

BOX 3: توان‌های گویا

(صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱ کتاب درسی)

تعریف توان‌های گویای اعداد حقیقی مثبت در این قسمت گفته می‌شود. هم‌پنین روابط تکمیلی برای رادیکال‌ها نیز بیان می‌شود.

تعریف: برای هر عدد طبیعی n ، $(n \geq 2)$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}, \quad 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}, \quad 6^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{2 \cdot 3} = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{3} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$$

مثال:

تذکر مهم: عبارت‌هایی مانند $5^{\frac{1}{-1}}$ ، $(-3)^{\frac{2}{8}}$ و ... را که در آن‌ها پایه a منفی است، تعریف نمی‌شوند. **اعداد منفی را با توان کسری ننویس.**

تعریف: هرگاه $a > 0$ ، برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(توجه کنیم عدد مخرج، در کسر $\frac{m}{n}$ در فرجه رادیکال قرار می‌گیرد.)

اگر $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی باشند، $a^{\frac{m}{n}}$ به صورت $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ تعریف می‌شود. بنابراین داریم

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

هم‌چنین $a^{-\frac{m}{n}}$ به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: **هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان مثبت**

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

تعرین: هر یک از اعداد توان‌دار زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[4]{2^7} = \sqrt[2]{2^7} = 2^{\frac{7}{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}} \quad (1)$$

قواعد توان: قواعد توان، برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار است. اگر r و s دو عدد گویا و $a > 0$ باشد، آن‌گاه:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $a^r \times b^r = (ab)^r$

۳) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

۴) $a^r \div b^r = (\frac{a}{b})^r, b \neq 0$

۵) $(a^r)^s = a^{rs}$

۶) $1^r = 1$

Handwritten examples and notes for the power rules:

- $2^5 \times 2^3 = 2^8 = 256$ (Note: 2^5 has 5, 2^3 has 3, result has 8)
- $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ (Note: 2^3 has 3, 2^6 has 6)
- $2^5 \div 2^2 = 2^3 = 8$ (Note: 2^5 has 5, 2^2 has 2, result has 3)
- $2^5 \times 2^3 = 2^8 = 256$ (Note: 2^5 has 5, 2^3 has 3, result has 8)
- $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ (Note: 2^3 has 3, 2^6 has 6)
- $2^5 \div 2^2 = 2^3 = 8$ (Note: 2^5 has 5, 2^2 has 2, result has 3)

تعرین: عبارت $\frac{2^5 \times 6^3}{2^2 \times 3^2}$ را به صورت یک عبارت رادیکالی بنویسید.

$$\frac{2^5 \times 6^3}{2^2 \times 3^2} = \frac{2^5 \times (2 \times 3)^3}{2^2 \times 3^2} = \frac{2^5 \times 2^3 \times 3^3}{2^2 \times 3^2} = \frac{2^8 \times 3^3}{2^2 \times 3^2} = 2^6 \times 3^1 = 64 \times 3 = 192$$

نکته: ۱) اگر $a > 0$ و r یک عدد گویا باشد، آن‌گاه:

هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان مثبت

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$9^{-\frac{2}{4}} = (3^2)^{-\frac{2}{4}} = 3^{2 \times (-\frac{2}{4})} = 3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3^2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

مثال:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۲) اگر a یک عدد حقیقی مثبت، n یک عدد طبیعی و m یک عدد صحیح منفی باشد، آن‌گاه:

$$5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{5^2}} = \sqrt{\frac{1}{25}}$$

مثال:

(۳) اگر $a > 0$ و هم‌چنین m و n دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[mn]{a})$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[3 \times 5]{4} = \sqrt[15]{4}$$

مثال:

$$a^{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a^b}$$

(۴) اگر a و b دو عدد مثبت و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

از این نکته برای انتقال ضریب رادیکال به داخل رادیکال و یا در ساده کردن رادیکال‌ها استفاده می‌کنیم.

$$3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \times 5} = \sqrt[3]{27 \times 5} = \sqrt[3]{135}$$

مثال:

$$\sqrt[n]{a^m} = k\sqrt[n]{a^{km}} ; (a > 0)$$

(۵) اگر k, n و m سه عدد طبیعی باشند، آن‌گاه:

می‌دانیم در ضرب رادیکال‌ها، فرجه‌ها باید با هم برابر باشند. اگر دو رادیکال با فرجه‌های غیربرابر ضرب شده باشند، با استفاده از این نکته، فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم: **فرجه مشترک**

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt{2} = \sqrt[3 \times 2]{4^2} \times \sqrt[2 \times 3]{2^3} = \sqrt[6]{4^2} \times \sqrt[6]{2^3} \stackrel{4^2=2^4}{=} \sqrt[6]{2^4} \times \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \times 2} = 2\sqrt[6]{2}$$

مثال:

تمرین: عدد $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}\sqrt{3}}$ را به صورت یک عبارت با یک رادیکال بنویسید.

$$\ominus \sqrt[3]{2 \sqrt{2} \sqrt{3}} = \ominus \sqrt[3]{2 \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3}} = \ominus \sqrt[3]{2 \sqrt{12}} = \ominus \sqrt[3]{2 \sqrt{(2^2 \cdot 3)}} = \ominus \sqrt[3]{2 \sqrt{2^2 \cdot 3}} = \ominus \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 3} = \ominus \sqrt[3]{12}$$

پوش‌های تشریحی:

۱۰۲۴ $3 \cdot 2(3) = 96$

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۱ کتاب درسی)

۱- توان‌های کسری را به شکل رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[5]{3^6} = \frac{6}{5} \quad (\text{ت})$$

$$\sqrt[2]{(18)^3} = 18^{\frac{3}{2}} \quad (\text{پ})$$

$$\sqrt[7]{5} = 5^{\frac{1}{7}} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \quad (\text{ا})$$

$$\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \quad (\text{ج})$$

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} \quad (\text{د})$$

$$15^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{15^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{15^3}} \quad (\text{ه})$$

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \quad (\text{و})$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{18}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2 \cdot 3^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{36}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6} = 6^{-1} = 6^{-\frac{1}{1}} \quad (\text{ز})$$

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6} + \frac{3}{6}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5} \quad (\text{ح})$$

۲- رادیکال‌های زیر را به شکل توان کسری بنویسید.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \quad (\text{پ})$$

$$\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}} \quad (\text{ا})$$

$$\sqrt[7]{\sqrt{2}} = \sqrt[7]{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{14}} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{16}} = \sqrt[5]{16^{-1}} = 16^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \quad (\text{د})$$

$$\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^5} = 5^{\frac{5}{3}} \quad (\text{ه})$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{2^{-3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt[4]{4})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{و})$$

$$\sqrt[2]{2\sqrt{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{2^2} \cdot 2} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{2^2} \cdot 2^1} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} \quad (\text{ز})$$

$$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} \quad (\text{ح})$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \frac{1}{3} \quad \text{نه توان}$$

۳- عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

پ) $5^{\frac{2}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$

ب) $3^{\frac{1}{5}} = 3^{-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = 3^{-\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}$

ا) $5^{-\frac{9}{5}} = (5^{-\frac{3}{5}})^3$

ج) $\frac{5^{\frac{9-8=1}{13}}}{5^{\frac{8+3=11}{13}}} = \frac{5^{\frac{1}{13}}}{5^{\frac{11}{13}}} = \frac{5^{\frac{1}{13}}}{5^{\frac{11}{13}}}$

ث) $2^{-0.75} \times 3^{-\frac{2}{4}} \times 6^{-\frac{7}{2}}$

ت) $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}}$

$\frac{5^{\frac{1}{13}}}{5^{\frac{11}{13}}} = 5^{\frac{1}{13}-\frac{11}{13}} = 5^{-\frac{10}{13}}$

$2^{-0.75} \times 3^{-\frac{2}{4}} \times 6^{-\frac{7}{2}} = (2^{-\frac{3}{4}})^{-1} \times (3^{-\frac{1}{2}})^{-1} \times (2 \times 3)^{-\frac{7}{2}} = (2^{-\frac{3}{4}})^{-1} (3^{-\frac{1}{2}})^{-1} \times 2^{-\frac{7}{2}} \times 3^{-\frac{7}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{7}{2}} \times 3^{-\frac{7}{2}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{7}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}} = 2^{-\frac{11}{4}} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{11}{4}} \times 3^{-\frac{3}{2}}$

$3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3}} = 3^{\frac{14}{3}} = (3^{\frac{14}{3}})^{\frac{1}{4}}$

۴- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

دنت

ب) $(\sqrt{5})^4 + (\frac{1}{216})^{-\frac{1}{3}} - (642)^{\frac{1}{3}}$

ا) $16^{\frac{1}{4}} - 27^{\frac{2}{3}} = 2 - 9 = -7$ جواب: -۷

$(\sqrt{5})^4 + (\frac{1}{216})^{-\frac{1}{3}} - ((2^6)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = 5^2 + 6 - 2 = 25 + 6 - 2 = 29$

$(2^4)^{\frac{1}{2}} - (3^3)^{\frac{2}{3}} = 2 - 3^2 = 2 - 9 = -7$

۵- عبارتهای زیر را ساده کنید.

پ) $(64^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}$ جواب: $\sqrt{2}$

ب) $7^{\frac{16}{5}} \sqrt[5]{7}$ جواب: $343 \sqrt[5]{7}$

ا) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

ج) $\frac{1}{81} = 81^{-\frac{1}{4}}$

ث) $216 \sqrt{2} = 2^{\frac{7}{2}} \times 3^{\frac{7}{2}}$

ت) $2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ جواب: $4 \sqrt[3]{32}$

خ) $\frac{1}{289 \sqrt[5]{17}} = 17^{-\frac{11}{5}}$ جواب: $17^{\frac{11}{5}}$

ج) $36^{-\frac{7}{4}}$

چ) $100^{-\frac{3}{2}}$ جواب: $1/100$

جواب: $\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}$

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۶۱ کتاب درسی)

۶- عبارتهای زیر را به صورت ساده تر بنویسید.

پ) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$

ب) $\sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{10}}$

ا) $\sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ جواب: $\sqrt[3]{4}$

ج) $\sqrt[5]{2^3 \sqrt[4]{2^3}}$

ث) $\sqrt[5]{-25^{\frac{3}{2}}}$

ت) $\sqrt[5]{3 \sqrt[3]{2}}$ جواب: $\sqrt[15]{18}$

ت) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[15]{2} = \sqrt[15]{18} = \sqrt[15]{18}$

ث) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[15]{2} = \sqrt[15]{18} = \sqrt[15]{18}$

ج) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[60]{2^3} = \sqrt[60]{8} = \sqrt[60]{8}$

اقتدار مربع $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$7 - 2\sqrt{3} = 2 + 3 - 2\sqrt{3} = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(2)\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$
 $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

۷- عبارتهای زیر را ساده کنید.

پ) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^2}}$, $(a > 0)$ جواب: $\frac{1}{3\sqrt{a^7}}$

ب) $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}}$ جواب $5\sqrt{5}$

ا) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{8}$ جواب: $2\sqrt[15]{12}$

ج) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

ث) $\sqrt{2}\sqrt[3]{\sqrt{2}} \div \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}}$

ت) $\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}} \sqrt[4]{\frac{1}{16x^4}}$, $(x > 0)$ جواب: $\sqrt[12]{\frac{1}{2x}}$

ح) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$

ث) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{4}{9}}$
 $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{4}{15}}$
 $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{4}{9}} = 2^{\frac{10}{27}}$
 $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{4}{15}} = 2^{\frac{8}{30}} = 2^{\frac{16}{60}} = 2^{\frac{8}{30}} = 2^{\frac{4}{15}}$

۸- اعداد $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$ و $\sqrt[4]{6}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. باید فرجه مشترک بگیریم عددی که به ۳، ۲، ۴ بخش پذیر باشد ۱۲ هست

۹- کدام عبارت درست است؟
 $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^{12}}$
 $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{3^6}$
 $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{5^4}$

$\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{2}$

ب) $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$

ا) $\sqrt[3]{-8} = -2$

د) $-\sqrt[3]{8} = -2$

غلط طبق سه ار داد کتاب درسی عدد منفی را به توان کسری ننویس در توان های گویا پایه نباید منفی باشد (جمله متن درسی)

(تمرین ۲ صفحه ۶۱ کتاب درسی)

۱۰- اگر a یک عدد حقیقی مثبت و m, n, k اعداد طبیعی باشند، نشان دهید: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

می دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
 $\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

BOX 4: عبارتهای جبری

صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴ کتاب درسی

از سال قبل با اتحاد و تجزیه آشنایی دارید. در این قسمت علاوه بر یادآوری اتحادهای سال قبل، اتحاد مکعب دو جمله‌ای و اتحاد پاق و لاغر به آن‌ها اضافه می‌شود.

اتحاد جبری: اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال:

$$(2x - 5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

اتحادهای بالا را به صورت $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ نیز می‌نویسیم.

از اتحادهای مربع دو جمله‌ای، می‌توان اتحادهای زیر را نوشت:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab, \quad a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

اتحاد مربع سه جمله‌ای:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال:

$$(2-x+y)^2 = 2^2 + (-x)^2 + y^2 + 2(2)(-x) + 2(2)(y) + 2(-x)(y) = 4 + x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2xy$$

اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

مثال:

$$(x - 0.1)(x + 0.1) = x^2 - (0.1)^2 = x^2 - 0.01$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال:

$$(2y-x)(2y+\Delta x) = (2y)^2 + (-x+\Delta x)(2y) + (-x)(\Delta x) = 4y^2 + \Delta xy - \Delta x^2$$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

تعریف: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(2x+1)^3 \quad (1) \quad (x-3y)^3 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - 3x^2(3y) + 3(3y)^2x - (3y)^3 \\ &= x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

از اتحادهای مکعب دو جمله‌ای، می‌توان اتحادهای زیر را نوشت:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b), \quad a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

تعریف: اگر $x+y=6$ و $xy=4$ باشد، حاصل x^3+y^3 را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ \underbrace{(6)^3}_{216} &= x^3 + 3xy(x+y) + y^3 \end{aligned}$$

تجزیه: عمل تبدیل یک چندجمله‌ای به حاصل ضرب دو یا ... چندجمله‌ای را تجزیه می‌گوییم.

$$216 = x^3 + y^3 + 72 \rightarrow x^3 + y^3 = 216 - 72 = 144$$

تجزیه عبارتهای جبری می‌تواند با روش فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها و یا دسته‌بندی مناسب جملات انجام شود.

از x^2 فاکتور می‌گیریم: $2x^3 - 5x^2 = x^2(2x - 5)$

$x^2 - 2y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$

تمرین: عبارت‌های $x^2 - 4y^2$ و $4x^3 - 5x^2$ را تجزیه کنید.

وقتی تفاضل ۲ تا مربع کامل دیدی
باد مزدوج بیفت!

عامل یا شمارنده: هر یک از عبارت‌های ضرب در تجزیه را یک عامل یا شمارنده عبارت تجزیه شده می‌نامیم.

مثال: در تجزیه $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ، عبارت‌های $x + y$ و $x - y$ عامل‌های $x^2 - y^2$ می‌باشند.

مضرب: مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چندجمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عبارت‌های جبری دیگر به دست می‌آیند.

مثال: $x^2 - y^2$ هم مضرب $x - y$ و هم مضرب $x + y$ است.

هم‌چنین داریم: $a - b$ مضرب‌های $a - b, 5(a - b), (a - b)(a^2 + b^2), 3(a - b)(a^2 + 4ab), \dots$ **مثال:**

توجه: تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب بجملات و تمرین و مهارت زیادی نیاز دارد.

تمرین: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

تغییر تمرین و سنده دین سندب

بشکن $5x + 7$

$2x^3 - 6x + yx^2 - 3y$ (۲)

$5x^2 + 11x + 6$ (۱)

① $5x^2 + 11x + 6 = (5x^2 + 5x) + (2x + 6) = 5x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(5x+2)$

② $2x^3 - 6x + yx^2 - 3y = 2x(x^2 - 3) + y(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x + y)$

عبارت‌های درجه دومی را که در آن، ضریب x^2 مربع کامل نباشد، می‌توان به روش زیر که با یک مثال توضیح می‌دهیم (که به روش A معروف است)، تجزیه کرد.

تمرین: عبارت $2x^2 + 11x + 15$ را تجزیه کنید.

$A = 2x^2 + 11x + 15$
 $2A = 2x^2 + 22x + 30$
 با تقاطع مشترک تجزیه کن

طریقی ضریب ۲
که ضریب ۳
مربع کامل شود

$2A = (2x + 5)(2x + 6) \rightarrow A = (2x + 5)(x + 3)$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دوجمله‌ای (اتحادهای چاق و لاغر)

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

تمرین: حاصل عبارت $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ را به کمک اتحاد به دست آورید و عبارت $8x^3 - 27$ را تجزیه کنید.

$8x^3 - 27 = (2x)^3 - (3)^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 $= (2x - 3)((2x)^2 + (2x)3 + (3)^2)$
 $= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

چاق و لاغر

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$

پرسش‌های تشریحی:

• حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۱- $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

۲- $8 + 5 + 4\sqrt{10} = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$

۳- $(x+5y^2)(x-5y^2) = (a+b)(a-b)$

۴- $(x+3)(x-3)(x^2+5)$

۵- $(5x-1)^3$

۶- $(x^2-3)(x^2+3x^2+9)$

۷- $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) = (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

۸- $(6x+0/1)(36x^2-0/6x+0/01) = (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

۹- $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

۱۰- به کمک اتحادها، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ت) $43 \times 37 = (40+3)(40-3) = (40)^2 - (3)^2 = 1600 - 9$

ب) $28 \times 32 = (30-2)(30+2) = (30)^2 - (2)^2 = 900 - 4 = 896$

ب) $996^2 = (1000-4)^2 = (1000)^2 - 2(1000)(4) + (4)^2 = 1000000 - 8000 + 16 = 992016$

آ) $71^2 = (70+1)^2 = (70)^2 + 2(70)(1) + (1)^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$

۱۱- در جاهای خالی به کمک اتحادها، عبارت مناسب قرار دهید.

(x+.....)^2 = + + 9y^2 (آ)

(7x+.....)(49x^2 - 14x +) = + (ب)

(2x+.....)^3 = + 12x^2y^2 + + (پ)

• عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

- ۱۲- $2x^2 + 12x$
- ۱۳- $x^2 + 4xy + 4y^2$
- ۱۴- $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
- ۱۵- $x^6 - y^6$
- ۱۶- $27x^3 - xy^3$
- ۱۷- $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2$
- ۱۸- $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$
- ۱۹- $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$

مربع $(a+b)^r = a^r + r ab + b^r$

درجه $a^r + b^r = (a+b)^r - r ab$

$$(a-b)^r = a^r - r ab + b^r$$

$$a^r + b^r = (a-b)^r + r ab$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^r + (a-b)^r = r(a^r + b^r) \\ (a+b)^r - (a-b)^r = 2 ab \quad \text{و} \end{array} \right.$$

مربع 3 $(a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + r ab + r ac + r bc$

مربع $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$$

$$(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x})^2 - (1)^2 = x - 1$$

مربع 2 $(a+b)^n = a^n + \underbrace{n a^{n-1} b + n a b^{n-1}} + b^n = a^n + b^n + n ab(a+b)$

$$(a-b)^n = a^n - \underbrace{n a^{n-1} b + n a b^{n-1}} - b^n = a^n - b^n - n ab(a-b)$$

اختلاف مربع مشترك $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$