فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

BOX 1: ریشه و توان (صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی)

با تعریف ریشه و توان در این قسمت آشنا می‌شویم. عکس عمل توان، ریشه‌گیری است.

ریشهٔ دوم: فرض کنیم **a** یک عدد حقیقی و **b** یک عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. اگر $a^۲ = b$ باشد، آن‌گاه **a** را ریشهٔ دوم عدد **b** می‌گوییم.

$a^۲=۴$ سمت a با ۲ یا ۲- عدد ۴ دو تا ریشه دوم دارد.

مثال: $۹ = (\pm۳)^۲$ می‌باشد، بنابراین ریشه‌های دوم عدد ۹، اعداد ±۳ می‌باشند. دقت کن که $\sqrt{۹}=۳$ و $\sqrt{۴}=۲$ است

نکته: ۱) هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشهٔ دوم می‌باشد. اگر $a^۲ = b$ و $b > ۰$، آن‌گاه اعداد $\pm\sqrt{b}$ ریشه‌های دوم عدد **b** هستند. مهم

۲) عدد حقیقی صفر فقط یک ریشهٔ دوم برابر صفر دارد و اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند.

برای درست نادرست امتحان مهم هست

معرفی دو علامت علامت نتیجه یک شرطی — علامت نتیجه دو شرطی

علامت «$\Rightarrow$» را «نتیجه می‌دهد» و علامت «$\Leftrightarrow$» را «معادل است با» می‌خوانیم. به عبارتی علامت «$\Leftrightarrow$» به معنای آن است که سمت چپ، سمت راست و سمت راست، سمت چپ را نتیجه می‌دهد.

مثال: $۰/۱ = \sqrt{۰/۰۱} \Leftrightarrow ۰/۰۱ = (۰/۱)^۲$ به معنای آن است که از تساوی $۰/۰۱ = (۰/۱)^۲$ می‌توان تساوی $\sqrt{۰/۰۱} = ۰/۱$ و از تساوی $۰/۱ = \sqrt{۰/۰۱}$ می‌توان تساوی $(۰/۱)^۲ = ۰/۰۱$ را نتیجه گرفت.

بخون: ریشه سوم یا کعب

ریشهٔ سوم: اگر **a** و **b** دو عدد حقیقی و $a^۳ = b$ باشد، **a** را ریشهٔ سوم عدد **b** می‌گوییم و آن را با $\sqrt[۳]{b}$ نمایش می‌دهیم.

نکته: تمام اعداد حقیقی ریشهٔ سوم دارند و هر عدد حقیقی فقط یک ریشهٔ سوم دارد که علامت آن با علامت خود عدد یکی است.

مثال: $(-۲)^۳ = -۸ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۸} = -۲$

محاسبهٔ مقدار تقریبی: اعدادی مانند $\sqrt[۳]{۴۲}$، اعدادی اعشاری هستند که هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. البته با ماشین حساب‌های قوی می‌توان تعداد ارقام بیشتری به دست آورد و عدد دقیق‌تری برای ریشهٔ سوم ۴۲ پیدا کرد.

در مثال زیر، روش به دست‌آوردن مقدار تقریبی عدد $\sqrt[۳]{۴۲}$ را می‌بینید که از همین روش می‌توانید برای به دست‌آوردن مقدار تقریبی سایر عددها نیز استفاده کنید.

باید دو تا عدد مکعب کامل در ۲ طرف ۴۲ پیدا کنیم: می‌دانیم $۳^۳ = ۲۷ < ۴۲ < ۴^۳ = ۶۴$

تمرین: مقدار تقریبی عدد $\sqrt[۳]{۴۲}$ را به دست آورید.

پس: $۳ = \sqrt[۳]{۳^۳} < \sqrt[۳]{۴۲} < \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴$ پس $\sqrt[۳]{۴۲}$ بین ۳ و ۴ هست

و چون ۴۲ به ۲۷ نزدیک‌تر است $\sqrt[۳]{۴۲}$ به ۳ نزدیک‌تره حال به صورت زیر شروع به امتحان می‌کنیم:

$(۳,۱)^۳ = (۳,۱)(۳,۱)(۳,۱) = ۲۹,۷۹۱$

$(۳,۲)^۳ = ۳۲,۷۶۸$

$(۳,۳)^۳ = ۳۵,۹۳۷$

$(۳,۴)^۳ = ۳۹,۳۰۴$

$(۳,۵)^۳ = ۴۲,۸۷۵$

جواب: $\sqrt[۳]{۴۲} \simeq ۳,۵$

ریشه‌های چهارم و پنجم: مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه‌های چهارم و پنجم اعداد را تعریف کرد.

مثال: ریشه‌های چهارم عدد $۰/۰۰۱۶$ برابر با $\pm۰/۲$ می‌باشند، زیرا $(-۰/۲)^۴ = ۰/۰۰۱۶$ و $(۰/۲)^۴ = ۰/۰۰۱۶$. همچنین:

$$(\frac{۱}{۲})^۵ = \frac{۱}{۳۲} \Leftrightarrow \sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}} = \frac{۱}{۲}$$

دقت ریشه زوج اُم می‌پرسه باید ۲ تا جواب گزارش کنی.
ولی ریشه فرد اُم یک جواب است و نه ۲ تا جواب.

توان‌های ۲ و ۳ را حفظ باش

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
2^n	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	۲۰۴۸

پرسش‌های تشریحی:

• جاهای خالی را کامل کنید.

$256 = 2^8 = (2^2)^4 = (4)^4$ یا $(-4)^4$

۱- اعداد ۴ و ...-4... ریشه‌های چهارم عدد ...۲۵۶... می‌باشند.

۲- هر عدد مثبت دارای ...دو... ریشهٔ چهارم است که ...قرینه... یکدیگرند. مثلاً ۱۶ دو تا ریشه ۴ام داره ۲، ۲-

۳- هر عدد مثبت یا منفی دارای ...یک... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن ...مثبت... است و اگر عدد ...منفی... باشد، ریشهٔ پنجم آن منفی است.

۴- $\sqrt[4]{-3}$ یک عبارت ...بی‌معنی... است. تعریف نشده

زیر رادیکال فرجه زوج باید عدد مثبت یا صفر باشد: $\sqrt[2n]{u} \rightarrow u \geq 0$

۵- عبارت $\sqrt[4]{ab}$ وقتی بامعنی است که a و b هر دو ...مثبت... و یا هر دو ...منفی... باشند. $(a,b \neq 0)$ هم‌علامت باشند.

مهم

۶- مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با تقریب ۰/۱ اعشار مشخص کنید. یک رقم اعشار (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۵۲ کتاب درسی)

آ) $\sqrt{65}$ ب) $\sqrt{34}$ پ) $\sqrt[3]{22}$

ت) $\sqrt[4]{20}$ ث) $\sqrt[5]{40}$ ج) $\sqrt[3]{55}$

آ)

عدد	۸	۸,۱
مربع	۶۴	۶۵,۶۱

$\sqrt{65} \simeq 8.1$

ب)

عدد	۵ ...	۵,۸	۵,۹	۶
مربع	۲۵	۳۳,۶۴	۳۴,۸۱	۳۶

$\sqrt{34} \simeq 5.9$

پ)

عدد	۲,۸	۲,۹	۳
مکعب	۲۱,۹۵	۲۴,۳۸	۲۷

$\sqrt[3]{22} \simeq 2.8$

ت)

عدد	۲	۲,۱	۲۲
توان ۴	۱۶	۱۹,۴۴	۲۳,۴۲

$\sqrt[4]{20} \simeq 2.1$

ث)

عدد	۲	۲,۱
توان ۵	۳۲	۴۰,۸۴

$\sqrt[5]{40} \simeq 2.1$

ج)

عدد	۳,۸	۳,۹	۴
مکعب توان ۳	۵۴,۸۷	۵۹,۳۱	۶۴

$\sqrt[3]{55} \simeq 3.8$

۷- برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل، یک عدد صحیح است، جواب آن را بنویسید. در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی داده‌شده بین آن‌ها باشد. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)

آ) $\sqrt{69}$ ب) $-\sqrt{125}$ پ) $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ت) $\sqrt[3]{400}$

ث) $\sqrt[3]{-80}$ ج) $\sqrt[3]{20/4}$ چ) $\sqrt[4]{1600}$ ح) $\sqrt[4]{81}$

خ) $-\sqrt[4]{100}$ د) $\sqrt[5]{-32} = -2$ ذ) $\sqrt[5]{10}$: $1 < \sqrt[5]{10} < 2$ ، $(1)^5 < 10 < 2^5$ ر) $\sqrt[5]{0} =$ صفر ز) $\sqrt[6]{-7}$: تعریف نشده یا بی معنی

آ) $\sqrt{69}$ بین ۸ و ۹ زیرا $8^2 = 64 < 69 < 81 = 9^2$

ب) ۱۲۵ بین $11^2 = 121$ و $12^2 = 144$ است پس $11 < \sqrt{125} < 12$ و $-11 > -\sqrt{125} > -12$ پس جواب بین ۱۱- و ۱۲- است

پ) $(0)^2 < \frac{8}{9} < (1)^2$ پس $0 < \sqrt{\frac{8}{9}} < 1$

ت) $7^3 = 343 < 400 < 8^3 = 512$ پس $7 < \sqrt[3]{400} < 8$

ث) $(-5)^3 = -125 < -80 < (-4)^3 = -64$ پس $-5 < \sqrt[3]{-80} < -4$

ج) $2^3 = 8 < 20.4 < 3^3 = 27$ پس $2 < \sqrt[3]{20.4} < 3$

چ) $1296 = 6^4 < 1600 < 7^4 = 2401$

$6 < \sqrt[4]{1600} < 7$

ح) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

خ) $3^4 = 81 < 100 < 4^4 = 256$

$3 < \sqrt[4]{100} < 4$

$-3 > -\sqrt[4]{100} > -4$

۸- مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه و روی محور اعداد نشان دهید. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی)

آ) $\sqrt[۵]{-۳۲}$ ب) $\sqrt[۳]{۵}$ پ) $\sqrt[۴]{۱۹}$ ت) $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

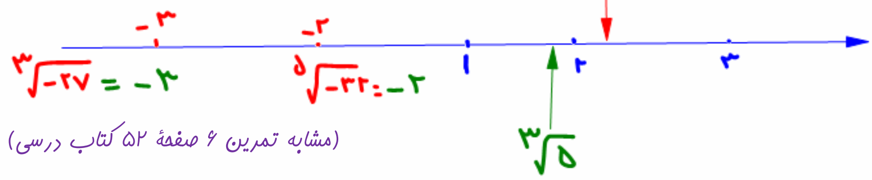
$\sqrt[۵]{(-۲)^۵} = -۲$

$۱ = (۱)^۳ < ۵ < (۲)^۳ = ۸$

$۱ < \sqrt[۳]{۵} < ۲$

$۲^۴ = ۱۶ < ۱۹ < ۸۱ = ۳^۴$

$۲ < \sqrt[۴]{۱۹} < ۳$



۹- به سوالات زیر پاسخ دهید: (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۵۲ کتاب درسی)

آ) اگر $\sqrt[۳]{۱۱} = a$ باشد، حاصل عبارت $a^۶ + ۱۵$ را به دست آورید. دو طرف عبارت $\sqrt[۳]{۱۱} = a$ اول به توان ۳ برسان $۱۱ = a^۳$ (به توان ۲)

$۱۲۱ = (a^۳)^۲ = a^۶$ $a^۶ + ۱۵ = ۱۲۱ + ۱۵ = ۱۳۶$

ب) اگر $\sqrt[۵]{-۹} = a$ باشد، حاصل عبارت $a^۵ + ۱۲$ را به دست آورید.

دو طرف عبارت به توان ۵ : $-۹ = a^۵$ حاصل $a^۵ + ۱۲$ برابر است با $-۹ + ۱۲ = ۳$

Homework

۱ در تساوی $\frac{(۲x)^۵ \times ۲۱^۳}{۱۵^۳ \times ۵^۲} = ۷^۳$، مقدار x کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳

۳) ۴/۵ ۴) ۵

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۲ اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \varnothing$ باشد، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ .... می‌گویند.

۳ اگر A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ متناهی باشد، آنگاه $A - B$ یک مجموعهٔ .... است.

۴ $\sqrt[۳]{۶۱}$ بین دو عدد صحیح .... و .... قرار دارد.

۵ اعداد ۴ و .... ریشه‌های چهارم عدد .... می‌باشند.

۶ $(-\infty, ۴) - (۲, +\infty]$ برابر است با ....

۷ اگر $۲ = ۱۰\sqrt{a}$ باشد، $۰/۰۰۰۰۶۴$ برحسب a کدام است؟

۱) a ۲) $a^۲$

۳) $a^۳$ ۴) $a^۴$

۸ اگر $\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}} = -۲$ باشد، آنگاه ریشهٔ دوم عدد $x + ۱۹$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۹-

۳) ۱۱ ۴) ۱۰-

۹ اگر $x \geq ۱$ باشد، خلاصه‌شدهٔ عبارت $A = \sqrt[۳]{(x + \sqrt[۳]{x})^۳} + \sqrt{(x - \sqrt[۳]{x})^۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۲x$

۳) $۲\sqrt[۳]{x}$ ۴) $-۲\sqrt[۳]{x}$

۱۰ چند مورد از عبارت‌های زیر همواره برقرار است؟

الف) $\sqrt{x^۲+۹}=x+۳$ ب) $\sqrt{x(x-۱)}=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}$

پ) $\sqrt{\frac{x}{x^۵}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^۵}}$ ت) $\sqrt[۵]{\sqrt{x}}=\sqrt[۱۰]{x}$

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۱۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف اگر $۱>a>۰$ باشد، آنگاه $a<\sqrt[۳]{a}$

ب اگر $a=\sqrt[۴]{۸۱}$ باشد، حاصل $a^۳-a$ برابر ۲۴ است.

۱۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف $\sqrt[۴]{(-۴)^۶}=\sqrt[۳]{-۴^۳}$

ب اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه $B'\subseteq A'$.

پ اگر $n!=۱$ باشد، آنگاه فقط $n=۱$.

ت اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است.

ث اولین گام در علم آمار، جمع‌آوری اعداد و ارقام است.

۱۳ اگر $-۱<a<۰$ آن‌گاه در داخل مربع علامت $>$ یا $<$ بگذارید.

الف $a^۵ \square a^۳$

ب $\sqrt[۳]{a} \square \sqrt[۵]{a}$

۱۴ عدد $\sqrt{۱۴}+۳$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲

۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۱۵ عدد $\sqrt{۱۴}-۳$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۳

۳) -۱ ۴) -۵

۱۶ تساوی $-\frac{xy^۲}{z}=\sqrt{\frac{x^۲y^۴}{z^۲}}$ همواره برقرار است، اگر: $(yz\neq۰)$

۱) $xz>۰$ ۲) $xz<۰$

۳) $z>۰$ ۴) $x<۰$

۱۷ حاصل $(۳^۳ + ۳^۳)(۲^۳ + ۲^۳ + ۲^۳ + ۲^۳)$ به‌صورت عدد توان‌دار کدام است؟

۱) $۶^۶$
۲) $۶^۴$
۳) $۳^۳$
۴) $۷۲^۴$

۱۸ نصف عدد $۸^{۴n-۲}$ برابر است با:

۱) $۸^{۲n-۳}$
۲) $۲^{۱۲n-۷}$
۳) $۸^{۲n-۱}$
۴) $۲^{۱۲n-۵}$

۱۹ حاصل‌ضرب ریشه‌های چهارم عدد ۶۴ کدام است؟

۱) -۸
۲) ۸
۳) $\sqrt[۴]{۸}$
۴) $-\sqrt[۴]{۸}$

۲۰ در تساوی $\sqrt{a\sqrt{a^x}} = a^۲$ $(a > ۰)$، مقدار x کدام است؟

۱) ۶
۲) ۲
۳) ۸
۴) ۴

۲۱ اگر $A = ۱^{-۷} + ۲^{-۷} + ۳^{-۷} + \cdots$ و $B = ۱^{-۷} + ۳^{-۷} + ۵^{-۷} + \cdots$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{B}{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$
۲) $\frac{۱۱۶}{۱۱۷}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱۱۹}{۱۱۸}$

۲۲ مقدار x از تساوی $۴^x \cdot ۴^{x+۱} \cdot ۴^{x+۳} \cdot ۴^{x+۴} = ۲^{۱۸}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخنامه Homework

۱ گزینه ۱

$$\frac{(۲x)^{۵} \times ۲۱^{۳}}{۱۵^{۳} \times ۵^{۲}} = ۷^{۳} \Rightarrow \frac{(۲x)^{۵} \times ۳^{۳} \times ۷^{۳}}{۳^{۳} \times ۵^{۳} \times ۵^{۲}} = ۷^{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{(۲x)^{۵}}{۵^{۳} \times ۵^{۲}} = ۱ \Rightarrow (۲x)^{۵} = ۵^{۵}$$
$$\Rightarrow ۲x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۲ جدا از هم

۳ نامتناهی

۴ بین ۳ و ۴

۵ ۴- و ۲۵۶

۶ $[-۱, ۲]$

۷ گزینه ۳

$$۱۰\sqrt{a} = ۲ \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow a = \frac{۴}{۱۰۰}$$
$$۰/۰۰۰۰۶۴ = (۰/۰۴)^{۳} \Rightarrow a^{۳} = ۰/۰۰۰۰۶۴$$

۸ گزینه ۴

$$\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}} = -۲ \Rightarrow ۱ - \sqrt{x} = -۸ \Rightarrow \sqrt{x} = ۹ \Rightarrow x = ۸۱ \Rightarrow x + ۱۹ = ۱۰۰$$

ریشه‌های دوم عدد $x + ۱۹$ برابر ۱۰ و ۱۰- است.

۹ گزینه ۲

$$A=(x+\sqrt[۳]{x})+|x-\sqrt[۳]{x}|\xrightarrow[x\geq\sqrt[۳]{x}]{x\geq ۱}A=x+\sqrt[۳]{x}+x-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow A=۲x$$

۱۰ گزینه ۴

گزینهٔ "الف" همواره صحیح نیست. گزینه‌های "ب" و "پ" در حالت کلی برای
$x<۰$ نادرست است.

۱۱

الف نادرست

$$\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۸}$$

ب درست

$$\sqrt[۴]{۸۱}=۳=a\Rightarrow a^{۳}-a=۳^{۳}-۳=۲۷-۳=۲۴$$

۱۲

الف نادرست

ب درست

پ نادرست

ت نادرست

ث درست

۱۳

الف

$$a^{۵}>a^{۳}$$

ب

$$\sqrt[۳]{a}>\sqrt[۵]{a}$$

۱۴ گزینه ۱

$$۹<۱۴<۱۶\xrightarrow{\sqrt{}}۳<\sqrt{۱۴}<۴\xrightarrow{+۳}۶<۳+\sqrt{۱۴}<۷$$

پس $\sqrt{۱۴}+۳$ بین ۶ و ۷ قرار دارد. مجموع این دو عدد ۱۳ می‌باشد.

۱۵ گزینه ۳

$$۹ < ۱۴ < ۱۶ \xrightarrow{\sqrt{}} ۳ < \sqrt{۱۴} < ۴ \Rightarrow -۴ < -\sqrt{۱۴} < -۳$$

$$\Rightarrow -۴ + ۳ < ۳ - \sqrt{۱۴} < -۳ + ۳ \Rightarrow -۱ < ۳ - \sqrt{۱۴} < ۰$$

$$-۱ + ۰ = -۱$$

۱۶ گزینه ۲

$$\sqrt{\frac{x^۲y^۴}{z^۲}} = \frac{\sqrt{x^۲} \times \sqrt{y^۴}}{\sqrt{z^۲}} = \frac{|x||y^۲|}{|z|} = \frac{|x|y^۲}{|z|} \xrightarrow{\frac{|x|}{|z|}=|\frac{x}{z}|} |\frac{x}{z}|y^۲$$

حال برای برقراری تساوی $\frac{-xy^۲}{z} = |\frac{x}{z}|y^۲$ برقرار باشد، باید $|\frac{x}{z}| = \frac{-x}{z}$ شود؛ به عبارت دیگر باید $\frac{x}{z} < ۰$ باشد یعنی هم‌علامت نباشند، لذا $xz < ۰$ خواهد بود.

۱۷ گزینه ۲

$$۳ \times ۲^۳ \times ۲ \times ۳^۳ = ۶^۱ \times ۶^۳ = ۶^۴$$

۱۸ گزینه ۲

$$\frac{۲^{۳(۴n-۲)}}{۲} = \frac{۲^{۱۲n-۶}}{۲} = ۲^{۱۲n-۶-۱} = ۲^{۱۲n-۷}$$

۱۹ گزینه ۱

ریشه‌های چهارم ۶۴ دو عدد $\sqrt[۴]{۶۴}$ و $-\sqrt[۴]{۶۴}$ هستند:

$$\sqrt[۴]{۶۴} = \sqrt[۴]{۸ \times ۸} = \sqrt[۴]{۲^۳ \times ۲^۳} = \sqrt[۴]{۲^۶} = ۲^{\frac{۶}{۴}} = ۲^{\frac{۳}{۲}}$$

$$-\sqrt[۴]{۶۴} = -۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \sqrt[۴]{۶۴} \times (-\sqrt[۴]{۶۴}) = ۲^{\frac{۳}{۲}} \times (-۲^{\frac{۳}{۲}}) = -۲^{\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}} = -۲^۳ = -۸$$

نکته: ریشه‌های nام عددی مانند a به‌صورت زیر است:

$$a \geq ۰ : \begin{cases} \text{زوج } n \Rightarrow a \text{ ریشه } n - \text{ام } = \sqrt[n]{a}\,,\ -\sqrt[n]{a} \\ \text{فرد } n \Rightarrow a \text{ ریشه } n - \text{ام } = \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

$$a < ۰ : \begin{cases} \text{زوج } n \Rightarrow \text{ ریشه ندارد} \\ \text{فرد } n \Rightarrow a \text{ ریشه } n - \text{ام } = \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

۲۰

گزینه ۱

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left(\sqrt{a\sqrt{a^x}}\right)^{۲} = (a^{۲})^{۲} \Rightarrow a\sqrt{a^x} = a^{۴} \Rightarrow \sqrt{a^x} = a^{۳}$$

مجدداً این کار را تکرار می‌کنیم:

$$\left(\sqrt{a^x}\right)^{۲} = a^{۶} \Rightarrow a^x = a^{۶} \Rightarrow x = ۶$$

۲۱

گزینه ۱

$$A = ۱^{-۷} + ۲^{-۷} + ۳^{-۷} + \cdots = ۱^{-۷} + ۳^{-۷} + ۵^{-۷} + \cdots + ۲^{-۷} + ۴^{-۷} + ۶^{-۷} + \cdots$$
$$= ۱^{-۷} + ۳^{-۷} + ۵^{-۷} + \cdots + ۲^{-۷}(۱ + ۲^{-۷} + ۳^{-۷} + \cdots) = B + ۲^{-۷}A$$

حال با ساده کردن تساوی فوق به دست می‌آوریم:

$$\frac{B}{A} = \frac{۱۲۷}{۱۲۸}$$

۲۲

گزینه ۴

$$۴^x \times ۴^{x+۱} \times ۴^{x+۳} \times ۴^{x+۴} = ۴^{۴x+۸} = ۲^{۱۸} \Rightarrow (۲^{۲})^{۴x+۸} = ۲^{۱۸}$$
$$\Rightarrow ۲^{۸x+۱۶} = ۲^{۱۸}$$

$$\Rightarrow ۸x + ۱۶ = ۱۸ \Rightarrow ۸x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

BOX 2: ریشه n ام (صفحه‌های ۵۴ تا ۵۸ کتاب درسی)

در این BOX با تعریف ریشهٔ n ام آشنا می‌شویم و در ادامه برخی از قواعد ریشه‌ها و رادیکال‌ها گفته می‌شود.

ریشهٔ n اُم: اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ n اُم عدد a می‌نامیم، هرگاه $b^n = a$

مثال: چون $۱۲۸ = ۲^۷$ باشد، بنابراین ریشهٔ هفتم عدد ۱۲۸ برابر ۲ است.

نکته: ۱) اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه a دارای دو ریشهٔ n اُم به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

۲) اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه a دارای یک ریشهٔ n اُم به صورت $\sqrt[n]{a}$ است.

مثال: عدد ۵۰ دارای دو ریشهٔ دهم $\pm\sqrt[۱۰]{۵۰}$ می‌باشد.

فرجه: در عبارت $\sqrt[n]{a}$، عدد طبیعی n را فرجهٔ رادیکال می‌گوییم.

نکته: ۱) اگر a یک عدد حقیقی منفی باشد، آن‌گاه:

آ) اگر n زوج باشد، آن‌گاه a ریشهٔ n اُم ندارد.

ب) اگر n فرد باشد، آن‌گاه a فقط یک ریشهٔ n اُم منفی دارد.

مثال: ریشهٔ ششم عدد ۲۰- وجود ندارد، ولی ریشهٔ پنجم عدد ۳۲- برابر ۲- است. $((-۲)^۵ = -۳۲)$

ریشه دوم چهار ۲ و ۲- هست
اما $\sqrt{۴} = ۲$

۲) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه ریشهٔ n اُم عدد صفر برابر صفر است.

ریشه‌های زوج برای اعداد منفی بی‌معنی هستند، بنابراین قرارداد زیر را خواهیم داشت:

قرارداد: هرگاه n زوج باشد و بنویسیم $\sqrt[n]{a}$، آن‌گاه a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

نامنفی

دقت

زیر رادیکال فرجه زوج بزرگتر یا مساوی صفر

تمرین: در عبارت $\sqrt{x-1}$، حدود x را مشخص کنید.

برای آن که عبارت با معنی یا تعریف شده باشد باید: $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$

قواعد ریشه

۱) اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \Rightarrow \begin{cases} \overset{\text{خودش}}{a} & a \geq 0 \\ \underset{\text{قرینش}}{-a} & a < 0 \end{cases}$$

اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

توان را با فرجه خط بزن ساده کن

۲)
$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

(توجه کنید وقتی که n زوج است، a و b نباید اعداد منفی باشند و در حالتی که n فرد است، a و b می‌توانند هر عدد حقیقی دلخواه باشند.)

مثال:
$$\sqrt[۳]{۲۴} \times \sqrt[۳]{۹} = \sqrt[۳]{۲۴ \times ۹} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۳ \times ۳^۲} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۳^۳} = \sqrt[۳]{۶^۳} = ۶$$

۳)
$$(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m} \quad ; \quad \begin{cases} k \text{ زوج} & a > 0 \\ k \text{ فرد} & a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

مثال:
$$(\sqrt[۳]{-۲})^۵ = \sqrt[۳]{(-۲)^۵} = \sqrt[۳]{-۳۲} \quad , \quad (\sqrt[۴]{۳})^۳ = \sqrt[۴]{۳^۳} = \sqrt[۴]{۲۷}$$

۲ محدودیت داریم:
زیر رادیکال با فرجه زوج منفی نباشد
مخرج کسر صفر نشود.

۴)
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad \begin{cases} k \text{ زوج} & a \geq 0 , b > 0 \\ k \text{ فرد} & a,b \in \mathbb{R} , b \neq 0 \end{cases}$$

مثال: $\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}=\frac{\sqrt[۵]{-۱}}{\sqrt[۵]{۳۲}}=\frac{\sqrt[۵]{(-۱)^۵}}{\sqrt[۵]{۲^۵}}=\frac{-۱}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۵۴}}{\sqrt{۶}}=\sqrt{\frac{۵۴}{۶}}=\sqrt{۹}=۳$

۵) اگر $a\geq ۰$ ، آن‌گاه به ازای هر $n\geq ۲$ و $n\in\mathbb{N}$ داریم: $(\sqrt[n]{a})^n=a$

و اگر $a<۰$، آن‌گاه: $(\sqrt[n]{a})^n=\begin{cases}\text{بی‌معنی} & n \text{ زوج}\\ a & n \text{ فرد}\end{cases}$

زیر رادیکال فرجه زوج منفی نشه

نکته: ۱) تساوی $\sqrt[n]{a\pm b}=\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$ برقرار نیست، مگر آن‌که $a=۰$ یا $b=۰$

مثال: اگر $n=۳$، $a=۲۷$ و $b=۱$ باشد، آن‌گاه: $\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{۲۷}=\sqrt[۳]{۳^۳}=۳\ ,\ \sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{۱}=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}=۳+۱=۴$

از طرفی $\sqrt[۳]{a+b}=\sqrt[۳]{۲۸}\neq ۴$ است، بنابراین: $\sqrt[۳]{۲۷+۱}\neq\sqrt[۳]{۲۷}+\sqrt[۳]{۱}$

۲) اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه: $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

علامت منفی از زیر رادیکال فرجه فرد در میاد

فرد

مثال: $\sqrt[۵]{-۳۲}=-\sqrt[۵]{۳۲}=-\sqrt[۵]{۲^۵}=-۲$

پرسش‌های تشریحی:

● کدام‌یک از گزاره‌های زیر، درست و کدام‌یک نادرست است؟

غ ۱- $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ د ۲- $\sqrt[5]{(-0/1)^5} = -0/1$

غ ۳- $\sqrt[7]{2^7} = -2$ غ ۴- $\sqrt{-5^2} = |-5| = 5$

غ مهم ۵- برای هر عدد طبیعی n $(n \geq 2)$، و هر دو عدد حقیقی a و b داریم $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

اگر n=۲ و a=-۱۶ و b=-۴ باشد: یعنی $\frac{\sqrt[2]{-16}}{\sqrt[2]{-4}} \neq 2 = 4 = \sqrt[2]{\frac{-16}{-4}}$

غ ۶- برای هر عدد طبیعی n $(n \geq 2)$، و هر عدد حقیقی a، داریم $(\sqrt[n]{a})^n = a$

باید n فرد باشد چون اگر n زوج و a منفی باشد درست نیست

● جاهای خالی را کامل کنید.

۷- ریشه‌های زوج عدد ۱۰۰- وجود ...ندارد... ، زیرا عددی وجود ندارد که به توان ...زوج... برسد و مساوی ...عدد منفی... شود.

۸- اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه ریشهٔ n اُم عدد حقیقی a وجود ...دارد... .

۹- اگر n یک عدد طبیعی زوج و a یک عدد حقیقی منفی باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برابر ...$|a| = -a$... است. (عدد منفی)

۱۰- اگر n یک عدد طبیعی فرد و a یک عدد حقیقی منفی باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برابر ...a... است.

۱۱- تساوی $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}$ وقتی برقرار است که a و b دو عدد حقیقی ...نامنفی... باشند.

مثبت یا صفر

۱۲- تساوی $\sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}}$ برای هر دو عدد حقیقی a و b ...$b \neq 0$... برقرار است. $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}-\{0\}$

● مهم در صورت وجود، هر یک از اعداد زیر را مشخص کنید.

۱۳- ریشه‌های ششم ۶۴ برابر ۲ و ۲- $(\pm 2)^6 = 64$ ۱۴- ریشهٔ هفتم ۱- $\sqrt[7]{-1} = -\sqrt[7]{1} = -1$

۱۵- ریشه‌های هشتم ۲- تعریف نشده ۱۶- ریشه‌های چهارم $(-7)^4$ = $(7)^4$ که ±۷

۱۷- ریشهٔ یازدهم ۱- $\sqrt[11]{(-1)^{11}} = -1$ ۱۸- ریشه‌های ششم ۱ برابر ۱ یا ۱-

● حاصل هر عبارت را به دست آورید.

۱۹- $\sqrt[6]{64}$ ۲۰- $\sqrt[13]{-1}$ ۲۱- $\sqrt[3]{4^{-3}}$ ۲۲- $\sqrt[8]{0/00000001}$

۲۳- $\sqrt[5]{100000}$ ۲۴- $\sqrt[6]{3^{-6}}$ ۲۵- $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$