فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

BOX 1: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن (صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

چهار روش برای حل معادلهٔ درجه دوم وجود دارد. در این BOX با این چهار روش برای حل معادلهٔ درجه دوم آشنا می‌شوید.

معادلهٔ درجه دوم: هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$، را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند، یک معادلهٔ درجه دوم می‌نامیم. در واقع باید بعد از ساده‌کردن یک معادله، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد.

به عنوان مثال، معادلهٔ $4x^2-7x+1=0$ ، یک معادلهٔ درجه دوم است، اما معادلهٔ $(x+2)^2-(x-3)^2=x$ یک معادلهٔ درجه دوم نمی‌باشد، زیرا:

$$(x+2)^2-(x-3)^2=(x^2+4x+4)-(x^2-6x+9)=10x-5$$

در نتیجه معادله به صورت $10x-5=x$ درمی‌آید که یک معادلهٔ درجه یک می‌باشد.

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

ویژگی حاصل‌ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است، یعنی:

$$AB=0 \Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

مثال:

$$(2x-1)(-x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ -x+4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

نکته: اگر بتوان عبارت درجه دوم ax^2+bx+c را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه کرد. آن‌گاه می‌توان از ویژگی حاصل‌ضرب صفر برای حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ استفاده کرد.

تمرین: معادلهٔ $x^2-4x+3=0$ را به روش تجزیه حل کرده و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$ (تجزیه با جمله مشترک)

$\begin{cases} x-1=0 & x=1 \longrightarrow (1)^2-4(1)+3=0 \ \checkmark \\ \text{یا} & \\ x-3=0 & x=3 \longrightarrow (3)^2-4(3)+3=0 \ \checkmark \end{cases}$

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2=a$ عبارت‌اند از: $x=-\sqrt{a}\ ,\ x=\sqrt{a}$

مثال: جواب‌های معادلهٔ $x^2=16$ عبارت‌اند از: $x=-\sqrt{16}=-4\ ,\ x=\sqrt{16}=4$

توجه: معادلهٔ‌درجه دوم $x^2=a$ را می‌توان به صورت $x^2-a=(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$ نیز نوشت و آن را از روش تجزیه حل کرد:

$$\begin{cases} x-\sqrt{a}=0 \Rightarrow x=\sqrt{a} \\ x+\sqrt{a}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{a} \end{cases}$$

خسنا معادله $x^2=a^2$ دارای ۲ جواب $x=\pm a$ است.

مثلاً معادله $x^2=25$ دارای ۲ جواب $x=\pm 5$ است ولی معادله $x^2=-25$ جواب ندارد.

عبارت مربع کامل

نکته: اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه با اضافه کردن $(\frac{a}{2})^2$ به دو جمله‌ای x^2+ax، سه‌جمله‌ای به شکل مربع کامل درمی‌آید. (a ضریب x است.)

$\frac{a^2}{4}$ یا

دقت

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=(x+\frac{a}{2})^2$$

$x^2+4x=(x+2)^2-\frac{(4)^2}{4}=(x+2)^2-4$

تذکر: در این روش ضریب x^2 باید عدد یک باشد.

آموزش رایگان دبیران برند ایران تجربه کنید

مثال: اگر به عبارت $x^۲+۶x$، عبارت $(\frac{۶}{۲})^۲=۹$ اضافه شود، آن‌گاه داریم: $x^۲+۶x+۹=(x+۳)^۲$

$a=۶ \longrightarrow \frac{a^۲}{۴}=\frac{۶^۲}{۴}=\frac{۳۶}{۴}=۹$

روش حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل

ابتدا اگر ضریب $x^۲$ عددی غیر از یک باشد، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $x^۲$، به یک معادلهٔ درجه دوم به صورت $x^۲+ax+b=۰$ می‌رسیم. سپس معادله را به صورت $x^۲+ax=-b$ می‌نویسیم و با اضافه کردن $(\frac{a}{۲})^۲$ به دو طرف معادله، در سمت چپ معادلـه مربـع کامل ایجاد می‌کنیم. حال با ریشه‌گیری از دو طرف معادله، ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم.

تمرین: معادلهٔ $۲x^۲+۵x+۳=۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

$۲x^۲+۵x+۳=۰ \xrightarrow{\text{طرفین ÷ ۲}} x^۲+\frac{۵}{۲}x+\frac{۳}{۲}=۰$

$x^۲+\frac{۵}{۲}x=-\frac{۳}{۲} \longrightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x+\frac{۲۵}{۱۶}=-\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶} \longrightarrow (x+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۱}{۱۶} \longrightarrow x+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۱}{۴}$

$x=-\frac{۱}{۴}-\frac{۵}{۴}=-\frac{۶}{۴}=-\frac{۳}{۲}$ $\quad x=\frac{۱}{۴}-\frac{۵}{۴}=-\frac{۴}{۴}=-۱$

$a=\frac{۵}{۲}$ $\quad \frac{a^۲}{۴}=\frac{(\frac{۵}{۲})^۲}{۴}=\frac{\frac{۲۵}{۴}}{۴}=\frac{۲۵}{۱۶}$ به دو طرف $\frac{a^۲}{۴}$ اضافه کن

حل معادلهٔ درجه دوم به روش فرمول کلی

در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰ \ (a\neq ۰)$، عبارت $\Delta=b^۲-۴ac$، (دلتا $=\Delta$) را در نظر می‌گیریم. حالت‌هـای زیـر بـه وجـود می‌آید:

حالت اول: $\Delta>۰$، در این صورت معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی به صورت روبه‌رو است: $x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ ، $x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$

حالت دوم: $\Delta=۰$، در این صورت معادله دارای ریشهٔ مضاعف (ریشهٔ‌مکرر مرتبهٔ دوم) $x=-\frac{b}{۲a}$ است. یعنی دو ریشه مساوی اند.

حالت سوم: $\Delta<۰$، در این صورت معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

تمرین: معادلهٔ $۴x^۲-۷x+۱=۰$ را با فرمول کلی حل کنید.

$a=۴ \quad b=-۷ \quad c=۱$

$\Delta=b^۲-۴ac=(-۷)^۲-۴(۴)(۱)=۴۹-۱۶=۳۳$

$x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۷\pm\sqrt{۳۳}}{۲(۴)} \begin{cases} x_۱=\frac{۷+\sqrt{۳۳}}{۸} \\ x_۲=\frac{۷-\sqrt{۳۳}}{۸} \end{cases}$

تمرین: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

مساحت $=S=xy=۱۴۴ \longrightarrow x(y=۲۵-x)=۱۴۴ \longrightarrow ۲۵x-x^۲=۱۴۴$

محیط $=۲(x+y)=۵۰$

$x+y=۲۵$

$x^۲-۲۵x+۱۴۴=۰$

حل به روش Δ:

$ax^۲+bx+c=۰$

$a=۱ \quad b=-۲۵ \quad c=۱۴۴$

$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۵)^۲-۴(۱)(۱۴۴)$

$\Delta=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۲۵\pm۷}{۲}=۱۶ \text{ یا } ۹$

۲ عدد بگو که جمعشون ۲۵ و ضربشون ۱۴۴ باشه

$x=۹ \longrightarrow y=۲۵-x=۲۵-۱۶=۹$

ابعاد مستطیل $=۹$ و ۱۶

آموزش رایا دبیران برند ایران تجربه کنید

پرسش‌های تشریحی:

۱- معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی)

آ) $3x^2-6x=0$

ب) $x^2-5x+6=0$

پ) $3x^2-4x+1=0$

۲- معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی)

آ) $2x^2=50$

ب) $x^2+4=0$

پ) $(3x+2)^2=36$

ت) $4x^2-20=0$

ث) $16(2x-1)^2-25=0$

ج) $(3x-1)^2=(2x+5)^2$

۳- معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی)

آ) $x^2-4x-5=0$

ب) $2x^2+6x=1$

پ) $8-x=3x(x-1)$

۴- هر یک از معادلات زیر را با روش فرمول کلی حل کنید. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی)

آ) $2x^2-x-5=0$

ب) $\frac{x^2}{5}-\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=0$

پ) $(3x+1)^2-(2x+3)^2+1=0$

ت) $x^2+(\sqrt{5}+1)x-(2+\sqrt{5})=0$

فرمول کلی: $ax^2+bx+c=0$, $\Delta=b^2-4ac$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

نکته: اگر یک معادله درجه دوم در حدی ضرب شود جوابهایش عوض نمی‌شوند.

نکته: اگر $a+b+c=0$ یک ریشه $x=1$ و ریشه دیگری $x=\frac{c}{a}$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

ب) $(9x^2+6x+1)-(4x^2+12x+9)+1=5x^2-6x-7=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{36-4(5)(-7)}}{2(5)}=\frac{6\pm\sqrt{176}}{10}=\frac{6\pm 4\sqrt{11}}{10}$

ت) $x^2+(\sqrt{5}+1)x-(2+\sqrt{5})=0$ $\quad a=1 \quad b=\sqrt{5}+1 \quad c=-(2+\sqrt{5})$

$\Delta=(\sqrt{5}+1)^2+4(1)(2+\sqrt{5})=6+2\sqrt{5}+8+4\sqrt{5}=14+6\sqrt{5}=(\sqrt{5}+3)^2$

$x_{1,2}=\frac{-(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}}{2}=\frac{-\sqrt{5}-1\pm(\sqrt{5}+3)}{2}$

۵- یک جواب از معادله داده شده است. مقدار M و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

$4x^2-5x+m+1=0 \quad , \quad x=-3$

جواب هر معادله در آن معادله صدق می‌کند

$4(-3)^2-5(-3)+m+1=0$

$36+15+m+1=0$

$m=-52$ $\longrightarrow$ $4x^2-5x-51=0$ $\quad \Delta=(-5)^2-4(4)(-51)=841=(29)^2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5\pm 29}{2(4)}$ $\quad x_1=\frac{17}{4}$ $\quad x_2=\frac{-24}{8}=-3$

ب) $\frac{-2\sqrt{5}-4}{2}=\frac{-2(\sqrt{5}+2)}{2}=-(\sqrt{5}+2)$

۶- مقدار m را طوری به دست آورید که معادلهٔ داده‌شده ریشهٔ مضاعف داشته باشد و سپس ریشهٔ مضاعف را مشخص کنید.

ریشه مضاعف $\Delta=0$

$(2m+1)x^2+6x+1=0$

$a=2m+1 \quad b=6 \quad c=1$ $\quad \Delta=b^2-4ac=(6)^2-4(2m+1)(1)=36-8m-4=0 \longrightarrow m=4$ (سوم)

$m=4$ $\longrightarrow$ $9x^2+6x+1=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6}{2(9)}=\frac{-6}{18}=-\frac{1}{3}$ (صفر)

$x_1=x_2=-\frac{1}{3}$ ریشه مضاعف

۷- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید. (تمرین ۶ صفحهٔ ۷۷ کتاب درسی)

$a, b=a+2$ و $b-a=2$

$a^2+b^2=290 \longrightarrow b^2+a^2=290 \longrightarrow (b-a)^2+2ab=290 \longrightarrow 4+2ab=290 \longrightarrow ab=143$

ضرب کدام ۲ عدد فرد ۱۴۳ است؟ ۱۱ و ۱۳ یا ۱۱- و ۱۳-

۸- محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۲۰ و ۲۴ می‌باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

راه اول: $2(a+b)=20 \quad ab=24$

$a+b=10 \quad ab=24$

$2(12) \quad 3(8) \quad 4(6)$ $\longrightarrow$ $a=6 \quad b=4$

راه دوم: $x^2-(a+b)x+ab=0$ $\quad x^2-10x+24=0$

$(x-a)(x-b)=0$ $\quad (x-4)(x-6)=0$

دو عدد با ضرب ۲۴ و جمع ۱۰ $\quad x=4$ و $x=6$

اگر جمع و ضرب ۲ عدد را داشتم و آن‌ها را خواستم

نکته: $\left.\begin{matrix}a+b=S\\ ab=P\end{matrix}\right\} \longrightarrow x^2-Sx+P=0 \longrightarrow x_{1,2}=?$

۹- طول مستطیلی یک متر بیشتر از دو برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۵ متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$b=2a+1$

$S=ab=55$

$S=a(2a+1)=55$

$2a^2+a=55$

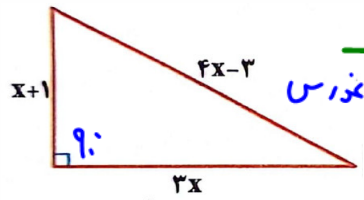
$2a^2+a-55=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(2)(-55)}}{2(2)}=\frac{-1\pm 21}{4}=5$

$a=x=5$ عرض

$b=2a+1=11$ طول

۱۰- در شکل زیر مقدار x را به دست آورید.

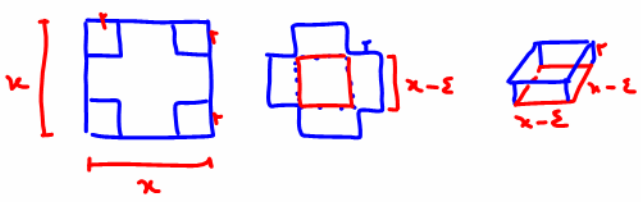


فیثاغورس $(وتر)^2=(4x-3)^2=(3x)^2+(x+1)^2 \longrightarrow 16x^2-24x+9=9x^2+x^2+2x+1$

$16x^2-26x+8=0 \longrightarrow 8x^2-13x+4=0$ $\quad \Delta=(-13)^2-4(8)(4)=169-128=121$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13\pm 11}{2(8)}$ $\quad x=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$ $\quad x=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

۱۱- با یک دستگاه برش، یک صفحهٔ مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید. (مثال صفحهٔ ۷۲ کتاب درسی)



حجم جعبه: (ارتفاع)(مساحت قاعده) $=(x-4)^2(2)=200$

$(x-4)^2=\frac{200}{2}=100$ $\longrightarrow$ جذر $\quad x-4=10 \longrightarrow x=14$

$x-4=-10 \longrightarrow x=-6$ ق ق ن

آموزش رایگان دبیران برند ایران تجربه کنید

حل معادله $ax^2+bx+c=0$ دقتی b زوج است. روش Δ'

$$b'=\frac{b}{2} \qquad \Delta'=b'^2-ac \qquad x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

مثال: معادله $3x^2-26x+8=0$ را به روش Δ' حل کنید.

$$b'=\frac{b}{2}=\frac{-26}{2}=-13 \qquad \Delta'=b'^2-ac=(-13)^2-3(8)=169-24=121$$

$$x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-13)\pm 11}{3}\begin{cases}x_1=\frac{13+11}{3}=\frac{24}{3}=8\\ x_2=\frac{13-11}{3}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

اگر روش Δ' را بلد نیستی عیب نداره. همین معادله را با ۲ ضرب کن با همون روش Δ حل کن.

نکته: اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$:

الف) اگر $a+b+c=0$ ← $x_1=1$ یا $x_2=\frac{c}{a}$ (جمع ضرایب صفر)

ب) اگر $a+c=b$ ← $x_1=-1$ یا $x_2=-\frac{c}{a}$

مثال

الف) $(3+\sqrt{5})x^2-\sqrt{5}x-3=0$ ($a=3+\sqrt{5}$, $b=-\sqrt{5}$, $c=-3$)

$a+b+c=0 \rightarrow x_1=1$ $\quad x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{3+\sqrt{5}}$

ب) $x^2+(1+\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$

$a+c=b \rightarrow x_1=-1$ $\quad x_2=-\frac{c}{a}=-\sqrt{5}$