

در مجموعه گذرار اعضا هم نیست مثلاً $A = \{۷, ۷\}$ با $\{۷\}$ برابری است.

تعریف: اگر $A = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ۶, ۸\}$ دو مجموعه باشند، هر یک از مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را با اعضا مشخص کنید.

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

$$A \cap B = \{۲, ۸\}$$

$$A - B = \{۱, ۴, ۵, ۷\}$$

$$B - A = \{۳, ۶\}$$

در این قسمت با تعریف بازه که یک نماد برای سازه نوشتن مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی می‌باشد، آشنا می‌شویم.

بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} مانند A را که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.



فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۴ باشد، یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۴\}$

مجموعه A را با نماد ساده‌تری به صورت $(۰, ۴)$ نمایش می‌دهیم و آن را بازه باز از ۰ تا ۴ می‌نامیم. بنابراین:

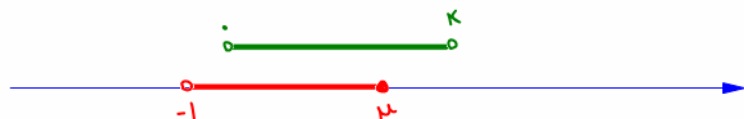
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۴\} = (۰, ۴)$$

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ ، آن‌گاه:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

نکته: هر بازه، یک مجموعه است، بنابراین اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها وجود دارد.

تعریف: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \leq ۳\}$ و $B = (۰, ۴)$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.



$$A \cup B: (-۱, ۴)$$

$$A \cap B: (۰, ۳]$$

همه عدد هایی که خرابی است -۱ و ۳ آفریده است که می‌شمارند

همه عدد هایی که خرابی است ۰ و ۳ آفریده است که می‌شمارند و نمی‌توانیم همه را بنویسیم برای همین به صورت بازه نمایش می‌دهیم

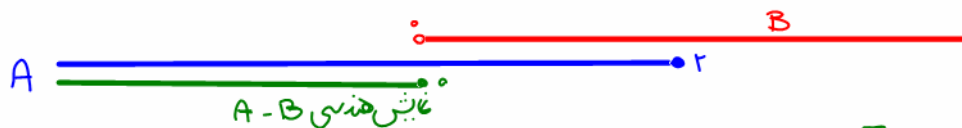
عضوهای حقیقی $\pm \infty$ هیچ بازه باز نیستند.

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

توجه: $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند. $\mathbb{R}: (-\infty, +\infty)$

تعریف: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ باشد، $A - B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.



بازه: $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$ مجموعه

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

نکته: بازه $(-\infty, +\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر:

پرسش‌های تشریحی:

• درست‌ی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۵ کتاب درسی)

$1, \sqrt{2}, \dots = \sqrt{3} \in (1, 2) \quad -3 \quad T$

$\frac{5}{6} \in (0, 1) \quad -2 \quad T$

$-1 \in (-1, 2] \quad -1 \quad F$

$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \quad -6 \quad T$

$(-1, 1) \subseteq [-1, 1] \quad -5 \quad T$

$\emptyset \subseteq [-1, +\infty) \quad -4 \quad T$

$0.10006 = 6 \times 10^{-4} \notin [2, +\infty) \quad -9 \quad T$

$6 \times 10^{-4} \in [2, +\infty) \quad -8 \quad F$

$-6 \times 10^{23} \in (-\infty, 1) \quad -7 \quad T$

۱۰- طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را بنویسید.

۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

۲) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

۳) $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ (مجموعه تهی)

۴) $\mathbb{W} - \mathbb{Q}' = \mathbb{W}$

۵) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

۶) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

۱۱- هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.

(پ) $(-\infty, -2)$

(ب) $(1, \sqrt{5})$

(آ) $(-2, 2)$

(ث) $(-\infty, \frac{1}{p})$

(ت) $[\sqrt{2}, +\infty)$

۱۲- نمایش هندسی دو بازه $A = [-1, 5]$ و $B = (-3, 2)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۵ کتاب درسی)

$A \cap B$ (آ) $A \cup B$ (ب) $A - B$ (پ) $B - A$ (ت)

۱۳- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۷ کتاب درسی)

(آ) $(-2, 5) \cap (-1, 7)$ (ب) $[-4, 0] \cap [-1, +\infty)$ (پ) $[-2, 4) \cup (0, 5)$ (ت) $(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty)$
 (ث) $(-\infty, 2) - (0, 3)$ (ج) $(0, 5) - [2, +\infty)$ (چ) $(-1, 0] \cap [0, 2)$ (ح) $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 3)$

۱۴- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x+1 \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

$A \cap B$ (آ) B (ب) $A - B$ (پ) $A \cup B$ (ت)

۱۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) \cup C$ و

$B - (A \cap C)$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

$$-1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 4$$

ضرب در ۲

$$-2 \leq m+1 \leq 8$$

کمتر از یک طرف کنیم

$$-3 \leq m \leq 7$$

۱۶- اگر $\frac{m+1}{2} \in [-1, 4]$ باشد، حدود m را مشخص کنید.

Homework

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- ۱ اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B هم حتماً نامتناهی است.
- ۲ $\mathbb{Z} - \mathbb{Q}$ مجموعه‌ای متناهی است.
- ۳ در بازه $[-2, \sqrt{5})$ چهار عدد صحیح وجود دارد.
- ۴ اگر $B' \subseteq A'$ باشد آن‌گاه $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$
- ۵ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq 2x - 1 < 7\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ و $C = [0, +\infty)$ آن‌گاه حاصل مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید و روی محور نشان دهید.

الف $C - B$

ب A'

۶ چند مورد از موارد زیر درست‌اند؟

(آ) $-1 \in \{-3, 0\}$ (ب) $\emptyset \subseteq (1, +\infty)$
 (پ) $[-5, 4] \subseteq (-5, 4)$ (ت) $\sqrt{2} \in (-1, 1)$

- (۱) ۳ (۲) ۴
 (۳) ۱ (۴) ۲

۷ اگر $A_n = \left(\frac{-2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ به صورت بازه باشد، مجموعه $A_3 \cup A_6 - A_3$ برابر کدام بازه است؟

(۱) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (۲) $\left[\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 (۳) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (۴) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

۸ اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{4}\right]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$
 (۳) $[-1, 1]$ (۴) \emptyset

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

- ۹ اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعه A و B را دو مجموعه می‌گویند.
- ۱۰ اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه $A - B$ یک مجموعه است.
- ۱۱ $\sqrt[3]{64}$ بین دو عدد صحیح و قرار دارد.
- ۱۲ اعداد ۴ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.
- ۱۳ $(-1, 4) - (2, +\infty)$ برابر است با
- ۱۴ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < -2\}$ باشد، آنگاه مجموعه $A \cap B$ شامل چند عدد گویا خواهد بود؟
- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار
- ۱۵ اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ چند عضو صحیح دارد؟
- (۱) ۴
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) ۱
- ۱۶ اگر مجموعه $(1, 4)$ زیرمجموعه $(3x - 1, 6x + 1)$ باشد، حدود کامل x کدام است؟
- (۱) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
(۲) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
(۳) $[0, \frac{2}{3}]$
(۴) $[\frac{1}{3}, 1)$
- ۱۷ اگر $A_i = [-i, 2i + 1]$ ، $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_4) - (A_3 \cup A_1)$ به کدام صورت است؟
- (۱) $[-1, 3]$
(۲) $[4, 6]$
(۳) $[-1, 3] \cup [4, 9]$
(۴) \emptyset
- ۱۸ اگر $(-5, 3k + 2) \subseteq (-\infty, -4)$ باشد، چند مقدار صحیح برای k یافت می‌شود؟
- (۱) صفر
(۲) یک
(۳) دو
(۴) سه
- ۱۹ حاصل $[-3, 7] - (-1, 9]$ کدام است؟
- (۱) \emptyset
(۲) $[-3, -1]$
(۳) $[-3, -1)$
(۴) $(-3, -1]$

۲۰ مجموعه $A = \left\{ \frac{x+5}{2x^2+1} \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x < 2 \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۲۱ اگر $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in (-3, 4] \cap \mathbb{W} \right\}$ باشد، آنگاه A چند عضو دارد؟

- (۱) بی‌شمار
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۲۲ باتوجه به مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < 2x + 5 < 11\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - 1 < 8\}$ ، $(A - B) \cup C$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $[1, 3)$
(۲) $(-6, 3)$
(۳) $(1, 3)$
(۴) \mathbb{R}

۲۳ باتوجه به مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < 2x + 5 < 11\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - 1 < 8\}$ ، $(A - B) \cup C$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $[1, 3)$
(۲) $(-6, 3)$
(۳) $(1, 3)$
(۴) \mathbb{R}

۲۴ اگر عدد i به بازه $[-i + 1, 3i - 7]$ تعلق داشته باشد، آنگاه:

- (۱) $i \geq -1$
(۲) $-1 \leq i < 3$
(۳) $i > 3$
(۴) $1 \leq i \leq 3$

۲۵ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ باشد، آنگاه $\bigcap_{i=1}^n A_i$ کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
(۲) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$
(۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
(۴) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

۲۶ درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف $\{-1, 0, 2\} \subseteq [-1, 3)$

ب اگر $A - B$ متناهی باشد، $B - A$ متناهی است.

۲۷ اشتراک دو مجموعه $[-5, 7)$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶
(۳) ۴

مجموعه $A = \left\{ \frac{x+5}{2x^2+1} \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x < 2 \right\}$ را بررسی می‌کنیم. $x \in \mathbb{N}$ و $-2 < x < 2$ یعنی $x = 0, 1$.
 برای $x=0$: $\frac{0+5}{2(0)^2+1} = 5$
 برای $x=1$: $\frac{1+5}{2(1)^2+1} = \frac{6}{3} = 2$
 پس $A = \{2, 5\}$ و ۲ عضو دارد.

۲۸ فرض کنید $A = (-\infty, 2)$ ، $B = (a, -4)$ و $C = (3, b)$ باشند، اگر $(B \cup C) - (A \cap B) = (3, 5)$ ، کدام b است؟

- (۱) ۵
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۱

۲۹ اگر اشتراک دو بازه $[3a, 4a - 1]$ و $[-5, 3]$ یک مجموعه تک عضوی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) -۲

۳۰ اگر عدد ۳ در بازه $[x - 3, 9x]$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای x کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{3}, 6]$
(۲) $(\frac{1}{3}, 6]$
(۳) $(-6, \frac{2}{3}]$
(۴) $[-6, \frac{2}{3})$

۳۱ کدامیک از اعداد زیر در بازه $[\frac{-28}{10}, \sqrt{20}]$ قرار ندارند؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) π
(۳) $-\sqrt{5}$
(۴) $-2/9$