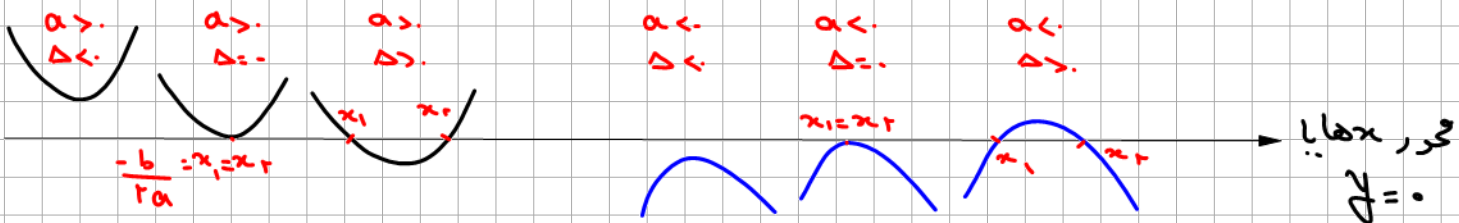
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

سهی از نظر دهانه به دو صورت هت و ۲ حالت داره: $a >$ و $a <$

سهی از نظر بر خورد با محور x ها ۳ حالت داره. با ۲ بر خورد یا ۱ تماس یا هیچ بر خورد.



Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4

تبدیل می‌داریم : Δ_1 : Δ_2 : Δ_3 : Δ_4

Δ_1 → می‌باشد
 Δ_2 → اریته
 Δ_3 → اریته

نکته: اگر $b = 0$ یا $a = 0$ در محور و محور تقابل است و اثر هیچ اریته دلفه ریشه‌ها قریب‌اند.

