

BOX 3: توان‌های گویا

(صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱ کتاب درسی)

تعریف توان‌های گویای اعداد حقیقی مثبت در این قسمت گفته می‌شود. هم‌پنین روابط تکمیلی برای رادیکال‌ها نیز بیان می‌شود.

تعریف: برای هر عدد طبیعی n ، $(n \geq 2)$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

مثال: $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$, $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$, $6^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{6^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

تذکر مهم: عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{5}}$ ، $(-3)^{\frac{2}{8}}$ و ... را که در آن‌ها پایه a منفی است، تعریف نمی‌شوند. **اعداد منفی را با توان کسری ننویس.**

تعریف: هرگاه $a > 0$ ، برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال: $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

(توجه کنیم عدد مخرج، در کسر $\frac{m}{n}$ در فرجه رادیکال قرار می‌گیرد.)

اگر $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی باشند، $a^{\frac{m}{n}}$ به صورت $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ تعریف می‌شود. بنابراین داریم

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

هم‌چنین $a^{-\frac{m}{n}}$ به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: **هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان ولی مثبت**

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

تعرین: هر یک از اعداد توان‌دار زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\sqrt{2^7} = \sqrt[2]{2^7} = 2^{\frac{7}{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}} \quad (1)$$

قواعد توان: قواعد توان، برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار است. اگر r و s دو عدد گویا و $a > 0$ باشد، آن‌گاه:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $a^r \times b^r = (ab)^r$

۳) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

۴) $a^r \div b^r = (\frac{a}{b})^r$, $b \neq 0$

۵) $(a^r)^s = a^{rs}$

۶) $1^r = 1$

تعرین: عبارت $\frac{2^{\frac{4}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{5}}}$ را به صورت یک عبارت رادیکالی بنویسید.

راه سریع‌تر: $\frac{2^{\frac{4}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{5}}} = 2^{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}$

نکته: ۱) اگر $a > 0$ و r یک عدد گویا باشد، آن‌گاه:

مثال: $9^{-\frac{2}{4}} = (3^2)^{-\frac{2}{4}} = 3^{2 \times (-\frac{2}{4})} = 3^{-\frac{2}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3^2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

تعرین: هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان ولی مثبت

$$9^{-\frac{2}{4}} = (3^2)^{-\frac{2}{4}} = 3^{2 \times (-\frac{2}{4})} = 3^{-\frac{2}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3^2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

۲) اگر a یک عدد حقیقی مثبت، n یک عدد طبیعی و m یک عدد صحیح منفی باشد، آن‌گاه:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{5^2}} = \sqrt{\frac{1}{25}}$$

مثال:

(۳) اگر $a > 0$ و هم‌چنین m و n دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[mn]{a})$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{5^4}} = 3 \times \sqrt[3]{5^4} = 15 \sqrt[3]{5}$$

مثال:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

(۴) اگر a و b دو عدد مثبت و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

از این نکته برای انتقال ضریب رادیکال به داخل رادیکال و یا در ساده‌کردن رادیکال‌ها استفاده می‌کنیم.

$$3 \sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{27 \times 5} = \sqrt{135}$$

مثال:

$$\sqrt[n]{a^m} = k \sqrt[kn]{a^{km}}; (a > 0)$$

(۵) اگر k, n و m سه عدد طبیعی باشند، آن‌گاه:

می‌دانیم در ضرب رادیکال‌ها، فرجه‌ها باید با هم برابر باشند. اگر دو رادیکال با فرجه‌های غیربرابر ضرب شده باشند، با استفاده از این نکته،

فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم: **فرجه مشترک**

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt[3]{4^2} \times 2 \times \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{4^2 \times 2^6} = \sqrt[3]{4^2 \times 2^6} = \sqrt[3]{2^4 \times 2^6} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^6 \times 2^4} = \sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{2^4} = 2 \sqrt[3]{8}$$

مثال:

تعریف: عدد $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}\sqrt{3}}$ را به صورت یک عبارت با یک رادیکال بنویسید.

$$\ominus \sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \ominus \sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{3^2(3)}}} = \ominus \sqrt[3]{2\sqrt{2(3^2)(3)}} = \ominus \sqrt[3]{2\sqrt{(2^2)(3^5)}} = \ominus \sqrt[3]{(2^2)(3^5)} = \ominus \sqrt[3]{(4)(243)} = \ominus \sqrt[3]{972}$$

پرسش‌های تشریحی:

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۱ کتاب درسی)

۱- توان‌های کسری را به شکل رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[5]{3^6} = \frac{6}{5} \quad (\text{ت}) \quad \sqrt[2]{(18)^3} = 18^{\frac{3}{2}} \quad (\text{پ}) \quad \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ب}) \quad \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \quad (\text{ا})$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$15^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{15^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{225}}$$

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{5^{-3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5$$

۲- رادیکال‌های زیر را به شکل توان کسری بنویسید.

$$5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} \quad (\text{پ})$$

$$\sqrt[4]{2} \quad (\text{ب} = 2^{\frac{1}{4}})$$

$$\sqrt[5]{3} \quad (\text{ا} = 3^{\frac{1}{5}})$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{2}} \quad (\text{ج} = \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}})$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{16}} \quad (\text{ت} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^4}} = 2^{-\frac{4}{5}})$$

$$\sqrt[3]{625} \quad (\text{خ} = \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}})$$

$$(\sqrt{4})^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ح} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \quad (\text{ز} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^2} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}})$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{32}} \quad (\text{ط} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}})$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

۳- عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

ا) $5^{-\frac{9}{5}} = (5^{-\frac{3}{2}})^{\frac{6}{5}}$

ب) $3^{\frac{1}{15}} = 3^{-\frac{1}{3} + \frac{2}{5}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{5}}$

ب) $3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{5}} = 3^{-\frac{5}{15} + \frac{6}{15}} = 3^{\frac{1}{15}}$

ج) $\frac{5^{\frac{9-8=1}{13}}}{5^{\frac{8+3=11}{13}}} = \frac{5^{\frac{2}{13}}}{5^{\frac{11}{13}}} = \frac{5^{\frac{2}{13}} \times 5^{\frac{11}{13}}}{5^{\frac{11}{13}} \times 5^{\frac{1}{13}}} = \frac{5^{\frac{13}{13}}}{5^{\frac{12}{13}}} = 5^{\frac{1}{13}}$

ث) $2^{-0.75} \times 3^{-\frac{2}{4}} \times 6^{-\frac{7}{2}} = 2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \times (2 \times 3)^{-\frac{7}{2}}$

ت) $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}} = 3^{\frac{2+5+7}{3}} = 3^{\frac{14}{3}}$

$= 5^{\frac{1}{13}} - \frac{11}{13} - \frac{1}{13} = 5^{-\frac{11}{13}}$

$(2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{7}{2}} \times 3^{-\frac{7}{2}})^{-\frac{2}{7}} = (2^{-\frac{10}{2}} \times 3^{-\frac{8}{2}})^{-\frac{2}{7}} = (2^{-5} \times 3^{-4})^{-\frac{2}{7}} = 2^{\frac{10}{7}} \times 3^{\frac{8}{7}} = 2^{\frac{10}{7}} \times 3^{\frac{8}{7}}$

۴- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

دنت

ب) $(\sqrt{5})^4 + (\frac{1}{216})^{-\frac{1}{3}} - (642)^{\frac{1}{3}}$

ا) $16^{\frac{1}{4}} - 27^{\frac{2}{3}} = 2 - 9 = -7$ **جواب: -7**

$= (5^{\frac{1}{2}})^4 + (\frac{1}{2^3})^{-\frac{1}{3}} - ((2^3)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = 5^2 + 2 - 2 = 25 + 2 - 2 = 25$

$(2^4)^{\frac{1}{2}} - (3^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 - 3^2 = 2 - 9 = -7$

۵- عبارتهای زیر را ساده کنید.

ب) $(64^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}$ **جواب: $\sqrt{2}$**

ب) $7^{\frac{16}{5}}$ **جواب: $343\sqrt{7}$**

ا) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

ج) $\frac{1}{81} = 81^{-\frac{1}{4}}$

ث) $216\sqrt{2} = 2^3 \times 3^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}} \times 3^3$

ت) $2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ **جواب: $4\sqrt[3]{32}$**

خ) $\frac{1}{289\sqrt[5]{17}} = 17^{-\frac{11}{5}}$ **جواب: $17^{\frac{11}{5}}$**

ج) $36^{-\frac{7}{4}}$

چ) $100^{-\frac{3}{2}}$ **جواب: $\frac{1}{1000}$**

جواب: $\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ **ج) $(32=2^5)^{-\frac{7}{4}} = 2^{-\frac{35}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{35}{4}}} = \frac{1}{2^8 \times 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{256\sqrt[4]{2}}$**

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۶۱ کتاب درسی)

۶- عبارتهای زیر را به صورت ساده تر بنویسید.

ب) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

ب) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$

ا) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$ **جواب: $\sqrt[3]{4}$**

ج) $\sqrt[5]{2^3 \sqrt[4]{3}}$

ث) $\sqrt[3]{-25\sqrt[4]{2}}$

ت) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{2}}$ **جواب: $\sqrt[15]{18}$**

ت) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{(2^3)^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[15]{18}$

ث) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$

ج) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{4\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{4^2 \times 3}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{48}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^4 \times 3}} = \sqrt[5]{2^{\frac{14}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[15]{2^{14} \times 3} = \sqrt[15]{3072}$

اقتدار مربع $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$7 - 2\sqrt{3} = 2 + 3 - 2\sqrt{3} = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(2)\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$
 $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

۷- عبارتهای زیر را ساده کنید.

پ) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^2}}$, $(a > 0)$ جواب: $\frac{1}{3\sqrt{a^7}}$

ب) $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}}$ جواب $5\sqrt{5}$

ا) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{8}$ جواب: $2^{15}\sqrt{12}$

ج) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

ث) $\sqrt{2}\sqrt[3]{\sqrt{2}} \div \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}}$

ت) $\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}} \sqrt{\frac{1}{16x^4}}$, $(x > 0)$ جواب: $\sqrt{\frac{1}{2x}}$

ح) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$

ث) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{4}{9}}$
 $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{4}{15}}$
 $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{4}{9}} = 2^{\frac{10}{27}}$
 $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{4}{15}} = 2^{\frac{8}{30}} = 2^{\frac{4}{15}}$
 $\frac{2^{\frac{10}{27}}}{2^{\frac{4}{15}}} = 2^{\frac{10}{27} - \frac{4}{15}} = 2^{\frac{50 - 12}{135}} = 2^{\frac{38}{135}}$

۸- اعداد $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$ و $\sqrt[4]{6}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. باید فرجه مشترک بگیریم عددی که به ۳، ۲، ۴ بخش پذیر باشد ۱۲ هست

۹- کدام عبارت درست است؟
 $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[12]{2^9}$
 $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^{\frac{2}{2}}} = \sqrt[12]{3^6}$
 $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^{\frac{4}{3}}} = \sqrt[12]{5^8}$

$\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{2}$

ب) $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$

ا) $\sqrt[3]{-8} = -2$

$-\sqrt[3]{8} = -2$
درست

غلط طبق سه ار داد کتاب درسی عدد منفی را به توان کسری ننویس در توان های گویا پایه نباید منفی باشد (جمله متن درسی)

(تمرین ۲ صفحه ۶۱ کتاب درسی)

۱۰- اگر a یک عدد حقیقی مثبت و m, n, k اعداد طبیعی باشند، نشان دهید: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

می دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
 $\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

BOX 4: عبارتهای جبری

صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴ کتاب درسی

از سال قبل با اتحاد و تجزیه آشنایی دارید. در این قسمت علاوه بر یادآوری اتحادهای سال قبل، اتحاد مکعب دوجمله‌ای و اتحاد پاق و لاغر به آن‌ها اضافه می‌شود.

اتحاد جبری: اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید.

اتحاد مربع دوجمله‌ای: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال:

$$(2x - 5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

اتحادهای بالا را به صورت $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ نیز می‌نویسیم.

از اتحادهای مربع دوجمله‌ای، می‌توان اتحادهای زیر را نوشت:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab, \quad a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال:

$$(2-x+y)^2 = 2^2 + (-x)^2 + y^2 + 2(2)(-x) + 2(2)(y) + 2(-x)(y) = 4 + x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2xy$$

اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

مثال:

$$(x - 0.1)(x + 0.1) = x^2 - (0.1)^2 = x^2 - 0.01$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال:

$$(2y-x)(2y+\Delta x) = (2y)^2 + (-x+\Delta x)(2y) + (-x)(\Delta x) = 4y^2 + \Delta xy - \Delta x^2$$

اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

تعریف: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(x-3y)^3 \quad (2) \qquad (2x+1)^3 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - 3x^2(3y) + 3(3y)^2x - (3y)^3 \\ &= x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

از اتحادهای مکعب دوجمله‌ای، می‌توان اتحادهای زیر را نوشت:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b), \quad a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

تعریف: اگر $x+y=6$ و $xy=4$ باشد، حاصل x^3+y^3 را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ \underbrace{(6)^3}_{216} &= x^3 + 3xy(x+y) + y^3 \end{aligned}$$

تجزیه: عمل تبدیل یک چندجمله‌ای به حاصل ضرب دو یا ... چندجمله‌ای را تجزیه می‌گوییم.

$$216 = x^3 + y^3 + 72 \rightarrow x^3 + y^3 = 216 - 72 = 144$$

تجزیه عبارتهای جبری می‌تواند با روش فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها و یا دسته‌بندی مناسب جملات انجام شود.

از x^2 فاکتور می‌گیریم: $2x^3 - 5x^2 = x^2(2x - 5)$

$x^2 - 2y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$

تمرین: عبارت‌های $x^2 - 4y^2$ و $4x^3 - 5x^2$ را تجزیه کنید.

وقتی تفاضل ۲ تا مربع کامل دیدی
باد مزدوج بیفت!

عامل یا شمارنده: هر یک از عبارت‌های ضرب در تجزیه را یک عامل یا شمارنده عبارت تجزیه شده می‌نامیم.

مثال: در تجزیه $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ، عبارت‌های $x + y$ و $x - y$ عامل‌های $x^2 - y^2$ می‌باشند.

مضرب: مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چندجمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عبارت‌های جبری دیگر به دست می‌آیند.

مثال: $x^2 - y^2$ هم مضرب $x - y$ و هم مضرب $x + y$ است.

هم‌چنین داریم: $a - b$ ، $5(a - b)$ ، $(a - b)(a^2 + b^2)$ ، $3(a - b)(a^2 + 4ab)$ ، ...
مثال: $a - b$ مضرب‌های $a - b$

توجه: تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب بجملات و تمرین و مهارت زیادی نیاز دارد.

تمرین: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

تغییر تمرین و سنده دین سبب

بشکن $5x + 7$

$2x^3 - 6x + yx^2 - 3y$ (۲)

$5x^2 + 11x + 6$ (۱)

① $5x^2 + 11x + 6 = (5x^2 + 5x) + (2x + 6) = 5x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(5x+2)$

② $2x^3 - 6x + yx^2 - 3y = 2x(x^2 - 3) + y(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x + y)$

عبارت‌های درجه دومی را که در آن، ضریب x^2 مربع کامل نباشد، می‌توان به روش زیر که با یک مثال توضیح می‌دهیم (که به روش A معروف است)، تجزیه کرد.

تمرین: عبارت $2x^2 + 11x + 15$ را تجزیه کنید.

$A = 2x^2 + 11x + 15$
 $2A = 2x^2 + 22x + 30$
با تقاضای مشترک تجزیه کن

طریقی ضرب بر ۲
که ضریب x^2
مربع کامل شود

$2A = (2x + 5)(2x + 6) \rightarrow A = (2x + 5)(x + 3)$
اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دوجمله‌ای (اتحادهای چاق و لاغر)

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

تمرین: حاصل عبارت $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ را به کمک اتحاد به دست آورید و عبارت $8x^3 - 27$ را تجزیه کنید.

$8x^3 - 27 = (2x)^3 - (3)^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 $= (2x - 3)((2x)^2 + (2x)3 + (3)^2)$
 $= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

چاق و لاغر

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$

پرسش‌های تشریحی:

• حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۱- $x^2 - 25y^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $8+5+4\sqrt{10} = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - 2$ $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 - 1$

۲- $(x^2-3)(x^2+3x^2+9)$ $(5x-1)^3 - 5$ $(x+3)(x-3)(x^2+5)$

۳- $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ $(6x+0/1)(36x^2-0/6x+0/01) - 8$ $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) - 7$

۴- $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

۵- $(x^3-1)^3 = (x^3-1)(x^3+1)(x^3+1)$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ $(5x-1)^3 = (5x-1)(5x^2+5x+1) - 1$

۶- $(x^3-1)(x^3+1) = (x^3-1)(x^3+1)$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ $(5x-1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

۷- $(x^3-1)(x^3+1) = (x^3-1)(x^3+1)$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ $(5x-1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

۸- $(x^3-1)(x^3+1) = (x^3-1)(x^3+1)$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ $(5x-1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

۹- $(x^3-1)(x^3+1) = (x^3-1)(x^3+1)$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ $(5x-1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

۱۰- به کمک اتحادها، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱۱- در جاهای خالی به کمک اتحادها، عبارت مناسب قرار دهید.

ت) $43 \times 37 = (40+3)(40-3) = (40)^2 - (3)^2 = 1600 - 9$

ب) $28 \times 32 = (30-2)(30+2) = (30)^2 - (2)^2 = 900 - 4 = 896$

ب) $996^2 = (1000-4)^2 = (1000)^2 - 2(1000)(4) + (4)^2 = 1000000 + 16 - 8000 = 992016$

ا) $71^2 = (70+1)^2 = (70)^2 + 2(70)(1) + (1)^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$

۱۲- $(x+3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

ب) $(7x+...)(49x^2-14x+...) = 49x^3 + ...$

پ) $(2x+...)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

• عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱۴- $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

۱۳- $x^2 + 4xy + 4y^2$

۱۲- $2x^2 + 12x - 12$

۱۷- $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2$

۱۶- $27x^3 - xy^3$

۱۵- $x^6 - y^6$

۱۹- $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$

۱۸- $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$

۱۲) $2x(x+6)$

۱۳) $(x+2y)^2$

۱۴) $(x-2y)^3$

۱۵) هر کدام چنان دلائل: $(x^3-2y^3)(x^2+2y^2) = (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2+2y^2+y^2)$

۱۶) $x(27x^3 - y^3) = x(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

۱۷) $x(x^2-2y) - y(x^2-2y) = (x^2-2y)(x-y)$

۱۸) $(x^2+y^2-2xy) - z^2 = (x-y)^2 - z^2 = (x-y-z)(x-y+z)$

۱۹) $(a^3+a^2b) + (-2ab-2b^2) = a^2(a+b) - 2b(a+b) = (a+b)(a^2-2b)$

به شدت مهم

۲۰- اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$ جواب
 (ب) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 64 - 12 = 52$ جواب
 (پ) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 4$ $\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x(\frac{1}{x}) = (4)^2$ $\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$ جواب

(ب) $(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x(\frac{1}{x})(x + \frac{1}{x}) = 5^3$ $\rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 12 = 113$ جواب

(ب) $A = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\rightarrow A^2 = x + \frac{1}{x} + 2 = 4 + 2 = 6$ $\rightarrow A = \sqrt{6}$ جواب
 (مشابه فعالیت ۲ صفحه ۶۴ کتاب درسی)

۲۱- دو عبارت بنویسید که $x + 2y$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

باید $(x + 2y)$ را در دو تا عبارت دلخواه یا عدد ضرب کرد:

$2(x + 2y) = 2x + 4y$
 $(x + y)(x + 2y) = x^2 + 2xy + xy + 2y^2 = x^2 + 3xy + 2y^2$
 $(x - 1)(x + 2y) = x^2 + 2xy - x - 2y$

(فعالیت ۳ صفحه ۶۴ کتاب درسی)

۲۲- عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌های زیر می‌باشد؟

$3a + 1$ (۴)

$9a^2 + 3a + 1$ (۳)

$3a - 1$ (۲)

$a - 1$ (۱)

عبارت $27a^3 - 1$ را باید به کمک اتحاد چاق دلاغر تجزیه کنیم هر کدام از پرانتزهای تجزیه یک ضرب برای $27a^3 - 1$ حاصل می‌شوند.

$(27a^3 - 1) = (3a - 1)((3a)^2 + (3a)(1) + (1)^2) = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$
 $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

از ضرب عبارات (۲) و (۳) عبارت داده شده به دست می‌آید.

Homework

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱ در تجزیه عبارت $4x^3 - 6x^2 + 2x$ عامل‌های، و وجود دارد.

۲ تجزیه عبارت $4x^2 - 12x + 9$ به صورت است.

۳ اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $(x + \frac{1}{x})^2$ برابر است با

حاصل عبارت‌های داده شده را به کمک اتحادها به دست آورید؟

۴ $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16)$

۵ $(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})^2 - (a + \frac{1}{a})$

۶ مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$ را گویا کنید.

۷ عبارات جبری زیر را تجزیه کنید.

الف $x^6 - 16$

ب $x^2 + 2x - 3$

۸ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف $\frac{5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{2}{3}}}{5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}}$

ب $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \sqrt{75} - \sqrt[4]{(-5)^4}$

۹ کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} + 2}$$

۱۰ اگر $x = \sqrt[3]{215}$ باشد، حاصل $\sqrt[5]{x^2} \times \sqrt[3]{x}$ برابر است با:

(۱) ۱۶

(۳) ۴

(۲) ۸

(۴) ۲

۱۱ اگر $x^2 + y^2 = 2xy$ باشد، حاصل $\frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۴) -۱

۱۲ حاصل عبارت $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ بعد از گویا کردن کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(۳) $2 - \sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{2} - 3$

۱۳ اگر $x^2 + y^2 = 2xy$ باشد، حاصل $\frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۴) -۱

۱۴ عددی از معکوس خودش دو واحد بزرگتر است. آن عدد کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $2 - \sqrt{3}$

(۳) $-2 + \sqrt{5}$

(۲) $-1 + \sqrt{3}$

(۴) $1 + \sqrt{2}$

۱۵ حاصل عبارت $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ پس از گویا شدن کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(۳) $2 - \sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{2} - 3$

۱۶ اگر $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{24n}}{\sqrt[5]{4}}} = 2$ باشد، آنگاه n کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{8}$

۱۷ اگر $A = \sqrt{2} - 1$ و $B = \sqrt{2} + 1$ ، آنگاه حاصل عبارت $\frac{A^2 + B^2}{AB}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۶

۱۸ اگر $x^2y = -\frac{1}{8}$ باشد، آنگاه حاصل $(4x^2 + 3y)^2 - (4x^2 - 3y)^2$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۸

(۳) ۱۲ (۴) ۴

۱۹ در تجزیه عبارت $7x^6 + 14x^3 - 21x^2$ کدام عامل وجود ندارد؟

(۱) $3x^2$ (۲) $x - 1$

(۳) $7x^2$ (۴) $x + 3$

۲۰ حاصل عبارت $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) -۲

(۳) ۲ (۴) $-\sqrt{2}$

۲۱ اگر $x^2 + y^2 = 1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x+1}{y+1}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{x^3 - x^2}{y^3 - y^2}$ (۲) $\frac{x^3 - x^2}{y^2 - y^3}$

(۳) $\frac{y^3 - y^2}{x^3 - x^2}$ (۴) $\frac{y^3 - y^2}{x^2 - x^3}$

۲۲ حاصل عبارت $(1 + \frac{2}{x-1}) \times (x \div \frac{x+1}{x-1})$ برابر است با: ($x \neq \pm 1$)

(۱) $x - 1$ (۲) $2x$

(۳) $x + 1$ (۴) x

۲۳ ضریب x^6 در عبارت $(2x^2 - 3x)^3$ کدام است؟

(۱) ۵۴ (۲) -۵۴

(۳) ۳۶ (۴) -۳۶

۲۴ اگر $x + y = 5$ و $xy = 6$ باشد، آنگاه حاصل $x^6 + y^6$ کدام است؟

(۱) ۹۹ (۲) ۹۸

(۳) ۹۷ (۴) ۹۶

۲۵ در تجزیه عبارت $(x-2)(x^2-4x+4)-1$ کدام عامل ضرب، موجود است؟

$x-2$ (۲)

$x-3$ (۱)

$x+3$ (۴)

$x-1$ (۳)

۲۶ اگر $x = 7 - 2\sqrt{6}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x}$ کدام است؟

$5/8$ (۲)

$5/6$ (۱)

$1/4$ (۴)

$1/2$ (۳)

۲۷ اگر $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$ باشد، حاصل $3B + 1$ کدام است؟

$\sqrt{7}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

$2\sqrt{7}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۲۸ حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + 2})(\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}})$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$ (۲)

-1 (۱)

$\sqrt{2}$ (۴)

1 (۳)

۲۹ حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{7}}$ کدام است؟

$\sqrt[4]{2}$ (۲)

1 (۱)

$2\sqrt[4]{2}$ (۴)

2 (۳)

۳۰ اگر $\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-1} = 2$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3+1}})^{1401}$ چقدر است؟

-2 (۲)

2 (۱)

-1 (۴)

1 (۳)

پاسخ نامه Homework

۱

$$4x^3 - 6x^2 + 2x = x(4x^2 - 6x + 2) \\ = x(2x - 2)(2x - 1) = 2x(x - 1)(2x - 1)$$

۲

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

۳

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{11} + 2 = 11 + 2 = 13$$

پاسخ سوالات ۴ تا ۵

۴

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^2 + 16) = x^4 - 16^2 = x^4 - 256$$

۵

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \sqrt{a^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2}} + 2\sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{a}} - a - \frac{1}{a} \\ = \cancel{a} + \frac{1}{\cancel{a}} + 2 - \cancel{a} - \frac{1}{\cancel{a}} = 2$$

۶

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}}{x - y}$$

۷
الف

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) \Rightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

ب

$$(x - 1)(x + 3)$$

الف ۸

$$\frac{5^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}}{5^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times 3} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$$

$$\text{حاصل} = \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 5 = 6\sqrt{3} - 5$$

ب

۹

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} \times \frac{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 4}{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 4} = \frac{\sqrt{25} - 2\sqrt{5} + 4}{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{25} - 2\sqrt{5} + 4}{13}$$

گزینه ۳

۱۰

$$\text{می دانیم : } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; a > 0, m, n \in \mathbb{N}$$

$$x = \sqrt[3]{2^{15}} \Rightarrow x = 2^{\frac{15}{3}}$$

$$x\sqrt{x} \times \sqrt[5]{x^2} = x \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{2}{5}} = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = x^{\frac{15}{10}}$$

$$\xrightarrow{x=2^{\frac{15}{3}}} x^{\frac{15}{10}} = (2^{\frac{15}{3}})^{\frac{15}{10}} = 2^2 = 4$$

گزینه ۳

۱۱

$$x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

گزینه ۱

۱۲

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

گزینه ۳

۱۳

$$x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

گزینه ۴

۱۴

$$x = \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow x - \frac{1}{x} - 2 = 0 \xrightarrow{\times x} x^2 - 1 - 2x = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (4 \times 1 \times (-1))}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

گزینه ۱

۱۵

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 - 3} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

گزینه ۴

۱۶

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2^{Fn}}}{\sqrt[5]{4}}} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{\sqrt[3]{2^{Fn}}}{\sqrt[5]{4}} = 4 \xrightarrow{\text{توان } 15} \left(\frac{\sqrt[3]{2^{Fn}}}{\sqrt[5]{4}}\right)^{15} = \frac{(2^{\frac{Fn}{3}})^{15}}{(4^{\frac{1}{5}})^{15}} = \frac{2^{5Fn}}{4^3} = 4^{15}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{5Fn}}{(2^2)^3} = \frac{2^{5Fn}}{2^6} = 2^{5Fn-6} = 4^{15} \Rightarrow (2^2)^{15} = 2^{30} \Rightarrow 5Fn - 6 = 30$$

$$\Rightarrow 5Fn = 36 \Rightarrow n = 1/8$$

گزینه ۴

۱۷

$$A^2 + B^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2$$

از اتحاد مربع دو جمله‌ای $A^2 + B^2 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 6$

$$AB = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$$

از اتحاد مزدوج $AB = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \frac{A^2 + B^2}{AB} = \frac{6}{1} = 6$

گزینه ۱

۱۸

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\underbrace{(4x^2 + 3y)^2}_a - \underbrace{(4x^2 - 3y)^2}_b$$

$$= (4x^2 + 3y - 4x^2 + 3y)(4x^2 + 3y + 4x^2 - 3y) = (6y)(8x^2)$$

$$= (6)(8)(x^2y) = 6 \times 8 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -6$$

گزینه ۱

۱۹

از اتحاد جمله مشترک استفاده کرده‌ایم:

$$7x^6 + 14x^3 - 21x^2 = 7x^2(x^2 + 2x - 3) = 7x^2(x+3)(x-1)$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

گزینه ۳

۲۰

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(\sqrt{\lambda} - \sqrt{2})^2 = \lambda - 2\sqrt{\lambda}\sqrt{2} + 2 = \lambda - \lambda + 2 = 2$$

گزینه ۳

۲۱

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{y+1} &= \frac{(x+1)(x-1)(y-1)}{(y+1)(y-1)(x-1)} = \frac{(x^2-1)(y-1)}{(y^2-1)(x-1)} \\ &= \frac{-y^2(y-1)}{-x^2(x-1)} = \frac{y^2(y-1)}{x^2(x-1)} = \frac{y^3 - y^2}{x^3 - x^2} \end{aligned}$$

توجه شود:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -y^2 \\ y^2 - 1 = -x^2 \end{cases}$$

گزینه ۴

۲۲

$$\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) \times \left(x \times \frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \times \left(\frac{x(x-1)}{x+1}\right) = x$$

گزینه ۱

۲۳

$$\begin{aligned} (2x^2 - 3x)^3 &= (2x^2)^3 + (-3x)^3 + 3(2x^2)^2(-3x) + 3(-3x)^2(2x^2) \\ &= 8x^6 - 27x^3 - 36x^5 + 54x^4 \Rightarrow x^4 \text{ ضریب} = +54 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۲۴

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$5^2 = x^2 + y^2 + 2(6) \Rightarrow 25 = x^2 + y^2 + 12 \Rightarrow x^2 + y^2 = 13$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

$$(13)^2 = x^4 + y^4 + 2(xy)^2 \Rightarrow 169 = x^4 + y^4 + 2(6)^2$$

$$\Rightarrow 169 = x^4 + y^4 + 2 \times 36 \Rightarrow x^4 + y^4 = 97$$

گزینه ۱

۲۵

می‌دانیم که $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ است.

$$(x - 2)(x^2 - 4x + 4) - 1 = (x - 2)(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

$$= ((x - 2) - 1)((x - 2)^2 + (x - 2) + 1) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1)$$

$$= (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

گزینه ۲

۲۶

$$x = 7 - 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 = (7 - 2\sqrt{6})^2 = 49 + 24 - 28\sqrt{6} = 73 - 28\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{x+2}{25} + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 25}{25x}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 2(7 - 2\sqrt{6}) + 25}{7 - 2\sqrt{6}}}$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{112 - 32\sqrt{6}}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{16(7 - 2\sqrt{6})}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{16}}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گزینه ۲

۲۷

$$B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{\sqrt{2} + \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})} = \frac{1 + \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$$

$$B = \frac{(1 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})}{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})} = \frac{-3 + 3\sqrt{7}}{16 - 7} = \frac{3(\sqrt{7} - 1)}{9}$$

$$\Rightarrow 3B + 1 = \sqrt{7}$$

گزینه ۱

۲۸

قرار می‌دهیم:

$$A = \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} A^2 = 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = 2$$

$$\xrightarrow{A < 0} A = -\sqrt{2}$$

خواسته سوال برابر است با:

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + 2}\right) \times (-\sqrt{2}) = -\frac{2 + \sqrt{10}}{\sqrt{10} + 2} = -1$$

گزینه ۲

۲۹

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(4 + \sqrt{Y})^{-1}} \sqrt{(1 + \sqrt{Y})} &= \sqrt[4]{\frac{1}{4 + \sqrt{Y}}} \sqrt[4]{(1 + \sqrt{Y})^2} \\ &= \sqrt[4]{\frac{1}{4 + \sqrt{Y}}} \sqrt[4]{4 + 2\sqrt{Y}} = \sqrt[4]{\frac{4 + 2\sqrt{Y}}{4 + \sqrt{Y}}} = \sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

گزینه ۳

۳۰

$$\begin{aligned} a^x = t : \frac{1}{a^x + 1} + \frac{1}{a^x - 1} = 2 \xrightarrow{a^x = t} \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t - 1} = 2 \\ \Rightarrow \frac{2t}{t^2 - 1} = 2 \Rightarrow t = t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^x - \sqrt{a^x} + 1} + \frac{1}{a^x + \sqrt{a^x} + 1}\right)^{1401} &= \left(\frac{1}{t - \sqrt{t} + 1} + \frac{1}{t + \sqrt{t} + 1}\right)^{1401} \\ &= \left(\frac{2t + 2}{\underbrace{(t + 1 - \sqrt{t})(t + 1 + \sqrt{t})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}\right)^{1401} = \left(\frac{2t + 2}{t^2 + t + 1}\right)^{1401} \xrightarrow{t = t^2 - 1} \left(\frac{2t^2}{2t^2}\right)^{1401} = 1 \end{aligned}$$

BOX 5: عبارتهای گویا

(صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷ کتاب درسی)

تعریف عبارت گویا، ساده کردن، ضرب و تقسیم و همپنین جمع و تفریق عبارتهای گویا در این BOX وجود دارد. گویا کردن مخرج کسرها به کمک اتحاد مزدوج و یاق و لاغر در انتهای این BOX قرار دارد.

چند جمله‌ای
 $a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \dots$
 عدد ثابت مثل $\sqrt{2}$ یا $\sqrt{3}$ از خانها، چند جمله‌هاست $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ چند جمله‌ای نیستند.

عبارت گویا: هر کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد را عبارت گویا می‌گوییم. **مثال:** یک عبارت گویا است، اما عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$ گویا نیست، زیرا \sqrt{x} یک جمله‌ای نمی‌باشد. **مثال:** یک عبارت گویا است، اما عبارت $\frac{2x + \sqrt{5}}{x+y}$ گویا نیست.

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد (مقدار ندارد).

تعریف: عبارت گویای $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}$ به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟
 $x=2$ مخرج = صفر
 $x=1$ مخرج = صفر

ساده کردن عبارتهای گویا: برای ساده کردن عبارتهای گویا، صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم و با حذف عامل‌های مشترک در صورت و مخرج، ساده شده کسر به دست می‌آید.

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{x^2-x+1}{x+5}$$

به شرط $x+1 \neq 0$
 $x \neq -1$

تعریف: عبارت گویای $\frac{x^2+1}{x^2+6x+5}$ را ساده کنید.

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا: برای ضرب و تقسیم عبارتهای گویا، ابتدا هر یک از عبارتهای گویا را ساده کرده و سپس از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, (b, d \neq 0) \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, (b, c, d \neq 0)$$

مثال:

$$\frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^3-1}{x^2+x+1} = \frac{x(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} = x(x+1)$$

جمع و تفریق عبارتهای گویا: برای جمع و تفریق عبارتهای گویا، پس از ساده کردن هر یک از عبارتهای گویا، کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها را به دست می‌آوریم (اگر مخرج همه کسرها را تجزیه کرده و سپس عامل‌های موجود با بزرگ‌ترین توان را در هم ضرب کنیم، کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها به دست می‌آید)، سپس کسرهایی با کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها می‌نویسیم و

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

آن‌ها را با استفاده از دستور زیر ساده می‌کنیم:

تعریف: حاصل کسر $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ را به دست آورید. **مخرج مشترک می‌گیریم:**

$$\frac{2(x+1) + 1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2+x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$$

گویا کردن مخرج کسرها: برای گویا کردن مخرج کسر عبارت $\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}}$ ، $(n > m)$ ، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

مخرج رادیکالی بنانه

تعریف: مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^2 \cdot x} = \sqrt[3]{x^3} = x} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{x}$$

نکته: اگر در مخرج کسر، رادیکال‌هایی با فرجهٔ زوج داشته باشیم و مخرج کسر فقط یک رادیکال نباشد، برای گویا کردن مخرج از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. به این روش که صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم (مزدوج $a-b$ ، عبارت $a+b$ و مزدوج $a+b$ ، عبارت $a-b$ می‌باشد)، سپس با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل مخرج را که یک عبارت بدون رادیکال است، به دست می‌آوریم.

گویا

تعریف: مخرج کسر $\frac{x}{\sqrt{2}+3}$ را گویا کنید.

$$\frac{x}{(\sqrt{2}+3)} \times \frac{\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2}-3)} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2})^2-(3)^2} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{2-9=-7} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{-7}$$

دقت: فرجهٔ $a-b$ برابر $b-a$ است.

نکته: اگر در مخرج کسر، رادیکال‌هایی با فرجهٔ ۳ داشته باشیم و مخرج کسر فقط یک رادیکال نباشد، برای گویا کردن مخرج کسر از اتحاد‌های

چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3, \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

تعریف: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$ را گویا کنید.

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^3+(1)^3} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$$

چاق و لاغر

پرسش‌های تشریحی:

۱- مشخص کنید کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟ (چرا؟)

- (آ) $\frac{x+1}{x^2+5}$ ✓
- (ب) $\frac{\sqrt{2}}{x^2-1}$ ✓
- (پ) $\sqrt[3]{x}+1$ ✗
- (ث) $x+4$ ✓

۲- عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

- (آ) $\frac{4x}{x-2} = 0 \Rightarrow x=2$
- (ب) $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+1} = 0$
 $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ امکان ندارد.
 $x+3=0 \Rightarrow x=-3$
 $x-1=0 \Rightarrow x=1$
- (پ) $\frac{x+4}{4x^2-8x} = 0 \Rightarrow 4x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

۳- کسرهای گویای زیر را ساده کنید.

- (آ) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$
- (ب) $\frac{x^2+4}{x^4-16} = \frac{x^2+4}{(x^2-4)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2-4}$
- (ج) $\frac{y^5+y^3-2y}{4y^2+4y} = \frac{y(y^4+y^2-2)}{4y(y+1)} = \frac{y(y^2+1)(y^2-2)}{4y(y+1)} = \frac{(y^2+1)(y^2-2)}{4(y+1)}$
- (د) $\frac{x(x^2+2x+1)}{x^2(x^2+1)} = \frac{x(x+1)^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2-x+1}$
- (ه) $\frac{y(y^2-1)}{y(y^2+y+1)} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)(y^2+y+1)} = \frac{y-1}{y^2+y+1}$

۴- حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

(ب) $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3}{x^2 + 3x - 10}$

(آ) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

(پ) $\frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} + \frac{x^4 - 1}{x^3 + x}$

۵- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

(ت) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$

(پ) $\frac{3}{4 - \sqrt{7}}$

(ب) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$

(آ) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(ح) $\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}$

(ج) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

(ج) $\frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$

(ث) $\frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

(ر) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$

(ذ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}}$

(د) $\frac{1}{\sqrt[3]{5+2}}$

(خ) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

(ژ) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$

(ز) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$

خواننده متوجه = t

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۶۷ کتاب درسی)

۶- اگر $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} = 2$ باشد، حاصل $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ را به دست آورید.

$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} = 2$

طرفین مساوی داره. شده رادر خواننده متوجه ضرب کن

$(\frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}}{a} - \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}{b}) (\frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}{a} + \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}}{b}) = 2 (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})$

$a^2 - b^2 = (\sqrt{x+5})^2 - (\sqrt{x-3})^2 = 2 (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})$
(تمرین ۴ صفحه ۶۷ کتاب درسی)

$t = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
خواننده متوجه

$(x+5) - (x-3) = 2t \rightarrow t = 4$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(ب) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{x-1}$

(آ) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{5x}{x-1}$

جیبی
تم
برای
ایمان
تشریحی
وتی