فصل دوم: مثلثات

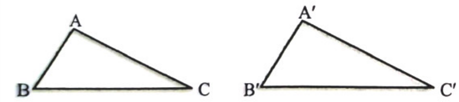
BOX 1: نسبت‌های مثلثاتی (صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

در این بسته با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا می‌شویم.

برای معرفی مفهوم مثلثات، نیاز به مفهوم تشابه داریم.

تشابه: به یاد دارید که دو مثلث، وقتی متشابه هستند که زوایای نظیر آن‌ها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشد.

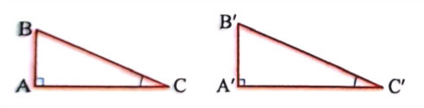
قضیه: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



$$\hat{B}=\hat{B}' , \hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

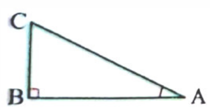
$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{A}' , \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه: اگر دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویهٔ حادهٔ برابر داشته باشند، آن‌گاه با هم متشابه‌اند.



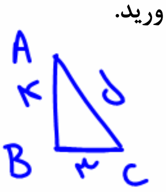
$$\hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تانژانت و کتانژانت: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حادهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\boxed{\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A} = \frac{BC}{AB}} \qquad \boxed{\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A} = \frac{AB}{BC}}$$

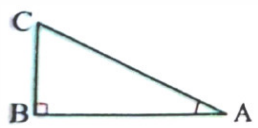
تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، $AB=4$ و $AC=5$ می‌باشند. مقدار $\tan A$ و $\cot A$ را به دست آورید.



$\tan\hat{A} = \frac{3}{4}$

$\text{Cotan}\hat{A} = \frac{4}{3}$

سینوس و کسینوس: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، سینوس و کسینوس زاویهٔ حادهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\boxed{\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}} \qquad \boxed{\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}}$$

رابطهٔ بین $\tan A$ و $\cot A$ با $\sin A$ و $\cos A$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$:

$$\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}} \quad , \quad \boxed{\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}}$$

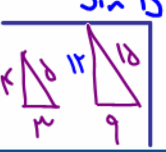
مقابل بر وتر سینوس باشد   مجاور بر وتر با شد کسینوس

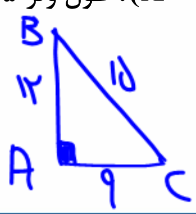
سینوس چو برای کسینوس کنید تانژانت به دست آید و برعکس کتانژانت

نسبت‌های مثلثاتی: در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، طول وتر ۱۵ و $\sin B = \frac{3}{5}$ است. طول اضلاع قائمه را به دست آورید.

$\sin\hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{15 = \text{وتر}} = \frac{3}{5} \longrightarrow$ ضلع مقابل $= \boxed{9 = AC}$





$(AC)^2+(AB)^2=(BC)^2$

فیثاغورس: $(9)^2+(AB)^2=(15)^2$

$(AB)^2=144 \longrightarrow \boxed{AB=12}$

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° :

به دست آوردن اعداد زیر را با رسم △ بلد باش:

مقدار	$A=۳۰^\circ$	$A=۴۵^\circ$	$A=۶۰^\circ$
sin A	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos A	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan A	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot A	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

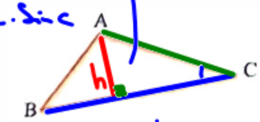
تمرین: مقدار عددی عبارت $۳\sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ$ را به دست آورید.

$$۳\left(\frac{۱}{۲}\right)+۴\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)-\sqrt{۳}\left(\sqrt{۳}\right)=\frac{۳}{۲}+۴-۳=\frac{۳}{۲}+۱=۲٫۵$$

نکته: مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها، یعنی:

$\frac{h}{AC}=\sin \hat{C}$

$h = AC.\sin c$



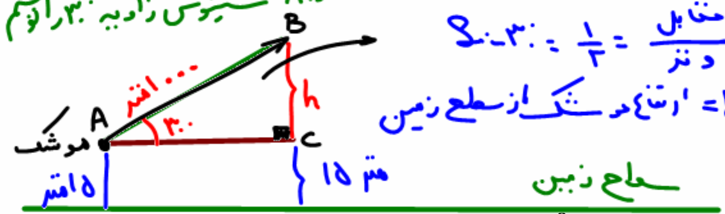
$S=\frac{(BC)h}{۲}=\frac{۱}{۲}(BC)h=\frac{۱}{۲}(BC)(AC)\sin c$

ضرب دو ضلع در سینوس بینشون تقسیم بر دو $=$

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}BA\times BC\times \sin B=\frac{۱}{۲}\times CA\times CB\times \sin C$$

تمرین: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. پس از طی ۱۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

در مثلث ABC سینوس زاویه ۳۰ را بنویسیم:

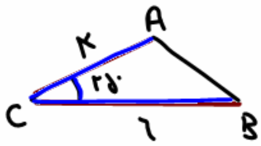


$\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} = \frac{مقابل = h}{وتر = ۱۰۰۰} \longrightarrow h = ۱۰۰۰\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۵۰۰$ متر

می‌دانیم $\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲}$ است.

ارتفاع موشک از سطح زمین $= H = ۵۰۰ + ۱۵ = ۵۱۵\ m$

تمرین: در مثلث ABC، $AC=۴$ ، $BC=۶$ و $\hat{C}=۲۵^\circ$ می‌باشند. با فرض $\sin ۲۵^\circ = ۰/۴۲$، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

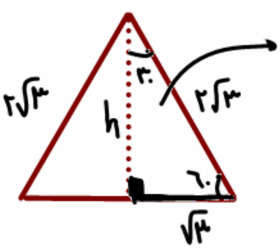


$S=\frac{۱}{۲}(AC)(BC)\sin ۲۵=\frac{۱}{۲}(۴)(۶)(۰٫۴۲)=۵٫۰۴$ جواب

پرسش‌های تشریحی:

۱- با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$، نسبت‌های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید.

(مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)



فیثاغورث

$(۲\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۳})^۲+h^۲$

$۱۲-۳=۹=h^۲$

$۳=h$

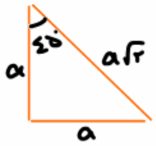
$\sin ۶۰ = \frac{مقابل = h = ۳}{وتر = ۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos ۶۰ = \frac{مجاور}{وتر} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$

$\sin ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$

$\cos ۳۰ = \frac{h = ۳}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲- با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، نسبت‌های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید. (فعالیت ۲ صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)



$\tan 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{a}{a} = 1$ $\quad \cos 45^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$ $\quad \sin 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

۳- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

آ) $\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ + ۲\sqrt{۳}\sin ۶۰^\circ - \sqrt{۳}\tan ۳۰^\circ$ $\qquad$ ب) $۴\sqrt{۲}\sin ۴۵^\circ + ۵\cot ۴۵^\circ - ۳\cos ۶۰^\circ$

پ) $۶\sin ۳۰^\circ + \sqrt{۳}(\cot ۶۰^\circ + \tan ۶۰^\circ)$ $\qquad$ ت) $-\sin ۶۰^\circ + ۲\cos ۳۰^\circ + ۴\cot ۳۰^\circ - ۲\tan ۴۵^\circ$

آ) $\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + ۲\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - \sqrt{۳}(\frac{1}{\sqrt{۳}}) = ۱ + ۳ - ۱ = ۳$

پ) $۶(\frac{۱}{۲}) + \sqrt{۳}(\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \sqrt{۳}) = ۳ + ۱ + ۳ = ۷$

ب) $۴\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + ۵(۱) - ۳(\frac{۱}{۲}) = ۴ + ۵ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$

ت) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۴\sqrt{۳} - ۲(۱) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۴\sqrt{۳} - ۲ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} - ۲$

۴- اگر $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

حاده است

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \longrightarrow \alpha = ۳۰^\circ$
$۲\alpha = ۶۰^\circ$

آ) $-۲\sin\alpha + \sqrt{۳}\cot\alpha$ $\qquad$ ب) $۴\cos ۲\alpha + \tan(\alpha + ۱۵^\circ)$

آ) $-۲\sin ۳۰^\circ + \sqrt{۳}\cot ۳۰^\circ = -۲(\frac{۱}{۲}) + \sqrt{۳}(\sqrt{۳}) = -۱ + ۳ = ۲$

ب) $۴\cos ۶۰^\circ + \tan(۳۰ + ۱۵ = ۴۵) = ۴(\frac{۱}{۲}) + ۱ = ۳$

۵- علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چه‌قدر است؟ (تمرین ۱ صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)

تانژانت را در مثلث کوچک‌تر در می‌آوریم و در مثلث بزرگ‌تر می‌نویسیم:

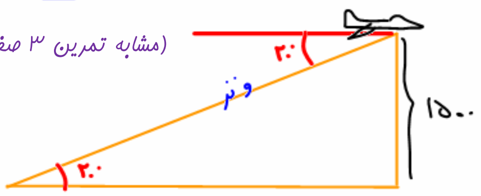
$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۱/۵}{۰/۵} = ۳$

$\tan\alpha = ۳ = \frac{\text{مقابل} = \text{طول درخت}}{\text{مجاور} = \text{طول سایه} = ۳}$

طول درخت $= ۳(۳) = ۹$

۶- یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۲۰° باشد، هواپیما تقریباً چه مسافتی را طی می‌کند تا روی زمین بنشیند؟ $(\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴)$ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

همون وتر است

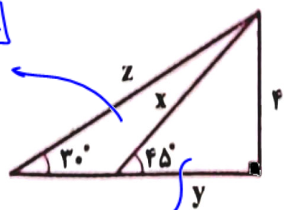


$\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۱۵۰۰}{\text{وتر}} \rightsquigarrow \text{وتر} = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴}$

جواب = وتر = ۴۴۱۲ متر

۷- در هر قسمت، مقادیر x، y و z را به دست آورید.

ب)



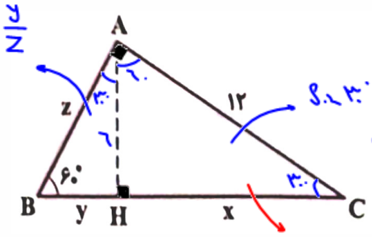
$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{\text{مقابل} = ۴}{\text{وتر} = z} \longrightarrow \boxed{z = ۸}$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰ نصف وتر است.

$\sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\text{مقابل} = ۴}{\text{وتر} = x}$ $\quad x = \frac{۴(۲)}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}}$

$\tan ۴۵^\circ = ۱ = \frac{\text{مقابل} = ۴}{\text{مجاور} = y} \rightsquigarrow y = ۴$

آ)



$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{y}{z}$

$\boxed{z = ۲y}$

فیثاغورث

$(z)^۲ = y^۲ + (۶)^۲$

$(۲y)^۲ - y^۲ = ۳۶$

$۳y^۲ = ۳۶$

$y^۲ = ۱۲$

$\boxed{y = ۲\sqrt{۳}} \rightarrow \boxed{z = ۲y = ۴\sqrt{۳}}$

$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{۱۲}$

$AH = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

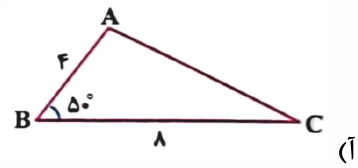
$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin ۶۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{۱۲}$

$x = ۱۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۶\sqrt{۳}$

۸- در هر یک از شکل‌های زیر، مساحت مثلث‌ها را به دست آورید: $(\sin 50^\circ = 0/76)$

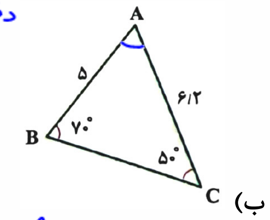
(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

دقت: جمع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ است.



$S=\frac{1}{2}(4)(8)\sin 50^\circ$

$S=16(0.76)=12.16$

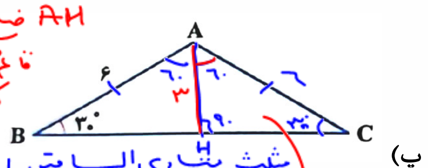


$\hat{A}=180-(50+70)=60$

$S=\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin 60$

$S=\frac{1}{2}(5)(6.2)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S=\frac{31}{4}\sqrt{3}$



AH ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ در مثلث قائم الزاویه AHC است که نصف وتر و برابر ۳ است.

$\hat{B}=\hat{C}=30$ پس: مثلث متساوی الساقین است

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180$

$\hat{A}+30+30=180$

$A=120$

$S_1=\frac{1}{2}(AC)(AH)\sin 60$

$S_1=\frac{1}{2}(6)(3)\frac{\sqrt{3}}{2}$

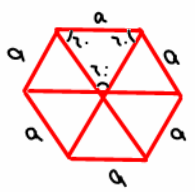
$S_{کل}=2S_1=2\left(\frac{1}{2}(6)(3)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=9\sqrt{3}$

۹- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** را به دست آورید.

$S=\frac{1}{2}a\,a\sin 60=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

حفظ باش

۱۰- مساحت شش‌ضلعی منتظمی به ضلع **a** را به دست آورید.



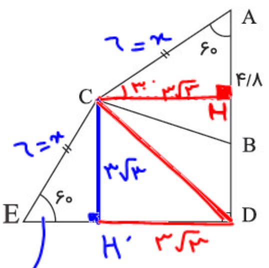
$S=6\times$ مثلث متساوی الاضلاع $=6\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

حفظ باش

Homework (1)

$AC = EC = x$

۱ در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $۷/۲\sqrt{۳}$ است. فاصلهٔ D از C کدام است؟



$S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2}(AB = 4.8)(x)\sin 60° = 7.2\sqrt{3}$

$2.4(x)\frac{\sqrt{3}}{2} = 7.2\sqrt{3} \to 1.2x = 7.2 \to x = \frac{7.2}{1.2} = 6$

$\hat{ACH}$: $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{\text{وتر} = x = 6} \to CH = 6(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\sqrt{3}$

$\hat{CEH'}$: $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH'}{\text{وتر} = x = 6}$

$CH' = 6(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\sqrt{3}$

شکل $CHDH'$ مربع است، فاصله C از D به اندازه CD قطر مربع است:

$\text{قطر مربع} = \sqrt{2}(\text{ضلع مربع}) = \sqrt{2}(3\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{6}$

۱) $۶\sqrt{۶}$

۲) $۳\sqrt{۶}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۲^۲ = ۵a_۳a + ۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جملهٔ چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱   ۲) $۱/۵$

۳) $۳/۵$ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

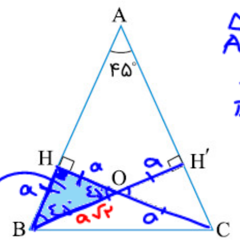
۳ جمله‌های چهارم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب جملهٔ دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جملهٔ دهم الگوی خطی باشد، جملهٔ پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) ۳   ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



$\hat{ABH'}$: $\hat{H'} = 90°$, $\hat{A} = 45° \to \hat{B}_1 = 45°$

$\hat{BHO}$: $\hat{H} = 90°$, $\hat{B}_1 = 45° \to \hat{O}_1 = 45°$

$\hat{ABH'}$: $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH'}{8}$

$BH' = 8(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2}$

$(BH' = 4\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + a = a(1+\sqrt{2})$

فیثاغورث : $(OB)^2 = a^2 + a^2$

$(OB)^2 = 2a^2$

$OB = a\sqrt{2}$

$a = \frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$S_{O\hat{H}B}$ قائم الزاویه $= \frac{(\text{ضلع})(\text{ضلع})}{2} = \frac{a(a)}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16(2)}{1+2+2\sqrt{2}}\right) = \frac{16}{3+2\sqrt{2}}$

۱) $\frac{۶}{۲ + \sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۸}{۲ + \sqrt{۳}}$

۳) $\frac{۱۲}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$

۴) $\frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

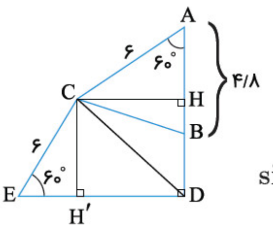
پاسخ‌نامه Homework (1)

۱ گزینه ۲

$$\frac{۱}{۲} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AB} \times \sin ۶۰^\circ = ۷/۲ \times \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \times \mathrm{AC} \times ۴/۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۷/۲ \times \sqrt{۳} \Rightarrow \mathrm{AC} = ۶ \Rightarrow \mathrm{EC} = ۶$$

در مثلث $\mathrm{A\hat{H}C}$ داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{CH}}{۶} \Rightarrow \mathrm{CH} = ۳\sqrt{۳}$$

دو مثلث $\mathrm{CEH'}$ و ACH هم‌نهشت‌اند، پس درنتیجه $\mathrm{CH'} = ۳\sqrt{۳}$. بنابراین چهارضلعی $\mathrm{HCH'D}$ مربع است و داریم:

$$\mathrm{DC} = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲

گزینه ۱

$$a, a+d, a+2d, \dots$$

$$6(a+d)^2 = 5(a+2d)a + 3(a+d)a$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 6d^2 + ad = 0 \quad , \quad \frac{a}{d} = x \Rightarrow a = dx$$

$$\Rightarrow 2d^2x^2 - 6d^2 + d^2x = 0 \Rightarrow d^2(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -2$$

$$\frac{a_4}{d} = \frac{a+3d}{d} = \frac{a}{d} + 3 = x + 3 : \begin{cases} x = -2 : x+3 = 1 \\ x = \frac{3}{2} : x+3 = 4/5 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳

گزینه ۴

دنبالهٔ حسابی را t_n با قدرنسبت d و الگوی خطی را a_n با قدرنسبت d' نمایش دهیم:

$$t_8 - t_4 = a_7 - a_2 \Rightarrow 4d = 5d' \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{4}{5}$$

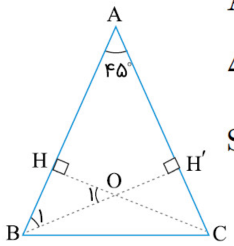
$$a_{10} = 0 \Rightarrow a_1 + 9d' = 0 \Rightarrow a_1 = -9d'$$

$$\frac{a_{15}}{d} = \frac{a_1 + 14d'}{d} = \frac{-9d' + 14d'}{d} = 5\frac{d'}{d} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴

گزینه ۴



$$\hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}_1 = 45$$

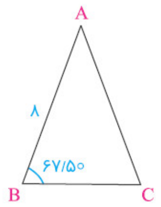
$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow HB = HO = 8 - 4\sqrt{2}$$

$$S_{OHB} = \frac{1}{2}(8 - 4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 16(2 - \sqrt{2})^2 = 8(6 - 4\sqrt{2}) = 16(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$$

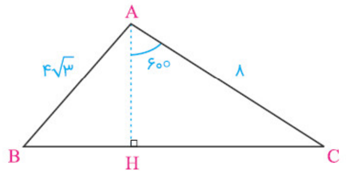
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Homework (2)

۱ مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC را به‌دست آورید. $(AB = AC)$



۲ در شکل داده‌شده، طول ضلع BC را به‌دست آورید.



۳ مساحت متوازی‌الاضلاعی با اضلاع ۴ و ۵ و یک زاویهٔ ۱۲۰° را به دست آورید.

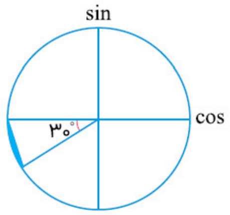
۴ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$۳\sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\sin ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ =$$

۵ اگر $\tan x = \frac{۳}{۴}$ باشد، آنگاه حاصل $A = \frac{۴}{\cos x} - \frac{۳}{\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) ۱

۶ در دایرهٔ زیر، به شعاع ۳ واحد، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲) $\frac{۳\pi}{۴} - ۱$

۳) $\frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$

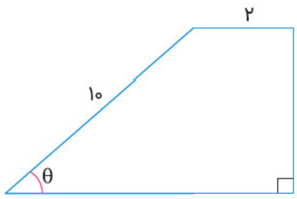
۴) $\frac{۹}{۴}$

۷ ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق به ترتیب ۴۵° و ۴۰° می‌باشد. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan ۴۰^\circ = ۰/۸)$

۱) ۶   ۲) ۶/۴

۳) ۷   ۴) ۷/۲

۸ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد، آنگاه مساحت ذوزنقهٔ زیر کدام است؟



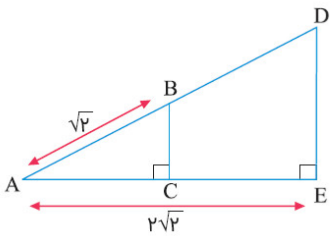
۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۱۸

۹ در شکل زیر، X کدام است؟ $(X = AC \times AD)$



۱) ۲

۲) ۱۶

۳) ۸

۴) ۴

۱۰ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸   ۲) ۵۴

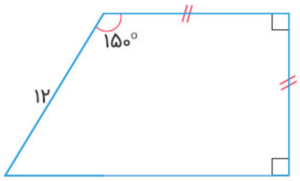
۳) ۶۴   ۴) ۷۲

۱۱ حاصل عبارت $\dfrac{1-\tan^2 30^\circ}{\cos 60^\circ \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{8}{9}$

۳) $\frac{9}{8}$ ۴) ۱

۱۲ باتوجه‌به اندازه‌های داده‌شده، مساحت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر کدام است؟



۱) $6(\sqrt{3}+1)$

۲) $12(2+\sqrt{3})$

۳) $12\sqrt{3}+6$

۴) $18(2+\sqrt{3})$

۱۳ حداکثر مساحت مثلثی که طول یک ضلع آن ۳ و طول ضلع دیگر آن ۶ باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲

۳) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ۴) ۹

۱۴ حاصل $1+\cot^2 60^\circ$ کدام است؟

۱) $1+\tan^2 45^\circ$ ۲) $1-\tan^2 30^\circ$

۳) $1+\tan^2 30^\circ$ ۴) $2+\tan^2 45^\circ$

۱۵ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با زاویهٔ ۶۰ درجه، قاعدهٔ کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $24\sqrt{3}$ ۲) $27\sqrt{3}$

۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۱۶ ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متری از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ دید بالا (از D به A) و پایین (از C به A) مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. اگر $\tan 40^\circ = 0/8$، ارتفاع مجسمه کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷

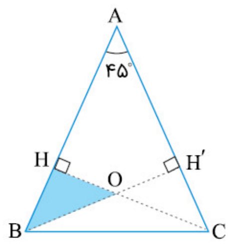
۳) ۶/۴ ۴) ۷/۲

۱۷ اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) $3\sqrt{2}$

۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۳

۱۸ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



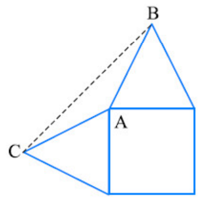
۱) $\dfrac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$

۲) $\dfrac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$

۳) $\dfrac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$

۴) $\dfrac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

۱۹ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟



۱) $\sqrt{۳}-۱$

۲) $\dfrac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

۲۰ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴

۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۲۱ در داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم، اندازهٔ ضلع مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۳$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$

۳) $\sqrt{۳}-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $۲(\sqrt{۳}-۱)$

پاسخ‌نامه **Homework (2)**

۱

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۶۷/۵ \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - (۶۷/۵ + ۶۷/۵)$$

$$\hat{A} = ۴۵ \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$S_{\Delta} = ۱۶\sqrt{۲}$$

۲

$$\overset{\Delta}{AHC} : \begin{cases} \cos ۶۰^\circ = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{AH}{۸} \Rightarrow AH = ۴ \\ \sin ۶۰^\circ = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{HC}{۸} \Rightarrow HC = ۴\sqrt{۳} \end{cases}$$

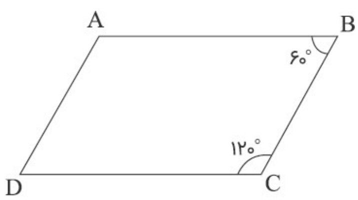
راه ساده‌تر: ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است، پس چون $\hat{C} = ۳۰^\circ$، پس $AH = \frac{۸}{۲} = ۴$. ضلع روبه‌روی به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، پس $CH = ۴\sqrt{۳}$.

$$\overset{\Delta}{AHC} : \text{رابطهٔ فیثاغورس} \Rightarrow BH^{۲} = (۴\sqrt{۳})^{۲} - ۴^{۲} = ۳۲$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow BC = BH + HC = ۴\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۳} = ۴(\sqrt{۲} + \sqrt{۳})$$

۳



$$S_{ABCD} = AB \times BC \times \sin B = ۵ \times ۴ \times \sin ۶۰^\circ = ۵ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰\sqrt{۳}$$

۴

$$۳ \times \frac{۱}{۲} + ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = \frac{۳}{۲} + ۴ - ۳ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲}$$

۵ گزینه ۱

$$\tan x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{\sin x} = \frac{۴}{\cos x}$$
$$\frac{۴}{\cos x} - \frac{۳}{\sin x} = ۰$$

۶ گزینه ۳

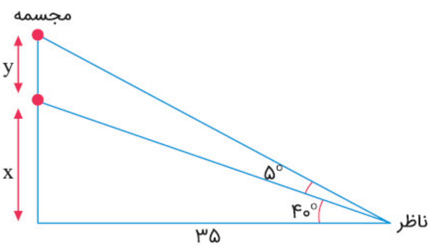
با محاسبهٔ مساحت این بخش از دایره و کم کردن مساحت مثلث از آن مساحت قسمت رنگی به دست می‌آید:

$$\frac{۳۶۰^\circ}{۳۰^\circ} = ۱۲ \Rightarrow \frac{S_{\text{دایره}}}{۱۲} = S_{\text{موردنظر}} = \frac{\pi r^۲}{۱۲} = \frac{۹\pi}{۱۲} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$S_{\text{قسمت رنگی}} = \frac{۳\pi}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$$

۷ گزینه ۳



$$\tan ۴۰^\circ = \frac{x}{۳۵} \quad (\text{طبق شکل})$$

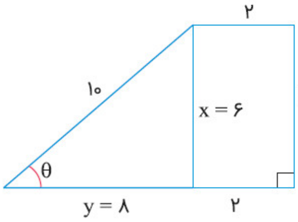
$$\tan ۴۰^\circ = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \frac{x}{۳۵} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow x = ۲۸$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{x + y}{۳۵} = ۱ \Rightarrow x + y = ۳۵ \Rightarrow y = ۷ \quad \text{ارتفاع مجسمه}$$

۸

گزینه ۳

با تقسیم شکل به یک مثلث و یک مستطیل داریم:



$$\sin\theta = \frac{x}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = ۶$$

$${}^{۶}x^{۲} + y^{۲} = ۱۰^{۲} \Rightarrow ۳۶ + y^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow y^{۲} = ۶۴ \Rightarrow y = ۸$$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ + ۲ \times ۶ = ۲۴ + ۱۲ = ۳۶$$

۹

گزینه ۴

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{AD}$$

$$\Rightarrow AD \times AC = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴$$

۱۰

گزینه ۴

مساحت هر چهار ضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بینشان به دست می‌آید:

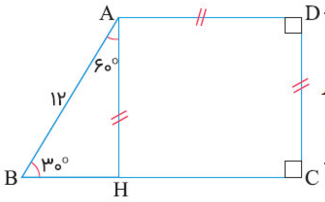
$$S = \frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})(\sin ۶۰^\circ) = ۴۸\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۴ \times ۳ = ۷۲$$

۱۱

گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۶۰^\circ = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \\ \sin ۶۰^\circ = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱ - (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲}}{(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲}) + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۱ - \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{۱} = \frac{۲}{۳}$$

۱۲ گزینه ۴



$$\frac{AH}{۱۲}=\sin ۳۰^\circ$$

$$AH=۶=HC=AD$$

$$\frac{BH}{۱۲}=\cos ۳۰^\circ \Rightarrow BH=۶\sqrt{۳} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(AD+BC)\times AH$$

$$=\frac{۱}{۲}(۶+۶\sqrt{۳}+۶)\times ۶=۱۸(۲+\sqrt{۳})$$

۱۳ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۳\times \sin\alpha$ و باتوجه‌به اینکه حداکثر مقدار $\sin\alpha$ برابر یک است (این حداکثر در $\alpha=۹۰^\circ$ رخ می‌دهد)، پس:

$$\max(S)=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۳\times ۱=۹$$

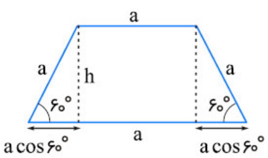
۱۴ گزینه ۳

$$\cot ۶۰^\circ=\frac{\cos ۶۰^\circ}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ}=\tan ۳۰^\circ \Rightarrow ۱+\cot^۲ ۶۰^\circ=۱+\tan^۲ ۳۰^\circ$$

۱۵ گزینه ۲

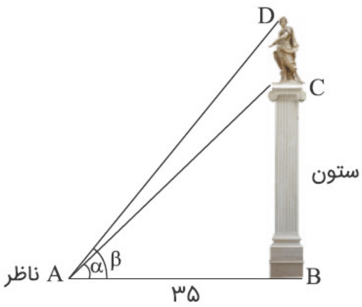
$$(\text{محیط})\ P=۳a+۲a\cos ۶۰^\circ+a \Rightarrow ۳۰=۵a \Rightarrow a=۶$$

$$S=\frac{(a+۲a)h}{۲}=\frac{۳a\times a\sin ۶۰^\circ}{۲}\xrightarrow{a=۶} S=\frac{۳\sqrt{۳}\times ۶^۲}{۴}=۲۷\sqrt{۳}$$



۱۶ گزینه ۲

ابتدا مسئله را به مدل هندسی تبدیل می‌کنیم:



$$\alpha = ۴۰^\circ \quad , \quad \beta = ۴۵^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{BD}{۳۵} \xrightarrow{\beta=۴۵^\circ} BD = ۳۵ \times \tan ۴۵^\circ = ۳۵$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{۳۵} \xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ} BC = ۳۵ \times \tan ۴۰^\circ = \frac{۸}{۱۰} \times ۳۵ = ۲۸$$

بنابراین:

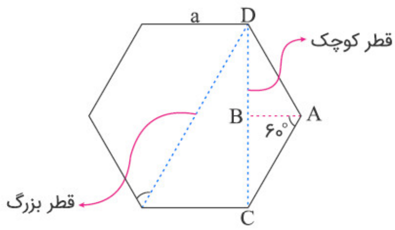
ارتفاع مجسمه : $CD = BD - BC = ۳۵ - ۲۸ = ۷$

۱۷ گزینه ۲

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC \sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

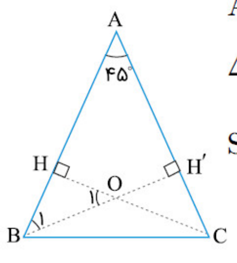
نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

۱۸ گزینه ۴

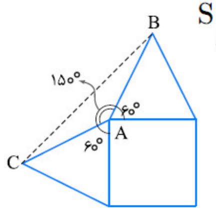


$$\hat{A} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B}_۱ = ۴۵$$

$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow HB = HO = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

$$S_{OHB} = \frac{۱}{۲}(۸ - ۴\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶(۲ - \sqrt{۲})^۲ = ۸(۶ - ۴\sqrt{۲}) = ۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

۱۹ گزینه ۳



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

۲۰ گزینه ۴

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

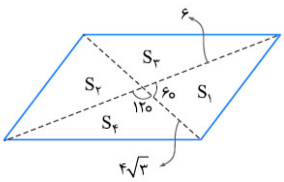
$$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$

بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

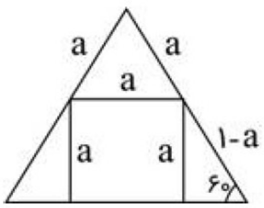
$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۸$$

$$S_۳ = S_۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰^\circ) = ۱۸$$

$$S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$



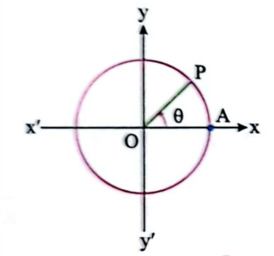
۲۱ گزینه ۱



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

BOX 2: دایره مثلثاتی **(صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی)**

در BOX قبل، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حاده در مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده است. در این قسمت با تعریف دایرهٔمثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی را برای هر زاویهٔ دلخواه تعریف می‌کنیم.

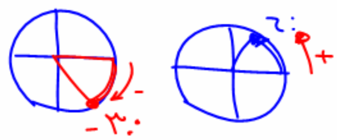


دایرهٔ مثلثاتی: دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک که در آن نقطهٔ A مطابق شکل به عنوان مبدأ حرکت برای رسم زاویه در نظر گرفته شده است را دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

قرارداد: اگر با حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند P برسیم، زاویهٔ AOP مثبت و اگر با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت به نقطهٔ P برسیم، زاویهٔ AOP منفی است.

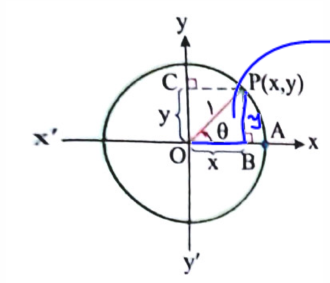
تمرین: هر یک از زاویه‌های 60° و -30° را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

که زاویه منفی : OA ثابت OB در جهت عقربه ساعت می چرخد



نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی

فرض کنیم $P(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی (شعاع دایره برابر یک است) بوده و θ زاویه‌ای باشد که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P، خطوط PB و PC را بر محورهای $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ عمود می‌کنیم، در این صورت:



فیثاغورث

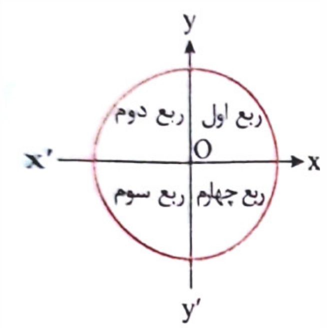
$$\boxed{\begin{matrix} x^2+y^2=(1)^2 \\ x^2+y^2=1 \end{matrix}} \longrightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\sin\theta=\frac{PB}{\underbrace{\cancel{OP}}_{1}}=PB=y \ , \ \cos\theta=\frac{OB}{\underbrace{\cancel{OP}}_{1}}=OB=x$$

$$\tan\theta=\frac{PB}{OB}=\frac{y}{x} \ , \ \cot\theta=\frac{OB}{PB}=\frac{x}{y}$$

بنابراین داریم: $x=\cos\theta=$ طول نقطهٔ P ، $y=\sin\theta=$ عرض نقطهٔ P $\Rightarrow P(x,y)=(\underbrace{\cos\theta}_{x},\underbrace{\sin\theta}_{y})$

نکته: ۱) $-1\le x,y\le 1 \Rightarrow -1\le\sin\theta\le 1 \ , \ -1\le\cos\theta\le 1$

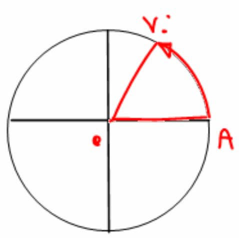


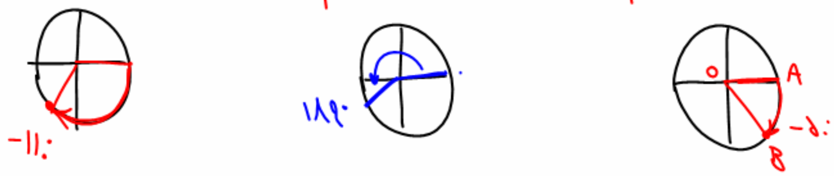
۲) محور $x'Ox$ یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور $y'Oy$ یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم.

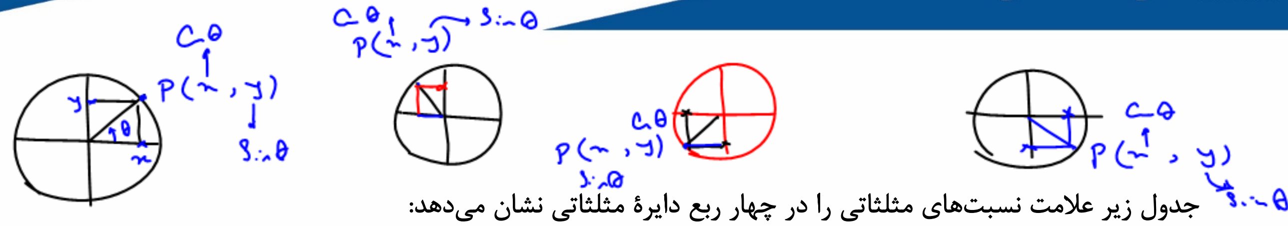
۳) دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر یک از آن‌ها را یک ربع مثلثاتی می‌گوییم. ناحیهٔ xOy را ربع اول، ناحیهٔ $x'Oy$ را ربع دوم، ناحیهٔ $x'Oy'$ را ربع سوم و ناحیهٔ xOy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

تمرین: مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی قرار می‌گیرد؟

۱) -50° چهارم ۲) 189° سوم ۳) -110° سوم ۴) 70° اول







جدول زیر علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهد:

مقدار	ربع اول x > ۰ , y > ۰	ربع دوم x < ۰ , y > ۰	ربع سوم x < ۰ , y < ۰	ربع چهارم x > ۰ , y < ۰
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

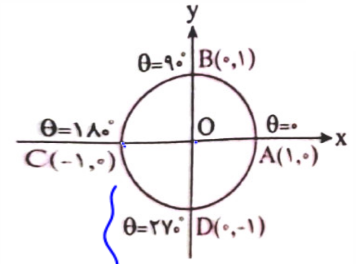
در ... نسبت‌ها مثبتند

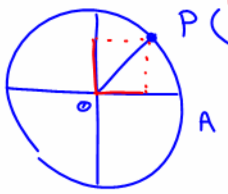
ه: همه، س: سینوس، ت: تانژانت، ک: کسینوس

تمرین: اگر $\sin\theta > 0$ و $\tan\theta > 0$، آن‌گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ اول

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} > 0$ ← ربع اول یا دوم

نکته: زوایای ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° زوایایی مرزی هستند و آن‌ها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌ای چهارگانه در نظر نمی‌گیریم:





$P(x = \cos\theta,\ y = \sin\theta)$

$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

تمرین: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۱۸۰° را به دست آورید.

$\sin 180° = y = 0$

$\cos 180° = x = -1$

$\tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

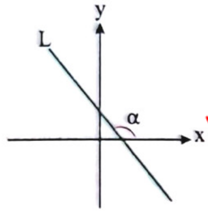
$\cot 180° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} =$ تعریف نشده = ن.ت

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مرزی

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	−۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	−۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده

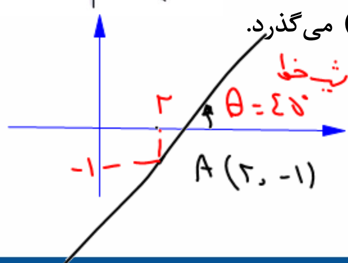
رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور افقی است. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:



$$\tan\alpha = \text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° است و از نقطهٔ (۲,−۱) می‌گذرد.



شیب خط $= m = \tan 45° = 1$

$y = \overset{\text{شیب}}{m}x + h$

$A(2,-1) \in y = 1x + h$

$-1 = 2 + h \rightsquigarrow h = -3$

$\boxed{y = x - 3}$

پرسش‌های تشریحی:

۱- انتهای هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید و سپس مشخص کنید که در کدام‌یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرند.

(مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۴۰ کتاب درسی)



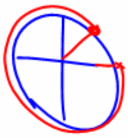

آ) 50° اول   ب) -75° چهارم   پ) 120° دوم   ت) 175° دوم

ث) 240° ج) -240° چ) -180° ح) -300° اول


سوم


دوم


در هیچ ناحیه‌ای نیست
نقطهٔ مرزی است

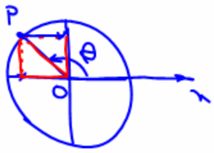


$x = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

۲- نقطهٔ P به طول $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ دوم قرار دارد. اگر θ زاویهٔ بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overline{Ox}$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.

$x = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$P(-\frac{1}{\sqrt{5}}, y)$ ؛ $\cos\theta$ ، $\sin\theta$



می دانیم: $x^2 + y^2 = 1$

$(-\frac{1}{\sqrt{5}})^2 + y^2 = 1$

$\frac{1}{5} + y^2 = 1 \longrightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \longrightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{در ناحیه دوم } y>0} y = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\tan\theta = -2$

۳- اگر $\cos\alpha = \frac{3}{7}$ و α در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آورید. راه یک

(تمرین ۲ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)

فیثاغورس:

$(7)^2 = (3)^2 + (x)^2$

$49 - 9 = x^2$

$40 = x^2$

$\sqrt{40} = x$

$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{40}}{7}$

در ربع چهارم سینوس منفیه

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{40}}{7}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{40}}{7}}{\frac{3}{7}} = -\frac{\sqrt{40}}{3}$

راه دو : راه رایج‌تر

سؤال لم و بزنگاه را نشان هست.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + (\frac{3}{7})^2 = 1$

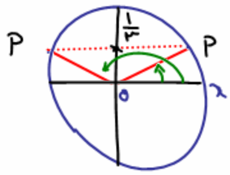
$\sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$

$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{40}}{7} \xrightarrow{\alpha \text{ ربع } ۴} \sin\alpha = -\frac{\sqrt{40}}{7}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{40}}{3}$

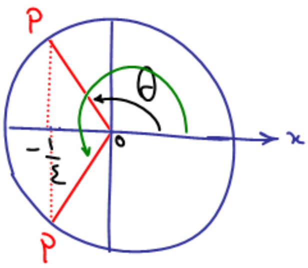
۴- در هر یک از قسمت‌های زیر روی دایرهٔ مثلثاتی، نقطه‌ای (نقاطی) مانند P پیدا کنید که اگر θ زاویهٔ بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ و محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، آن‌گاه داشته باشیم:

آ) $\sin\theta = \frac{1}{3}$

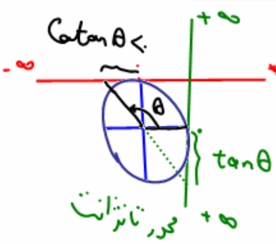


روی محور عمودی (سینوس‌ها) عدد $\frac{1}{3}$ را مشخص کن

ب) $\cos\theta = -\frac{1}{4}$



روی محور افقی (کسینوس‌ها) $-\frac{1}{4}$ را علامت کن



چگونه tan و Cotan یک زاویه را روی دایره بدون سینوس و کسینوس بگوییم؟ انتهای ضلع دوم زاویه را ادامه دهید تا به محور tan و Cotan برخورد کنید (یا امتداد ضلع برخورد کند) علامت یکی را پیدا کنید. تانژانت و کتانژانت یک زاویه هم علامتند.

۵- در هر یک از قسمت‌های زیر، زاویه‌ای مثال بزنید که در شرط‌های داده‌شده صدق کنند:

آ) کسینوس مثبت و تانژانت منفی باشد.

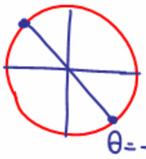
ناحیه چهارم

$\theta=-60^\circ$

$\cos(-60^\circ)=\frac{1}{2}$

$\tan(-60^\circ)=-\sqrt{3}$

ب) تانژانت و کتانژانت منفی باشد.



$\theta=-60^\circ$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$ باید $\cos\theta$, $\sin\theta$ مختلف العلامه باشند ناحیه ۲ یا ۴

$\tan(-60^\circ)=-\sqrt{3}$ $\cot(-60^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۶- در هر یک از حالت‌های زیر، حدود زاویهٔ θ را مشخص کنید.

آ) $\cos\theta>0\,,\,\sin\theta<0$

$270^\circ<\theta<360^\circ$

ب) $\tan\theta\times\sin\theta<0$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta<0$ پس $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}<0$ می‌دانیم $\sin^2\theta\geq0$ است باید $\cos\theta<0$ باشد پس یا ناحیه ۲ یا ۳

$90^\circ<\theta<270^\circ$

نکته: هر عبارت به توان زوج مثلاً ۲ حتماً مثبت است

پ) $\sin^2\theta\times\tan\theta<0\,,\,\cot\theta\times\cos\theta>0$

باید $\boxed{\tan\theta<0}$ باشد

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\cos\theta>0$

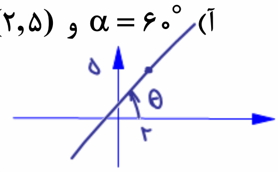
$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}>0$ پس $\boxed{\sin\theta>0}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$

۷- در هر یک از قسمت‌های زیر اندازهٔ زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد و هم‌چنین نقطه‌ای از خط داده شده است. معادلهٔ خط را بنویسید.

آ) $\alpha=60^\circ$ و $A(2,5)$

$m=\tan60^\circ=\sqrt{3}$



$y=mx+h$

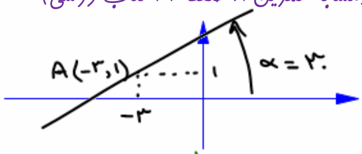
$y=\sqrt{3}x+h$

$5=\sqrt{3}(2)+h$

$\frac{5}{2\sqrt{3}}=h \longrightarrow y=\sqrt{3}x+\frac{5}{2\sqrt{3}}$

ب) $\alpha=30^\circ$ و $A(-3,1)$

(مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)



$m=\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y=mx+h$

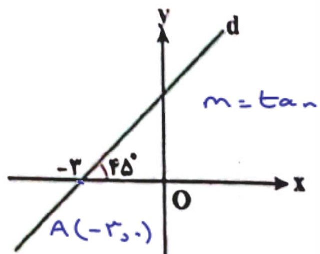
$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+h$

$1=\frac{\sqrt{3}}{3}(-3)+h \rightsquigarrow h=1+\sqrt{3} \rightsquigarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+(1+\sqrt{3})$

۸- با توجه به شکل‌های داده‌شده، معادلهٔ خط d را بنویسید.

(مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی)

آ)



$m=\tan45^\circ=1$

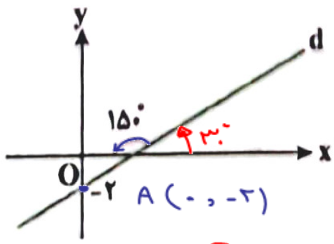
$y=mx+h$

$y=(1)x+h$

$0=(1)(-3)+h$

$3=h \rightsquigarrow \boxed{y=1x+3}$

ب)



$m=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y=mx+h$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+h$

$-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(0)+h \rightarrow h=-2$

$\boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2}$

۹- اگر خط گذرنده از نقاط $A\begin{bmatrix}2m+2\\3\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}4\\-m+3\end{bmatrix}$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° بسازد، مقدار m را به دست آورید.

$m=\tan45^\circ=1$

$y=mx+h \xrightarrow{m=1} y=x+h$

مختصات A و B را در معادله خط می‌گذاریم یا صدق می‌دهیم

A: $3=2m+2+h$

B: $-m+3=4+h$

$\begin{cases}1=2m+h\\-1=m+h\end{cases}$ $\begin{cases}1=2m+\cancel{h}\\1=-m-\cancel{h}\end{cases}$

$\boxed{2=m}$

Homework

در جای خالی عدد یا عبارت مناسب را بنویسید.

۱ واسطهٔ هندسی بین دو عدد $\sqrt{۱۵}-۸$ و $\sqrt{۱۵}+۸$ برابر است با ....

۲ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $۵, ۱, \frac{۱}{۵}, \ldots$ به‌صورت .... می‌باشد.

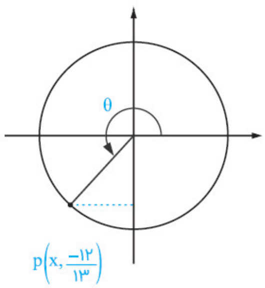
۳ کمترین مقدار عبارت $۳\sin x - ۰/۱۲$ برابر با .... است و بیشترین مقدار آن برابر با .... می‌باشد.

۴ اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ باشد، حاصل عبارت‌های داده‌شده را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

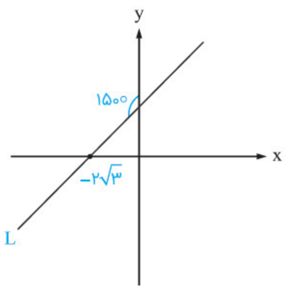
$$A = -|\sin\alpha - \cos\alpha| + |\cos\alpha + \sin\alpha|$$

$$B = |\cot\alpha - \tan\alpha| + |۲\tan\alpha + \cot\alpha|$$

۵ باتوجه‌به شکل داده‌شده، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. (شعاع دایره، ۱ واحد است.)



۶ باتوجه‌به شکل داده‌شده، معادلهٔ خط L را بنویسید.



به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۷ علامت عبارت‌های داده‌شده را مشخص کنید.

$A = \cot 250^\circ$

$B = \tan(-40^\circ)$

$C = \cos 520^\circ$

۸ حاصل عبارت داده‌شده را به‌دست آورید.

$$D = \frac{1 + \tan^2 30^\circ - \cos 90^\circ}{4\cos^2 30^\circ + \sqrt{3}\tan 180^\circ + 2\cos^2 45^\circ}$$

درستی یا نادرستی جمله‌های داده‌شده را مشخص کنید.

۹ دنبالهٔ $7, 7, 7, \ldots$ یک دنبالهٔ هندسی می‌باشد.

۱۰ مقدار $\tan 70^\circ$ از $\tan 30^\circ$ بیشتر است.

۱۱ زاویهٔ -270° در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد.

۱۲ $\sin 50^\circ = 2\sin 25^\circ$

۱۳ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها ۳۰ درجه باشد و از نقطهٔ $(-1, 3)$ بگذرد.

۱۴ اگر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ علامت‌های مختلف داشته باشند، α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی واقع است؟

۱۵ معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° بسازد و از نقطهٔ $A = \begin{matrix} -1 \\ 5 \end{matrix}$ بگذرد.

۱۶ حدود k برای آنکه معادلهٔ $\sin x = k$ در فاصلهٔ $60^\circ \le x \le 120^\circ$ دارای جواب باشد، کدام است؟

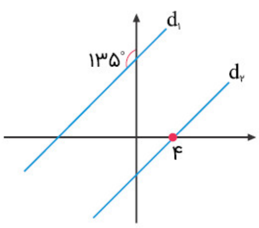
۱) $\frac{1}{2} \le k \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $-1 \le k \le 1$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2} \le k \le 1$

۴) $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۷ دو خط d_1 و d_2 باهم موازی می‌باشند. معادلهٔ خط d_2 کدام است؟



۱) $y + x + 4 = 0$

۲) $y + x - 4 = 0$

۳) $y - x + 4 = 0$

۴) $y - x - 4 = 0$

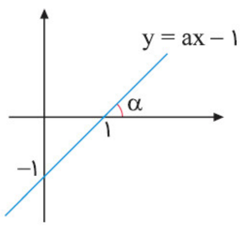
۱۸ خطی که از نقطهٔ $(۵\ ,\ ۲)$ می‌گذرد و عرض از مبدأ آن ۳ است با جهت مثبت محور طول‌ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) ۳۰ درجه
۲) ۴۵ درجه
۳) ۶۰ درجه
۴) ۹۰ درجه

۱۹ اگر $۱۲۰^\circ \leq \alpha \leq ۱۵۰^\circ$ و $\cos\alpha = ۲m - ۱$ باشد، آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۱ \leq m \leq ۱$
۲) $\frac{۱}{۲} \leq m \leq \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \leq m \leq \frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۴} \leq m \leq \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۲۰ در شکل زیر، $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۱ اگر $\cos\theta = -\frac{۲}{۳}$ و $\tan\theta . \cos\theta > ۰$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۲۲ اگر خطی از دو نقطهٔ $A(۲, ۳)$ و $B(۰, ۱)$ بگذرد، این خط محور xها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۱) ۴۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۹۰°

۲۳ به ازای مقادیر دلخواه α، حاصل نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار عبارت $A = \frac{۴\cos^۲\alpha - ۱}{۳}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۱
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۴ علامت کدام‌یک از گزینه‌های زیر با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) $\sin ۷۵^\circ$
۲) $\cos ۳۴۵^\circ$
۳) $\tan ۱۹۵^\circ$
۴) $\tan ۱۳۰^\circ$

۲۵ به‌ازای کدام مقدار x، عبارت $A = ۴\sin^۲ x - ۸\sin x + ۳$ بیشترین مقدار را خواهد داشت؟

۱) ۴۵°
۲) ۹۰°
۳) ۱۸۰°
۴) ۲۷۰°

۲۶ معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲, ۳)$ گذشته و با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}y = ۳(x + \sqrt{۳} - ۲)$
۲) $۳y = ۳(x + ۳ - \sqrt{۲})$
۳) $\sqrt{۲}y = ۲(x + \sqrt{۲} - ۳)$
۴) $y = ۳x + \sqrt{۳}$

۲۷ با زیاد شدن θ از ۹۰° تا ۲۷۰°، $\sin\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) همواره افزایش می‌یابد.
۲) همواره کاهش می‌یابد.
۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

پاسخنامه Homework

۱

$$x^۲ = (۸ + \sqrt{۱۵})(۸ - \sqrt{۱۵}) = ۶۴ - ۱۵ = ۴۹$$

$$x = \pm ۷$$

۲

$$t_n = ۵ \times (\frac{۱}{۵})^{n-۱} = ۵ \times ۵^{۱-n} = ۵^{۲-n}$$

۳

$$-۱ \leq \sin x < ۱$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{بیشترین} : \sin x = ۱ \Rightarrow ۳ \times ۱ - ۰/۱۲ = ۲/۸۸ \\ \text{کمترین} : \sin x = -۱ \Rightarrow ۳ \times (-۱) - ۰/۱۲ = -۳/۱۲ \end{array}$$

۴ α در ناحیهٔ اول مثلثاتی است و چون $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$:

$$\sin\alpha > \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha > ۰$$

$$\tan\alpha > \cot\alpha \Rightarrow \tan\alpha - \cot\alpha > ۰$$

$$A = -|\sin\alpha - \cos\alpha| + |\cos\alpha + \sin\alpha|$$

$$= -\sin\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha = ۲\cos ۲$$

$$B = |\cot\alpha - \tan\alpha| + |۲\tan\alpha + \cot\alpha|$$

$$= -\cot\alpha + \tan\alpha + ۲\tan\alpha + \cot\alpha = ۳\tan\alpha$$

۵

$$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{۱۲}{۱۳} \\ r=۱ \text{ شعاع دایره} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} r^۲=x^۲+y^۲$$

$$\Rightarrow ۱=x^۲+\frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow x^۲=\frac{۲۵}{۱۶۹}$$

$$x=\pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow[x<۰]{\text{در ناحیهٔ سوم}} x=-\frac{۵}{۱۳}$$

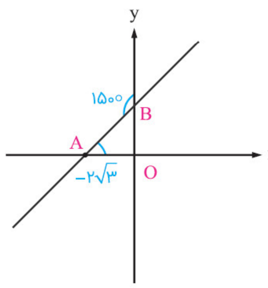
$$\sin\theta=y \Rightarrow \sin\theta=-\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta=x \Rightarrow \cos\theta=-\frac{۵}{۱۳}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=+\frac{۱۲}{۵}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y}=+\frac{۵}{۱۲}$$

۶



$$A\overset{\triangle}{B}O \Rightarrow \hat{A}+\hat{O}=۱۵۰^\circ \xrightarrow{\hat{O}=۹۰^\circ} \hat{A}=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط}=\tan ۶۰=\sqrt{۳}$$

$$y=ax+b \xrightarrow{(-۲\sqrt{۳},۰)\ \text{جایگذاری}} ۰=(\sqrt{۳})(-۲\sqrt{۳})+b$$

$$b=۶ \Rightarrow y=\sqrt{۳}x+۶$$

پاسخ سؤالات ۷ تا ۸

۷ زاویهٔ ۲۵۰° در ناحیهٔ سوم است، پس $۰ < \cot ۲۵۰^\circ$ و مثبت است.
زاویهٔ (-۴۰°) در ناحیهٔ چهارم و تانژانت آن منفی است، پس $\tan(-۴۰^\circ) < ۰$.
زاویهٔ ۵۲۰° در ناحیهٔ دوم و کسینوس آن منفی است، پس $\cos ۵۲۰^\circ < ۰$.

۸

$$D=\frac{۱+۳\left(\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲-۰}{۴\left(\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲+\sqrt{۳}\times ۰+۲\left(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۹ درست

۱۰ درست

۱۱ نادرست

۱۲ نادرست

۱۳

$$a = \tan ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + b \xrightarrow{(-۱,۳)} ۳ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} + b \Rightarrow b = ۳ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + (۳ + \frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

۱۴ ناحیهٔ دوم یا سوم

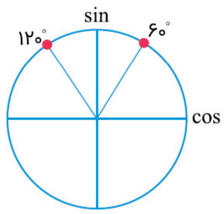
۱۵

$$\text{شیب} = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۵ = ۱(x + ۱) \Rightarrow y = x + ۶$$

۱۶ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل:

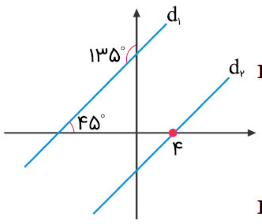


$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq \sin x \leq ۱$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq k \leq ۱$$

۱۷ گزینه ۳

شیب خط d_1 برابر است با:



$$m_1 = \tan 45^\circ = 1$$

دو خط d_1 و d_2 باهم موازی هستند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$m_1 = m_2 \Rightarrow m_2 = 1$$

خط d_2 از نقطهٔ $A(4, 0)$ عبور می‌کند، بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت: $y - y_A = m(x - x_A)$ می‌باشد.

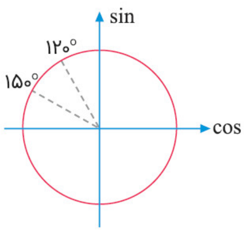
$$y - 0 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 4 \Rightarrow y - x + 4 = 0$$

۱۸ گزینه ۲

$$y = ax + b \Rightarrow y = ax + 3 \xrightarrow{(2\,,\,5)} 5 = 2a + 3$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۱۹ گزینه ۳



$$120^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$$

$$\cos 150^\circ \leq \cos\alpha \leq \cos 120^\circ \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq 2m - 1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{2} \leq 2m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$$

۲۰ گزینه ۳

$$y = ax - 1 \xrightarrow{(1,0)} 0 = a - 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \tan\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۱
گزینه ۲

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos\theta < ۰ \quad \text{ربع دوم یا سوم} \\ \tan\theta . \cos\theta > ۰ \xrightarrow{\cos\theta < ۰} \tan\theta < ۰ \quad \text{ربع دوم یا چهارم} \end{cases}$$

درنتیجه انتهای کمان θ در ربع دوم است.

۲۲
گزینه ۱

ابتدا باید شیب خط را بیابیم:

$$m = \frac{۱-۳}{۰-۲} = \frac{-۲}{-۲} = ۱$$

می‌دانیم شیب $\tan\alpha$ است. (α زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد)

$$\tan\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

۲۳
گزینه ۱

$$-۱ \le \cos\alpha \le ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۰ \le \cos^۲\alpha \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۰ \le ۴\cos^۲\alpha \le ۴$$
$$\Rightarrow -۱ \le ۴\cos^۲\alpha - ۱ \le ۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} \le \frac{۴\cos^۲\alpha - ۱}{۳} \le ۱$$

$$\begin{cases} \max = ۱ \\ \min = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{-\frac{۱}{۳}} = -۳$$

۲۴
گزینه ۴

باتوجه‌به ناحیهٔ هریک از زوایا و دایرهٔ مثلثاتی، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ "۱": $\sin ۷۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin ۷۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۲": $\cos ۳۴۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \cos ۳۴۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۳": $\tan ۱۹۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \tan ۱۹۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۴": $\tan ۱۳۰^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \tan ۱۳۰^\circ < ۰$

۲۵
گزینه ۴

مقدار عبارت را به‌ازای $\sin x = ۱$ و $\sin x = -۱$ امتحان می‌کنیم:

$$\sin x = ۱ \Rightarrow A = ۴ - ۸ + ۳ = -۱$$

$$\sin x = -۱ \Rightarrow A = ۴ + ۸ + ۳ = ۱۵ = \max \Rightarrow x = ۲۷۰^\circ$$

۲۶
گزینه ۱

$$a = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \Rightarrow y = ax + b \xrightarrow{a=\sqrt{۳}} y = \sqrt{۳}x + b$$
$$\xrightarrow{(۲,۳)} ۳ = ۲\sqrt{۳} + b \Rightarrow b = ۳ - ۲\sqrt{۳} \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + ۳ - ۲\sqrt{۳}$$
$$\xrightarrow{\times\sqrt{۳}} \sqrt{۳}y = ۳x + ۳\sqrt{۳} - ۶ = ۳(x + \sqrt{۳} - ۲)$$

۲۷
گزینه ۲

روی دایرهٔ مثلثاتی، $\sin$ معادل محور yها است. در ربع دوم با افزایش θ، تصویر نقطه روی محور yها کاهش پیدا می‌کند، در ۱۸۰° به کمترین مقدار خود یعنی صفر می‌رسد. $\sin ۱۸۰^\circ = ۰$ و در ربع سوم با افزایش θ، تصویر نقطه روی محور yها کاهش می‌یابد تا در ۲۷۰° به کمترین مقدار خود یعنی ۱- می‌رسد. $\sin ۲۷۰^\circ = -۱$، بنابراین با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۹۰° تا ۲۷۰°، $\sin$ همواره کاهش پیدا می‌کند.

BOX 3: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی (صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

در این قسمت می‌خواهیم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی را مشخص کنیم و با داشتن یک نسبت مثلثاتی، مقادیر سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست بیاوریم. هم‌چنین مسائل اتحادهای مثلثاتی برای اثبات وجود دارند.

قرارداد: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$(\sin\alpha)^n = \underbrace{\sin\alpha \times \cdots \times \sin\alpha}_{\text{بار } n} = \sin^n\alpha$$

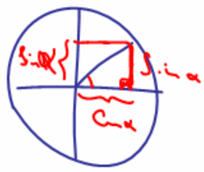
به همین ترتیب می‌نویسیم:

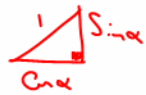
$$(\cot\alpha)^n = \cot^n\alpha \quad , \quad (\tan\alpha)^n = \tan^n\alpha \quad , \quad (\cos\alpha)^n = \cos^n\alpha$$

روابط مهم مثلثاتی

۱) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cos\alpha \neq ۰$ ۲) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha \neq ۰$ ۳) $\tan\alpha = \dfrac{۱}{\cot\alpha}$ یا $\tan\alpha . \cot\alpha = ۱$

۴) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha} \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha} \end{cases}$





۵) $۱ + \tan^۲\alpha = \dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}, \cos\alpha \neq ۰$ ۶) $۱ + \cot^۲\alpha = \dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}, \sin\alpha \neq ۰$

سینوس و تانژانت و کتانژانت

تمرین: اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی و $\cos\alpha = -\dfrac{۴}{۵}$ باشد، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به دست آورید.

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ فرمول مهم $\rightarrow \sin^2\alpha + (-\frac{4}{5})^2 = 1 \rightarrow \sin^2\alpha + \frac{16}{25} = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin\alpha = \frac{3}{5}$ یا $-\frac{3}{5}$

در ناحیه دوم سینوس مثبت است $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \rightarrow \cot\alpha = -\frac{4}{3}$

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$، $(\cos\alpha \neq ۰)$، $۱ + \tan^۲\alpha = \dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$ و ... را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

نکته: هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را نوشته و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم.

تمرین: درستی اتحاد مثلثاتی $(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲ + (\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ = ۲$ را بررسی کنید.

معمولاً از طرف شلوغ‌تر شروع می‌کنیم

دو تا اتحاد معروف که بلدیم
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cancel{+ 2\sin\alpha\cos\alpha}) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cancel{- 2\sin\alpha\cos\alpha}) =$

$2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha =$

$2(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{\text{می‌دانیم یک است}}) =$

$2 =$

پرسش‌های تشریحی:

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

آ) $۲\sin^۲ ۴۵° + \tan^۲ ۴۵° - \cos^۲ ۱۸۰°$

$۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + (۱)^۲ - (-۱)^۲ =$

$۲\left(\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}\right) + ۱ - ۱ =$ یک

ب) $\dfrac{\cos^۲ ۳۰° + \sin ۳۰°}{\tan^۲ ۶۰° - ۱} + (\cos ۶۰°)^{-۲}$

$= \left(\dfrac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳+۲}{۴} = \frac{۵}{۴}}{(\sqrt{۳})^۲ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲} = \frac{۵}{۸}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}$

$= \frac{۵}{۸} + (۲)^۲ = \frac{۵}{۸} + ۴ = \frac{۵+۳۲}{۸} = \frac{۳۷}{۸}$

۲- درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ) $\dfrac{۱-\cos ۶۰°}{۱+\cos ۶۰°} = \tan^۲ ۳۰°$

ب) $۱+\cot^۲ ۴۵° = \dfrac{۱}{\sin^۲ ۴۵°}$

پ) $(x+y)^۲ \sin^۲ ۳۰° - (x-y)^۲ \cos^۲ ۶۰° = xy$

آ) $\dfrac{۱-\cos ۶۰°}{۱+\cos ۶۰°} = \tan^۲ ۳۰°$

$\dfrac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}$ ✓

ب) $\underbrace{۱+(۱)^۲}_{۲} = \dfrac{۱}{\underbrace{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}}_{۲}} = ۲$

$۲ = ۲$

پ) $(x+y)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - (x-y)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ =$

$(x+y)^۲\frac{۱}{۴} - (x-y)^۲\frac{۱}{۴} =$

$\frac{۱}{۴}\left((x+y)^۲ - (x-y)^۲\right) = \frac{۱}{۴}\big(\underbrace{\cancel{x^۲}+\cancel{y^۲}+۲xy-\cancel{x^۲}-\cancel{y^۲}+۲xy}_{۴xy}\big) = xy$

۳- در بخش زیر، یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه را به دست آورید. $\cos ۱۳۵° = -\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \rightarrow \sin^۲\alpha + \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = ۱ \rightarrow \sin^۲\alpha + \frac{۱}{۲} = ۱ \rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۲} \rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳۵° ناحیه دوم → در ناحیه دوم سینوس مثبته → $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ 　 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -۱ \rightarrow \cot\alpha = \dfrac{۱}{\tan\alpha} = -۱$

۴- در هر یک از قسمت‌های زیر، یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α و ناحیهٔ قرارگرفتن α داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به دست آورید.

برای ⊕ یا ⊖ بودن لنت

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ می‌توان از

رفت و با توجه به ناحیه علامت را گذاشت

(مشابه تمرین‌های ۱ و ۲ صفحهٔ ۴۵ کتاب درسی)

آ) $\tan\alpha = \dfrac{۳}{۴}$ و α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد. 　 $\cot\alpha = \frac{۴}{۳}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{۳}{۴}$

فیثاغورث

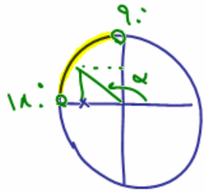
$(\text{وتر})^۲ = (۳)^۲ + (۴)^۲$

$۵ = \text{وتر}$

$\sin\alpha = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{۳}{۵} \rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{۳}{۵}$ 　 در ناحیه سوم

$\cos\alpha = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{۴}{۵} \rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{۴}{۵}$ 　 سینوس منفی کسینوس منفی

ب) $\sin\alpha = \dfrac{۱۵}{۱۷}$ و $۹۰° < \alpha < ۱۸۰°$



α ربع دوم
سینوس مثبت
کسینوس منفی
تانژانت منفی
کتانژانت منفی
هم علامت‌اند. لی عکس هم‌اند.

$\sin\alpha = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$(۱۷)^۲ = (۱۵)^۲ + y^۲$

$۲۸۹ = ۲۲۵ + y^۲$

$۶۴ = y^۲ \rightarrow y = ۸$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{۸}{۱۷}$

ولی α ربع دوم است

$\cos\alpha = -\dfrac{۸}{۱۷}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{۱۵}{۸}$

$\cot\alpha = -\dfrac{۸}{۱۵}$

۵- درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

ب) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=4\sin\alpha\cos\alpha$

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

پ) $\frac{1}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ت) $\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

ث) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

آ) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

$\cos^2\alpha\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=$

$\cos^2\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}{\cos^2\alpha}\right)=$

$\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=$

$1=1$

ب) $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha)-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha$

پ) $\frac{1}{\cos\alpha}+\cot\alpha=$

$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$

$\frac{\sin\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$ همه جمله های صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم کن

$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}}=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ طرف دوم

ث) $\underbrace{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$ طرف دوم

$(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2$ دقت

۶- اگر $\cot\alpha=\frac{2}{5}$ باشد، مقدار $\frac{3\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}$ را به دست آورید.

$\tan\alpha=\frac{5}{2}$

برای تولید $\tan\alpha$ همه جمله های صورت و مخرج را بر $\cos^2\alpha$ تقسیم کن

$\tan^2\alpha$ را بدست آور:

$\frac{3\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+5\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{3\tan^2\alpha+5}{2\tan^2\alpha}=\frac{3\left(\frac{25}{4}\right)+5}{2\left(\frac{25}{4}\right)=\frac{25}{2}}=\frac{\frac{75+20}{4}}{\frac{25}{2}}=\frac{\frac{95}{\cancel{4}2}}{\frac{25}{\cancel{2}}}=\frac{95}{50}=\frac{190}{100}=1/9$ جواب

راه دوم سؤال ۶ راه سریعتر

$\frac{3\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=$

$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cot^2\alpha=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2=$

$=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{4}{25}\right)=\frac{190}{100}=1/9$

۷- اگر $\tan\alpha=3$ باشد، مقدار $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-4\cos\alpha}$ را به دست آورید.

برای تولید $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=3$ همه جمله های صورت و مخرج

کسر را بر $\cos\alpha$ تقسیم کن:

$\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-4\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\tan\alpha+1}{\tan\alpha-4}=\frac{2(3)+1=7}{3-4=-1}$

جواب: -7